组合最优化

郭田德

中国科学院大学

电话：88256412

Email: tdguo@ucas.ac.cn

2023-2024学年春季学期 教一405教室

第四章 线性规划

4.1 仿射集

4.2 凸集

4.3 凸包与凸集分离定理

4.4 多面体、多胞形和多面锥

4.5 线性规划的理论与算法

4.6 线性规划的原始-对偶算法

4.5 线性规划的理论与算法

1. 线性规划的发展历史

- 线性规划问题最早是由G.B.Dantzig在1947年以前设想出来的。他当时作为联邦空军审计员的一名数学顾问，需要开发一个数学规划的工具，用于制定布置、训练、后勤保障的方案。
- 由于这项工作，他于1948年出版了《线性结构的规划》一书。
- 1948年夏天：T.C. Koopmans&G.B.Dantzig提出了“线性规划”的名称；
- 1949年：G.B.Dantzig提出了单纯形方法。
- 在此之前：Fourier, W.Karush, L.V. Kantorovich等人的工作都曾涉及到线性规划的有关工作。
- 1950－1960：线性规划的理论得到了进一步的发展；
- 1975年：L.V. Kantorovich和T.C. Koopmans获得诺贝尔经济奖－对资源最优分配理论的贡献；
- 1979年：L.G.. Khanchian的椭球算法；
- 1984年：N. Karmarkar的投影尺度算法。

2. 线性规划的一般提法

线性规划

实例：给定矩阵 $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$，向量 $c\in\mathbb{R}^n$， $b\in\mathbb{R}^m$

任务：寻找向量 $x\in\mathbb{R}^n$ 使得满足 $Ax\le b$ 且 $c^T x$ 是最大的，或者判定 $\{x\in\mathbb{R}^n : Ax\le b\}$ 是空集，或者判定对 $\forall\alpha\in\mathbb{R}$ $\exists x\in\mathbb{R}^n$ 使得 $Ax\le b$ 且 $c^T x>\alpha$。

记为：

$$\begin{aligned} &\max c^T x \\ &\quad \text{s.t. } Ax\le b \end{aligned} \qquad \text{(LP)}$$

其中 $x\in\mathbb{R}^n, c\in\mathbb{R}^n, b\in\mathbb{R}^m, A\in\mathbb{R}^{m\times n}$ 且 $rank(A)=n$ （$m\ge n$）

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_1^T \\ a_2^T \\ \vdots \\ a_m^T \end{pmatrix}$$

可行解集合：

$$P=\{x\in\mathbb{R}^n : Ax\le b\}=\left\{x\in R^n : a_i^T x\le b_i (i=1,2,\cdots,m)\right\}$$

从而多胞形 $P=\{x\in\mathbb{R}^n : Ax\le b\}$ 是满维的尖多胞形。

最优解集： $P^*=\{x\in P : x\text{是(LP)的最优解}\}$

若一个 LP 问题既非不可行又非无界，那么它必有最优解。

命题 4.18 设 $P=\{x\in\mathbb{R}^n : Ax\le b\}\ne\phi, c\in\mathbb{R}^n$，且 $\delta:=\sup\{c^T x : x\in P\}<\infty$，在存在 $z\in P$ 使得 $c^T z=\delta$ 。

3. 单纯形法

假设多胞形 $P=\{x\in\mathbb{R}^n: Ax\le b\}$ 是满维（A 是行满秩的“高”矩阵）的尖多胞形且有顶点，且某个顶点作为输入给出的。

用 J 表示某些行的指标集，A_J 表示下标在 J 中的 A 的行组成的子矩阵，b_J 表示下标在 J 中的 b 的分量的子向量，即：$A=\begin{pmatrix}A_J\\A_{/J}\end{pmatrix}, b=\begin{pmatrix}b_J\\b_{/J}\end{pmatrix}$，那么

$$Ax\le b\Leftrightarrow\begin{pmatrix}A_J\\A_{/J}\end{pmatrix}x\le\begin{pmatrix}b_J\\b_{/J}\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{matrix}A_Jx\le b_J\\A_{/J}x\le b_{/J}\end{matrix}$$

简记为 $\alpha_i:=A_{\{i\}},i\in J,\beta_i:=b_{\{i\}},i\in J$，即：$\alpha_i=A_{\{i\}},i\in J$ 表示 A_J 中的第 i 个行向量，$\beta_i=b_{\{i\}},i\in J$ 表示 b_J 的第 i 个元素。

单纯形法

输入：$c\in\mathbb{R}^n,b\in\mathbb{R}^m,A\in\mathbb{R}^{m\times n}$

集合 $P=\{x\in\mathbb{R}^n: Ax\le b\}$ 中的一个向量 x

输出：P 中达到 $\max\{c^Tx: x\in P\}$ 的向量 $x\in\mathbb{R}^n$，或者满足 $Aw\le 0$ 和

$c^Tw>0$ 的向量 $w\in\mathbb{R}^n$（此时 LP 问题无上界）

Step 1 选择 n 个行指标集 J 使得 $A_J \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 非奇异且 $A_J x = b_J, A = \begin{pmatrix} A_J \\ A_{/J} \end{pmatrix}$

Step 2 计算 $y = \begin{pmatrix} y_J \\ y_{/J} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$，使得 $A^T y = \left(A_J{}^T, A_{/J}{}^T\right)\begin{pmatrix} y_J \\ y_{/J} \end{pmatrix} = c$,即$A_J{}^T y_J + A_{/J}{}^T y_{/J} = c$，

取 $A_J{}^T y_J = c, y_{/J} = 0$，即计算 $y_J = (A_J{}^T)^{-1} c$，并且取 $y_{/J} = 0$

若 $y \geq 0$，则停止，输出 x, y。

Step 3 在 y_J 中选取满足 $y_i < 0$ 的最小指标 i。

令 w 是对应指标集 i 的 $-(A_J{}^T)^{-1}$ 的列。由于 $A_J{}^T\left(-(A_J{}^T)^{-1}\right) = -I$，

所以，$\left(A_{J\setminus\{i\}}\right)^T w = 0$，且 $(\alpha_i)^T w = -1$，其中 $\alpha_i := A_{\{i\}}, i \in J$。

若 $Aw \leq 0$，则停止，输出 w。

Step 4 令 $\lambda := \min\left\{\dfrac{\beta_j - (\alpha_j)^T x}{(\alpha_j)^T w} : j \in J, (\alpha_j)^T w > 0\right\} = \dfrac{\beta_{j^*} - (\alpha_{j^*})^T x}{(\alpha_{j^*})^T w}$ 且 j^* 是 J 中

满足要求的最小指标。

Step 5 置 $J = \left(J \setminus \{i\} \bigcup \{j\}\right), x := x + \lambda w$。

返回 Step 2。

$$\max = c^T x \quad \text{s.t.} \quad Ax \leq b$$

$$\min b^T y \quad \text{s.t.} \ A^T y = c, \quad y \geq 0$$

命题 4. 19 设 x, y 分别是下面 LP 问题的可行解：

$$\begin{aligned} &\max c^T x \\ &\quad \text{s.t. } Ax \le b \end{aligned} \qquad (4.2)$$

$$\begin{aligned} &\min b^T y \\ &\quad \text{s.t. } A^T y = c, y \ge 0 \end{aligned} \qquad (4.3)$$

