第九周作业

P297-298 23, 26, 30, 34

23. D为环A的非空子集

① $<D,+>$ 是 $<R,+>$ 的子群. 因 $\forall a, b \in D$.

$a - b = 4k_1 - 4k_2 = 4(k_1 - k_2) \in D$.

② $\forall r \in A$, $\forall d \in D$, $4|d$, $2|A$, $4|Ad$, $4|dA$.

故 $dA, Ad \in D$. 即 $rD \subseteq D$, $Dr \subseteq D$.

故 D为A的一个理想.

$A/D = \{\{4k+2 | k \in \mathbb{Z}\}, \{4k | k \in \mathbb{Z}\}\}$

26. ① 若 R/H 为域, 若 H 非 R 的极大理想,

则存在 M 为 R 的理想, $H \subsetneq M$, $M \neq R$.

设 $a \in M$, $a \notin H$, $H+a$ 非零元, 故有逆元 $H+b$

使 $(H+a)(H+b) = (H+1)$. 即 $ab - 1 \in H$.

又 $H+a \subseteq M$. 故 $(H+a)(H+b) \subseteq M$.

故 $(H+1) \subseteq M$. 又 $0 \in H$, 故 $1 \in M$. 造成 $M = R$.

矛盾!

② 若 H为 R的极大理想, 对 $\forall a \notin H$.

考虑 $M = \{h + ax | h \in H, x \in R\}$

M为 R的加法子群, 因 $(h_1 + ax) - (h_2 + ay) = (h_1 - h_2) + a(x-y) \in M$

且 $M \leq R$, 因为 H为R的理想

得 $\forall r \in R$, $r(h+ax) = h' + a(xr) \in M$

$(h+ax)r = h' + a(xr) \in M$. 故 M 为 R 的理想

因H极大故 $M = R$, 从而 $1 \in M$, 即 $\exists$ $h + ax = 1$

则 $H+a$ 的逆元为 $H+x$. 又R,H交换, 故 H为域.

30. $\forall a\in F$, $x+a\in F[x]$. $\varphi(x+a)=a$.

故φ是$F[x]$到F的满映射.

又$\forall f(x), g(x)\in F[x]$. 设$f(x)=x\cdot f_1(x)+a_1$,

$g(x)=x\cdot g_1(x)+a_2$.

$$\varphi(f(x)+g(x)) = \varphi(x(f_1(x)+g_1(x))+a_1+a_2)$$

$$= a_1+a_2 \in F$$

$$\varphi(f(x))+\varphi(g(x)) = a_1+a_2 = \varphi(f(x)+g(x))$$

$$\varphi(f(x)\cdot g(x)) = \varphi(x(f_1(x)g_1(x)\cdot x+a_1g_1(x)+a_2f_1(x))+a_1a_2)$$

$$= a_1a_2 = \varphi(f(x))\cdot\varphi(g(x))$$

故φ是$F[x]$到F的满同态.

F中0元为0. 故$\ker\varphi=\{x\cdot f(x)\mid f(x)\in F[x]\}$,

$$F[x]/\ker\varphi = \{\{x\cdot f(x)+a\mid f(x)\in F[x]\}\mid a\in F\}$$

1. ① 加法群

$\forall f, g \in \mathrm{End}\,G$, $(f-g)(x+y) = f(x+y) - g(x+y)$

$= f(x) + f(y) - g(x) - g(y)$

$(f-g)(x) = f(x) - g(x)$, $(f-g)(y) = f(y) - g(y)$

故 $\cancel{f(x+y) - g(}$ $(f-g)(x+y) = (f-g)(x) + (f-g)(y)$

对 $\forall x, y \in G$ 成立，故 $f-g$ ~~为~~ $\in \mathrm{End}\,G$

② 乘法半群

$\forall f, g \in \mathrm{End}\,G$, $(f \circ g)(x+y) = f(g(x+y))$

$= f(g(x) + g(y)) = f(g(x)) + f(g(y))$

$= (f \circ g)(x) + (f \circ g)(y)$

对 $\forall x, y \in G$ 成立，故 $f \circ g \in \mathrm{End}\,G$

又加法群满足交换：$f + g = g + f$

乘法、加法满足分配律：$\forall x \in G$

$f \circ (g+h)(x) = f(g(x) + h(x))$

$= f(g(x)) + f(h(x)) = f \circ g(x) + f \circ h(x)$

$= (f \circ g + f \circ h)(x)$

$(g+h) \circ f(x) = (g \circ f + h \circ f)(x)$

即 $f \circ (g+h) = f \circ g + f \circ h$,

$(g+h) \circ f = g \circ f + h \circ f$.

③ 求G的自同态环.

下面证明，对 $\forall f\in \mathrm{End}\,G$. $f(a)$ 确定后，f 唯一

~~设G=~~ 因 $G=\langle a\rangle$ 为n阶循环群、Abel群

G可表示为 $\{e, a, 2a, \cdots, (n-1)a\}$.

~~若~~ $f(e)=e$. 对同态成立

$$f(ka)=\underbrace{f(a)+\cdots+f(a)}_{k个}=k f(a)$$

为确定值

$f(a)$ 可取 $e, a, \cdots, (n-1)a$.

故 $\mathrm{End}\,G=\{x\longmapsto k\cdot x \mid 0\le k\le n-1\}$.

其中 $k\cdot x$ 表示 k 个 x 相加.

证明：$f(a)$ 确定后，f 可为一个合理的同态

$f: x\longmapsto kx$.

因 $\forall x, y\in G$，设 $x=k_1 a$，$y=k_2 a$，$0\le k_1, k_2\le n-1$

$$f(x+y)=k(k_1 a+k_2 a)=k(k_1+k_2)a.$$

$$=kk_1 a+kk_2\cdot a$$

$$=f(x)+f(y)$$ 故 f 为同态.