

# 2023 代组第七次作业

2000013058 杨仕博

2023 年 4 月 18 日

53

由于  $|\phi(H)| \mid |H|$  (因为  $\phi(H)$  同构于  $H$  的某个商群),  
 $|\phi(H)| \mid |G_2|$  (因为  $\phi(H)$  是  $G_2$  的子群),  
故  $|\phi(H)| \mid (|H|, |G_2|) \Rightarrow |\phi(H)| = 1 \Rightarrow \phi(H) = \{e_2\}$  (其中  $e_2$  是  $G_2$  中的单位元)  
故  $H \subseteq \ker(\phi)$

61

首先, 若  $\phi$  是自同构, 那么  $\forall x, y \in G, xy = \phi(x^{-1})\phi(y^{-1}) = \phi(x^{-1}y^{-1}) = yx$ , 故  $G$  是交换群  
其次, 若  $G$  是交换群, 那么,  
 $\forall x, y \in G, \phi(x) = \phi(y) \Rightarrow x^{-1} = y^{-1} \Rightarrow x = y$ , 故  $\phi$  是单射  
 $\forall x \in G, \phi(x^{-1}) = x$ , 故  $\phi$  是满射,  
 $\forall x, y \in G, \phi(xy) = y^{-1}x^{-1} = x^{-1}y^{-1} = \phi(x)\phi(y)$ , 故  $\phi$  是自同态,  
因而,  $\phi$  是自同构

62

(1)

记  $I = \{0, 1, \dots, n-1\}$

$\forall i, j \in I, \phi_t(a^i a^j) = a^{t(i+j)} = a^{ti} a^{tj} = \phi_t(a^i) \phi_t(a^j)$

故  $\phi_t$  是  $G$  的自同态

(2)

若  $\phi_t$  是自同构, 那么  $\exists i \in I, s.t. \phi_t(a^i) = a \Rightarrow \exists i \in I, s.t. it \pmod n = 1 \Rightarrow (n, t) = 1$

若  $(n, t) = 1$ , 由裴蜀定理,  $\exists i_0 \in I, s.t. i_0 t \pmod n = 1$

因为  $\forall i, j \in I, \phi_t(a^i) = \phi_t(a^j) \Leftrightarrow a^{it} = a^{jt} \Leftrightarrow it \equiv jt \pmod n \Leftrightarrow ii_0 t \equiv ji_0 t \pmod n \Leftrightarrow j \equiv i \pmod n \Leftrightarrow a^i = a^j$ , 故  $\phi_t$  为单射

又因为  $\forall i \in I, \phi_t(a^{ii_0}) = a^{ii_0 t} = a^i$ , 故  $\phi_t$  为满射。

因此,  $\phi_t$  是自同构。

## 68

考察如下函数:

$$f: G \rightarrow G/H \times G/K, \forall x \in G, f(x) = (xH, xK)$$

我们证明这是一个单射 + 同态映射, 这样,  $G$  即和  $f(G)(G/H \times G/K)$  的子群) 同构。

由于  $\forall x, y \in G, f(x) = f(y) \Rightarrow (xH, xK) = (yH, yK) \Rightarrow y^{-1}x \in H \wedge y^{-1}x \in K \Rightarrow y^{-1}x \in H \cap K \Rightarrow y^{-1}x = e \Rightarrow x = y$ , 因而  $f$  是单射

又  $\forall x, y \in G, f(xy) = (xyH, xyK) = (xH, xK) \times (yH, yK) = f(x)f(y)$   
因而  $f$  是同态映射

故命题得证。

## 5

我们先证明 (2):

$$\begin{aligned} a + a &= a + a + a + a + (-a) + (-a) = a^2 + aa + aa + a^2 + (-a) + (-a) = \\ (a + a)^2 + (-a) + (-a) &= a + a + (-a) + (-a) = 0 \end{aligned}$$

接下来我们证明 (1):

$$x + y = (x + y)^2 = x^2 + xy + yx + y^2 = x + xy + yx + y \Rightarrow xy + yx = 0$$

又  $xy + xy = 0$ , 故  $xy = yx$

最后我们证明 (3):

反设  $R$  是整环, 由于  $|R| > 3$ ,  $R$  中必然有和零元与么元不同的元素, 设为  $x$ , 由上有  $x(x - 1) = x^2 - x = x - x = 0$ , 故  $x = 0 \vee x - 1 = 0 \Rightarrow x = 0 \vee x = 1$ , 与  $x$  不为零元或么元矛盾

故命题得证

## 7

(1)

由于  $n$  不是素数, 可以设  $n = pq, p \neq 1 \wedge q \neq 1$ , 这样  $1 < p, q < n$ , 又  $pq = qp = 0$ , 故而  $Z_n$  中有零因子

(2)

若  $(r, n) = d \neq 1$ , 则  $r \times (n/d) = n \times (r/d) = 0, (n/d) \times r = 0$ , 故  $r$  为零因子

故  $r$  不是零因子  $\Rightarrow (r, n) = 1$

若  $(r, n) = 1$ , 由裴蜀定理知  $\exists s \in Z, s.t. rs \equiv 1 \pmod{n}$ , 若此时有  $\exists t \in Z, s.t. rt = 0$ , 则  $t = srt = 0$ , 故  $r$  不为左零因子, 同理  $r$  不为右零因子, 故  $r$  不为零因子

命题得证

(3)

由 (2),  $Z_{18}$  中的全部零因子为 2, 3, 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16

## 12

首先证明  $n$  为素数。若  $n$  不为素数, 则可设  $n = pq, p, q \neq 1$ , 有  $0 = ne = (pe)(qe)$ , 与  $F$  没有零因子矛盾!

之后, 由于  $\forall s \in \{1, 2, \dots, n-1\} C_n^s = (n/s)C_{n-1}^{s-1}$ , 该式展开分母中没有  $n$  的倍数 (因为所有数都比  $n$  小), 分子中有  $n$ , 故  $n|C_n^s$ , 故  $(a+b)^n = \sum_{i=0}^n C_n^i a^i b^{n-i} = a^n + b^n$