15.3 代数系统的同态与同构

- 同态映射的概念
  - 同态映射定义
  - 同态映射分类
  - 实例
- 同态映射的性质
  - 同态映射的合成仍旧是同态映射
  - 同态像是映到代数系统的子代数
  - 同态像中保持原有代数系统的运算性质

同态映射的定义

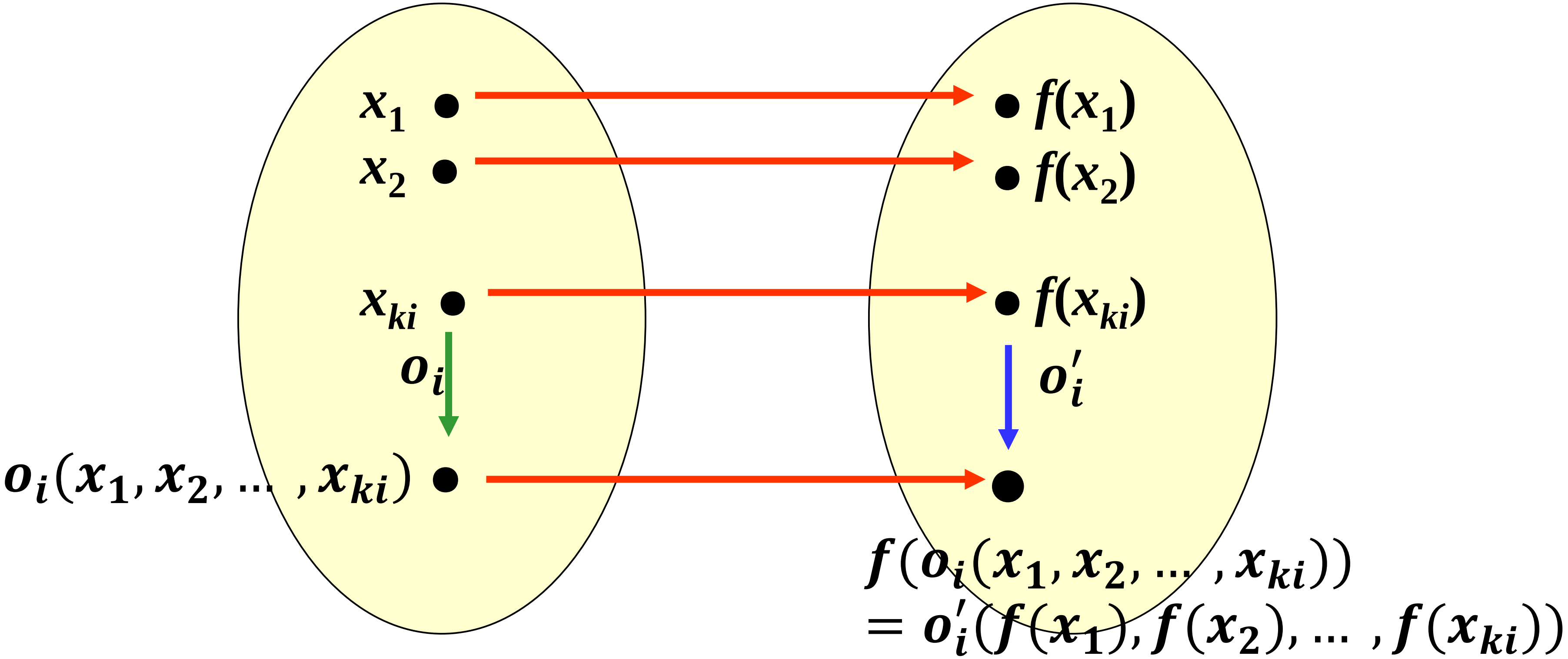
定义 设$V_1 =< A, o_1, o_2, \dots, o_r >$与$V_2 =< B, o'_1, o'_2, \dots, o'_r >$是同类型的代数系统，对于$i = 1, 2, \dots, r$，$o_i$与 o'_i均为 k_i元运算, 函数 $f: A \to B$. 如果对于所有的运算 o_i与 o'_i

$$f\left(o_i\left(x_1, x_2, \dots, x_{k_i}\right)\right) = o'_i\left(f(x_1), f(x_2), \dots, f\left(x_{k_i}\right)\right)$$

$$\forall x_1, x_2, \dots, x_{k_i} \in A$$

则称 f 是代数系统 V_1 到 V_2 的同态映射，简称同态。

同态映射的定义(续)



x_1
x_2
x_{ki}
o_i
$o_i(x_1, x_2, \dots, x_{ki})$
$f(x_1)$
$f(x_2)$
$f(x_{ki})$
o_i'
$f(o_i(x_1, x_2, \dots, x_{ki}))$
$= o_i'(f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_{ki}))$