则 $c^T x \le b^T y$ 。

证明：由于 x, y 分别是（4.2）和（4.3）的可行解，所以

$$c^T x = \left(A^T y\right)^T x = y^T Ax \le y^T b = b^T y$$

显然，若 x, y 分别是（4.2）和（4.3）的可行解且 $c^T x = b^T y$ ，则 x, y 分别是（4.2）和（4.3）的最优解。

定理 4. 20（Danzig,1951;Danzig, Orden and Wolfe; Blamd,1977）单纯性法至多进行 C_m^n 次迭代后终止，若在 Step 2 中输出 x, y，则这两个向量分别是（4.2）和（4.3）的最优解且 $c^T x = b^T y$；若在 Step 3 中输出 w，则 $c^T w > 0$，则（4.2）无上界。

证明：首先证明算法的每一步都成立：

（1） $x \in P$；

（2） $A_J x = b_J$；

（3） A_J 是非奇异矩阵；

（4） $c^T w > 0$；

（5） $\lambda \geq 0$。

在初始阶段假设（1）、（2）和（3）成立，从而

$$c^T w = \left(A_J{}^T y_J\right)^T w = y_J{}^T A_J w = -y_i$$

由 Step 4 及 $x \in P$（$\beta_j - (\alpha_j)^T x \geq 0$ 且 $(\alpha_j)^T w > 0$）可知 $\lambda \geq 0$。又由于 $\left(A_{J\setminus\{i\}}\right)^T w = 0$ 和 $(\alpha_j)^T w > 0$ 可知（3）成立。因此，只需要证明 Step 5 能够维持（1）和（2）成立即可。

4. 线性规划单纯形算法的具体实施

线性规划问题

$$\max c^T x \quad \text{s.t. } Ax \le b$$

其中 $x \in \mathbb{R}^n, c \in \mathbb{R}^n, b \in \mathbb{R}^m, A \in \mathbb{R}^{m\times n}$， $rank(A) = n < m$，与线性规划问题

$$\min b^{\mathrm{T}} y \quad s.t.\begin{cases} A^T y = c \\ y \ge 0 \end{cases}$$

等价，下面在介绍线性规划单纯形算法的具体实施时考虑线性规划问题的标准型

$$\min c^{\mathrm{T}} x \quad s.t.\begin{cases} Ax = b \\ x \ge 0 \end{cases} \qquad \text{(LP)}$$

其中 $x \in \mathbb{R}^n, c \in \mathbb{R}^n, b \in \mathbb{R}^m, A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ 。

另外，总假设：$b \geq 0$．(A, b, c) 的元素都为整数，$\operatorname{rank}(A) = m < n$，记：

可行域：$P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b, x \geq 0\}$

最优解集：$P^* = \{x \in P : x\text{是(LP)的最优解}\}$

令 $A = (A_1, A_2, \cdots, A_n)$，对于 $x \in P$ 有：

$$(A_1, A_2, \cdots, A_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = b$$

即：$x_1 A_1 + x_2 A_2 + \cdots + x_n A_n = b$。称 A_j 为变量 x_j 对应的列。

定理 4. 21 $x \in P$，则 x 是 P 的一个顶点 $\Leftrightarrow$ x 的正分量对应的 A 中的各列是线性独立的。

证明：不仿设 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_p,0,0,\cdots,0)^T=(x_B,0)^T$，其中 $x_i>0(i=1,2,\cdots,p)$，记 $A=(B,N)$，$x=\begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix}$，其中 B 是 A 的前 p 列。则，$Ax=b \Leftrightarrow Bx_B=b$。

"$\Rightarrow$" 用反证法，假设 x 是 p 的一个顶点，但 B 的各列不线性独立，则存在一个非零向量 w，使得 $Bw=0$。令 $x_B^1=x_B+\delta w, x_B^2=x_B-\delta w$，由于 $x_B>0$，所以对于充分小的 $\delta>0$，有 $x_B^1 \ge 0, x_B^2 \ge 0$。显然 $Bx_B^1=Bx_B^2=b$。定义：

$x^1=(x_B^1,0)^T, x^2=(x_B^2,0)^T$，则 $Ax^1=Ax^2=b$，所以 $x^1,x^2 \in P$，且 $x=\frac{1}{2}x^1+\frac{1}{2}x^2$，与 x 是 p 的一个顶点矛盾。

"$\Leftarrow$"用反证法,假设 x 不是 p 的一个顶点,则存在 $y^1,y^2 \in P, 0<\lambda<1,$ 使得 $x=\lambda y^1+(1-\lambda)y^2$。因为 $x_N=0$，所以 $y_N^1=y_N^2=0$。令 $w=x-y^1$，则 w 为非零向量，且 $Bw_B=Bx_B-By_B^1=b-b=0$，所以 B 中各列线性相关，与假设矛盾。

令 $A=(B,N)$， $B\in\mathbb{R}^{m\times m}$ 为满秩矩阵，是(LP)的一个基， $x=\begin{pmatrix}x_B\\x_N\end{pmatrix}$，

$Ax=b\Leftrightarrow Bx_B+Nx_N=b\Leftrightarrow x_B+B^{-1}Nx_N=B^{-1}b$，$\Leftrightarrow x_B=B^{-1}b-B^{-1}Nx_N$，令 x_N=0，若 $x=\begin{pmatrix}B^{-1}b\\0\end{pmatrix}\geq 0$，称之为(LP)的一个基可行解。

推论 4.22 x 是(LP)的一个基可行解 $\Leftrightarrow$ $x\in P$ 是 P 的一个顶点。

推论 4.23 (LP)的可行域至多有 C_n^m 个顶点。

由于假设 (A,b,c) 的元素都为整数，所以任一个基解其分量的绝对值是有界的。

定理 4.24 令 x 是一个基解，则有 $|x_j|\leq m!\alpha^{m-1}\beta$，其中

$$\alpha=\max_{i,j}\{|a_{ij}|\},\quad \beta=\max_{1\leq j\leq m}\{|b_j|\}$$

注：该结论及其证明的思想非常有用。

证明：因为 $B^{-1}=\dfrac{B^*}{\det B}$，而 $\det B\neq 0$ 为整数，则必有 $|\det B|\geq 1$，所以分母绝对值大于或等于 1，而 B^* 每个元素等于 B 的 $(m-1)$ 阶子式的行列式，而 B 的 $(m-1)$ 阶子式的行列式是 A 中的 $(m-1)!$ 个 $(m-1)$ 个元素连乘积之和，其绝对值不大于 $(m-1)!\alpha^{m-1}$。由于每一个 x_j 是 B^{-1} 中的 m 个元素与 b 中的 m 个元素对应乘积之和，所以 $|x_j|\leq m!\alpha^{m-1}\beta$。

