Academy of Mathematics and Systems Science Mar. 28, 2024
Chinese Academy of Sciences Assignment
Name: Xiayang Li(李夏洋)
UID: 202328000206057

Combinatorial Optimization(组合最优化)-Homework 1

Question 1

设 S 是 $2n$ 个整数的集合，将 S 划分为两个部分 S_1 和 S_2, 使得 $|S_1| = |S_2| = n$, 并且使 S_1 中数之和与 S_2 中数之和尽可能接近。令 S_1 和 S_2 中两个整数的所有可能的交换定义的领域为 N, 那么 N 是精确的吗?

Solution: 不是精确的, 举例如下: 设

$$S = \{2, 2, 2, 2, 4, 4, 4, 4\}, S_1 = \{2, 2, 2, 2\}, S_2 = \{4, 4, 4, 4\}. \tag{1}$$

在划分 $S_1 \bigcup S_2$ 的邻域 N 中, 局部最优解为 $S_1^* = \{2, 2, 2, 4\}, S_2^* = \{4, 4, 4, 2\}$, 显然不是全局最优解 $S_1^{**} = \{2, 2, 4, 4\}, S_2^{**} = \{4, 4, 2, 2\}$.

Question 2

在 MST 中，一个重要的邻域是 $N(f) = \{g : g \in F$ 且能按下述方式由 f 得到: 加一条边到 f 里产生一个圈，再去掉圈上的一条边 $\}$。证明: 该邻域是精确的。

Solution: 设 f 是邻域 $N(f)$ 中的局部最优解, 下证, f 必然是全局最优解.

用反证法, 谬设: f^* 是全局最优解, 且 $w(f^*) < w(f)$.

取 $e \in f^* e \notin f$, 将 e 加入 f 中, 产生一个圈 C. 由于 f 在邻域 N 中是精确的, 故必然存在 $e' \in f$, 而 $w(e') \geqslant w(e)$. 又由于 $w(f^*) < w(f)$, 对每个 $e \in f^* e \notin f$ 执行上述操作后, 不可能全产生边权一样的圈, 也即, 从可以找到一个圈上的边 $e' \in f$, 而 $e(e') < w(e)$ 严格成立. 这样, $f^* - e + e'$ 得到一棵比 f^* 权值更小的生成树, 矛盾!

Question 3

用一个例子说明 2 交换不能确定 TSP 的精确邻域; 同样 3 交换和 n 交换也不能确定 TSP 的精确邻域，其中 n 为城市的数目。

Solution:

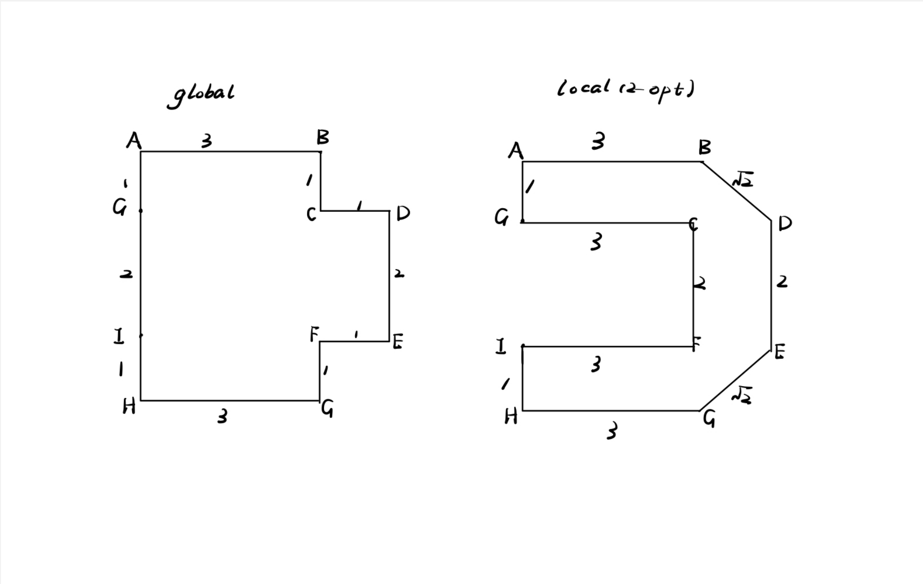

图 1: 2 交换不能定义精确邻域的例子.

