

第二十二章 组合计数方法

- 22.1 递推方程的公式解法
- 22.2 递推方程的其他解法
- 22.3 生成函数的定义及其性质
- 22.4 生成函数的应用
- 22.5 指数生成函数及其应用
- 22.6 高级计数

22.1 递推方程的公式解法

- 递推方程的定义
- 递推方程的实例
- 常系数线性递推方程的求解
 - 常系数线性递推方程定义
 - 公式解法
- 递推方程在计数问题中的应用

递推方程的定义

设序列 $a_0, a_1, \dots, a_n, \dots$, 记为 $\{a_n\}$, 一个把 a_n 与某些 a_i ($i < n$)联系起来的等式, 叫做关于序列 $\{a_n\}$ 的**递推方程**。

当给定递推方程和适当的初值就唯一确定了序列。

例1 Fibonacci数列: 1, 1, 2, 3, 5, 8, ... ,

Fibonacci数列的递推方程为: $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$,

初值: $f_0 = 1, f_1 = 1$

例2 阶乘计算数列: 1, 2, 6, 24, 5! , ... ,

阶乘递推方程为: $F(n) = nF(n-1)$, 初值 $F(1) = 1$

递推方程的实例

例3 一个编码系统用8进制数字对信息编码，一个码是有效的当且仅当含有偶数个7. 求 n 位长的有效码字有多少个？

解 设所求有效码字为 a_n 个。

$n-1$ 位长的八进制串



$x = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$

含偶数个7 a_{n-1}



$y = 7$

含奇数个7 $8^{n-1} - a_{n-1}$

则 $a_n = 7a_{n-1} + 8^{n-1} - a_{n-1}$, 即 $a_n = 6a_{n-1} + 8^{n-1}$, $a_1 = 7$ 解得 $a_n = (6^n + 8^n)/2$.

例4 Hanoi塔问题: $T(n) = 2T(n-1) + 1$, $T(1) = 1$,

解得 $T(n) = 2^n - 1$

常系数线性齐次递推方程

定义

$$\begin{cases} H(n) - a_1 H(n-1) - a_2 H(n-2) - \cdots - a_k H(n-k) = 0 \\ H(0) = b_0, H(1) = b_1, H(2) = b_2, \dots, H(k-1) = b_{k-1} \end{cases}$$

其中 a_1, a_2, \dots, a_k 为常数, $a_k \neq 0$, 称为 k 阶常系数线性齐次递推方程, b_0, b_1, \dots, b_{k-1} 为 k 个初值。

实例: Fibonacci数列的递推方程 $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ (✓)

$$F(n) = nF(n-1), F(1) = 1 \quad (\times)$$

$$a_n = 6a_{n-1} + 8^{n-1}, a_1 = 7 \quad (\times)$$

$$T(n) = 2T(n-1) + 1, T(1) = 1 \quad (\times)$$

公式解法

- 特征方程、特征根
- 递推方程的解与特征根的关系
- 解的线性性质
- 无重根下通解的结构及求解实例
- 有重根下通解结构及求解实例

特征方程与特征根

$$\begin{cases} H(n) - a_1 H(n-1) - a_2 H(n-2) - \cdots - a_k H(n-k) = 0 \\ H(0) = b_0, H(1) = b_1, H(2) = b_2, \dots, H(k-1) = b_{k-1} \end{cases}$$

称 $x^k - a_1 x^{k-1} - \cdots - a_k = 0$ 为其特征方程,

称特征方程的根为递推方程的特征根。

实例

递推方程 $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$

特征方程 $x^2 - x - 1 = 0$

特征根 $\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \frac{1-\sqrt{5}}{2}$

递推方程解与特征根的关系

定理1 q 是非零复数, 则 q^n 是递推方程的解当且仅当 q 是它的特征根。

证 q^n 是递推方程的解

$$\Leftrightarrow q^n - a_1 q^{n-1} - a_2 q^{n-2} - \cdots - a_k q^{n-k} = 0$$

$$\Leftrightarrow q^{n-k}(q^k - a_1 q^{k-1} - a_2 q^{k-2} - \cdots - a_k) = 0$$

$$\Leftrightarrow q^k - a_1 q^{k-1} - a_2 q^{k-2} - \cdots - a_k = 0$$

$$\Leftrightarrow q \text{ 是它的特征根}$$

解的线性性质

定理2 $h_1(n)$ 和 $h_2(n)$ 是递推方程的解, c_1, c_2 为任意常数, 则 $c_1h_1(n)+c_2h_2(n)$ 是递推方程的解。

证 将 $c_1h_1(n)+c_2h_2(n)$ 代入递推方程左边, 化简后等于0.