几点说明

1. 对于二元运算∘、一元运算Δ、0元运算k采用下述表示：

$$f(x\circ y)=f(x)\circ' f(y)$$

$$f(\Delta x)=\Delta' f(x)$$

$$f(k)=k'$$

2. 同态映射必须保持所有的运算，包括0元运算在内，例如

$$V=<A,\cdot,\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}>,\mathrm{A}=\left\{\begin{pmatrix}a&0\\0&b\end{pmatrix}\middle|a,b\in R\right\}$$

$$f:A\to A,f\left(\begin{pmatrix}a&0\\0&b\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}a&0\\0&0\end{pmatrix}$$

则 f 不是V 的自同态，因为不保持0元运算 $f\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\right)\neq\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$

同态映射的分类

特殊的同态映射

- 按映射性质分为：
  - 单同态
  - 满同态 $V_1 \sim V_2$
  - 同构 $V_1 \cong V_2$
- 按载体分：自同态
- 综合：单自同态、满自同态、自同构

同态映射的实例

(1) $V = \langle Z,+\rangle$, f_c: $Z\to Z$, $f_c(x) = cx$, c为给定整数

$c = 0$, 零同态; $c = \pm 1$, 自同构; 其它c, 单自同态

(2) $V = \langle Z_6,\oplus\rangle$, f_p: $Z_6\to Z_6$, $f_p(x) = px \pmod 6$,

$p = 0, 1, 2, 3, 4, 5$

$p = 0$, f_0零同态; $p = 1$, f_1恒等映射, 自同构

$p = 2$, $f_2 = \{\langle 0,0\rangle, \langle 1,2\rangle, \langle 2,4\rangle, \langle 3,0\rangle, \langle 4,2\rangle, \langle 5,4\rangle\}$,

$p = 3$, $f_3 = \{\langle 0,0\rangle, \langle 1,3\rangle, \langle 2,0\rangle, \langle 3,3\rangle, \langle 4,0\rangle, \langle 5,3\rangle\}$

$p = 4$, $f_4 = \{\langle 0,0\rangle, \langle 1,4\rangle, \langle 2,2\rangle, \langle 3,0\rangle, \langle 4,4\rangle, \langle 5,2\rangle\}$

$p = 5$, $f_5 = \{\langle 0,0\rangle, \langle 1,5\rangle, \langle 2,4\rangle, \langle 3,3\rangle, \langle 4,2\rangle, \langle 5,1\rangle\}$自同构

(3) 推广到 f_p: $Z_n\to Z_n$, 恰好存在 n 个自同态, $p=0, 1, \ldots, n-1$

$$f_p(x\oplus y) = p(x\oplus y) \pmod n$$
$$= px \pmod n \oplus py \pmod n = f_p(x)\oplus f_p(y)$$

同态性质

- 同态的合成仍旧是同态
- 同态像是映到的代数系统的子代数
- 满同态映射（在同态像中）保持原代数系统的下述性质：
  - 交换、结合、幂等、分配、吸收
  - 单位元、零元、逆元

消去律不一定保持

同态的合成仍旧是同态

命题 若 $f: V_1 \to V_2$, $g: V_2 \to V_3$为同态映射，则 $g \circ f: V_1 \to V_3$也为同态映射.

证 根据集合论的定理，$g \circ f: V_1 \to V_3$为映射.
任取V_1, V_2, V_3中一组对应的运算 o_1, o_2, o_3, 设为 k 元运算.
$\forall x_1, x_2, \ldots, x_k \in V_1$,

$$
\begin{aligned}
g \circ f(o_1(x_1, x_2, \ldots, x_k)) &= g(f(o_1(x_1, x_2, \ldots, x_k))) \\
&= g(o_2(f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_k))) \\
&= o_3(g(f(x_1)), g(f(x_2)), \ldots, g(f(x_k))) \\
&= o_3(g \circ f(x_1), g \circ f(x_2), \ldots, g \circ f(x_k))
\end{aligned}
$$

由于运算的任意性，命题得证.

