No.

Date.

第四周

P281 :2, 7, 9(3), 11　P282 13(1)(3), 16, 19, 21

2. ~~先证封闭~~ 由于G为群，故 $\forall a,b\in G$，$a\circ b = au^{-1}b \in G$，故封闭

$a\circ(b\circ c) = a\circ(bu^{-1}c) = au^{-1}bu^{-1}c$，$a\circ b\circ c = au^{-1}bu^{-1}c$

故 $a\circ(b\circ c) = (a\circ b)\circ c$ 符合结合律.

对于任何 $a\in G$，有 $a\circ u = a$，$u\circ a = a$. 故 u 为单位元.

~~对 $\forall a\in G$，$a\circ(ua^{-1}) = au^{-1}(ua^{-1}) = e$~~

对 $\forall a\in G$，$a\circ(ua^{-1}u) = au^{-1}ua^{-1}u = u$，

$(ua^{-1}u)\circ a = u$，故 $ua^{-1}u$ 为 a 的逆元

从而 G 关于 $\circ$ 运算构成群

7. ~~若 $y^k = y$~~ 先用归纳证 $(x^{-1}yx)^k = x^{-1}y^kx$

~~⇒~~：$k=1$ 时成立，$k\le m$ 时成立，则 $(x^{-1}yx)^{m+1} = x^{-1}y^m x\cdot x^{-1}yx$

$= x^{-1}y^{m+1}x$

故成立

⇒：从而 $(x^{-1}yx)^k = x^{-1}yx \Rightarrow x^{-1}y^kx = x^{-1}yx$

由于G为群，$x\cdot x^{-1}y^kx\cdot x^{-1} = x\cdot x^{-1}yx\cdot x^{-1} \Rightarrow y^k = y$

⇐：$y^k = y$ 时，$x^{-1}yx = x^{-1}y^kx = (x^{-1}yx)^k$.

9. (3) 设 $|abc| = k_1$，$|bca| = k_2$，$|cab| = k_3$

则 $(abc)^{k_1} = e$，e 为单位元

$(abc)^{k_1} = a(bca)^{k_1-1}bc = e$

$a^{-1}a(bca)^{k_1-1}bca = a^{-1}ea = e$.

故 $(bca)^{k_1} = e$. 故 $k_2 | k_1$

No.

Date.

$(bca)^{k_2}=e \quad a(bca)^{k_2}bc=abc=(abc)^{k_2+1}$

故 $(abc)^{k_2}=e$. 从而 $k_1|k_2 \Rightarrow k_1=k_2$

$(bca)^{k_2}=e$ $b^{-1}b(cab)^{k_2}=b^{-1}eb=e$.

故 $(cab)^{k_2}=e$, $k_3|k_2$.

$(cab)^{k_3}=e$ $(bca)^{k_3}b\cdot b^{-1}=b\cdot eb^{-1}=e$

故 $(bca)^{k_3}=e$ 故 $k_2|k_3$.

从而 $k_1=k_2=k_3$

11. 若对 $\forall x\in G$, $x^2=e$, 则 $\forall x,y\in G$,

$xy=x^{-1}(x^2y^2)y^{-1}=\cancel{x^{-1}y^{-1}=x^{-1}}y^{-1}x^{-1}(e\cdot e)y^{-1}$

$=x^{-1}y^{-1}=x^{-1}((xy)\cdot(xy))y^{-1}=yx$.

故G为交换群，与G为非交换群矛盾.

故 $\exists x\in G$, $x^2\neq e$, $x\neq x^{-1}$, 从而 $x\neq e$.

令 $a=x$, $b=x^{-1}$ 即符合条件.

13.(1) ~~$M_n(R)$ 上单位元为 $\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$, 为对称矩阵.~~

~~$\forall$ 对称矩阵 $x=\begin{pmatrix}a_1&a_2\\a_2&a_3\end{pmatrix}$, $y=\begin{pmatrix}b_1&b_2\\b_2&b_3\end{pmatrix}$~~

~~实对称矩阵可正交对角化，故~~

$y=R^TCR$, $RR^T=I$, $y^{-1}=R^TC^{-1}R$ 亦为对称矩阵

~~对称矩阵乘对称矩阵仍为对称矩阵，故 A^{-1} 也为对称矩阵，故~~

13.(1) ~~单元~~单位元为 $\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$，~~任两对称矩阵~~

任两对称矩阵 A，B，A−B 为对称矩阵，故为子群

(3) $\begin{pmatrix}1&\\&2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2&\\&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&\\&1\end{pmatrix}$

行列式依次为 2，2，−1.

故不封闭，不构成子群

16. 若 $H_1H_2=H_2H_1$，

$\forall h_1h_2;h_3h_4\in H_1H_2$，~~$h_3h_4$ 逆元为 $h_4^{-1}h_3^{-1}\in H_1H_2$~~

~~故 $h_4^{-1}h_3^{-1}\in H_1H_2$~~

考虑 $h_1h_2h_4^{-1}h_3^{-1}$，$h_2h_4^{-1}\in H_2$，$h_3^{-1}\in H_1$，~~设 $h_4^{-1}h_3^{-1}=h_5h_6$~~

因 $H_1H_2=H_2H_1$，$\exists h_5h_6=h_2h_4^{-1}h_3^{-1}$

其中 $h_5\in H_1$，$h_6\in H_2$

故 $h_1h_2h_4^{-1}h_3^{-1}=h_1h_5h_6=(h_1h_5)h_6$

$h_1h_5\in H_1$，故 $h_1h_2h_4^{-1}h_3^{-1}\in H_1H_2$

故 H_1H_2 为 G 的子群.

