2023 代组第一次作业

2000013058 杨仕博

2023 年 3 月 1 日

7(2)

(1)

$a, b \in Z^+ \Rightarrow \min(a,b) = a\ or\ b \in Z^+$，因而 $\circ$ 是 Z^+ 上的二元运算，故它构成代数系统。

由 $a \circ b = \min(a,b) = \min(b,a) = b \circ a$，$a \circ b \circ c = \min(\min(a,b),c) = \min(a,b,c) = \min(a,\min(b,c)) = a \circ (b \circ c)$，$a \circ a = \min(a,a) = a$ 知它符合交换律、结合律和幂等律

(2)

单位元：若 b 为单位元，则

$$\begin{aligned}
&\forall a, a \circ b = b \circ a = a \\
\Leftrightarrow &\forall a, \min(a,b) = a \\
\Rightarrow &\min(b, b+1) = b+1 \\
\Rightarrow &b \geq b+1
\end{aligned}$$

矛盾！故此时不存在单位元

零元：若 b 为零元，则

$$\begin{aligned}
&\forall a, a \circ b = b \circ a = b \\
\Leftrightarrow &\forall a, \min(a,b) = b \\
\Leftrightarrow &\forall a, b \leq a
\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow b = 1$$

故零元为 1

7(4)

令 $a = 1, b = 2$，有 $a \circ b = 0.5 + 2 = 2.5 \notin Z^+$，因而这不是一个代数系统。

9

(1)

$x*y=x+y-xy=y+x-yx=y*x$，因而满足交换律。

$$\begin{aligned}x*y*z&=(x+y-xy)*z\\&=x+y-xy+z-zx-zy+xyz\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x*(y*z)&=x*(y+z-yz)\\&=x+y+z-yz-xy-xz+xyz\end{aligned}$$

故 $x*y*z=x*(y*z)$，因而满足结合律。
令 $x=2$，有 $x*x=2+2-4=0\neq 2=x$，因此不满足幂等律
综上，满足交换律和结合律，不满足幂等律
(2)
单位元：若 e 为单位元，则

$$\begin{aligned}&\forall a,a*e=e*a=a\\\Leftrightarrow&\forall a,a+e-ae=a\\\Leftrightarrow&\forall a,e(1-a)=0\\\Leftrightarrow&e=0\end{aligned}$$

故单位元为 0。
零元：若 z 为零元，则

$$\begin{aligned}&\forall a,a*z=z*a=z\\\Leftrightarrow&\forall a,a+z-az=z\\\Leftrightarrow&\forall a,a(1-z)=0\\\Leftrightarrow&z=1\end{aligned}$$

故零元为 1。
逆元：若 x 是可逆元，y 是其逆元，则

$$\begin{aligned}&x*y=y*x=0\\\Leftrightarrow&x+y-xy=0\\\Leftrightarrow&x=y(x-1)\end{aligned}$$

若 $x\neq 1$，则 $y=\frac{x}{x-1}$ 为 x 的逆元。

11

(1)

交换律:

$<0,1>\circ<1,1>=<0,1>$，而 $<1,1>\circ<0,1>=<0,2>$，因此不满足交换律。

结合律:

$$\begin{aligned}&<a,b>\circ<c,d>\circ<e,f>\\=&<ac,ad+b>\circ<e,f>\\=&<ace,acf+ad+b>\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&<a,b>\circ(<c,d>\circ<e,f>)\\=&<a,b>\circ(<ce,cf+d>)\\=&<ace,acf+ad+b>\end{aligned}$$

因此满足结合律。

(2)

单位元:

若 $<e,f>$ 为单位元，则

$$\begin{aligned}&\forall<a,b>,<a,b>\circ<e,f>=<e,f>\circ<a,b>=<a,b>\\\Leftrightarrow&\forall<a,b>,<ae,af+b>=<a,b>\wedge<ae,eb+f>=<a,b>\\\Leftrightarrow&e=1\wedge f=0\end{aligned}$$

故单位元为 <1, 0>。

零元:

若 $<y,z>$ 为零元，则

$$\begin{aligned}&\forall<a,b>,<a,b>\circ<y,z>=<y,z>\circ<a,b>=<y,z>\\\Leftrightarrow&\forall<a,b>,<ay,az+b>=<y,z>\wedge<ay,by+z>=<y,z>\end{aligned}$$

