Academy of Mathematics and Systems Science Apr. 6, 2024
Chinese Academy of Sciences Assignment
Name: 李夏洋
Major: 运筹学与控制论
UID: 202328000206057
Personal Page: `https://xiayangli2301.github.io`

组合最优化第五次作业

Question 1

将下述问题归结为原始形式的最大流问题, 从而证明它们有多项式算法:

1. 网络中有多个发点和多个收点的最大流问题.
2. 无向网络中的最大流问题.
3. 弧与节点上均有容量限制的最大流问题.
4. 网络是无向的, 并且节点上有容量限制的最大流问题.

Solution.

1. 虚拟一个超级发点, 将发点和原网络中的发点连边, 边的容量限制为原始网络每个发点的容量限制. 同样的, 虚拟一个超级收点, 将收点和原网络中的收点连边, 新加的边没有容量限制.
2. 对于每个无向网络中的边 (u, v), 构造有向边 (u, v) 和 (v, u), 容量限制遵循原无项网络边的容量限制. 从而转化为一个有向网络的最大流问题.
3. 对于原网络的节点 v, 虚拟一个节点 v', 增加一条由 v 到 v' 的有向边, 边的容量限制为节点 v 的容量限制, 删除原网络从 v 发出的所有有向边 (v, u), 增加有向边 (v', u), 且 $f_{(v', u)} = f_{(v,u)}$. 于是构造得到了一个新的有向网络, 问题转化为求解该有向网络的最大流问题.
4. 针对无向和节点容量限制的两个问题, 逐步分别采用 (2) 和 (3) 的方法. 将其逐步原始形式的最大流问题.

Question 2

给出判断一个图 $G = (V, E)$ 是否为二部图的一个 $O(|E|)$ 时间算法.

Solution.

算法 (检查图 $G = (V, E)$ 是否是二部图)

1. 初始化. 任意选取一边 e, 将 e 的两个端点 u 和 v 加入集合 X 和 Y 中. 同时初始化边集合 $E' = \{(u, v)\}$.
2. 任取 $x \in X$, 检查与 x 相邻的所有节点 u, 且 $(x, u) \notin E'$.
   (a) 若 $u \in Y$, $E' := E' + (x, u)$.
   (b) 若 $u \in X$, 输出: 该图不是二部图, 算法终止.
   (c) 若 $u \notin Y$ 且 $u \notin X$, $Y := Y + \{u\}$.
   (d) $X := X - \{x\}$.
3. 任取 $y \in Y$, 检查与 y 相邻的所有节点 v, 且 $(y, v) \notin E'$.
   (a) 若 $v \in X$, $E' := E' + (y, v)$.
   (b) 若 $v \in Y$, 输出: 该图不是二部图, 算法终止.
   (c) 若 $v \notin X$ 且 $v \notin Y$, $X := X + \{v\}$.
   (d) $Y := Y - \{y\}$.
4. 重复 (2),(3), 直至 X 和 Y 均为空集. 输出: 该图是二部图.

算法时间复杂度分析: 由于每条边至多检查一次, 每个点至多检查一次. 故算法时间复杂度为 $O(|E| + |V|) = O(|V|)$.

Question 3

证明二部图中最大匹配的边数等于覆盖所有边的最小点集 (即每条边至少有一个端点在这个集合里) 的点数.

Solution. 设二部图最大匹配边数为 m, 最小点覆盖数为 n.

断言 $m \leqslant n$, 由于覆盖 m 条匹配边至少需要 m 个点.

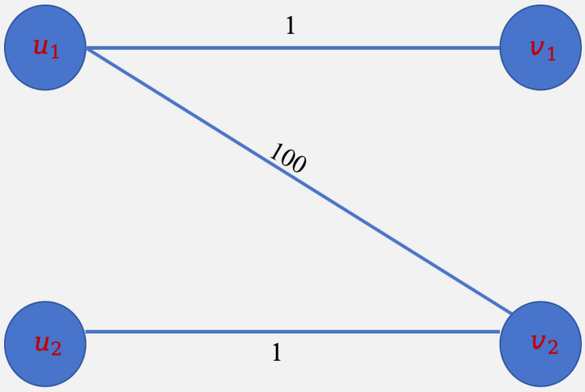
断言 $m \geqslant n$, 由于 m 是最大匹配数, 记该最大匹配 M 的二部为 $X' \subset X$ 和 $Y' \subset Y$. 若 $m < n$, 则 X' 不能覆盖 Y 且 Y' 不能覆盖 X, 则必然存在未盖的非孤立点 $x \in X$, $y \in Y$, $(x, y) \in E$, 但 $(x, y) \notin M$. 矛盾!

证毕!

Question 4

举例说明, 即使一个图其边的权都是正的 (不必是完全图), 它的最大权匹配未必是最大基数匹配.