推论 若 q_1, q_2, \dots, q_k 是递推方程的特征根, 则 $c_1q_1^n + c_2q_2^n + \dots + c_kq_k^n$ 是递推方程的解, 其中 c_1, c_2, \dots, c_k 是任意常数。

无重根时的通解结构

通解定义 若对递推方程的每个解 $h(n)$ ，都存在一组常数 c'_1, c'_2, \dots, c'_k 使得 $h(n)=c'_1q_1^n+c'_2q_2^n+\dots+c'_kq_k^n$ 成立，则称 $c_1q_1^n+c_2q_2^n+\dots+c_kq_k^n$ 为**通解**，其中 c_1, c_2, \dots, c_k 是任意常数。

定理3 设 q_1, q_2, \dots, q_k 是 k 阶常系数线性齐次递推方程不等的特征根，则 $H(n)=c_1q_1^n+c_2q_2^n+\dots+c_kq_k^n$ 为通解。
证明：略。

求解实例

例5 Fibonnaci数列，特征根为 $\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ ，

通解为 $f_n = c_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + c_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$

带入初值 $f_0=1, f_1=1$, 得
$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 1 \\ c_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + c_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = 1 \end{cases}$$

解得 $c_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \frac{1+\sqrt{5}}{2}, c_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \frac{1-\sqrt{5}}{2}$

于是 $f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}$

有重根时求解中的问题

例6 $H(n) - 4H(n-1) + 4H(n-2) = 0$

特征方程 $x^2 - 4x + 4 = 0$,

通解 $H(n) = c_1 2^n + c_2 2^n = c 2^n$

代入方程得:

$$c 2^n - 4c 2^{n-1} + 4c 2^{n-2} = 0$$

$c - 2c + c = 0$, 任意 c 都是解, 但还有其他形式的解,
例如 $n 2^n$ 是解, 且与 2^n 线性无关。

原因: 两个解 $c_1 2^n$ 与 $c_2 2^n$ 线性相关。

有重根时的通解结构

定理4 若 q 是递推方程的 e 重特征根, 则 $q^n, nq^n, \dots, n^{e-1}q^n$ 是递推方程的线性无关的解。

定理5 设 q_1, q_2, \dots, q_t 是递推方程的不相等的特征根, 且 q_i 的重数为 e_i , 令

$$H_i(n) = (c_{i1} + c_{i2}n + \dots + c_{ie_i}n^{e_i-1})q_i^n,$$

则通解 $H(n) = \sum_{i=1}^t H_i(n)$.

证明: 略。

求解实例

例7 $H(n)+H(n-1)-3H(n-2)-5H(n-3)-2H(n-4)=0$

$$H(0)=1, H(1)=0, H(2)=1, H(3)=2$$

解：特征方程 $x^4 + x^3 - 3x^2 - 5x - 2 = 0$ ，特征根 $-1, -1, -1, 2$ ，

通解为 $H(n) = (c_1 + c_2n + c_3n^2)(-1)^n + c_42^n$

$$\begin{cases} c_1 + c_4 = 1 \\ -c_1 - c_2 - c_3 + 2c_4 = 0 \\ c_1 + 2c_2 + 4c_3 + 4c_4 = 1 \\ -c_1 - 3c_2 - 9c_3 + 8c_4 = 2 \end{cases}$$

解得 $c_1 = \frac{7}{9}, c_2 = -\frac{1}{3}, c_3 = 0, c_4 = \frac{2}{9}$

解为 $H(n) = \frac{7}{9}(-1)^n - \frac{1}{3}n(-1)^n + \frac{2}{9}2^n$

常系数线性非齐次递推方程求解

- 递推方程的标准型
- 通解结构
- 特解的求法
 - 多项式函数
 - 指数函数
 - 组合形式

递推方程的标准型及通解

$$H(n) - a_1H(n-1) - \cdots - a_kH(n-k) = f(n), n \geq k, a_k \neq 0, f(n) \neq 0.$$

