§14.1 ~ 设设设性质

9. 若不[illegible]存在, 对 $\forall a_0 \in A$.

$a_0 \circ a_0 = a_1 \neq a_0$, $a_1 \circ a_1 = a_2 \neq a_1$

但A有限, 故 $\exists K$, $a_K \circ a_K = a_i \ (i<K)$

$a_K = a_i^t$, $a_i^{2t} = a_i$, $a_i^{4t-2} = a_i^{2t-1}$

(因半群符合结合律), 故 $(a_i^{2t-1}) \cdot (a_i^{2t-1}) = a_i^{2t-1}$

a_i^{2t-1} 为幂等元. 矛盾!

10. 子半群 $\{0\}, \{0,1\}, \{0,1,2\}, \{0,1,2,3\}$, $\{0,1,3\}$, ~~$\{0,2,3\}$~~ $\{0,2\}, \{1,3\}$, $\{1\}$

子独异点 $\{0\}, \{0,1\}, \{0,1,2\}, \{0,1,2,3\}$
$\{0,1,3\}, \{1,3\}, \{1\}$

11.

*	[a]	[b]
[a]	[a]	[b]
[b]	[b]	[a]

12. (1) 首先证明R符合自反对称传递性

xRx 成立、

若 xRy, 则 $x=y$ 或 $x, y \in I$.

故 yRx 成立、

若 xRy, yRz.

① 则 $x=y$.

若 $y=z$, 则 $x=z$ 即 xRz; 若 $y, z \in I$, 则 $x, z \in I$. xRz

② 若 $x, y \in I$

若 $y = z$，则 $x, z \in I$，xRz.

若 $y, z \in I$，则 $x, z \in I$，xRz.

综上，传递性得证

再证置换性，若 xRy, uRv.

则 $x = y$ 或 $x, y \in I$；$u = v$ 或 $u, v \in I$

若 $x, y \in I$，则 由I为理想，$x \circ u, y \circ v \in I$，$(x \circ u) R (y \circ v)$

若 $u, v \in I$，则同样可得 $x \circ u, y \circ v \in I$，$(x \circ u) R (y \circ v)$

若 $x = y$ 且 $u = v$，则 $x \circ u = y \circ v$，$(x \circ u) R (y \circ v)$

综上，置换性得证.

从而R为同余关系

(2) $S/R = \{I\} \cup \{\{x\} \mid x \notin I\}$.

因为 I 中元素均等价，故属于 I.

且 $\forall x \notin I, y \in I$，$xRy$ 不成立.

故 I 为一等价类

其余 $\{x\}$ 均为等价类，$(x \notin I)$，否则，若 $x, y \notin I$，且 $x \neq y$，$x \sim y$，则 $x, y \in I$ 或 $x = y$，矛盾！

故其余均为单元素类.

$\bar{\circ}$: $I \,\bar{\circ}\, I = I$，$[x] \,\bar{\circ}\, I = I$，$[x] \,\bar{\circ}\, [y] = [x \circ y]$