

第十九章 格与布尔代数

- 格的定义与性质
- 子格、格同态
- 布尔代数概念

19.1 格的定义和性质

- 格的定义
- 格的基本性质
 - 对偶原理
 - 格中的基本等式与不等式
 - 格中的基本等价条件
 - 格中的算律
- 格的代数定义
- 格中的不等式

格的定义

格的偏序集定义：

$\langle S, \leq \rangle$, S 的任何二元子集都有最大下界、最小上界。

求最大下界、最小上界构成格中的运算 \wedge, \vee

格 $\langle L, \leq \rangle$ 与导出的代数系统 $\langle L, \wedge, \vee \rangle$ 有对应关系

格的实例：

n 的正因子格 F_n

幂集格 $P(B)$

子群格 $L(G)$

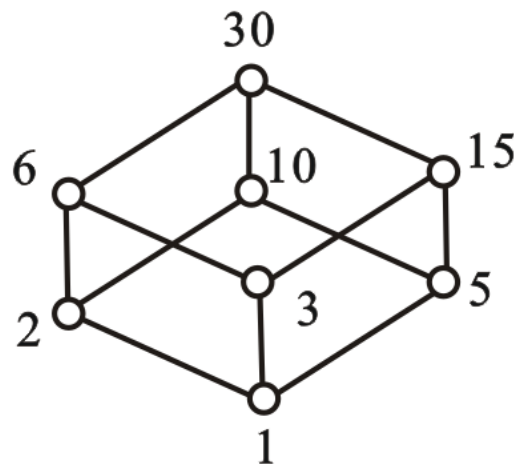
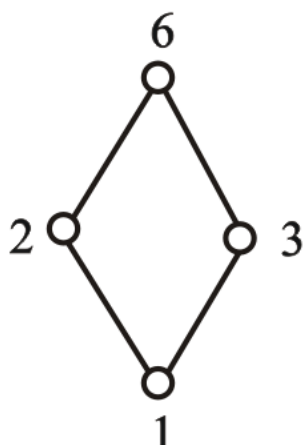
格的实例——正因子格

例1 设 n 是正整数， F_n 是 n 的正因子的集合。 D 为整除关系，则偏序集 $\langle F_n, D \rangle$ 构成格——**正因子格**。

$\forall x, y \in F_n$, $x \vee y$ 是 $\text{lcm}(x, y)$, 即 x 与 y 的最小公倍数。

$x \wedge y$ 是 $\text{gcd}(x, y)$, 即 x 与 y 的最大公约数。

下图给出了格 $\langle F_8, D \rangle$, $\langle F_6, D \rangle$ 和 $\langle F_{30}, D \rangle$

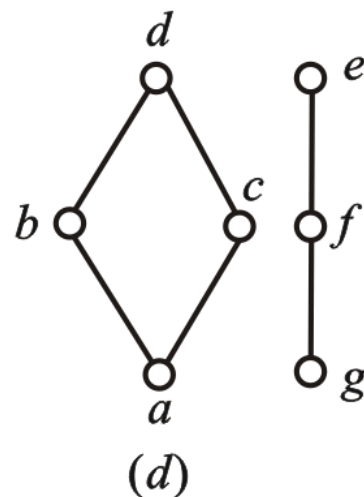
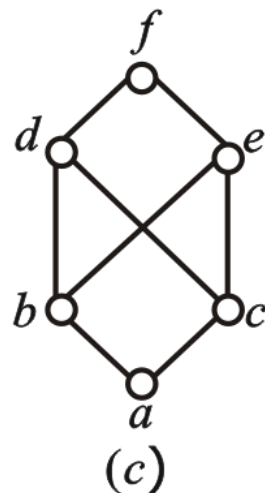
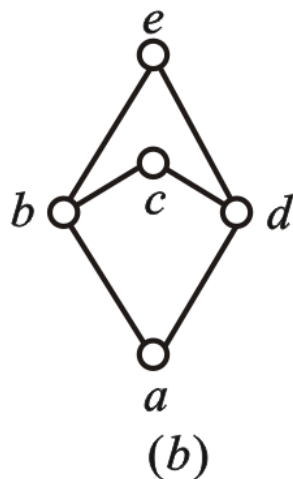
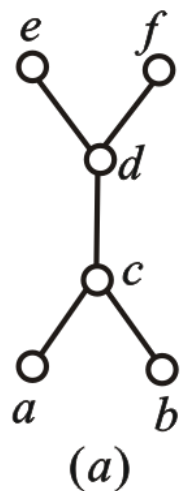