定理6 设 $\overline{H(n)}$ 是对应齐次方程的通解, $H^*(n)$ 是一个特解, 则

$$H(n) = \overline{H(n)} + H^*(n)$$

是递推方程的通解。

证 (1) $H(n)$ 是解, 代入验证。

(2) 设 $h(n)$ 是解, 证明 $h(n)$ 为一个齐次解与特解 $H^*(n)$ 之和。

$$h(n) - a_1h(n-1) - \cdots - a_kh(n-k) = f(n)$$

$$\underline{-) H^*(n) - a_1H^*(n-1) - \cdots - a_kH^*(n-k) = f(n)}$$

$$[h(n) - H^*(n)] - a_1[h(n-1) - H^*(n-1)] - \cdots - a_k[h(n-k) - H^*(n-k)] = 0$$

故 $h(n) - H^*(n)$ 是齐次解, 即 $h(n)$ 是一个齐次解与 $H^*(n)$ 之和。

特解的求法

$f(n)$ 为 n 的 t 次多项式，一般 $H^*(n)$ 也为 n 的 t 次多项式

例8 $a_n + 5a_{n-1} + 6a_{n-2} = 3n^2$

解：设 $a_n^* = P_1n^2 + P_2n + P_3$ ，代入得

$$P_1n^2 + P_2n + P_3 + 5[P_1(n-1)^2 + P_2(n-1) + P_3] + 6[P_1(n-2)^2 + P_2(n-2) + P_3] = 3n^2$$

$$\begin{cases} 12P_1 = 3 \\ -34P_1 + 12P_2 = 0 \\ 29P_1 - 17P_2 + 12P_3 = 0 \end{cases}$$

$$P_1 = \frac{1}{4}, P_2 = \frac{17}{24}, P_3 = \frac{115}{288},$$

$$a_n^* = \frac{1}{4}n^2 + \frac{17}{24}n + \frac{115}{288}$$

$$\text{通解为 } a_n = c_1(-2)^n + c_2(-3)^n + \frac{1}{4}n^2 + \frac{17}{24}n + \frac{115}{288}$$

实例

例9 Hanoi塔

$$T(n)=2T(n-1)+1$$

$$T^*(n)=P$$

$$P=2P+1, P=-1$$

$T(n)=c2^n-1$, 代入初值 $T(1)=1$, 得 $c=1$,
解为 $T(n)=2^n-1$.

例10 $H(n) - H(n-1) = 7n$

设特解 P_1n+P_2 不行, 应设 n^2 次项, 因为特征根是1.

设 $H^*(n)=P_1n^2+P_2n$, 代入 解得 $P_1=P_2=7/2$,

通解为 $H(n) = c \cdot 1^n + \frac{7}{2}n(n+1) = c + \frac{7}{2}n(n+1)$

特解的求法（续）

$f(n)$ 为指数函数 β^n ，若 β 不是特征根，则特解为
 $H^*(n) = P\beta^n$

例11 通信编码问题

$$a_n = 6a_{n-1} + 8^{n-1}, a_1 = 7$$

解： $a_n^* = P8^{n-1}$ ，代入得 $P=4$ ，

通解 $a_n = c \cdot 6^n + 4 \cdot 8^{n-1}$ ，

代入初值得 $a_n = (6^n + 8^n)/2$.

