Academy of Mathematics and Systems Science Apr. 6, 2024
Chinese Academy of Sciences Assignment
Name: 李夏洋
Major: 运筹学与控制论
UID: 202328000206057
Personal Page: `https://xiayangli2301.github.io`

凸分析与优化-作业 (4.1,4.3,4.8,4.10)

4 月 1 日作业

Question 1

设 $L \in \mathcal{L}(\mathbb{E}_1, \mathbb{E}_2)$. 证明以下结论成立:

1. $\ker(L) = (\mathrm{im}(L^*)^{\perp}$(课上已证), $(\ker(L))^{\perp} = \mathrm{im}(L^*)$;
2. $\ker(L^*) = (\mathrm{im}(L))^{\perp}, (\ker(L^*))^{\perp} = \mathrm{im}(L)$.

Solution. $\forall x \in \mathrm{im}(L^*)$, 存在 $y \in \mathbb{E}_2, x = L^*(y)$. 对于任意 $\overline{x} \in \ker(L)$,

$$\langle \overline{x}, L^*(y) \rangle = \langle L(x), y \rangle = 0.$$

故 $x \in (\ker(L))^{\perp}$. 这说明了

$$\mathrm{im}(L^*) \subset (\ker(L))^{\perp}.$$

由于

$$\mathbb{E}_1 = \mathrm{im}\, L^* \oplus \mathrm{im}(L^*)^{\perp} = \mathrm{im}\, L^* \oplus \ker(L) \subset (\ker(L))^{\perp} \oplus \ker(L) = \mathbb{E}_1,$$

得到

$$\mathrm{imL}^* \oplus \ker(L) = (\ker(L))^{\perp} \oplus \ker(L)$$

由于 $(\ker(L))^{\perp} \bigcap \ker(L) = \emptyset, \mathrm{imL}^* \bigcap \ker(L) = \emptyset$. 故必然有

$$(\ker(L))^{\perp} = \mathrm{im}(L^*)$$

由于 L 与 L^* 互为对偶, $\ker(L^*) = (\mathrm{im}(L))^{\perp}, (\ker(L^*))^{\perp} = \mathrm{im}(L)$ 由 $\ker(L) = (\mathrm{im}(L^*)^{\perp}$, $(\ker(L))^{\perp} = \mathrm{im}(L^*)$ 立得.

Question 2

设 $A \in \mathbb{S}^n_+$, 证明存在唯一的 $\boldsymbol{B} \in \mathbb{S}^n_+$ 使得 $B^2 = A$, 即 $B = A^{\frac{1}{2}}$. 这表明开根号运算在 $\mathbb{S}^n_+$ 中是良定的.

Solution. **存在性**. 由于 $A \in \mathbb{S}_n^+$, 故存在 $T \in O(n)$, 使得 $T^{-1}AT = \Sigma_A$. Σ_A 是对角矩阵. 记

$$\Sigma_A = \operatorname{diag}\{\lambda_1, \cdots, \lambda_n\},\ \lambda_1 \geqslant 0, \cdots, \lambda_n \geqslant 0.$$

取

$$B = T \operatorname{diag}\{\sqrt{\lambda_1}, \cdots, \sqrt{\lambda_n}\} T^{-1}.$$

即满足 $B^2 = A$. **唯一性**. 假如还存在 $C^2 = A$, 则 $(T^{-1}CT)^2 = \Sigma_A$, 易得 $T^{-1}CT \in \mathbb{S}_+^n$.

于是, 存在另一正交矩阵 $S \in O(n)$, 使得 $S^{-1}T^{-1}CTS = \operatorname{diag}\{\lambda_1', \cdots, \lambda_n'\}$, 而 $S^{-1}T^{-1}BTS = \operatorname{diag}\{\lambda_1, \cdots, \lambda_n\}$, 于是 B 和 C 可同时对角化. 故 $BC = CB$.

于是

$$B^2 - C^2 = (B+C)(B-C) = 0, \tag{1}$$

由于 $B + C \in \mathbb{S}_n^+$, 故 $|B+C| > 0$, 故 $B - C = 0$. 这说明了 B 的唯一性, 本题证毕.

Question 3

设 A, B 是 $\mathbb{E}$ 得非空闭子集, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, A, B 中至少有一个有界. 证明 $\lambda A + \mu B$ 也是闭集, 并通过反例说明这里的有界性是必要的.