定理 4. 25 假定标准的线性规划问题满足(i) $\operatorname{rank}(A)=m$, (ii) $P\neq\phi$, (iii) 目标函数c^Tx有下界，则在最优值相等的意义下，它与下述线性规划等价：

$$
\begin{aligned}
&\min c^T x\\
&s.t.\quad Ax=b\\
&\qquad\quad x\geq 0\\
&\qquad\quad x_i\leq M, i=1,2,\cdots,n
\end{aligned}
$$

其中$M=(m+1)!\alpha^m\beta, \alpha=\max\{|a_{ij}|,|c_i|\}, \beta=\max\{|b_j|,|z|\}$，$z$是集合$\{c^Tx \mid Ax=b, x\geq 0\}$的最大下界。

由该定理：我们总可以假定可行域F是有界区域。

二、非退化与相邻性

(1) 基可行解和顶点不是一一对应：

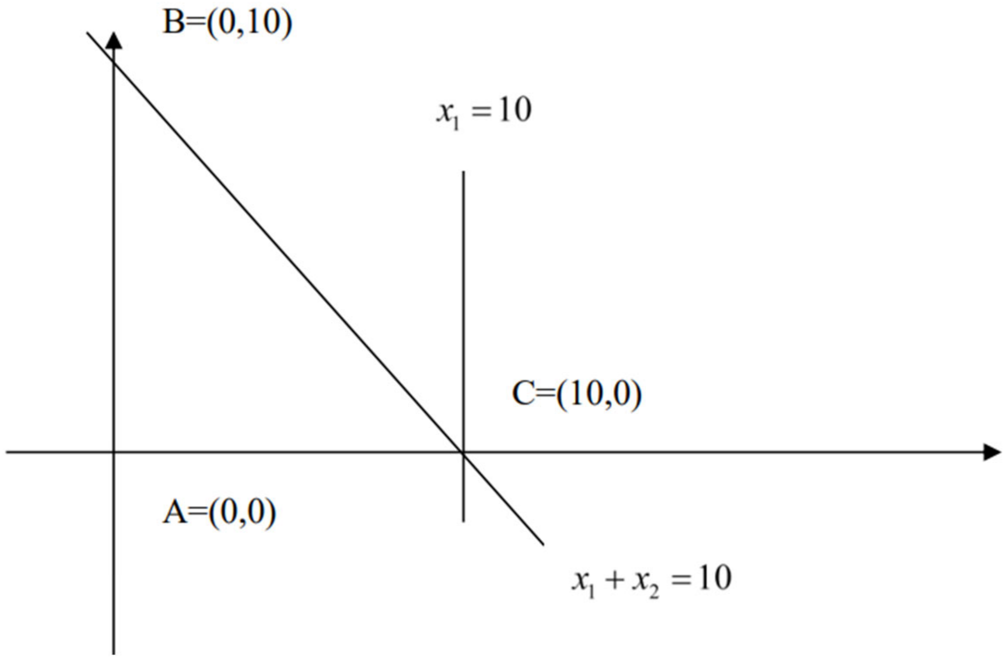
- 任给一个基可行解，存在唯一的一个顶点与之对应；
- 对于P中的一个顶点，可能有多个基可行解与之对应。

例如：设

$$P=\{x\in R^4 : x_1+x_2+x_3=10, x_1+x_4=10, x_1,x_2,x_3,x_4\ge 0\}$$

即 P 等价于下述图形：

$$P=\{x\in R^2 : x_1+x_2\le 10, x_1\le 10, x_1,x_2\ge 0\}$$



P 有三个顶点，即A=(0,0)，B=(0,10)，C=(10,0)，与之对应的四维空间的坐标为：A=(0,0,10,10)，B=(0,10,0,10)，C=(10,0,0,0)，

显然：

- 顶点 A 是对应基变量为 x_3,x_4 的一个基可行解；
- 顶点 B 是对应基变量为 x_2,x_4 的一个基可行解；
- 顶点 C 对应三个基可行解：基变量为 x_1,x_2

  基变量为 x_1,x_3

  基变量为 x_1,x_4

在这三个基可行解中，都有一个基变量取值为零！

(2) 一个基可行解$\begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix}$非退化：如果$x_B > 0$，$x_N = 0$。

(3) 一个线性规划问题非退化：如果它对应的所有基可行解都是非退化的。

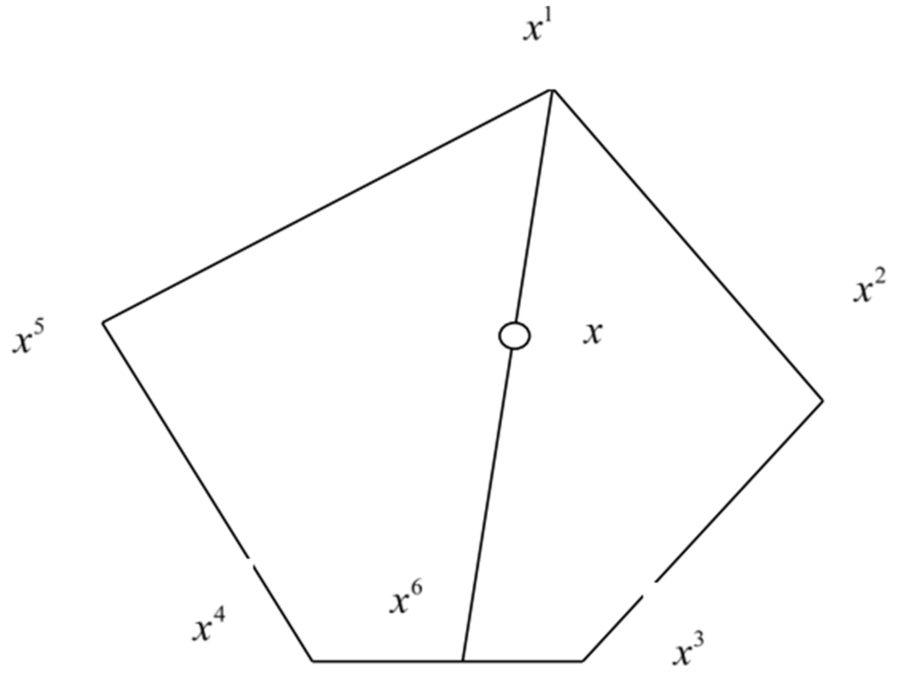
(4) 基可行解（顶点）相邻：只有一个基变量不相同（即共用 m-1 个基变量）的基可行解（顶点），称之为是相邻的。

注 1：每一个基可行解（顶点）都有 n-m 个相邻的基可行解（顶点）；

2：每一个相邻的基可行解，都可以通过下述方式达到：将一个非基变量的值由零增加到正，而同时将一个正基变量由正值减为零，并保持可行性。

三、分解定理

设可行域P有界，即P是一个多胞形，如：



显然：$\forall x \in P$，x可以表示成P的顶点的凸组合

(1) 多面体的顶点方向：设非零向量$d \in \mathbb{R}^n$，若任给$x^0 \in P$，射线

$\{x \in \mathbb{R}^n : x = x^0 + \lambda d, \lambda \geq 0\} \subset P$

则称非零向量d为多面体P的顶点方向。

显然：d为多面体P的顶点方向$\Leftrightarrow Ad = 0, d \geq 0$。

多面体P无界$\Leftrightarrow P$至少有一个顶点方向。

定理 4. 26（分解定理）：令 $V=\{v^i\in\mathbb{R}^n: i\in I\}$ 是 P 的所有顶点集合，则 d $\forall x\in P$，有

$$x=\sum_{i\in I}\lambda_i v^i+\lambda d$$

其中 $\sum_{i\in I}\lambda_i=1,\lambda_i\geq 0,i\in I$， $\lambda\geq 0$ 且 d 或者是零向量，或者是 P 的一个顶点方向。