特解的求法（续）

若 β 是 e 重特征根，则特解为 $Pn^e\beta^n$

例12 求 $H(n) - 5H(n-1) + 6H(n-2) = 2^n$ 的一个特解。

解： 设 $H^*(n) = Pn2^n$,

代入得

$$Pn2^n - 5P(n-1)2^{n-1} + 6P(n-2)2^{n-2} = 2^n$$

解得 $P = -2$

故 $H^*(n) = -n2^{n+1}$

特解的求法（续）

例13 递推公式

$$a_n - 2a_{n-1} = n + 3^n$$

$$a_0 = 0$$

解： 设特解为 $a_n^* = P_1n + P_2 + P_33^n$ ，代入得

$$(P_1n + P_2 + P_33^n) - 2[P_1(n-1) + P_2 + P_33^{n-1}] = n + 3^n$$

即 $-P_1n + (2P_1 - P_2) + P_33^{n-1} = n + 3^n$

解得 $P_1 = -1, P_2 = -2, P_3 = 3$

令 $a_n = c2^n - n - 2 + 3^{n+1}$

解得 $c = -1, a_n = -2^n - n - 2 + 3^{n+1}$

22.2 递推方程的其他解法

- 换元法
- 迭代归纳法
- 差消法
- 尝试法

换元法

思想：通过换元转化成常系数线性递推方程

例1
$$\begin{cases} a_n^2 = 2a_{n-1}^2 + 1 \\ a_0 = 2 \end{cases} \quad a_n > 0$$

解：令 $b_n = a_n^2$, 代入得

$$b_n = 2b_{n-1} + 1, \quad b_0 = 4$$

解得 $b_n = 5 \cdot 2^n - 1$, 故 $a_n = \sqrt{5 \cdot 2^n - 1}$

换元法—归并排序

例2 归并排序

$$T(n)=2T(n/2)+n-1, \quad n=2^k$$

$$T(2)=1$$

解： $H(k)=2H(k-1)+2^k-1, \quad H(1)=1$

令 $H^*(k)=P_1k2^k+P_2$, 解得 $P_1=P_2=1, H^*(k)=k2^k+1$

通解 $H(k)=C2^k+k2^k+1$, 代入初值, 得 $C=-1$,

于是, $H(k)=-2^k+k2^k+1$,

故 $T(n)=n\log n-n+1$.

迭代归纳法

$$\begin{aligned} &(a \times c) \times b; (c \times a) \times b; \\ &a \times (b \times c); a \times (c \times b); \\ &c \times (a \times b); (a \times b) \times c \end{aligned}$$

例3 给定 n 个实数 a_1, a_2, \dots, a_n ，可以用多少种不同的方式来构成它们的乘积？这里认为相乘的次序不同也是不同的方法，如 $(a_1 \times a_2) \times a_3$ 与 $a_1 \times (a_2 \times a_3)$ 是不同的方法。

解：令 $h(n)$ 表示这 n 个数构成乘积的方法数。显然有 $h(1) = 1$ 。假设 $n - 1$ 个数 a_1, a_2, \dots, a_{n-1} 的乘积已经构成，有 $h(n - 1)$ 个。任取其中的一个乘积，它是由 $n - 2$ 次乘法得到的。对于其中任一次相乘的两个因式，加入 a_n 的方法有4种，因此这种加入 a_n 的方法数共有 $4(n - 2)$ 种。另外，还可以把 a_n 分别乘在整个乘积的左边或右边，因此加入 a_n 的方法数是 $4(n - 2) + 2 = 4n - 6$ 。

迭代归纳法

根据以上的分析可以得到递推方程：

$$h(n) = (4n-6) h(n-1), h(1) = 1$$

$$h(n) = (4n - 6)h(n - 1)$$

$$= (4n - 6)(4n - 10)h(n - 2)$$

$$= \dots$$

$$= (4n - 6)(4n - 10) \dots 6 \cdot 2 \cdot h(1)$$

$$= 2^{n-1} [(2n - 3)(2n - 5) \dots 3 \cdot 1]$$

$$= 2^{n-1} \frac{(2n-2)!}{(2n-2)(2n-4) \dots 4 \cdot 2}$$

$$= \frac{(2n-2)!}{(n-1)!}$$

用归纳法验证。

迭代归纳法—错位排列

例4 错位排列问题

错位排列： $\{1, 2, \dots, n\}$ 的排列 $a_1 a_2 \dots a_n$, $a_i \neq i, i=1, 2, \dots, n$, n 个元素的错位排列数记作 D_n

将错位排列按首元素 $2, 3, \dots, n$ 分类：有 $n-1$ 类，第一位为 2 的类：

第二位为 1 ： 方法数为 D_{n-2}

第二位不是 1 ： 方法数为 D_{n-1}

递推方程：

$$D_n = (n-1)(D_{n-1} + D_{n-2})$$

$$D_1 = 0, D_2 = 1$$

迭代归纳法—错位排列(续)

解: $D_n = (n-1)(D_{n-1} + D_{n-2})$

$$\begin{aligned} D_n - nD_{n-1} &= -[D_{n-1} - (n-1)D_{n-2}] = \cdots \\ &= (-1)^{n-2}[D_2 - 2D_1] = (-1)^{n-2} \end{aligned}$$

$$D_n = nD_{n-1} + (-1)^n, D_1 = 0$$

$$\begin{aligned} D_n &= n(n-1)D_{n-2} + n(-1)^{n-1} + (-1)^n \\ &= n(n-1)(n-2)D_{n-3} + n(n-1)(-1)^{n-2} + n(-1)^{n-1} + (-1)^n \\ &= \cdots \\ &= n(n-1) \cdots 2D_1 + n(n-1) \cdots 3(-1)^2 + n(n-1) \cdots 4(-1)^3 + \\ &\quad \cdots + n(-1)^{n-1} + (-1)^n \\ &= n! \left[1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!} \right] \end{aligned}$$

用归纳法验证.