格的实例(续)

例2 判断下列偏序集是否构成格，并说明理由。

(1) $\langle \mathbb{Z}, \leq \rangle$ ，其中 \mathbb{Z} 是整数集， \leq 为小于或等于关系。

(2) 偏序集的哈斯图分别在下图给出。



(1) 是格。

(2) 都不是格。

格的性质——对偶原理

对偶命题： 设 P 是由格中元素, $\leq, \geq, =, \wedge, \vee$ 等表示的命题, 将 P 中的 \leq, \geq, \wedge, \vee 分别替换成 \geq, \leq, \vee, \wedge 得到的命题称为 P 的**对偶命题**, 记作 P^* .

对偶原理： 如果 P 对于一切格为真, 则 P^* 也对一切格为真。

实例 $P: \quad a \wedge b = b \wedge a$

$P^*: \quad a \vee b = b \vee a$

性质： $(P^*)^* = P$

格的性质(续)

格中的基本不等式和等式

自反: $a \leq a$

反对称性: $a \leq b, b \leq a \Rightarrow a = b$

传递: $a \leq b, b \leq c \Rightarrow a \leq c$

上界: $a \leq a \vee b, b \leq a \vee b$

下界: $a \wedge b \leq a, a \wedge b \leq b$

最大下界: $a \leq b, a \leq c \Rightarrow a \leq b \wedge c$

最小上界: $a \geq b, a \geq c \Rightarrow a \geq b \vee c$

格的性质(续)

定理 下列条件彼此等价（格中的基本等价条件）：

(1) $a \leq b$

(2) $a \wedge b = a$

(3) $a \vee b = b$

证 (1) \Rightarrow (2) $a \leq a, a \leq b \Rightarrow a \leq a \wedge b$, 又 $a \wedge b \leq a$, 故得 $a \wedge b = a$.

(2) \Rightarrow (3) $a = a \wedge b \leq b, b \leq b \Rightarrow a \vee b \leq b$, 又 $b \leq a \vee b$, 故得 $a \vee b = b$.

(3) \Rightarrow (1) $a \leq a \vee b = b$.

格的性质(续)

格中交换律、结合律、幂等律、吸收律

证 (1) $a \wedge b$ 是 $\{a, b\}$ 的下界, $b \wedge a$ 是 $\{b, a\}$ 的下界, 而 $\{a, b\} = \{b, a\}$, 因此 $a \wedge b = b \wedge a$.

(2) 由 $(a \wedge b) \wedge c \leq a \wedge b \leq b$ 和 $(a \wedge b) \wedge c \leq c$ 知,
 $(a \wedge b) \wedge c \leq b \wedge c$.

又 $(a \wedge b) \wedge c \leq a \wedge b \leq a$, 故 $(a \wedge b) \wedge c \leq a \wedge (b \wedge c)$.

同理, $a \wedge (b \wedge c) \leq (a \wedge b) \wedge c$. 所以, $a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c$.