证明：数学归纳法，对于 $x\in P$ 的正分量的个数归纳。

推论 4.27a：若 P 是多胞形，则 $\forall x\in P$， x 可以表示成 P 的顶点的凸组合。

推论 4.27b：若 $P\neq\phi$，则 P 至少存在一个顶点。

线性规划的基本定理

定理 4. 28 对于标准的线性规划问题

$$\min z=c^{\mathrm{T}}x$$
$$s.t.\begin{cases}Ax=b\\ x\geq 0\end{cases}$$

若 $P\neq\phi$，则 z 或者无下界，或者至少存在 P 的一个顶点， z 其上达到最小值。

证明：令$V=\{v^i\in P:i\in I\}$是P的所有顶点。

$\because P\neq\phi$，$\therefore V\neq\phi$。

根据分解定理，$\forall x\in P$有$x=\sum_{i\in I}\lambda_i v^i+\lambda d$，其中$\sum_{i\in I}\lambda_i=1,\lambda_i\geq 0,i\in I$，$\lambda\geq 0$且$d$或者是零向量，或者是$P$的一个顶点方向。

(1) 若 P 存在一个顶点方向 d 满足 $c^T d<0$，则 z 必无界。事实上，任给 $x^0\in P$，$\{x\in R^n:x=x^0+\lambda d,\lambda\geq 0\}\subset P$，当$\lambda\to+\infty$时，$c^T x\to-\infty$，所以$z$无下界。

(2) 否则，设 P 的所有顶点方向 d 满足 $c^T d\geq 0$（或者不存在顶点方向）。记$v^{\min}=\arg\min\{c^T v^i:i\in I\}$是目标函数值最小的顶点，且，则$\forall x\in P$有

$$C^T x=\sum_{i\in I}\lambda_i C^T v^i+C^T d\geq\sum_{i\in I}\lambda_i C^T v^{\min}=C^T v^{\min}$$

所以z在顶点$v^{\min}$上达到最小值。

线性规划问题的单纯形算法

给定一个非退化的基可行解$\bar{x}$，对应的可行基为B则等式约束变为：

$$x_B + B^{-1}Nx_N = B^{-1}b$$

$$x_B = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N$$

目标函数$c^{\mathrm{T}}x = c_B^{\mathrm{T}}x_B + c_N^{\mathrm{T}}x_N$

$$= c_B^{\mathrm{T}}(B^{-1}b - B^{-1}Nx_N) + c_N^{\mathrm{T}}x_N$$

$$= c_B^{\mathrm{T}}B^{-1}b - (c_B^{\mathrm{T}}B^{-1}N - c_N^{\mathrm{T}})x_N$$

规划等价于

$$\min c_B^{\mathrm{T}}B^{-1}b - (c_B^{\mathrm{T}}B^{-1}N - c_N^{\mathrm{T}})x_N$$

$$s.t.\begin{cases} x_B = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N \\ x \geq 0 \end{cases}$$

如果令：

$$B^{-1}b=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}，\quad B^{-1}N=\begin{pmatrix}\beta_{1,m+1} & \beta_{1,m+2} & \cdots & \beta_{1,n}\\ \beta_{2,m+1} & \beta_{2,m+2} & \cdots & \beta_{2,n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ \beta_{m,m+1} & \beta_{m,m+2} & \cdots & \beta_{m,n}\end{pmatrix},$$

$$\left(\lambda_{m+1},\lambda_{m+2},\cdots,\lambda_n\right)^T=C_B^TB^{-1}N-C_N^T，\quad f_0=C_B^TB^{-1}b$$

则上述线性规划问题就变成：

$$\min f_0-\left(\lambda_{m+1}x_{m+1}+\lambda_{m+2}x_{m+2}+\cdots,\lambda_nx_n\right)$$

$$s.t.\begin{cases}x_1=\alpha_1-\left(\beta_{1,m+1}x_{m+1}+\beta_{1,m+2}x_{m+2}+\cdots+\beta_{1,n}x_n\right)\\ x_2=\alpha_2-\left(\beta_{2,m+1}x_{m+1}+\beta_{2,m+2}x_{m+2}+\cdots+\beta_{2,n}x_n\right)\\ \cdots\cdots\\ x_m=\alpha_m-\left(\beta_{m,m+1}x_{m+1}+\beta_{m,m+2}x_{m+2}+\cdots+\beta_{m,n}x_n\right)\\ x_i\geq 0(i=1,2,\cdots,n)\end{cases}$$

典式(LP’)

对应的基可行解为$\left(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m,0,\cdots,0\right)^T$，目标函数值为$f_0$。

若有一个$\lambda_i>0$，不妨设$\lambda_{m+1}>0$，则可令x_{m+1}从 0 上升到某个$\theta>0$，显然，可以使得目标函数值下降。

定理 4.29 设$\{x_1,x_2,\cdots,x_m\}$是（LP）的一个可行基，（LP'）为其对应的典式。如果$\lambda_{m+1}\le 0,\lambda_{m+2}\le 0,\cdots,\lambda_{m+n}\le 0$，则基$\{x_1,x_2,\cdots,x_m\}$对应的基可行解

$$x^0=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m,0,\cdots,0)^T$$

是最优解。

定理 4.30 设$\{x_1,x_2,\cdots,x_m\}$是（LP）的一个可行基，（LP'）为其对应的典式。如果目标函数有下界且存在一个检验数$\lambda_{m+k}>0$，则非基变量x_{m+k}对应的系数$\beta_{1,m+k},\beta_{2,m+k},\cdots,\beta_{m,m+k}$中至少有一个大于零。

定理 4.31 设$\{x_1,x_2,\cdots,x_m\}$是（LP）的一个可行基，（LP'）为其对应的典式。如果存在一个检验数$\lambda_{m+k}>0$，使得：

（1）非基变量x_{m+k}对应的系数$\beta_{1,m+k},\beta_{2,m+k},\cdots,\beta_{m,m+k}$中至少有一个大于零；

（2）所有$\alpha_i>0(i=1,2,\cdots,m)$，

则一定存在另一个可行基，它对应的基可行解代入目标函数所得到的值比f_0小（即：新的基可行解要比原来的更好）。

5. 线性规划的对偶理论

☐ 线性规划的对偶模型

- 对偶规划源自对策论中的零和对策。
- 对偶理论最早应用与线性规划，是线性规划的重要基础理论，后被推广到非线性规划，是优化问题的重要研究工具。
- 对偶理论的主要内容：对于每一个规划问题(P)，总存在一个与之“对偶”的规划(D)。问题(P)与问题(D)之间存在着密切的关系，把这两个问题联合研究，从模型、理论和算法方面都非常有利，有许多非常漂亮的结果。
- 原规划问题及其对偶规划如同太极中的阴和阳，它们之间既互相对立，又互相依赖，构成一个和谐、对称的辩证统一体。

◆对偶问题的现实来源

设某工厂生产两种产品甲和乙，生产中需4种设备按A，B，C，D顺序加工，每件产品加工所需的机时数、每件产品的利润值及每种设备的可利用机时数列于下表：

产品数据表

设备 / 产品	*A*	*B*	*C*	*D*	产品利润（元／件）
甲	2	1	4	0	2
乙	2	2	0	4	3
设备可利用机时数（时）	12	8	16	12	

问：充分利用设备机时，工厂应生产甲和乙型产品各多少件才能获得最大利润?

