组合最优化第六次作业

1. 将G中任意两个不相连顶点赋权∞.

2. M中的所有极大独立集构成一个支撑树.

由于M可图，现构造一个连通图G，使得$M \cong M(G)$

3. 若M对应的图不是连通图，则将所有连通分支所对应的支撑树的根节点合并成一个节点即可

3. 若M可图，则将M对应的图每一条无向边赋予方向(任意)，使其变为有向图G'，

图G'的点弧关联矩阵即为M的坐标化矩阵A.

对于G的每个圈C: $uv_iv_2\cdots v_ju$ 可在G'中找到一个守恒流f.

$$f(v_i,v_j)=\begin{cases}1 & (v_i,v_j)\in C，且在 uv_iv_2\cdots v_ju 中 v_i 先于 v_j 出现\\ -1 & (v_i,v_j)\in C \ 且在 uv_iv_2\cdots v_ju 中 v_i 后于 v_j 出现\\ 0 & (v_i,v_j)\notin C\end{cases}$$

则$Af=0$，于是C的边集在A中对应了一组线性相关列.

另一方面

假设$Af=0$，若$f(v_i,v_j)=\alpha \neq 0$，则在有向边(v_i,v_j)上构造v_i指向v_j流值为α的流，否则不构流，由$Af=0$知f对应一条守恒流，守恒流必对应G'中的有向圈，也是G中的圈，证毕

4. ① $\phi\subseteq \mathcal{F}_X$.

② 若$I\in \mathcal{F}_X$，$I'\subseteq I$ 由 $I'\subseteq I\subseteq \mathcal{F}$，且 $I'\subseteq I\subseteq X \Rightarrow I'\subseteq \mathcal{F}_X$.

③ 若 $I_1,I_2\in \mathcal{F}_X$，$|I_1|<|I_2|$，则更有$I_1,I_2\in\mathcal{F}$，于是存在$e\in I_2-I_1$，使得$I_1\cup e\in\mathcal{F}$.

而$I_1\cup e\subseteq X$，故$I_1\cup e\in \mathcal{F}_X$.