格的代数定义

吸收律 设 $\circ, *$ 可交换 $\forall a, b \in S$,
 $a \circ (a * b) = a, a * (a \circ b) = a$

引理 $\langle S, *, \circ \rangle$ 是具有两个二元运算的代数系统。

如果 $*$, \circ 运算满足交换、结合、吸收律, 则:

(1) $*$, \circ 满足幂等律

(2) $a * b = a \Leftrightarrow a \circ b = b$

证: (1) $a * a = a * (a \circ (a * a)) = a$

同理, $a \circ a = a$

(2) (\Leftarrow) $a * b = a * (a \circ b) = a$

(\Rightarrow) $a \circ b = (a * b) \circ b = b$

格的代数定义(续)

定理 设 $\langle S, *, \circ \rangle$ 是具有两个二元运算的代数系统，若 $*$ 和 \circ 运算满足交换、结合、吸收律，则可以适当定义 S 上偏序 \leq ，使得 $\langle S, \leq \rangle$ 构成格，且 $\langle S, \leq \rangle$ 导出的代数系统就是 $\langle S, *, \circ \rangle$ 。

证明思路： 利用运算 \circ 或 $*$ 定义 S 上的二元关系 R

证明 R 为 S 上的偏序

证明对于 S 中任意两个元素 x, y

$$x \vee y = x \circ y, \quad x \wedge y = x * y$$

$\langle S, \wedge, \vee \rangle$ 构成格。

定理的证明

证 (1) 定义二元关系 R , $aRb \Leftrightarrow a \circ b = b$,

(2) R 为偏序:

$$a \circ a = a \Rightarrow aRa$$

$$aRb, bRa \Rightarrow a \circ b = b, b \circ a = a \Rightarrow a = b$$

$$aRb, bRc \Rightarrow a \circ b = b, b \circ c = c$$

$$\Rightarrow a \circ c = a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c = b \circ c = c$$

将 R 记作 \preceq .

定理的证明(续)

$$a \leq b \Leftrightarrow a \circ b = b$$

(3) 先证 $a \circ b$ 为 $\{a, b\}$ 的上界:

由 $a \circ (a \circ b) = (a \circ a) \circ b = a \circ b$ 知, $a \leq a \circ b$.

由 $b \circ (a \circ b) = a \circ (b \circ b) = a \circ b$ 知, $b \leq a \circ b$.

下证 $a \circ b$ 为 $\{a, b\}$ 的最小上界: 假设 c 为上界, 由

$(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c) = a \circ c = c$ 得 $a \circ b \leq c$.

同理可证, $a * b$ 是 $\{a, b\}$ 的最大下界。

格的代数定义

等价定义： 设 $\langle L, \wedge, \vee \rangle$ 是具有两个二元运算的代数系统，如果 \wedge, \vee 满足交换、结合、吸收律，则称 $\langle L, \wedge, \vee \rangle$ 是格。

实例： $\langle F_n, \gcd, \text{lcm} \rangle$

$$\forall x, y \in F_n, \gcd(x, y) = \gcd(y, x), \text{lcm}(x, y) = \text{lcm}(y, x)$$

$$\gcd(x, \gcd(y, z)) = \gcd(\gcd(x, y), z)$$

$$\text{lcm}(x, \text{lcm}(y, z)) = \text{lcm}(\text{lcm}(x, y), z)$$

$$\gcd(x, \text{lcm}(x, y)) = x, \text{lcm}(x, \gcd(x, y)) = x$$

$x|y \Leftrightarrow \text{lcm}(x, y) = y$, $\langle F_n, | \rangle$ 与 $\langle F_n, \gcd, \text{lcm} \rangle$ 是同一个格

格的性质(续)

格的不等式

(1) 保序不等式

$$a \leq b, c \leq d \Rightarrow a \wedge c \leq b \wedge d, a \vee c \leq b \vee d$$

(2) 分配不等式

$$a \vee (b \wedge c) \leq (a \vee b) \wedge (a \vee c),$$

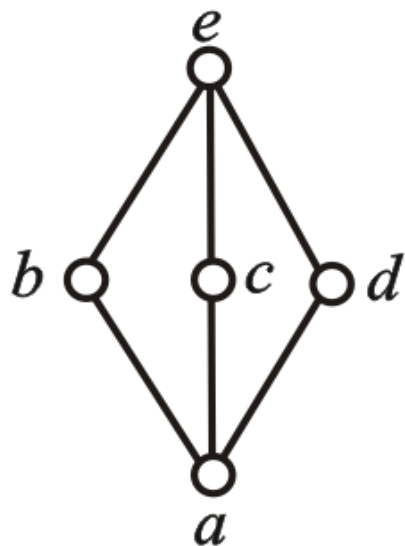
$$a \wedge (b \vee c) \geq (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$$

