2023 代组第三次作业

2000013058 杨仕博

2023 年 3 月 14 日

半群与独异点

11

记 $V/\sim=<A/\sim,\bigotimes>$，则

$\bigotimes$	[a]	[b]
[a]	[a]	[b]
[b]	[b]	[a]

12

(1)

首先，我们证明 R 是等价关系：

这是因为，$x=x\Rightarrow xRx$(自反性)

$xRy\Rightarrow x=y\vee(x\in I\wedge y\in I)\Rightarrow y=x\vee(y\in I\wedge x\in I)\Rightarrow yRx$(对称性)

$xRy,yRz\Rightarrow(x=y\wedge y=z)\vee(x\in I\wedge y\in I\wedge y=z)\vee(x=y\wedge y\in I\wedge z\in I)\vee(x\in I\wedge y\in I\wedge z\in I)\Rightarrow(x=z)\vee(x\in I\wedge z\in I)\vee(x\in I\wedge z\in I)\vee(x\in I\wedge z\in I)\vee\Rightarrow xRz$(传递性)

其次，若 xRy,sRt：

若 $x=y\wedge s=t$，则 $x\circ s=y\circ t\Rightarrow(x\circ s)R(y\circ t)$

若 $x=y\wedge s\in I\wedge t\in I$，则 $x\circ s\in IS\Rightarrow x\circ s\in I$，同理 $y\circ t\in I$，故 $(x\circ s)R(y\circ t)$

同理，若 $s=t\wedge x\in I\wedge y\in I$，则 $(x\circ s)R(y\circ t)$

若 $s\in I\wedge t\in I\wedge x\in I\wedge y\in I$, 同上有 $x\circ s\in I,y\circ t\in I$, $(x\circ s)R(y\circ t)$

故 R 是 V 上的同余关系

(2)

由 $[x]=[y]\Leftrightarrow xRy\Leftrightarrow x=y\vee(x\in I\wedge y\in I)$ 知 $S/R=\{I\}\bigcup\{\{x\}|x\notin I\}$

对于 $x\in S-I,y\in S-I,\{x\}\bar{\circ}\{y\}=\{x\circ y\}$，其他情况下 $\{x\}\bar{\circ}\{y\}=I$

群

2

这个代数系统：

非空：由于 G 非空，因而 G 关于 $\circ$ 构成的代数系统非空

封闭：$\forall a,b\in G, a\circ b = au^{-1}b\in G$

满足结合律：$\forall a,b,c\in G, a\circ(b\circ c) = au^{-1}(bu^{-1}c) = au^{-1}bu^{-1}c = a\circ b\circ c$

单位元存在：$u\in G, \forall a\in G, a\circ u = au^{-1}u = a, u\circ a = uu^{-1}a = a$

逆元存在：$\forall a \in G, a\circ(ua^{-1}u) = au^{-1}ua^{-1}u = u, (ua^{-1}u)\circ a = (ua^{-1}u)u^{-1}a = u$

因而是群

6

$$\begin{aligned} &(ab)^2 = abab = aabb \\ \Rightarrow &a^{-1}ababb^{-1} = a^{-1}aabbb^{-1} \\ \Rightarrow &ba = ab \end{aligned}$$

9(2)

$$\begin{aligned} &(ab)^r = e \\ \Rightarrow &a(ba)^{r-1}b = e \\ \Rightarrow &(ba)^{r-1} = a^{-1}b^{-1} = (ba)^{-1} \\ \Rightarrow &(ba)^r = e \end{aligned}$$

因此，$|ba|\Big||ab|$，同理，$|ab|\Big||ba|$，因此，$|ab| = |ba|$

9(3)

由上题，

$|abc| = |a(bc)| = |bca| = |b(ca)| = |cab|$

11

首先我们断言：G 中存在不为 e 的元素——否则，G 中只有 e 一个元素，G 是交换群，矛盾！

任取 G 中不为 e 的元素 a，那么 $a^2 \neq a$(否则，$a = e$)，这样，令 $b = a^2 \neq a$，有 $ab = aaa = a^2a = ba$