迭代归纳法—递归树

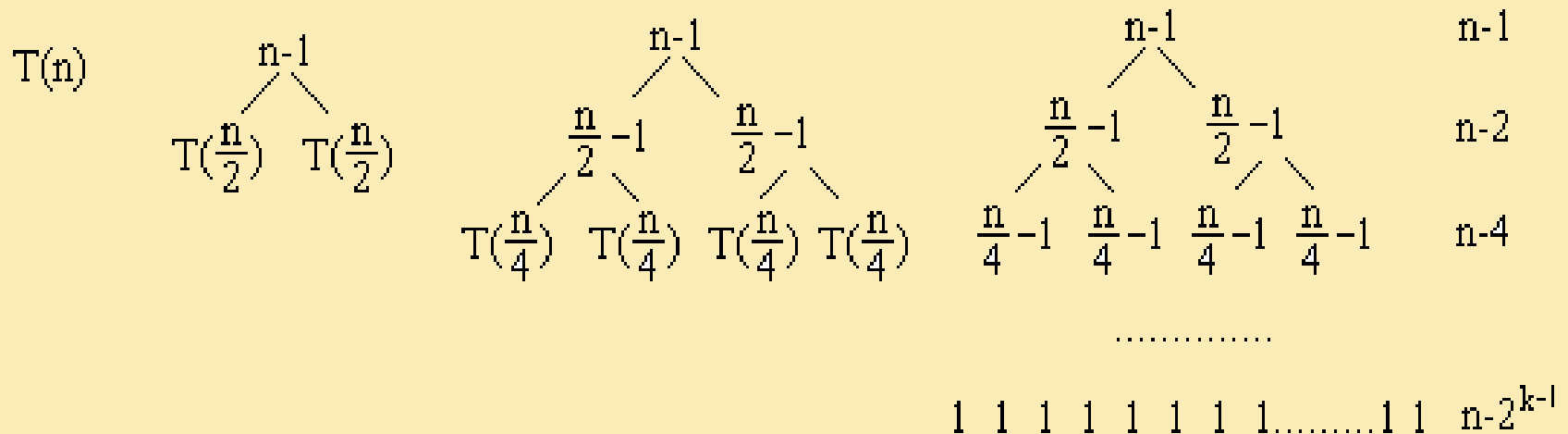
例5 归并排序

$$T(n)=2T(n/2)+n-1, \quad n=2^k$$

$$T(2)=1$$

递归树有 k 层，总数为

$$nk-(1+2+\dots+2^{k-1})=nk-(2^k-1)=n\log n-n+1$$



迭代归纳法—归并排序

$$\begin{aligned}T(n) &= 2 T(n/2) + n-1 \\&= 2 [2 T(n/4) + n/2-1] + n-1 \\&= 2^2 T(n/2^2) + n-2 + n-1 \\&= \dots \\&= 2^{k-1}T(n/2^{k-1}) + n-2^{k-2} + \dots + n-2 + n-1 \\&= 2^{k-1}T(2) + n(k-1)-(1+2+\dots+2^{k-2}) \\&= 2^{k-1} + n(k-1) - (2^{k-1}-1) \\&= nk - n + 1 \\&= n\log n - n + 1\end{aligned}$$

差消法—快速排序

算法书，例1.14
 $n-1$

例6 求解递推方程：
$$\begin{cases} T(n) = \frac{2}{n} \sum_{i=1}^{n-1} T(i) + n + 1, & n \geq 2 \\ T(1) = 0 \end{cases}$$