(3) 模不等式

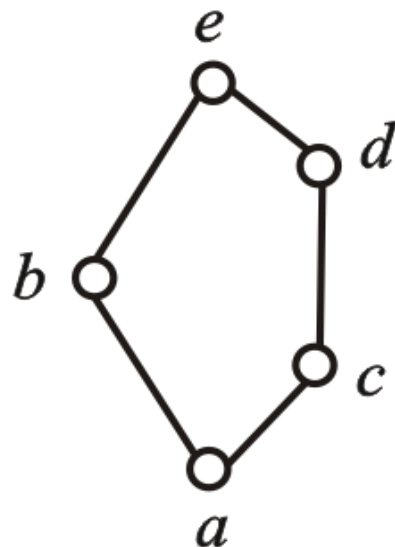
$$a \leq b \Leftrightarrow a \vee (c \wedge b) \leq (a \vee c) \wedge b$$

思考：如何证明以上不等式？

不满足分配律的格



钻石格



五角格

钻石格: $b \vee (c \wedge d) = b \vee a = b$
 $(b \vee c) \wedge (b \vee d) = e \wedge e = e$

思考: 指出五角格不满足分配律的元素

19.2 子格、格同态

- 子格
 - 子格定义
 - 子格判别
- 格的同态与同构
 - 格同态定义
 - 格同态的性质
 - 完备格

格的子格

L 的**子格**： L 的非空子集 S ，且 S 关于 L 中 \wedge 和 \vee 运算封闭。

注意：子格元素在原格中求最大下界，最小上界。

实例：子群格 $L(G)$ 是格，但不一定是 $P(G)$ 的子格。

例如Klein四元群 $G=\{e, a, b, c\}$,

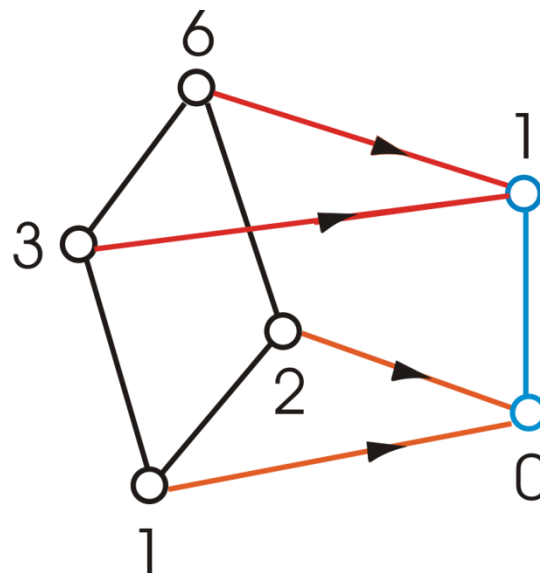
$$L(G) = \{ \langle e \rangle, \langle a \rangle, \langle b \rangle, \langle c \rangle, G \}$$

$$P(G) = \{ \phi, \langle e \rangle, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \langle a \rangle, \langle b \rangle, \langle c \rangle, \\ \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}, \{a, b, e\}, \{a, c, e\}, \{b, c, e\}, G \}$$

格的同态

定义 设 L_1 和 L_2 是格, $f: L_1 \rightarrow L_2, \forall x, y \in L_1$, 有
 $f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y), f(x \vee y) = f(x) \vee f(y)$
则称 f 为 L_1 到 L_2 的同态.

实例: $L_1 = \langle \{1, 2, 3, 6\}, | \rangle,$
 $L_2 = \langle \{0, 1\}, \leq \rangle$
 $f(1) = f(2) = 0,$
 $f(3) = f(6) = 1$
 f 为 L_1 到 L_2 的同态.