推论 代数系统的同构具有自反、对称、传递的性质.

同态像是映到代数系统的子代数

定理1　设$V_1 =< A, o_1, o_2, \dots, o_r >$与$V_2 =< B, o_1', o_2', \dots, o_r' >$是同类型的代数系统，对于$i = 1, 2, \dots, r$，$o_i$与$o_i'$是$k_i$元运算，$f: A \to B$是$V_1$到$V_2$的同态，则$f(A)$关于$V_2$中的运算构成代数系统，且是$V_2$的子代数，称为$V_1$在$f$下的同态像.

证　$f(A)$是B的非空子集. 证明$f(A)$对V_2中的所有运算封闭.
若V_2中有0元运算a', 则V_1存在0元运算a，$f(a) = a'$. 因此$a' \in f(A)$. 考虑V_2中任意非0元运算o'(k元运算). 任取$f(A)$中元素$y_1, y_2, \dots, y_k$,存在$x_1, x_2, \dots, x_k$使得$f(x_i) = y_i, i = 1, 2, \dots, k$, 那么

$$o'(y_1, y_2, \dots, y_k) = o'\big(f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_k)\big) = f(o(x_1, x_2, \dots, x_k))$$

显然上述结果属于$f(A)$.

满同态保持原代数性质

定理2 设

$V_1 = < A, o_1, o_2, \ldots, o_r >$ 与 $V_2 = < B, o_1', o_2', \ldots, o_r' >$

是同类型的代数系统，函数 $f: A \to B$ 是 V_1 到 V_2 的满同态，

(1) V_2 中运算保持 V_1 中相应运算的下述性质：

交换、结合、幂等、分配、吸收

(2) V_2 中保持 V_1 中的单位元、零元、逆元，即

$f(e)$ 是 V_2 中单位元，其中 e 为 V_1 中相应运算单位元

$f(\theta)$ 是 V_2 中零元，其中 θ 为 V_1 中相应运算零元

$f(a^{-1})$ 是 $f(a)$ 的逆元

几点说明

1. 满同态条件重要. 如果不是满同态，有关性质只能在同态像中成立. 例如

$$V = \langle A, \cdot \rangle \quad A = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \middle| a, b \in R \right\},$$

$$f: A \to A, \qquad f\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

f 不是满同态，将单位元映到 $f(A)$的单位元，不是自身.
其他见书上例题 15.22, 15.23.

2. 消去律不一定保持.
书上例题15.24, $\langle Z, \cdot \rangle$, $\langle Z_6, \otimes \rangle$, $f(x) = x \pmod 6$

15.4 同余关系与商代数

- 同余关系
  - 同余关系与同余类
  - 同余关系的实例
- 商代数
  - 商代数定义
  - 商代数性质
- 同态映射、同余关系与商代数之间的联系

同余关系与同余类

定义　设$V=<A, o_1, o_2, \ldots, o_r>$ 是代数系统，其中 o_i 为 k_i 元运算，关系~为A上的等价关系，任取A上 $2k_i$ 个元素 $a_1, a_2, \ldots, a_{ki}, b_1, b_2, \ldots, b_{ki}$, 如果对于所有的 $j=1, 2, \ldots, k_i$, $a_j \sim b_j$ 就有

$$o_i(a_1, a_2, \ldots, a_{ki}) \sim o_i(b_1, b_2, \ldots, b_{ki})$$

则称等价关系 ~ 对于运算 o_i 具有置换性质.

如果等价关系 ~ 对于V 中的所有运算都具有置换性质，则称 ~ 是V上的同余关系，称A中相关的等价类为同余类.

实例

Bell number

例1 $V=\langle Z_4, \oplus\rangle$, 有15个等价关系，采用对应的划分表示.

划分{0}, {1, 2, 3} 对应的不是同余关系，因为1~3，3~3，但是1⊕3~3⊕3不成立.