解：设甲、乙型产品各生产x_1及x_2件，则数学模型为：

$$\max z = 2x_1 + 3x_2$$

$$s.t\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 \le 12 \\ x_1 + 2x_2 \le 8 \\ 4x_1 \le 16 \\ 4x_2 \le 12 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

反过来问：若厂长决定不生产甲和乙型产品，决定出租机器用于接受外加工，只收加工费，那么 4 种机器的机时如何定价才是最佳决策?

在市场竞争的时代，厂长的最佳决策显然应符合两条：

（1）不吃亏原则。即机时定价所赚利润不能低于加工甲、乙型产品所获利润。由此原则，便构成了新规划的不等式约束条件。

（2）竞争性原则。即在上述不吃亏原则下，尽量降低机时总收费，以便争取更多用户。

设*A*、*B*、*C*、*D*设备的机时价分别为*y*1、*y*2、*y*3、*y*4，则新的线性规划数学模型为：

$$\min \omega = 12y_1 + 8y_2 + 16y_3 + 12y_4$$

$$s.t\begin{cases} 2y_1 + y_2 + 4y_3 + 0y_4 \geq 2 \\ 2y_1 + 2y_2 + 0y_3 + 4y_4 \geq 3 \\ y_1, y_2, y_3, y_4 \geq 0 \end{cases}$$

把同种问题的两种提法所获得的数学模型用表2表示，将会发现一个有趣的现象。

原问题与对偶问题对比表

	A（y_1）	B（y_2）	C（y_3）	D（y_4）	
甲（x_1）	2	1	4	0	2
乙（x_2）	2	2	0	4	3
	12	8	16	12	$\min \omega$ $\max z$

◆原问题与对偶问题的对应关系

$$\max z = 2x_1 + 3x_2$$

$$s.t\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 \le 12 \\ x_1 + 2x_2 \le 8 \\ 4x_1 \le 16 \\ 4x_2 \le 12 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

原问题

（对偶问题）

$$\min \omega = 12y_1 + 8y_2 + 16y_3 + 12y_4$$

$$s.t\begin{cases} 2y_1 + y_2 + 4y_3 + 0y_4 \ge 2 \\ 2y_1 + 2y_2 + 0y_3 + 4y_4 \ge 3 \\ y_1, y_2, y_3, y_4 \ge 0 \end{cases}$$

对偶问题

（原问题）

◆ 对偶理论: 动机

- 考虑下述一个等式约束的优化问题:

$$\begin{aligned} &\min \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \\ &\text{s.t. } h(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0} \qquad \text{(P)} \\ &\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{X} \end{aligned}$$

其中$h(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}$是一个“硬”约束，$\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{X}$是一个“简单”约束。

- 如何求解该问题？思路是放松约束$h(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}$，从而求解一个相对简单的问题。
- 这可以通过把约束加到目标函数实现。一个乘子惩罚约束的破坏程度。
- 给定一个拉格朗日乘子$\boldsymbol{\lambda}$（惩罚因子），定义拉格朗日对偶问题为:

$$\boldsymbol{d}(\boldsymbol{\lambda}) = \min_{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{X}} \boldsymbol{L}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda}) := \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{\lambda} \boldsymbol{h}(\boldsymbol{x})$$

这给出了(P)问题的一个下界：对于(P)问题的任意一个可行解$\boldsymbol{x}$有

$$\boldsymbol{d}(\boldsymbol{\lambda}) \leq \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$$

$\boldsymbol{d}(\boldsymbol{\lambda}) = \min_{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{X}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{\lambda} \boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}) \leq \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{\lambda} \boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$（对于任意一个可行解$\boldsymbol{x}$）

◆ 等式约束的线性规划问题的对偶

➢ 那么，(P)问题的最好下界就可以通过求解下述优化问题得到：

$$\max_{\lambda} d(\lambda) = \max_{\lambda} \min_{x\in X} L(x,\lambda) := f(x) + \lambda h(x) \qquad \text{(D)}$$

称 (D) 为(P)问题的拉格朗日对偶问题。

例如，线性规划的对偶：

- 考虑线性规划问题：

$$\begin{aligned} &\min f(x) \\ &\text{s.t. } Ax = b, x \geq 0 \qquad \text{(LP)} \end{aligned}$$

- 根据上述定义，其拉格朗日对偶函数为：

$$d(\lambda) = \min_{x\geq 0}\{c^T x + \lambda^T(b - Ax)\} = b^T\lambda + \min_{x\geq 0}(c - A^T\lambda)^T x$$

$$= \begin{cases} b^T\lambda, & \text{if } A^T\lambda \leq c \\ -\infty, & \text{oterwise} \end{cases}$$

因此，线性规划的对偶问题为： $\max b^T\lambda$

$$\text{s.t. } A^T\lambda \leq c \qquad \text{(LD)}$$

◆ 不等式约束的线性规划问题的对偶

- 考虑对称形式的线性规划问题:

$$\min \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}$$

$$\text{s.t. } \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{b}, \boldsymbol{x} \geq \mathbf{0}$$

- 增加松弛变量s≥ 0，得到

$$(\boldsymbol{A}, -\boldsymbol{I})\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}\\ \boldsymbol{s}\end{pmatrix} = \boldsymbol{b}$$

- 对应的对偶约束为:

$$(\boldsymbol{A}, -\boldsymbol{I})^T\boldsymbol{\lambda} \leq \begin{pmatrix}\boldsymbol{c}\\ \mathbf{0}\end{pmatrix}$$

- 因此，(LP）的对偶规划为:

$$\max \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{\lambda}$$

$$\text{s.t. } \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{\lambda} \leq \boldsymbol{c}, \boldsymbol{\lambda} \geq \mathbf{0}$$

◆ 线性规划的对偶模型

特点：目标函数求极大值时，所有约束条件为≤号，变量非负;目标函数求极小值时，所有约束条件为≥号，变量非负。

根据上述讨论，给出一个线性规划问题：

$$\begin{aligned} &\max c^T x \\ &\quad \text{s.t. } Ax \le b \end{aligned} \qquad \text{(LP)}$$

其中 $x \in R^n, c \in R^n, b \in R^m, A \in R^{m\times n}$ 且 $rank(A) = n$ （$m \ge n$），它对应的对偶线性规划问题为线性规划问题：

$$\begin{aligned} &\min b^{\mathrm{T}} y \\ &s.t. \begin{cases} A^T y = c \\ y \ge 0 \end{cases} \end{aligned} \qquad \text{(LD)}$$