若 H_1H_2 为子群

~~对 $\forall h_1h_2\in H_1H_2$，有逆元 $h_2^{-1}h_1^{-1}\in H_1H_2$.~~

对 $\forall h_2h_1\in H_2H_1$，考虑 $h_1^{-1}h_2^{-1}\in H_1H_2$，

其逆元 $h_2h_1\in H_1H_2$，故 $H_2H_1\subseteq H_1H_2$

No.

Date.

$\forall h_1h_2 \in H_1H_2$, ~~$h_2^{-1}h_1^{-1} \in H_1H_2$~~ $(h_1h_2)^{-1} = h_3h_4$,

$h_3 \in H_1$, $h_4 \in H_2$, $h_1h_2 = (h_3h_4)^{-1} = h_4^{-1}h_3^{-1} \in H_2H_1$.

故 $H_1H_2 \subseteq H_2H_1$. 从而 $H_1H_2 = H_2H_1$.

证毕.

19. (1) $a, a^2, a^4, a^7, a^8, a^{11}, a^{13}, a^{14}$,

$G = \{a, \cdots, a^{14}, e\}$

先证 a^i 为生成元，当且仅当 $i \neq 0$ && $(i, 15) = 1$.

~~充分性~~ 若 $(i, 15) = k$, $k \neq 1$, 则 $a^{k+1} \neq a^{tk}$, 对 $\forall t$

否则 $k \mid 15 \mid tk - k - 1$. 不可能，故无法生成 a^{k+1}.

非生成元.

~~若 a^i 为生成元~~，若 $(i, 15) = 1$. $ix + 15y = 1$.

$(a^i)^{mx} = a^m$ 可生成.

(2) $A_1 = G$, $A_2 = \langle a^3 \rangle$, $A_3 = \langle a^5 \rangle$

$A_4 = \{e\}$.

循环群的子群也是循环群，由于 G 中元素阶为 1, 3, 或 5 或 15

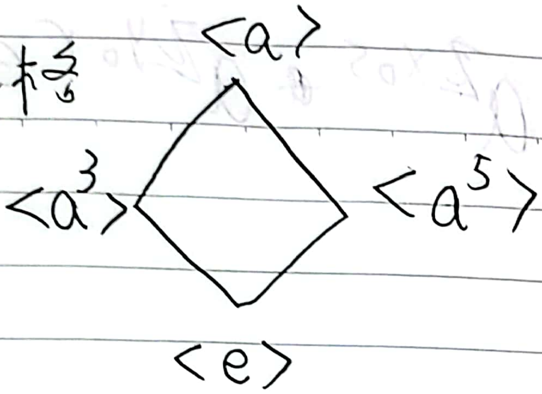
故子群的阶也只能为 1, 3, 5 或 15

阶为 1 的循环群只能为 $\{e\}$，阶为 15 的只能是 G

阶为 3 的只能为 A_3 (因阶为 3 的元素只有 a^5, a^{10}, 构成

阶为 5 的只能为 A_2 (因阶为 5 的元素只有 a^3, a^6, a^9, a^{12} 构成

子群格



21 由于G为rs阶循环群，其可表示为$\{a, \cdots, a^{rs-1}, e\}$

~~2.~~ 首先，对子群$T \leq G$，~~若$a \in T$~~ 设i为满足$a^i \in T$的最小自然数(≥ 0)，先证其为 ~~(rs,i)~~ $\frac{rs}{(rs,i)}$阶的

因 $xi + y \cdot rs = (rs,i)$

故 $(a^i)^{xm} = a^{(rs,i)\cdot m}$，故其至少有$\frac{rs}{(rs,i)}$个元素

再证 $\forall a^j, (rs,i) \nmid j$，有 $a^j \notin T$.

若 $a^j \in T$, $j = (rs,i)k + j_0$, $1 \leq j_0 < (rs,i)$

故 $a^{(rs,i)}, a^{-(rs,i)} \in T$，故 $a^{j_0} \in T$

与i最小性矛盾. 故知T仅含$a^{(rs,i)m}$, $m \in N$.

故其为$\frac{rs}{(rs,i)}$阶的、

因 H_1为r阶，H_2为s阶，设$H_1 = \langle a^i\rangle$, $H_2 = \langle a^j\rangle$

因 $(r,s)=1$，有 $(rs,i) = s$, $(rs,j) = r$

$i = s\cdot l_1$, $j = r \cdot l_2$, $(l_1, r) = 1$, $(l_2, s) = 1$.

$H_1 = \langle a^i\rangle = \langle a^s\rangle$

$H_2 = \langle a^j\rangle = \langle a^r\rangle$

$H_1 H_2 = \{ a^{\cancel{xi+yj}\, xs+yr} \mid x, y \in Z\} \subseteq G$

因$(s,r)=1$，故$\exists x_0, y_0$, $x_0 s + y_0 r = 1$.

No.

Date.

故 $\forall a^{z}\cancel{r} = a^{z(x_0 s+y_0 r)} = a^{zx_0 s} \cdot a^{zy_0 r} \in H_1H_2$

故 $G=H_1H_2$