令 $<a,b>$ 分别取 <0, 1> 和 <0, 2>，我们有 <0, 1> = <y, z> 且 <0, 2> = <y, z>，矛盾！故没有零元。

逆元:

若 $<a, b>$ 可逆，$<c, d>$ 是其逆元，有

$$
\begin{aligned}
&<a,b> \circ <c,d> = <ac, ad+b> = <1,0> \\
\Leftrightarrow & ac = 1 \wedge ad + b = 0 \\
\Leftrightarrow & a \neq 0 \wedge c = \frac{1}{a} \wedge d = -\frac{b}{a}
\end{aligned}
$$

故 $<a, b>$ 有逆元当且仅当 $a \neq 0$，其逆元为 $<\frac{1}{a}, -\frac{b}{a}>$

16

(1)

	<0, 0>	<0, 1>	<1, 0>	<1, 1>	<2, 0>	<2, 1>
<0, 0>	<0, 0>	<0, 1>	<1, 0>	<1, 1>	<2, 0>	<2, 1>
<0, 1>	<0, 1>	<0, 0>	<1, 1>	<1, 0>	<2, 1>	<2, 0>
<1, 0>	<1, 0>	<1, 1>	<2, 0>	<2, 1>	<0, 0>	<0, 1>
<1, 1>	<1, 1>	<1, 0>	<2, 1>	<2, 0>	<0, 1>	<0, 0>
<2, 0>	<2, 0>	<2, 1>	<0, 0>	<0, 1>	<1, 0>	<1, 1>
<2, 1>	<2, 1>	<2, 0>	<0, 1>	<0, 0>	<1, 1>	<1, 0>

(2)

单位元：

若 $<a, b>$ 是单位元，则

$$
\begin{aligned}
&\forall <x,y>, <a,b> \oplus <x,y> = <x,y> \oplus <a,b> = <x,y> \\
\Leftrightarrow & (x+a)\%3 = x \wedge (y+b)\%2 = y \\
\Leftrightarrow & <a,b> = <0,0>
\end{aligned}
$$

故单位元为 <0, 0>

逆元：

若 $<a, b>$ 可逆，其逆元为 $<c, d>$，则

$$
\begin{aligned}
&<a,b> + <c,d> = <0,0> \\
\Leftrightarrow & <c,d> = <3-a, 2-b>
\end{aligned}
$$

故所有元素都可逆，且 $<a, b>$ 的逆元是 $<3-a, 2-b>$

18

我们构造如下映射：$f(c) = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$，其中，$c = a + bi$

首先，我们证明 f 是同态映射：

对复数 $x = a + bi, y = c + di (a, b, c, d \in R)$，$f(x + y) = f((a + c) + (b + d)i) = \begin{pmatrix} a + c & b + d \\ -(b + d) & (a + c) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix} = f(x) + f(y)$

$f(x) \cdot f(y) = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac - bd & ad + bc \\ -(ad + bc) & ac - bd \end{pmatrix} = f(ac - bd + (ad + bc)i) = f((a + bi) \cdot (c + di)) = f(xy)$

因此，f 是同态映射。

接下来，我们证明 f 是双射。

对任意 $Y = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \in B$，$f(a + bi) = Y$，因而 f 是满射；

对任意 $x, y \in C$，若 $f(x) = f(y)$，则 $Re(x) = Re(y) \wedge Im(x) = Im(y)$，从而 $x = y$，因而 f 是单射。

故 f 是双射，从而是同构映射。

因而 V_1 同构于 V_2

24(2)

这是同态，因为对 $x, y \in C, f(xy) = |xy| = |x||y| = f(x)f(y)$

对任意实数 $x \geq 0, \phi(x) = x$，而对任意 $x \in C, \phi(x) \geq 0$，因而同态像是 $\{0\} \bigcup R^+$

24(4)

ϕ 不是同态，因为 $\phi(1 \cdot 1) = \phi(1) = 2, phi(1) \cdot \phi(1) = 4$

27(2)

不是。这不是一个等价关系，$|1 - 5| < 5 \Rightarrow 1R5, |5 - 9| < 5 \Rightarrow 5R9$，但是 $|1 - 9| > 5$，即这个二元关系不具备传递性，继而不是等价关系

27(4)

不是。这不是一个等价关系，$5 \geq 4 \Rightarrow 5R4$，但是 $4 < 5$，$4R5$ 不成立，因而这个而元关系不对称，继而不是等价关系