设 6 阶复矩阵 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$都是幂零矩阵，且它们有相同的秩和极小多项式，证明:$\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$相似

解:由于 A 为 6 阶幂零矩阵, 所以 A 的特征值多项式为 λ^6, 进而 A 的极小多项式(即最后一个不变因子).为 $m(\lambda)=\lambda^k(1\leq k\leq 6)$, 下面分情况讨论:
若 $m(\lambda)=\lambda$, 此时 $A=O$.
若 $m(\lambda)=\lambda^2$, 那么根据不变因子的整除关系, A 的不变因子组可能为

$$1,1,1,\lambda^2,\lambda^2,\lambda^2 \text{ 或 } 1,1,\lambda,\lambda,\lambda^2,\lambda^2 \text{ 或 } 1,\lambda,\lambda,\lambda,\lambda,\lambda^2.$$

由此可知 A 的若尔当标准形为

$$\operatorname{diag}\{J_2(0),J_2(0),J_2(0)\} \text{ 或 } \operatorname{diag}\{0,0,J_2(0),J_2(0)\} \text{ 或 } \operatorname{diag}\{0,0,0,0,J_2(0)\}.$$

若 $m(\lambda)=\lambda^3$,那么根据不变因子的整除关系, A 的不变因子组可能为

$$1,1,1,1,\lambda^3,\lambda^3 \text{ 或 } 1,1,1,\lambda,\lambda^2,\lambda^3 \text{ 或 } 1,1,\lambda,\lambda,\lambda,\lambda^3.$$

由此可知 A 的若尔当标准形为

$$\operatorname{diag}\{J_3(0),J_3(0)\} \text{ 或 } \operatorname{diag}\{0,J_2(0),J_3(0)\} \text{ 或 } \operatorname{diag}\{0,0,0,J_3(0)\}.$$

上述三个矩阵的秩分别为 $4,3,2$, 所以当 A 的秩确定以后, 其若尔当标准形唯一确定. 若 $m(\lambda)=\lambda^4$, 那么根据不变因子的整除关系, A 的不变因子组可能为 $1,1,1,1,\lambda^2,\lambda^4$ 或 $1,1,1,\lambda,\lambda,\lambda^4$.
上述三个矩阵的秩分别为 $4,3,2$, 所以当 A 的秩确定以后, 其若尔当标准形唯一确定.
若 $m(\lambda)=\lambda^4$, 那么根据不变因子的整除关系, A 的不变因子组可能为
由此可知 A 的若尔当标准形为
上述两个矩阵的秩分别为 4,3 , 所以当 A 的秩确定以后, 其若尔当标准形唯一确定.
若 $m(\lambda)=\lambda^5$, 那么根据不变因子的整除关系, A 的不变因子组只能为
$1,1,1,1,\lambda,\lambda^5$.
由此可知 A 的若尔当标准形为 $\operatorname{diag}\{0,J_5(0)\}$, 这是唯一确定的.
若 $m(\lambda)=\lambda^6$, 则 A 的不变因子组只能为
$1,1,1,1,1,\lambda^6$
由此可知 A 的若尔当标准形为 $J_6(0)$, 这是唯一确定的.
综上可知, 对于 6 阶幂零矩阵 A, 当确定了 A 的秩和极小多项式时, 其若尔当标准形唯一确定, 所以若 6 阶幂零矩阵 B 与 A 有相同的秩和极小多项式, 则 A,B 一定有完全相同的若尔当标准形, 所以 A,B 相似.