显然 $y \in \mathbb{R}^m, B = A^T \in \mathbb{R}^{n\times m}, rank(B) = n$，约束矩阵 $B = A^T$ 是行满秩的，即(LD)约束线性方程组中没有多余的方程。(LP)称为原始规划，(LD) 称为对偶规划。

命题4.32 一个LP问题的对偶的对偶就是（等价于）原始LP 问题。

证明：给定原始 LP 问题

$$\begin{aligned} &\max c^T x \\ &\text{s.t. } Ax \le b \end{aligned} \qquad \text{(LP)}$$

它的对偶是

$$\begin{aligned} &\min b^{\mathrm{T}} y \\ &s.t. \begin{cases} A^T y = c \\ y \ge 0 \end{cases} \end{aligned} \qquad \text{(LD)}$$

等价地，(LD)可以重写成：

$$\begin{aligned} &\max(-b^{\mathrm{T}} y) \\ &\text{s.t. } \begin{pmatrix} A^T \\ -A^T \\ -I \end{pmatrix} y \le \begin{pmatrix} c \\ -c \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \qquad \text{(LD')}$$

根据对偶的定义，(DP')的对偶为

$$\begin{aligned} &\min c^{\mathrm{T}} u - c^T v \\ &\text{s.t. } \left(A, -A, -I\right) \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = -b, u \ge 0, v \ge 0, w \ge 0 \end{aligned}$$

令 $x=v-u$，上述问题变成

$$\max c^T x$$
$$\text{s.t. } Ax+w=b, w\geq 0$$

w 是松弛变量，上述问题等价于

$$\max c^T x$$
$$\text{s.t. } Ax\leq b$$

从而等价于原始问题。

现在引入 LP 理论最重要的定理，即对偶定理：

定理 4.33 强对偶性定理(von Neumann, 1947,Gale,Kuhn and Tucker, 1951) 若多胞形 $P:=\{x\in\mathbb{R}^n : Ax\leq b\}$ 和 $D:=\{y\in\mathbb{R}^m : A^T y=c, y\geq 0\}$ 均非空，则

$$\max\{c^T x; x\in P\}=\min\{b^T y : y\in D\}$$

互补松弛定理

先从一个简单的例子谈起。

例子：某工厂在计划期内要安排生产 I、II 两种产品，已知生产单位产品所需要的设备台时及 A、B 两种原材料的消耗，如下表：

	I	II	
设备	1	2	8 台时
原材料 A	4	0	16
原材料 B	0	4	12

该工厂每生产一件产品 I 可获利 2，每生产一件产品 II 可获利 3。问应该如何安排生产计划使该工厂获利最大？

设 x_1、x_2 分别表示 I、II 的产量，则该问题的数学模型为：

$$
\begin{aligned}
\max \quad & z = 2x_1 + 3x_2 \\
\text{s.t.} \quad & x_1 + 2x_2 \le 8 \\
& 4x_1 \le 16 \\
& 4x_2 \le 12 \\
& x_1, x_2 \ge 0
\end{aligned}
$$

用单纯形方法可以求得最优解为：$x_1* = 4, x_2* = 2$，最优值为 $z* = 14$。

假设：该工厂的决策者决定不生产产品 I、II，而将其所有资源出租或外售。这时工厂的决策者就要考虑给每种资源定价的问题。设用 y_1, y_2, y_3 分别表示出租单位设备台时的租金和出让单位原材料 A，B 的附加额，则

$$
\begin{aligned}
\min \quad & \omega = 8y_1 + 16y_2 + 12y_3 \\
\text{s.t.} \quad & y_1 + 4y_2 \geq 2 \\
& 2y_1 + 4y_3 \geq 3 \\
& y_i \geq 0, i = 1,2,3
\end{aligned}
$$

也可以用单纯形方法求得最优解为：$y_1{*} = \frac{3}{2}, y_2{*} = \frac{1}{8}, y_3{*} = 0$，最优值为 $\varpi{*} = 14$。

显然：

$(8 - x_1{*} - 2x_2{*}) = 0$ 且 $y_1{*} > 0$，即 $(8 - x_1{*} - 2x_2{*})y_1{*} = 0$——原始约束紧，对偶变量松

$(16 - 4x_1{*}) = 0$ 且 $y_2{*} > 0$，即 $(16 - 4x_1{*})y_2{*} = 0$——原始约束紧，对偶变量松

$(12 - 4x_2{*}) > 0$ 且 $y_3{*} = 0$，即 $(12 - 4x_2{*})y_3{*} = 0$——原始约束松，对偶变量紧

同样，对称的，

$x_1{*} > 0$ 且 $(y_1{*} + 4y_2{*} - 2) = 0$，即 $x_1{*} \cdot (y_1{*} + 4y_2{*} - 2) = 0$——原始变量松，对偶约束紧

$x_2{*} > 0$ 且 $(2y_1{*} + 4y_3{*} - 3) = 0$，即 $x_2{*} \cdot (2y_1{*} + 4y_3{*} - 3) = 0$——原始变量松，对偶约束紧

最终达到平衡，原始－对偶目标函数取值相等，得到原始－对偶最优解。这就是所谓的“互补松弛性”。

互补松弛性

原始与对偶规划之间存在者拉锯式争夺：

一个问题里的某个约束越紧，另一个问题中对应的变量就越松；最终的平衡表示式，就是 x 和 y 是原始－对偶问题最优解的充分必要条件，这就是所谓的**互补松弛性条件**

定理 4.34 （互补松弛性条件） x 和 y 分别为原始－对偶可行解，则它们分别是原始－对偶最优解 $\Leftrightarrow$ 对一切 i 和 j 有：

$$u_i = y_i(a_i^T x - b_i) = 0$$
$$v_j = (c_j - A_j^T y)x_j = 0$$

证明：显然，对一切 i 和 j 有：$u_i \geq 0, v_j \geq 0$。定义

$$u = \sum_i u_i, \quad v = \sum_j v_j$$

则 $u = 0 \Leftrightarrow u_i = 0$（对一切 i ）

$v = 0 \Leftrightarrow v_j = 0$（对一切 j ）

而 $u + v = c^T x - b^T y$

所以，$u_i = 0$（对一切 i ）且 $v_j = 0$（对一切 j ）$\Leftrightarrow u = 0$ 且 $v = 0$

$\Leftrightarrow u + v = 0 \Leftrightarrow c^T x - b^T y = 0 \Leftrightarrow x$ 和 y 是原始一对偶问题最优解。

注：上述定理隐含着下述事实：

- 对最优解 x 和 y，如果对偶中一个约束取严格不等式，则原始规划中对应的变量取值必须为 0；
- 对称地，如果一个非负变量取值为正值，则其对应的约束必取等式。

所以，称之为**互补松弛性**。

下面系统介绍有关原始问题和对偶问题的最优解之间的关系：

推论 4.35 设 $\max\{c^T x : Ax \le b\}$ 和 $\min\{b^T y : A^T y = c, y \ge 0\}$ 是一对原始-对偶 LP 问题。又设 x 和 y 分别是原始和对偶问题的可行解。则下面结论等价:

(a) x 和 y 分别是原始和对偶问题的最优解

(b) $c^T x = b^T y$

(c) $y^T(Ax-b)=0$， 即 $y_i^* \cdot (a_i^T x^* - b_i) = 0 (i=1,2,\cdots,m)$

由于可行性，互补松弛性 $x_j^*(A_j^T y^* - c_j) = 0 (j=1,2,\cdots,n)$ 自然成立，所以互补松弛性(c)的另外一种说法：$x^* \in P = \{x : Ax \le b\}$ 是 $\max\{c^T x ; x \in P\}$ 的最优解当且仅当 c 是 A 的某些行的正权重线性组合 $c = A^T y^* = \sum_{i=1, y_i^*>0}^{m} a_i^T y_i^*$ ，这些 $y_i^* > 0$ 的行对应的 $Ax \le b$ 的不等式 $a_i^T x \le b_i$ 在 x^* 处成为等式 $a_i^T x^* = b_i$ 。这也意味着:

推论 4.36 设 $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \le b\}$ 是一个多胞形，$P^* \subseteq P$，设向量组 C 满足：任给 $c \in C$，每一个 $x^* \in P^*$ 都是 $\max\{c^T x ; x \in P\}$ 的最优解。则这样的向量组 C 是由 A' 的行所生成的锥，这里 $A' x \le b'$ 是 $Ax \le b$ 中对所有 $x^* \in P^*$ 都满足 $A' x^* = b'$ 的 A 的最大子集 A' 。

下面是推论4.35的另外一种形式：

推论 4.37 设 $\max\{c^T x : Ax \le b, x \ge 0\}$ 和 $\min\{b^T y : A^T y \ge c, y \ge 0\}$ 是一对原始-对偶 LP 问题。又设 x 和 y 分别是原始和对偶问题的可行解。则下面结论等价:

(a) x 和 y 分别是原始和对偶问题的最优解

(b) $c^T x = b^T y$

(c) $y^T(Ax - b) = 0$ 和 $x^T(A^T y - c) = 0$

事实上，上述结论可以由 $\max\{c^T x : Ax \le b, x \ge 0\}$ 与 $\max\{c^T x : \begin{pmatrix} A \\ -I \end{pmatrix} x \le 0\}$ 等价性可以推出。

对偶定理在组合优化中有很多应用，它的重要性之一是一个问题解的最优性能够被其对偶问题的一个具有与它相同的目标函数值的可行解所证得。现在我们要看如何证明一个 LP 问题是无界或者是不可行。

定理 4.38 存在向量 x 使得 $Ax \le b$ 成立的充分必要条件是对每个满足 $y \ge 0$ 和 $A^T y = 0$ 的向量 y 都有 $b^T y \ge 0$ 。

证明：必要性

若存在向量 x 使得 $Ax \le b$ 成立，则当 $y \ge 0$ 和 $A^T y = 0$ 时，必有

$$b^T y \ge (Ax)^T y = x^T A^T y = 0$$

充分性

若对每个满足 $y \ge 0$ 和 $A^T y = 0$ 的向量 y 都有 $b^T y \ge 0$，下面证明必然存在向量 x 使得 $Ax \le b$ 。

记 $e^T = (1,1,\cdots,1) \in \mathbb{R}^n$，考虑 LP 问题

$$-\min\{e^T w : Ax - w \le b, w \ge 0\} \qquad \text{(LP)}$$

写成标准形式：

$$\max\left\{\left(0,-e^T\right)\begin{pmatrix} x \\ w \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} A & -I \\ 0 & -I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ w \end{pmatrix} \le \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$$

其对偶问题为：

$$\min\left\{\left(b^T,0\right)\begin{pmatrix}y\\z\end{pmatrix}:\begin{pmatrix}A^T & 0\\-I & -I\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\e\end{pmatrix},y\ge 0,z\ge 0\right\}$$

或等价于

$$\min\{b^Ty:A^Ty=0,\quad 0\le y\le e\}\qquad \text{(D)}$$

根据假设，(LP)和（D）都有一个可行解： $x=0,w=|b|,y=0$，所以(LP)和（D）都有最优解，且最优值相等。显然，若(LP)存在最优解，则最优值必然为 0，从而必存在向量 x 使得 $Ax\le b$。

所以，欲证一个不等式组 $Ax\le b$ 无解，等价于要证明存在一向量 y 满足： $A^Ty=0$ 且 $y\ge 0$，使得 $b^Ty<0$。下面给出该定理的两个推论。

推论 4.39 存在向量 $x\ge 0$ 满足 $Ax\le b$ 成立的充分必要条件是对每个满足 $y\ge 0$ 和 $A^Ty\ge 0$ 的向量 y 都有 $b^Ty\ge 0$。

证明：将定理 4.25 用到不等式组 $\begin{pmatrix}A\\I\end{pmatrix}x\le\begin{pmatrix}b\\0\end{pmatrix}$。

推论 4.40 （Farkas，1894）存在向量 $x\ge 0$ 满足 $Ax=b$ 成立的充分必要条件是对每个满足 $A^Ty\ge 0$ 的向量 y，都有 $b^Ty\ge 0$。

证明：将定理 4.25 用到不等式组 $\begin{pmatrix}A\\-A\end{pmatrix}x\le\begin{pmatrix}b\\-b\end{pmatrix},x\ge 0$ 即可。

推论 4.40 就是著名的 **Farkas 引理**，实际上它的发现早于线性规划及其对偶，它也可以用对偶性质直接证明。

上面给出了一个线性规划不可行的证明方法。如何证明一个线性规划无界？

定理4.41 若一个LP问题是无界的，则它的对偶问题是不可行的；若一个LP问题有最优解，则它的对偶问题也有最优解。

4.6 线性规划的原始-对偶算法

一、算法的基本思路

- 线性规划的原始－对偶算法是线性规划的一个一般的算法，它实际上是由某些网络问题的一个特殊算法发展起来的，并且由它可以产生一系列与组合优化有关问题的一些特殊算法。
- 考虑线性规划问题及其对偶问题：

$$\begin{aligned} &\min z = c^T x \\ &\text{s.t. } Ax = b \geq 0 \\ &\qquad\quad x \geq 0 \end{aligned} \quad \text{(LP)} \qquad\qquad \begin{aligned} &\max \varpi = b^T y \\ &\text{s.t. } \quad A^T y \leq c \\ &\qquad\quad y\text{无限制} \end{aligned} \quad \text{(D)}$$

互补松弛性条件： x 和 y 分别为原始－对偶可行解，则它们分别是原始－对偶最优解 $\Leftrightarrow$ 对一切 i 和 j 有：

$$y_i(a_i^T x - b_i) = 0 \tag{1}$$

$$(c_j - A_j^T y)x_j = 0 \tag{2}$$

显然，(1)对任何可行解都成立，只要讨论(2)。假定 y 是(D)的可行解，我们的目标是设法找出(LP)的一个可行解 x，使得当 $c_j - A_j^T y > 0$ 时，有 $x_j = 0$，那么 x 和 y 将分别是原始－对偶最优解。