解： $nT(n) = 2 \sum_{i=1}^{n-1} T(i) + n^2 + n$

$$(n-1)T(n-1) = 2 \sum_{i=1}^{n-2} T(i) + (n-1)^2 + (n-1)$$

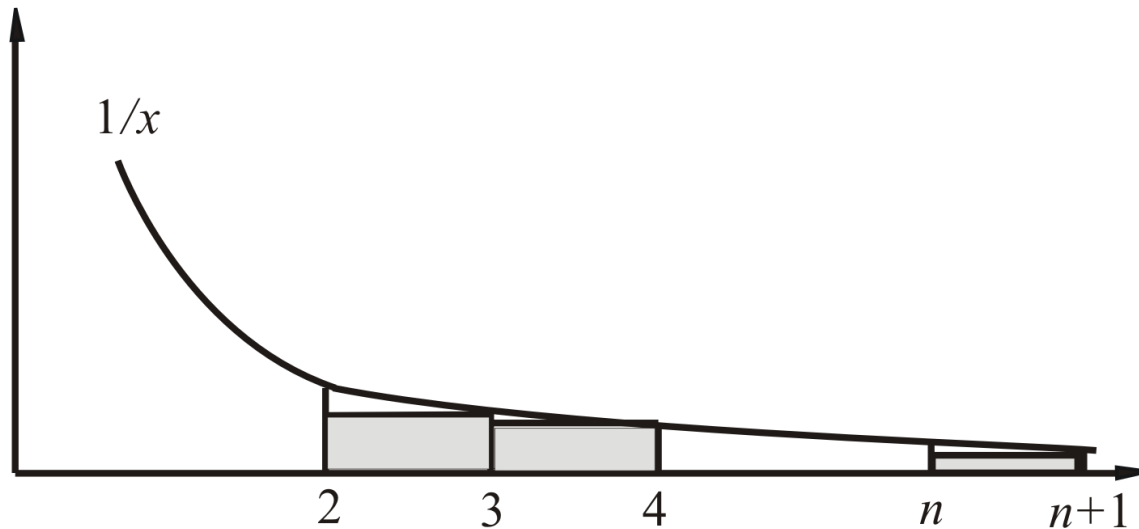
$$nT(n) - (n-1)T(n-1) = 2T(n-1) + 2n$$

$$nT(n) = (n+1)T(n-1) + 2n$$

$$\frac{T(n)}{n+1} = \frac{T(n-1)}{n} + \frac{2}{n+1} = \frac{2}{n+1} + \frac{2}{n} + \cdots + \frac{2}{3} + \frac{T(1)}{2}$$

$$= 2 \left[\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{3} \right] \Rightarrow T(n) = 2(n+1) \left[\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{3} \right]$$

差消法（续）



$$\begin{aligned}\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{3} &\leq \int_2^{n+1} \frac{1}{x} dx \\ &= \ln x \Big|_2^{n+1} = \ln(n+1) - \ln 2 = O(\log n)\end{aligned}$$

$$\Rightarrow T(n) = O(n \log n)$$

尝试法—快速排序

例7 $T(n) = \frac{2}{n} \sum_{i=1}^{n-1} T(i) + n + 1$

(1) $T(n)=C$, 左边= $O(1)$,

$$\text{右边} = \frac{2}{n} C(n-1) + n + 1 = 2C - \frac{2C}{n} + n + 1 = O(n)$$

(2) $T(n)=cn$, 左边= cn ,

$$\begin{aligned} \text{右边} &= \frac{2}{n} \sum_{i=1}^{n-1} ci + n + 1 \\ &= \frac{2c}{n} \frac{(1+n-1)(n-1)}{2} + n + 1 \\ &= c(n-1) + n + 1 \\ &= (c+1)n - c + 1 \end{aligned}$$

尝试法—快速排序

(3) $T(n)=cn^2$, 左边= cn^2

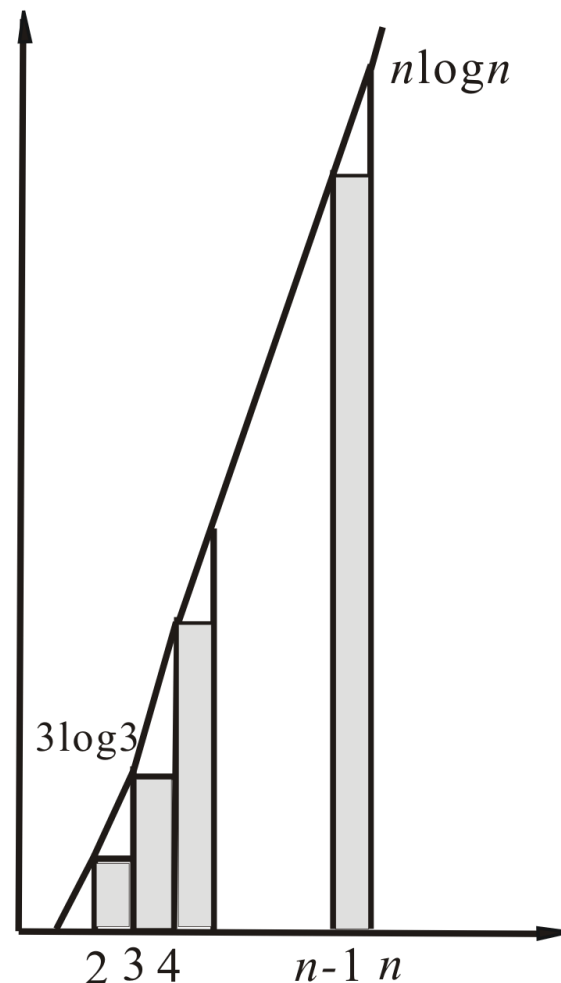
$$\begin{aligned}\text{右边} &= \frac{2}{n} \sum_{i=1}^{n-1} ci^2 + n + 1 \\ &= \frac{2}{n} \left[\frac{cn^2}{3} + O(n^2) \right] + n + 1 = \frac{2c}{3} n^2 + O(n)\end{aligned}$$