同理可以验证以下11个划分对应的也不是同余关系

{1}, {0, 2, 3}　　{2}, {1, 3, 0}　　{3}, {1, 2, 0}

{0,1}, {2, 3}　　{0, 3}, {1, 2}

{0}, {1}, {2, 3}　　{0}, {2}, {1, 3}　　{0}, {3}, {1, 2}

{1}, {2}, {0, 3}　　{1}, {3}, {0, 2}　　{2}, {3}, {0, 1}

只有以下3个划分对应于同余关系:

{0}, {1}, {2}, {3}　　{0, 1, 2, 3}　　{0, 2}, {1, 3}

恒等关系与全域关系都是同余关系，任何代数系统都存在同余关系.

商代数定义

定义 设代数系统$V=<A, o_1, o_2, \ldots, o_r>$，其中$o_i$为$k_i$元运算，$i=1, 2, \ldots, r$. 关系$R$为$V$上的同余关系，$V$关于$R$的商代数记作 $V/R=<A/R, \bar{o}_1, \bar{o}_2, \ldots, \bar{o}_r>$

其中A/R 是关于同余关系的商集. 对于$i=1, 2, \ldots, r$, 运算$\bar{o}_i$定义为

$$\bar{o}_i([a_1], [a_2], \ldots, [a_{k_i}]) = [o_i(a_1, a_2, \ldots, a_{k_i})]$$

实例：模n的同余类

V=<Z, +>，同余关系：$x \sim y \Leftrightarrow x \equiv y \pmod{3}$

$Z/\sim=\{[0], [1], [2]\}$

$V/\sim=\langle Z/\sim, \oplus\rangle$，$\forall[x], [y]\in Z/\sim$，$[x]\oplus[y]=[x+y]$

⊕	[0]	[1]	[2]
[0]	[0]	[1]	[2]
[1]	[1]	[2]	[0]
[2]	[2]	[0]	[1]

商代数的良定义性

运算的良定义

运算结果与参与运算元素的表示无关

对于任意运算o_i, 设为k_i元运算，$a_j \sim b_j$, $j=1, 2, \ldots, k_i$,

则

$$\bar{o}_i([a_1],[a_2],\ldots,[a_{k_i}])$$

$$=[o_i(a_1,a_2,\ldots,a_{k_i})]$$

$$=[o_i(b_1,b_2,\ldots,b_{k_i})]$$

$$=\bar{o}_i([b_1],[b_2],\ldots,[b_{k_i}])$$

商代数的性质

设代数系统 V, R是V上的同余关系，V 关于 R 的商代数 V/R，那么

(1) V/R 保持 V 的下述性质：

交换、结合、幂等、分配、吸收律

(2) V/R 保持V 的单位元、零元、逆元，即

$[e]$是商代数的单位元

$[\theta]$是商代数的零元

$[a]^{-1}=[a^{-1}]$

注 消去律不一定保持. 例如$<Z, \cdot>$有消去律，定义等价关系如下： $xRy \Leftrightarrow x \equiv y \pmod 4$

商代数为$V/R=<\{[0], [1], [2], [3]\}, \otimes>$.

不满足消去律，因为 $[2]\otimes[2]=[0]\otimes[2]$, 但是$[2]\neq[0]$.

同态、同余关系与商代数的联系

- 同态映射导出同余关系
- 商代数是原代数的同态像

  通过自然映射
- 同态基本定理

  代数系统的同态像同构于它的商代数

同态映射导出同余关系

定理1 设$V_1 =< A, o_1, o_2, \ldots, o_r >$和$V_2 =< B, o_1', o_2', \ldots, o_r' >$是同类型的代数系统，对于$i$ =1, 2,…, r，o_i为k_i元运算，函数 f: $A \to B$为代数系统V_1到V_2的同态映射，则由 f 导出的A上的等价关系为V_1上的同余关系。

证 $\forall x, y \in A$，定义 $x \sim y \Leftrightarrow f(x)=f(y)$；易证~是等价关系。

任取V_1上的运算o_i, $k_i \geq 1$，对于任意的 $a_j \sim b_j$，j =1, 2, … , k_i，

$$f\left(o_i\left(a_1, a_2, \ldots, a_{k_i}\right)\right) = o_i'\left(f(a_1), f(a_2), \ldots, f\left(a_{k_i}\right)\right)$$

$$= o_i'\left(f(b_1), f(b_2), \ldots, f\left(b_{k_i}\right)\right) \quad f\left(a_j\right) = f\left(b_j\right), j = 1, 2, \ldots, k_i$$

$$= f\left(o_i\left(b_1, b_2, \ldots, b_{k_i}\right)\right)$$

$$o_i\left(a_1, a_2, \ldots, a_{k_i}\right) \sim o_i\left(b_1, b_2, \ldots, b_{k_i}\right)$$