但是，由于 y 不一定是(D)的一个最优解，所以，这样(LP)的可行解 x 不一定能够找到。不过，对于给定的(D)的可行解 y，我们可以找出一个**“适合互补松弛性条件(2)，且最接近(LP)的可行解的向量 x”，并根据该 x 对(LP)的可行性的“破坏程度”调整(D)的可行解，得到(D)的一个新的可行解 y** ——线性规划的原始－对偶算法的基本思路。

线性规划的原始－对偶算法实际上是对偶算法，开始时 y 是(D)的可行解，迭代过程始终保持对偶可行性。

1. 算法基本过程

$$\begin{aligned} \min\ & z = c^T x \\ \text{s.t. } & Ax = b \geq 0 \qquad \text{(LP)} \\ & x \geq 0 \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} \max\ & \varpi = b^T y \\ \text{s.t. } & A^T y \leq c \qquad \text{(D)} \\ & y\text{无限制} \end{aligned}$$

y 是(D)的一个可行解

$$J = \{ j : A_j^T y = c_j \}$$

$$\begin{aligned} \min\ & \xi = \sum_{i=1}^{m} x_i^a \\ \text{s.t. } & \sum_{j \in J} a_{ij} x_j + x_i^a = b_i, i = 1,2,\cdots,m \\ & x_j \geq 0, \quad j \in J \qquad\qquad \text{(RP)} \\ & x_j = 0, \quad j \notin J \\ & x_i^a \geq 0,\ i = 1,2,\cdots,m \end{aligned} \quad \Longrightarrow \quad \begin{aligned} \max\ & \varpi = b^T y \\ \text{s.t. } & A_j^T y \leq 0, \quad j \in J \\ & y_i \leq 1, \quad i = 1,2,\cdots,m \qquad \text{(DRP)} \\ & y_i\text{无限制} \end{aligned}$$

用单纯形类方法求解(RP)， 若：

- (RP)的最优值 $\xi_{\text{opt}} = 0$，则得到(LP)和(D)的最优解，算法终止；
- (RP)的最优值 $\xi_{\text{opt}} > 0$，设 $\bar{y}$ 是(DRP)的最优解，若 $A_j^T \bar{y} \leq 0, j \notin J$，则(D)无上界，从而(LP)不可行，算法终止；
- 否则，取 $\theta \leq \theta_1 = \min\limits_{\substack{A_j^T \bar{y} > 0, \\ j \notin J}} \left\{ \dfrac{c_j - A_j^T y}{A_j^T \bar{y}} \right\}$， $y := y + \theta \bar{y}$

2. 算法

初始化：求(D)的一个可行解 y^0，$k := 0$；

第 1 步：求 y^k 的允许列集合 $J_k = \{j : A_j^T y^k = c_j\}$；

第 2 步：构造(RP)和(DRP)，用单纯形类方法求解(RP)，得到(RP)的最优值 ξ_{opt}

和最有解 x^k 及(DRP)的最优解 $\overline{y}$；

第 3 步：若 $\xi_{\mathrm{opt}} = 0$，则得到(LP)和(D)的最优解 x^k 和 y^k，算法终止；

否则，即 $\xi_{\mathrm{opt}} > 0$，转第 4 步；

第 4 步：若 $A_j^T \overline{y} \le 0, j \notin J$，则(D)无上界，从而(LP)不可行，算法终止；

否则转第 5 步；

第 5 步：计算 $\theta_1 = \min\limits_{\substack{A_j^T \overline{y} > 0, \\ j \notin J}} \left\{ \dfrac{c_j - A_j^T y}{A_j^T \overline{y}} \right\}$，取 $\theta \le \theta_1$，令 $y^{k+1} := y^k + \theta \overline{y}$，

$k := k + 1$ 转第 1 步。

定理 4.42 设 y 是(D)的一个可行解，$J=\{j: A_j^T y=c_j\}$ 是 y 对应的允许列集合，$\overline{y}$ 是(DRP)的最优解，且(RP)的最优值 $\xi_{\text{opt}}>0$：

（1） 若 $A_j^T \overline{y} \le 0, j \notin J$，则(D)无上界，从而(LP)不可行；

（2） 若∃$j \notin J$ 使得 $A_j^T \overline{y} > 0$，要维持 $y^*=y+\theta \overline{y}$ 的可行性，θ 的最大取值为

$$\theta_1 = \min_{\substack{A_j^T \overline{y}>0, \\ j \notin J}} \left\{ \frac{c_j - A_j^T y}{A_j^T \overline{y}} \right\}$$

并且新的费用为 $w^*=b^t y+\theta_1 b^T \overline{y} = w+\theta_1 b^T \overline{y} > w$。

3. 算法初始可行解的求法

(1)当 $c \geq 0$ 时，取 $y=0$ 即可。

(2))当 $c \geq 0$ 不成立时：在原始问题(LP)中引进变量 x_{n+1} 和增加一个约束：

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n + x_{n+1} = b_{m+1}$$

其中 b_{m+1} 大于(LP)的任意可行解 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$ 的分量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 之和，且在目标函数中对应的费用取 $c_{n+1}=0$：

$$\begin{aligned} &\min c^T x + 0 \cdot x_{n+1} \\ &\text{s.t.}\quad a_i^T x = b_i, i=1,2,\cdots,m \\ &\qquad x_1 + x_2 + \cdots + x_n + x_{n+1} = b_{m+1} \\ &\qquad\quad x_i \geq 0 (i=1,2,\cdots,n,n+1) \end{aligned} \qquad \text{(LP')}$$

显然(LP')与(LP)具有相同的最有解，而(LP')的对偶为：

$$\begin{aligned} &\max \varpi = b^T y + b_{m+1} y_{m+1} \\ &\text{s.t.}\quad A_j^T y + y_{m+1} \leq c_j, j=1,2,\cdots,m \\ &\qquad y_{m+1} \leq 0 \end{aligned} \qquad \text{(D')}$$

(D')有一个可行解：

$$\begin{aligned} &y_i = 0, i=1,2,\cdots,m \\ &y_{m+1} = \min\{c_j \mid 1 \leq j \leq m\} < 0 \end{aligned}$$

4. 原始一对偶算法的几点说明

在每一次迭代，都可以由前一次迭代得到的最有解开始求解(RP)，因此这是非常方便的。可以如此做的原因是：每次迭代结束时，即在J里又在(RP)的最优基里的变量，此时不可能离开J。

定理 4.43 (RP)最优基里每个允许列，在下一次迭代开始时它仍然保持是允许的。

证明：在一次迭代结束时，如果A_j是在(RP)的最有基里，那么它的检验数（在(RP)的相对费用）为：

$$\lambda_j = A_j^T \overline{y} = 0$$

所以：$A_j^T y* = A_j^T y + \theta_1 A_j^T \overline{y} = A_j^T y = c_j$

所以：j仍保留在J中。

即：不仅从前一次的可行解开始迭代，而且由于不可能产生基的列变为非允许列的麻烦，所以可以用修正的单纯形算法求解。

定理 4.43 线性规划的上述原始－对偶算法在有限时间内能够得到(LP)的解。

谢谢！