Solution. 举例如下. 其中最大权匹配 $\{(u_1, v_1), (u_2, v_2)\}$, 但是最大基数匹配为 $\{(u_1, v_2)\}$.



Question 5

一个图 $G = (V, E)$ 的边覆盖是边集 E 的一个子集 C, 使得

$$V = \bigcup_{(u,v)\in C} \{u, v\}$$

假若 $G = (V, E)$ 无孤立点, 证明 $G = (V, E)$ 的最小边覆盖 C 与 $G = (V, E)$ 的最大匹配 M 有如下关系:

$$|C| = |V| - |M|.$$

并给出求 $G = (V, E)$ 最小边覆盖的一个有效算法.

Solution. 先证 $|M| + |C| \leqslant |V|$.

1. 若 M 是 G 的完美匹配, 则显然 M 是 G 的一个边覆盖, 于是 $|C| \leqslant |M| = \frac{|V|}{2}$, 从而 $|C| + |M| = |V|$.

2. 若 M 不是 G 的完美匹配, 设 U 是 M 的非饱和点的集合, 那么 U 的生成子图 $G[U]$ 是无边图. 由于 U 的每个点子在 G 中都关联至少一条边. 这些边的集合记为 E'. 则显然 $M \bigcup E'$ 是 G 的边覆盖, 且 $M \bigcap E' = \emptyset$. 从而

$$|C| \leqslant |M \bigcup E'| = |M| + |E'| = |M| + |V| - 2|M| = |V| - |M|,$$

即 $|M| + |C| \leqslant |V|$.

再证 $|M| + |C| \geqslant |V|$.

设 C 是 G 的一个最小边覆盖. C 在 G 中的边导出子图为 $G[C]=H$, 则 $V(H)=V$. 因为 C 是最小边覆盖, 所以 H 中无圈且不存在长大于 2 的路, 可见 H 的每个连通分支是星图. 设 M' 是 H 的最大匹配, U 为非盖点, 则 $G-M'$ 中每条边恰有一个端点是 U 中的点. 从而

$$|C|-|M'|=|C-M'|=|U|=|V|-2|M'|$$

从而 $|M'|+|C|=|V|$. 又因为 H 是 G 的生成子图, 故 $|M|\geqslant|M'|$. 于是,

$$|C|+|M|\geqslant|V|.$$

故

$$|M|+|C|=|V| \tag{1}$$

有效算法: 先采用最大匹配有效算法求出 G 的最大匹配 M, 对于 M 未饱和点, 任选与其关联的边, 这些边与 M 放在一起便形成了 G 的一个最小边覆盖.

Question 6

把赋权图的最小费用的边覆盖问题归结为赋权的匹配问题, 从而给出一个多项式算法.

Solution. 不考虑孤立点. 对于赋权图的最小费用边覆盖问题. 由 Question 5, 可由极大匹配 M 与非匹配边构成. 即有如下分解:

特别地, 对于最小费用的边覆盖, 未被 M 匹配的点一定会被其相邻的费用最低的边覆盖. 于是, 最小费用边覆盖可以形式化为如下最优化问题:

$$\min \sum_{(u,v)\in\{M|M\text{是匹配}\}} f(u,v)+\sum_{q\text{是 M 未盖点},q\in V} c(q) \tag{2}$$

其中 $c(q)$ 是与未盖点 q 相邻的费用最小的边.

进一步, 最优化问题 (2) 可转化为:

$$\min \sum_{(u,v)\in\{M|M\text{是匹配}\}} [f(u,v)-c(u)-c(v)]+\sum_{q\in V} c(q)$$

$\sum\limits_{q\in V} c(q)$ 为定值, 故最优化问题可转化为:

$$\max \sum_{(u,v)\in\{M|M\text{是匹配}\}} [c(u)+c(v)-f(u,v)]$$

这样, 问题转化为在图 G' 中 $(V(G')=V(G),E(G')=E(G),f_{G'}(u,v)=c(u)+c(v)-f_G(u,v))$ 寻找一个最大赋权匹配. 调用相关算法即可.

Question 7

Slither is a two-person game played on a graph $G = (V, E)$. The players, called First and Second, play alternately, with First playing first. At each step, the player whose turn it is chooses a previously unchosen edge. The only rule is that at every step the set of chosen edges forms a path. The loser is the first player unable to make a legal play at his or her turn. Prove that if G has a perfect matching, then First can force a win.

Solution. 若图 G 存在完美匹配. 则只要第一个选手挑选匹配边 (此时第二个选手在每一步被迫只能选非匹配边), 一定获胜.

若不然, 即按上述策略第一个选手反而失败了, 也即在某部 A 再也无法找到匹配边, 但此时第一个选手所处的顶点一定是未盖点, 又 G 有完美匹配, 矛盾!