格同态的性质

格同态具有保序性

定理1 f 是格 L_1 到 L_2 的同态, 则 $\forall a, b \in L_1$,
 $a \leq b \Rightarrow f(a) \leq f(b)$.

证: $a \leq b \Rightarrow a \wedge b = a$
 $\Rightarrow f(a \wedge b) = f(a)$
 $\Rightarrow f(a) \wedge f(b) = f(a)$
 $\Rightarrow f(a) \leq f(b)$

注意: $f(a) \leq f(b)$ 不一定推出 $a \leq b$. 思考反例.

格同态的性质(续)

定理2 f 为双射, f 为 L_1 到 L_2 的同构当且仅当

$$\forall a, b \in L_1, a \leq b \Leftrightarrow f(a) \leq f(b)$$

证: (必要性) 由定理1知, $a \leq b \Rightarrow f(a) \leq f(b)$. 反过来, 设 $f(a) \leq f(b)$, 则有 $f(a) \wedge f(b) = f(a)$. 因为 f 是同态, 故 $f(a \wedge b) = f(a)$. 进而由 f 是单射知, $a \wedge b = a$, 于是有 $a \leq b$.
(充分性) 见后

格同态的性质(续)

定理2 f 为双射, f 为 L_1 到 L_2 的同构当且仅当

$$\forall a, b \in L_1, a \leq b \Leftrightarrow f(a) \leq f(b)$$

(充分性) 证明同构的思路:

(1) 由保序性证明 $f(a) \vee f(b) \leq f(a \vee b)$

(2) 由满射性存在 d 使得 $f(a) \vee f(b) = f(d)$.

由 $f(a) \leq f(d)$ 推出 $a \leq d$, 同理 $b \leq d$.

(3) $a \vee b \leq d$ 推出 $f(a \vee b) \leq f(a) \vee f(b)$

于是由(1)和(3)得 $f(a) \vee f(b) = f(a \vee b)$.

同理 $f(a) \wedge f(b) = f(a \wedge b)$.

完备格

定义 设 L 是格，若对 L 的任何子集 S ， S 的最大下界 $\wedge S$ ，最小上界 $\vee S$ 均存在，称 L 是**完备格**。

注意： S 可以是空集

$$x \text{ 是 } \emptyset \text{ 的下界 } \Leftrightarrow \forall a (a \in \emptyset \rightarrow x \leq a)$$

$$x \text{ 是 } \emptyset \text{ 的上界 } \Leftrightarrow \forall a (a \in \emptyset \rightarrow a \leq x)$$

前件为假， L 中任何元素都是 \emptyset 的上界和下界，取 $\wedge \emptyset$ 为 L 的最大元， $\vee \emptyset$ 为 L 的最小元。

判定： L 为偏序，任意子集 $S \subseteq L$ ， $\vee S$ (或 $\wedge S$) 存在。

实例：有限格、幂集格均为完备格

布尔代数的定义

$$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$$

$$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$$

定义 有补分配格称为布尔格（布尔代数）

定理 设 $\langle B, *, \circ, \Delta, a, b \rangle$ 是代数系统，其中 $*$, \circ 为二元运算， Δ 为一元运算， a, b 为0元运算. 如果满足以下算律：

交换律 $x * y = y * x, x \circ y = y \circ x$

分配律 $x * (y \circ z) = (x * y) \circ (x * z)$

$$x \circ (y * z) = (x \circ y) * (x \circ z)$$

同一律 $x * b = x, x \circ a = x$

补元律 $x * \Delta x = a, x \circ \Delta x = b$

则 $\langle B, *, \circ, \Delta, a, b \rangle$ 构成布尔格.

布尔代数的定义(续)

集合的幂集格 $\langle P(B), \cap, \cup, \sim, \emptyset, B \rangle$ 是布尔代数。

逻辑代数 $\langle \{0, 1\}, \wedge, \vee, -, 0, 1 \rangle$ 是布尔代数。

任何有限布尔代数元素数为 2^n 。

任何有限布尔代数都同构于 $\{0, 1\}^n$ 。