~关于o_i运算具有置换性质，根据o_i的任意性，定理得证。

实例

例2 $V=\langle Z_4, \oplus\rangle$, $f_i: Z_4 \to Z_4$, $f_i(x) = ix \pmod 4$，$i = 0, 1, 2, 3$

函数	导出的同余关系
$f_0(x)=0$, $x=0, 1, 2, 3$	全域关系
$f_1(x)=x$, $x=0, 1, 2, 3$	恒等关系 I_{Z4}
$f_2(0)=f_2(2)=0$, $f_2(1)=f_2(3)=2$	$\{\langle 0, 2\rangle, \langle 2, 0\rangle, \langle 1, 3\rangle,$ $\langle 3, 1\rangle\} \cup I_{Z4}$
$f_3(0)=0$, $f_3(1)=3$, $f_3(2)=2$, $f_3(3)=1$	恒等关系 I_{Z4}

注意：每个同态都可以导出一个同余关系

实例

注 不是所有的同余关系都可由自同态导出！

反例：V=<{0, 1, 2, 3}, Δ>, Δ: {0, 1, 2, 3} → {0, 1, 2, 3}如下表给出。

x	Δx
0	2
1	3
2	1
3	0

易验证划分{0, 1}，{2, 3}对应一个同余关系。

若该同余关系由某个同态f: {0, 1, 2, 3} → {0, 1, 2, 3}导出，则不妨设$f(0)=f(1)=a$, $f(2)=f(3)=b$.

由f是同态知，$f(\Delta x)=\Delta f(x)$.

将x=0, 2代入知，$b=\Delta a$, $a=\Delta b$，故$a=\Delta\Delta a$.

然而，{0, 1, 2, 3}中任意元素都不满足等式$a=\Delta\Delta a$.

因此，这样的同态f不存在。

商代数是原代数的同态像

定理2 设代数系统$V=<A, o_1, o_2,\ldots, o_r>$，其中$o_i$为$k_i$元运算，$i=1, 2, \ldots, r$, R是V上的同余关系，则自然映射

$$g: A \longrightarrow A/R,\ g(a)=[a], \forall a\in A,$$

是从V到V/R的同态映射.

证 设$V/R=<A/R, \bar{o}_1, \bar{o}_2, \ldots, \bar{o}_r>$

$$g\left(o_i(a_1,a_2,\ldots,a_{k_i})\right)=[o_i(a_1,a_2,\ldots,a_{k_i})]$$

$$=\bar{o}_i([a_1],[a_2],\ldots,[a_{k_i}])=\bar{o}_i\left(g(a_1),g(a_2),\ldots,g(a_{k_i})\right)$$

由于o_i的任意性，定理得证.

同态基本定理

定理3 设$V_1 =< A, o_1, o_2, \ldots, o_r >$与$V_2 =< B, o_1', o_2', \ldots, o_r' >$是同类型的代数系统，对于$i = 1, 2, \ldots, r$，$o_i$与$o_i'$都是$k_i$元运算，$f: A \to B$是$V_1$到$V_2$的同态，关系$R$是$f$导出的$V_1$上的同余关系，则$V_1$关于同余关系$R$的商代数同构于$V_1$在$f$下的同态像，即

$$V_1/R \cong < f(A), o_1', o_2', \ldots, o_r' >$$

证明思路：

(1) 定义h：$V_1/R \to f(A)$, $h([a])=f(a)$

(2) 验证h是良定义的 $[a]=[b] \Leftrightarrow aRb \Leftrightarrow f(a)=f(b)$

(3) 验证h是双射

(4) 验证h是同态映射

同态的验证

考虑任意运算$\bar{o}_i$，设为k_i元，k_i>0, i=1, 2, …, r

$$
\begin{aligned}
& h\left(\bar{o}_i([a_1],[a_2],\dots,[a_{k_i}])\right) \\
&= h([o_i(a_1,a_2,\dots,a_{k_i})]) && \text{商代数定义} \\
&= f\left(o_i(a_1,a_2,\dots,a_{k_i})\right) && h\text{函数定义} \\
&= o_i'\left(f(a_1),f(a_2),\dots,f(a_{k_i})\right) && \text{同态定义} \\
&= o_i'\left(h([a_1]),h([a_2]),\dots,h([a_{k_i}])\right) && h\text{函数定义}
\end{aligned}
$$