(4) $T(n)=cn\log n$, 左边= $cn\log n$

$$\begin{aligned}\text{右边} &= \frac{2c}{n} \sum_{i=1}^{n-1} i \log i + n + 1 \\ &= \frac{2c}{n} \left[\frac{n^2}{2} \log n - \frac{n^2}{4 \ln 2} + O(n \log n) \right] + n + 1 \quad (\text{由下页PPT}) \\ &= cn \log n + \left(1 - \frac{c}{2 \ln 2} \right) n + O(\log n)\end{aligned}$$

积分近似

$$\begin{aligned}\int_2^n x \log x \, dx &= \int_2^n \frac{x}{\ln 2} \ln x \, dx \\&= \frac{1}{\ln 2} \left[\frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} \right] \Big|_2^n \\&= \frac{1}{\ln 2} \left(\frac{n^2}{2} \ln n - \frac{n^2}{4} \right) \\&\quad - \frac{1}{\ln 2} \left(\frac{4}{2} \ln 2 - \frac{4}{4} \right) \\&= \frac{n^2}{2} \log n - \frac{n^2}{4 \ln 2} + O(n \log n)\end{aligned}$$



分治算法

n 为输入规模, n/b 为子问题输入规模, a 为子问题个数,
 $d(n)$ 为分解及综合的代价

$$T(n) = aT(n/b) + d(n), \quad n = b^k$$

$$T(1) = 1$$

$$T(n) = a^2 T(n/b^2) + ad(n/b) + d(n)$$

$$= \dots$$

$$= a^k T(n/b^k) + a^{k-1}d(n/b^{k-1}) + a^{k-2}d(n/b^{k-2}) \\ + \dots + ad(n/b) + d(n)$$

$$= a^k + \sum_{i=0}^{k-1} a^i d(n/b^i)$$

$$a^k = a^{\log_b n} = n^{\log_b a}$$

分治与递归算法—二分检索

$$T(n) = a^k + \sum_{i=0}^{k-1} a^i d(n/b^i), \quad a^k = n^{\log_b a}$$

$$(1) d(n)=c$$

$$T(n) = \begin{cases} a^k + c \frac{a^k - 1}{a - 1} = O(a^k) = O(n^{\log_b a}) & a \neq 1 \\ a^k + kc = O(kc) = O(\log n) & a = 1 \end{cases}$$

二分检索: $W(n) = W(n/2) + 1$

$$a = 1, b = 2, d(n) = c$$

$$W(n) = O(\log n)$$

分治与递归算法—二分归并

(2) $d(n)=cn$

$$T(n) = a^k + \sum_{i=1}^{k-1} a^i \frac{cn}{b^i} = a^k + cn \sum_{i=1}^{k-1} \left(\frac{a}{b}\right)^i$$
$$= \begin{cases} n^{\log_b a} + cn \frac{(a/b)^k - 1}{a/b - 1} = O(n) & a < b \\ n + cnk = O(n \log n) & a = b \\ a^k + cn \frac{(a/b)^k - 1}{a/b - 1} = a^k + c \frac{a^k - b^k}{a/b - 1} = O(n^{\log_b a}) & a > b \end{cases}$$

归并排序: $W(n)=2W(n/2)+n-1$

$a = 2, b = 2, d(n) = O(n), W(n) = O(n \log n)$