Solution. 不妨设 A 有界,$\forall\ z^* \in \overline{\lambda A + \mu B}$, 存在 $\{z_k = \lambda x_k + \mu y_k, x_k \in A, y_k \in B\}$, 使得 $\{z_k = \lambda x_k + \mu y_k\} \to z^*$. 由于 $\{x_k\}$ 有界，故存在子列 $\{x_{k_m}\} \subset \{x_k\}$, 使得 $\{x_{k_m}\} \to x^* \in A$. 由此，$\{\mu y_{k_m}\} \to z^* - \lambda x^*$, 由 B 的闭性, $z^* - \lambda x^* \in \mu B$, 故 $z^* - \lambda x^* + \lambda x^* \in \lambda A + \mu B$, 故

$$\lambda A + \mu B = \overline{\lambda A + \mu B}.$$

即 $\lambda A + \mu B$ 是闭集.

反例: $A = \{n + \frac{1}{n}\}, B = \{-n\}$, 于是

$$A + B = \{k + \frac{1}{n}\}, k \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}^+.$$

易见 0 是 $A + B$ 的聚点, 但是 $0 \notin A + B$.

4 月 3 日作业

Question 4

证明: $\operatorname{epi}(\operatorname{cl}(f)) = \operatorname{cl}(\operatorname{epi}(f))$.

Solution. 记 $f:\mathbb{E}\to[-\infty,+\infty]$, 由于 $\mathrm{cl}(f)$ 是下半连续的, 因此 $\mathrm{epi}(\mathrm{cl}(f))$ 是闭的. 由于

$$\mathrm{cl}(f)\leqslant f,$$

故 $\mathrm{epi}(\mathrm{cl}(f))\supset\mathrm{epi}(f)$. 由 $\mathrm{epi}(\mathrm{cl}(f))$ 闭性, 知

$$\mathrm{epi}(\mathrm{cl}(f))\supset\mathrm{cl}(\mathrm{epi}(f)) \tag{2}$$

若 $\forall\,(x^*,\alpha^*)\in\mathrm{epi}(\mathrm{cl}(f))$, 有

$$\liminf_{x\to x^*}f(x^*)\leqslant\alpha^*.$$

即存在 α, 使得 $\exists\,\{x_k\}\to x^*, f(x_k)\to\alpha\leqslant\alpha^*$. 由于 $(x_k,f(x_k))\in\mathrm{epi}(f)$, 故 $(x^*,\alpha)\in\mathrm{cl}(\mathrm{epi}(f))$. 又 $\alpha^*\geqslant\alpha$, 故必然有 $(x^*,\alpha^*)\in\mathrm{cl}(\mathrm{epi}(f))$. 于是

$$\mathrm{epi}(\mathrm{cl}(f))\subset\mathrm{cl}(\mathrm{epi}(f)). \tag{3}$$

综合 (2) 和 (3), 得

$$\mathrm{epi}(\mathrm{cl}(f))=\mathrm{cl}(\mathrm{epi}(f)).$$

证毕.

4 月 8 日作业

Question 5

设 $A\in\mathbb{S}^n, b\in\mathbb{R}^n$, 二次函数 $q:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ 定义为

$$q(x)=\frac{1}{2}x^\top Ax+b^\top x$$

证明如下三条性质互相等价:

1. $\inf_{\mathbb{R}^n}q>-\infty$.
2. $A\succeq 0, b\in\mathrm{im}(A)$.
3. $\arg\min_{\mathbb{R}^n}q\neq\emptyset$.

Solution.

“(1) $\Rightarrow$ (2)”: 由于 $\inf_{\mathbb{R}^n}q>-\infty$, 故一定存在 $x^*\in\mathbb{R}^n$, 使得 $x^*\in\arg\min_{\mathbb{R}^n}q$. 在 x^* 处任意施加扰动, 都有

$$q(x^*+\Delta x)-q(x^*)\geqslant 0. \tag{4}$$

由 (4) 可得,

$$\begin{aligned}q(x^*+\Delta x)-q(x^*)=&(\Delta x)^\top(Ax^*+b)+(\Delta x)^\top A(\Delta x)\\ \xlongequal{\Delta x\to 0}&(\Delta x)^T(Ax^*+b)+o(\|\Delta x\|)\\ \geqslant&0.\end{aligned}$$

对 $\forall \Delta x > 0$ 成立, 这说明 $Ax^*+b=0$, 即, $b \in \mathrm{im}(A)$ 另外, 当 $\|\Delta x\|$ 充分大时, $q(x^*+\Delta x)-q(x^*)$ 与 $\Delta x^\top A \Delta x$ 同号, 这说明, $\forall\ \Delta x$,

$$\Delta x^\top A \Delta x \geqslant 0. \tag{5}$$

这说明 $A \succeq 0$.