如上图所示, 右侧的 TSP 问题的解在其 2 交换邻域中是局部最优解, 但不是全局最优解.(左侧的 Global 例子). 暂时无法快速找到 3-opt 的例子. 但 n 交换是可以确定精确邻域的.

问题: 怎样能够在理论上说明 k-交换算法是一种局部算法? 希望习题课上可以讲解一下.

Question 4

力矩问题是寻求重力 w_i 的一个排列 π, 使得力矩 $\sum_{i=1}^{n} i w_{\pi(i)}$ 最小. 通过两个相邻重力的所有可能的交换而定义的领域是精确的.

Solution: 首先易证, 最优排列 π^* 满足:

$$w_{\pi^*(1)} \geqslant w_{\pi^*(2)} \geqslant \cdots \geqslant w_{\pi^*(n)} \tag{2}$$

否则, 假如存在 $i \in [n-1]$, 使得 $w_{\pi^*(i)} < w_{\pi^*(i+1)}$, 显然 $i w_{\pi^*(i)} + (i+1) w_{\pi^*(i+1)} > (i+1) w_{\pi^*(i)} + i w_{\pi^*(i+1)}$, 矛盾!

同理可验证,

$$w_{\pi^*(1)} \geqslant w_{\pi^*(2)} \geqslant \cdots \geqslant w_{\pi^*(n)} \Leftrightarrow \forall i \in [n-1], w_{\pi^*(i)} \geqslant w_{\pi^*(i+1)} \tag{3}$$

于是, 记题设所定义的邻域为 N, 若 $\pi \in N$ 是局部最优解, 那它必然也是全局最优解. 于是按照这种方式定义的邻域是精确的.

Question 5

证明: 求包含于一个给定多胞形的最大球问题可以表示为一个线性规划问题。

Solution: 设多胞形 P 由

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leqslant b, A \in \mathbb{R}^{m\times n}, b \in \mathbb{R}^m\} \tag{4}$$

决定.

现将 A 的每一行进行归一化得 $\bar{A}$, 即, 记 $A = \begin{pmatrix} a_1^T \\ a_2^T \\ \vdots \\ a_m^T \end{pmatrix}$, 则 $\bar{A} = \begin{pmatrix} \bar{a_1}^T \\ \bar{a_2}^T \\ \vdots \\ \bar{a_m}^T \end{pmatrix}$, 满足 $\|\bar{a}_i\|_2 = 1, i \in [n]$, 相应的 b 也调整至 $\bar{b}$. 于是多胞形 P 也可以表示为:

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n : \bar{A}x \leqslant \bar{b}, \bar{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}, \bar{b} \in \mathbb{R}^m\}. \tag{5}$$

这样, 在多胞形 P 中寻找一个最大球的问题可以表述为如下的线性规划:

$$\begin{aligned} \max \quad & r \\ \text{s.t.} \quad & \bar{A}x \leqslant \bar{b} \\ & -\bar{A}x \leqslant \boldsymbol{r} - \bar{b} \end{aligned} \tag{6}$$

其中粗体 $\boldsymbol{r} \in \mathbb{R}^m$, $\boldsymbol{r} = r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$

Question 6

设 P 是一个非空多面体, 构造图 $G(P) = (V, E)$, 其中 V 是 P 的顶点, E 是 P 的一维面. 令 x 是 P 的任一顶点, c 是满足 $c^\top x < \max\{c^\top z : z \in P\}$ 的向量. 证明: 存在 x 在 $G(p)$ 中的邻点 y, 使得 $c^\top x < c^\top y$.

Solution:

为了排除由 "多面体无界" 情况带来的麻烦, 我们约定, 若多面体沿着某个一维面无限延伸, 那么规定该方向的一维无穷远点为 x 的邻点.

用反证法, 谬设对于任意的 x 在 $G(p)$ 中的邻点 y, 都有 $c^\top x \geqslant c^\top y$, 那么有 x 的邻点 $\{y_1, y_2, \cdots, y_n\}$ 可确定 n 个极方向:$d_1, d_2, \cdots, d_n$, 其中 d_i 是平行于 $y_i - x$ 的单位向量. 则凸锥 $P' = \{h : h = x + \sum\limits_i \lambda_i d_i\}$ 显然包含了非空多面体 P.

但对于任意 $h \in P'$, 有 $c^\top h \leqslant c^\top x$, 这与 $c^\top x < \max\{c^\top z : z \in P\}$ 矛盾!