如果有 0 元运算$[a] \in V_1/R$，则a是V_1中的0 元运算，

$$h([a]) = f(a) = a'$$

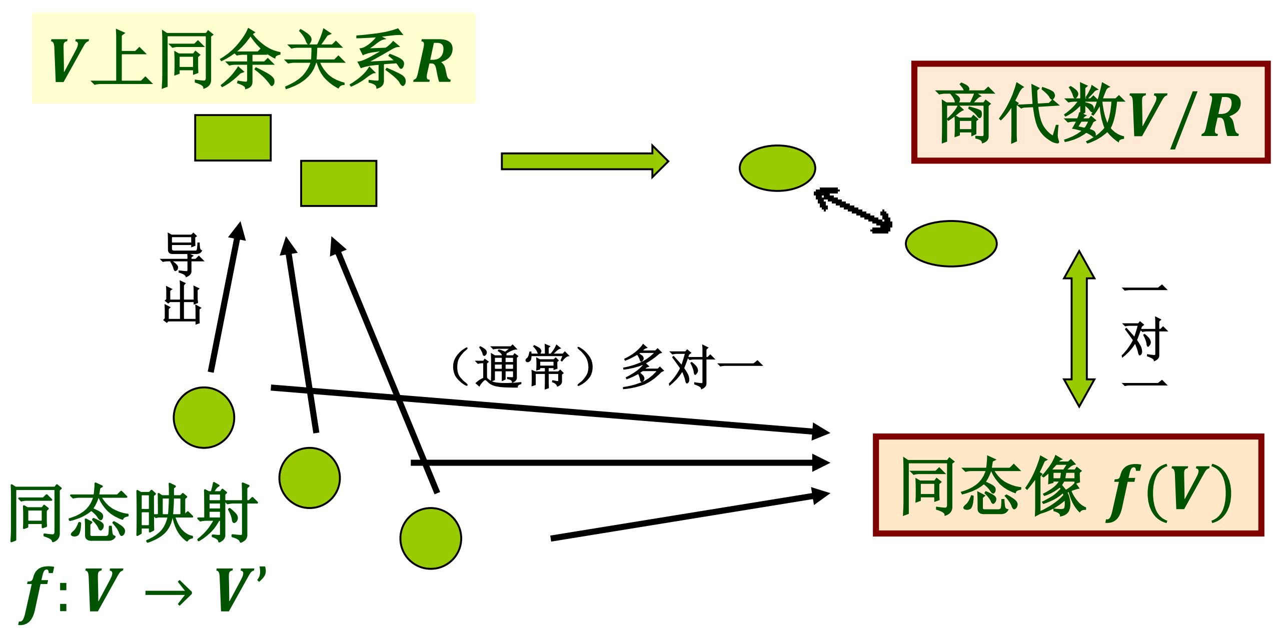
且a'是 $f(A)$中对应的 0 元运算

同态、同余关系与商代数的联系

定理2 任何商代数都是同态像

定理3 任何同态像在同构意义下是商代数

同余关系、商代数、同态、同态像的对应



实例说明

$G_1 = \{ e, a, b, c \}$, Klein四元群,　$G_2 = \{ e, x \}$

	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

$f_1: G_1 \to G_2$

$f_1 = \{\langle e, e\rangle, \langle a, e\rangle, \langle b, x\rangle, \langle c, x\rangle\}$

$f_2: G_1 \to G_2$

$f_2 = \{\langle e, e\rangle, \langle b, e\rangle, \langle a, x\rangle, \langle c, x\rangle\}$