"(2) $\Rightarrow$ (3)": 由于 $b \in \mathrm{im}(A)$, 不妨记 $b = A\lambda$. 由于 $A \succeq 0$, 则

$$\begin{aligned} q(x) &= \frac{1}{2}x^\top Ax + b^\top x \\ &= \frac{1}{2}x^\top Ax + \lambda^\top Ax \\ &= \frac{1}{2}(x+\lambda)^\top A(x+\lambda) - \frac{1}{2}\lambda A \lambda^\top \\ &\geqslant \frac{1}{2}\lambda A \lambda^\top. \end{aligned}$$

且当 $x = -\lambda$ 时取等号. 于是 $\arg\min_{\mathbb{R}^n} q \supset \{-\lambda\} \neq \emptyset$.

"(3) $\Rightarrow$ (1)": 由 $q(x)$ 的适定性, 立得.

Question 6

证明: 设集合 $X \neq$, 给定一个包算子 $\mathrm{hull}: 2^X \to 2^X$, 可以确定一个包系统. 即证, $\mathcal{S} = \{\mathrm{hull}(S) \mid S \subset X\}$ 是一个包系统.

Solution. 根据教材 **命题 1.18** 知, 需验证 $\mathcal{S} = \{\mathrm{hull}(S) \mid S \subset X\}$ 满足包系统的两个条件.

1. $X \in \mathcal{S}$. 由

   $$X \subset \mathrm{hull}(X) \subset X$$

   立得.

2. 对任意非空 $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{S}$,

   $$\bigcap_{\mathrm{hull}(S)\in\mathcal{A}} \mathrm{hull}(S) \subset \mathrm{hull}(\bigcap_{\mathrm{hull}(S)\in\mathcal{A}} \mathrm{hull}(S)) \subset \bigcap_{\mathrm{hull}(S)\in\mathcal{A}} \mathrm{hull}(\mathrm{hull}(S)) = \bigcap_{\mathrm{hull}(S)\in\mathcal{A}} \mathrm{hull}(S).$$

   故

   $$\bigcap_{\mathrm{hull}(S)\in\mathcal{A}} \mathrm{hull}(S) = \mathrm{hull}(\bigcap_{\mathrm{hull}(S)\in\mathcal{A}} \mathrm{hull}(S)).$$

   即

   $$\bigcap_{\mathrm{hull}(S)\in\mathcal{A}} \mathrm{hull}(S) \subset \mathcal{S} \tag{6}$$

   故 $\mathcal{S} = \{\mathrm{hull}(S) \mid S \subset X\}$ 是一个包系统.

4 月 10 日作业

Question 7

证明：设 $x_0, x_1, x_2, \cdots, x_k \in \mathbb{E}$, 则

$$x_0 + \mathrm{span}\{x_1 - x_0, \cdots, x_k - x_0\} = \mathrm{aff}\{x_0, \cdots, x_k\}. \tag{7}$$

特别地, 如果 $\{x_0, \cdots, x_k\}$ 包含 0, 则 $\mathrm{aff}\{x_0, \cdots, x_k\} = \mathrm{span}\{x_0, \cdots, x_k\}$.

Solution. 取 $\sum_{i=0}^{k} a_i = 1$ 则

$$\begin{aligned} x_0 + \mathrm{span}\{x_1 - x_0, \cdots, x_k - x_0\} &= x_0 + \sum_{i=1}^{k} a_i(x_i - x_0) = (1 - \sum_{i=1}^{k} a_i)(x_0) + \sum_{i=1} a_i x_i \\ &= \sum_{i=0}^{k} a_i x_i = \mathrm{aff}\{x_0, \cdots, x_k\} \end{aligned} \tag{8}$$

故立得

$$x_0 + \mathrm{span}\{x_1 - x_0, \cdots, x_k - x_0\} = \mathrm{aff}\{x_0, \cdots, x_k\}. \tag{9}$$

若 $\{x_0, \cdots, x_k\}$ 包含 0，不妨记 $x_0 = 0$. 则由 (9), 代入 $x_0 = 0$, 有

$$\mathrm{span}\{x_0, \cdots, x_k\} = \mathrm{span}\{x_1 \cdots, x_k\} = x_0 + \mathrm{span}\{x_1 - x_0, \cdots, x_k - x_0\} = \mathrm{aff}\{x_0, \cdots, x_k\}. \tag{10}$$

本题证毕.