**Academy of Mathematics and Systems Science** Apr. 6, 2024
**Chinese Academy of Sciences** Assignment
Name: 李夏洋
Major: 运筹学与控制论
UID: 202328000206057
Personal Page: `https://xiayangli2301.github.io`

# Combinatorial Optimization(组合最优化)-Homework 2

**Question 1**

设线性规划问题

$$\begin{aligned} \min \ & c^\top x \\ \text{s.t.} \ & Ax = b \\ & x \geqslant 0 \end{aligned} \tag{1}$$

其中 $x \in \mathbb{R}^n, c \in \mathbb{R}^n, b \in \mathbb{R}^m, A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, 记可行域为 $F$，最优解集为 $F^*$. 证明:

1. $F$ 是一个闭集.
2. $F^*$ 是一个凸集.

**Solution.**

1. $F$ 是多胞形 $P_1 := \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b\}$ 与半空间 $P_1 : \{x \in \mathbb{R}^n \mid x \geqslant 0\}$ 的交. 显然 $P_1$ 和 $P_2$ 是闭集，于是 $F$ 是闭集.
2. 若 $x_1^*\ x_2^* \in F^*$, 则对于 $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, \lambda_1 + \lambda_2 = 1$, 有

$$c^\top(\lambda_1 x_1^* + \lambda_2 x_2^*) = \lambda_1 c^\top x_1^* + \lambda_2 c^\top x_2^* = c^\top x_1^* = c^\top x_2^* \in \arg\min\{c^\top x \mid x \in \mathcal{X}\} \tag{2}$$

且

$$\begin{aligned} A(\lambda_1 x_1^* + \lambda_2 x_2^{)}_2 &= \lambda_1 A x_1^* + \lambda_2 A x_2^* = b \\ \lambda_1 x_1^* + \lambda_2 x_2^* &\geqslant 0 \end{aligned} \tag{3}$$

于是 $F^*$ 是一个凸集. 本题证毕.

**Question 2**

下述两个线性规划问题

$$\begin{aligned} \min \ & c^\top x \\ \text{s.t.} \ & Ax = b \\ & x \geqslant 0 \end{aligned} \tag{A}$$

$$\begin{aligned} \min \quad & -c^{\top}x \\ \text{s.t.} \quad & Ax = b \\ & x \geqslant 0 \end{aligned} \tag{B}$$

(A) 和 (B) 能同时有任意最小费用的可行解吗? 若有, 请举例, 若没有, 请证明.

**Solution.** (A) 和 (B) 能同时有任意小费用的可行解. 举例如下: 取

$$c = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3, A = 0, b = 0 \tag{4}$$

则 $x_1 = k\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, x_2 = l\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ 当 $k, l \to +\infty$ 时, 可分别使 (A) 和 (B) 取得任意小费用的可行解.

**Question 5**

若一个线性规划问题的每一个顶点都是非退化的，那么它的最优解是否唯一? 若是, 请证明; 若否, 请举例.

**Solution.** 不一定唯一. 比如如下的优化问题

$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 + x_2 \\ \text{s.t.} \quad & -x_1 \geqslant 1 \\ & -x_2 \geqslant 1 \\ & x_1 + x_2 \leqslant 2 \end{aligned} \tag{5}$$

三个顶点 $(2,0),(0,2),(0,0)$ 都非退化, 但是最优解不唯一.

**Question 6**

在单纯形算法中, 一次旋转变换, 能让一个可行点在 $\mathbb{R}^n$ 中移动一段正的距离而使得费用保持不变吗? 为什么?

**Solution.** 不会, 将优化问题化为典式后

$$
\begin{aligned}
\min\ & f_0-(\lambda_{m+1}x_{m+1}+\cdots+\lambda_n x_n)\\
s.t.\ & x_1=\bar{b}_1-(\beta_{1,m+1}x_{m+1}+\cdots+\beta_{1,n}x_n)\\
& \quad\vdots\\
& x_m=\bar{b}_m-(\beta_{m,m+1}x_{m+1}+\cdots+\beta_{m,n}x_n\\
& x_i\geqslant 0
\end{aligned}
$$

若 $\lambda_{m+1},\cdots,\lambda_n\leqslant 0$, 此时算法已经终止, 当前解已经是最优解.

若存在 $\lambda_k>0$, 确定出基变量 $x_l$ 后, 将非基变量 $x_k$ 由 0 调整至 $\frac{\bar{b}_l}{\beta_{l,k}}$, 势必会使得典式中的目标函数值下降. 注: $B^{-1}b=\begin{pmatrix}\bar{b}_1\\ \bar{b}_2\\ \vdots\\ \bar{b}_n\end{pmatrix}, B^{-1}N=\begin{pmatrix}\beta_{1,m+1}, & \cdots, & \beta_{1,n}\\ \beta_{2,m+1}, & \cdots, & \beta_{2,n}\\ \vdots, & \ddots, & \vdots\\ \beta_{m,m+1}, & \cdots, & \beta_{m,n}\end{pmatrix}$.

**Question 7**

在单纯形算法中, 一次旋转变换有一列向量退出基, 那么这个列向量能够在紧接的下一次旋转变换中重新进入基吗?

**Solution.** 不妨设上一次基变量为 $\{x_1,\cdots,x_m\}$, 非基变量为 $\{x_{m+1},\cdots,x_n\}$. 所对应的费用向量分别为 $c_B=\Big(c_1,c_2,\cdots,c_m\Big)^\top$ 与 $c_N=\Big(c_{m+1},c_{m+2},\cdots,c_n\Big)^\top$. 设上次出基变量为 $x_l$, 进基变量为 $x_k$. 进行一次迭代后, 变量 $x_l$ 所对应的列向量为:

$$\Big(-\tfrac{\beta_{1,k}}{\beta_{l,k}},-\tfrac{\beta_{2,k}}{\beta_{l,k}},\cdots,\tfrac{1}{\beta_{l,k}},\cdots,-\tfrac{\beta_{m,k}}{\beta_{l,k}}\Big)^\top$$

则计算该列对应的检验数 $\overline{\lambda_l}$, 得:

$$
\begin{aligned}
\overline{\lambda_l}&=\sum_{i\neq l,i=1}^{m}c_i\cdot(-\frac{\beta_{i,k}}{\beta_{l,k}})+c_k\cdot\frac{1}{\beta_{l,k}}-c_l\\
&=\frac{1}{\beta_{l,k}}(-\sum_{i=1}^{m}c_i\beta_{i,k}+c_k)\\
&=-\frac{1}{\beta_{l,k}}\cdot\lambda_k
\end{aligned}
\tag{6}
$$

其中 $\beta_{l,k}>0$(由于上次选择了 $x_l$ 出基), $\lambda_k>0$(由于上次选择了 $x_k$ 入基), 故 $\overline{\lambda_l}<0$, 这说明了本轮第 $l$ 列对应的检验数 $<0$, 它不可能进基.