$f_1(G_1) = f_2(G_1) = G_2$

f_1导出的同余关系R_1：$e \sim a$, $b \sim c$,　$G_1/R_1 = \{[e],[b]\}$

f_2导出的同余关系R_2：$e \sim b$, $a \sim c$,　$G_1/R_2 = \{[e],[a]\}$

$$G_1/R_1 \cong G_1/R_2 \cong G_2$$

例题(续)

例 3 设$V_1=<A,*,\triangle,k>$，$V_2=<B,\circ,\triangle',k'>$为代数系统，

$\forall<a,b>,<c,d>\in A\times B,<a,b>R<c,d>\Leftrightarrow a=c$

(1) 证明R为$V_1\times V_2$上的同余关系

(2) 证明$(V_1\times V_2)/R\cong V_1$

证明思路：

(1a) 证明 R 的自反、对称、传递性

(1b) 证明 R 具有置换性质，即令$V_1\times V_2=<A\times B,\bullet,\Diamond,K>$,

$<a,b>R<c,d>$且$<a',b'>R<c',d'>$

$\Rightarrow<a,b>\bullet<a',b'>R<c,d>\bullet<c',d'>$

$<a,b>R<c,d>\Rightarrow\Diamond<a,b>R\Diamond<c,d>$

(2a) 定义$f:V_1\times V_2\rightarrow V_1$，$f(<a,b>)=a$，证明 f 为满同态

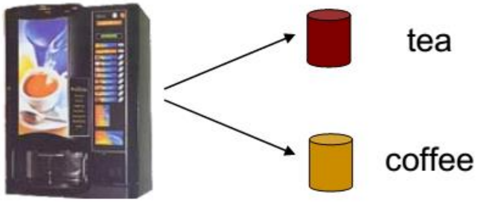
(2b) 证明 R 是 f 导出的同余关系，即

$f(<a,b>)=f(<c,d>)\Leftrightarrow a=c\Leftrightarrow<a,b>R<c,d>$

进程代数：Process Algebra

- 利用进程代数可以对使用通信实现交互的并发系统建模，上世纪80年代发展起来的通信系统演算（Calculus of Communicating Systems, CCS）便是这方面的典型代表。
- 例：自动售货机

假设该售货机只提供咖啡和茶。系统中的进程由动作coin，coffee和tea构成，分别表示“接收硬币”，“取走咖啡”和“取走茶”，对应的输出动作$\overline{coin}$，$\overline{coffee}$和$\overline{tea}$分别表示“投入硬币”，“提供咖啡”和“提供茶”。除了输入和输出动作外，还有一个特别的动作，即外部不可见的动作，我们笼统地用τ表示。这些动作构成基本进程。



进程代数(续)

Sir Tony Hoare

Robin Milner

自动售货机M的进程可定义为$!\,coin.(\overline{coffee}+\overline{tea})$，

购买咖啡的顾客C的进程可定义为$!\,\overline{coin}.coffee$，

这里的符号“!”表示其后的进程可以重复执行，

符号“+”表示在该符号前后的两个进程中选择一个执行。

自动售货机M与顾客C的交互可以用下面的进程描述：

$$M|C = !\,coin.(\overline{coffee}+\overline{tea})|!\,\overline{coin}.coffee$$

该进程在顾客投入硬币、自动售货机接受硬币后，转化为进程

$(\overline{coffee}+\overline{tea})|!\,coin.(\overline{coffee}+\overline{tea})|coffee|!\,\overline{coin}.coffee.$

进而，自动售货机提供咖啡、顾客取走咖啡后，系统还原为进程$M|C$。

进程代数(续)

另外，我们也可以在$M|C$外加上约束(**new** $coin, coffee, tea$)，即(**new** $coin, coffee, tea$)($M|C$)，该约束限定这些动作只能在系统$M|C$内部发生.

利用这些算子，加上表示空进程的零元算子0，可以构造出CCS的所有进程A. 进程集合A和给定的A上的算子构成了代数系统——CCS. 更明确地，CCS中有5个算子: 0, ., +, |, (**new** $\tilde{a}$)和!，具体说明如下:

0: $\to A$，称为空进程，表示进程终止.

.: $A \times A \to A$，称为顺序，运算结果得到的$a.b$是个组合进程，a后面顺序执行b.

+: $A \times A \to A$，称为选择，$a + b$表示在a与b中选择一个进程来执行，同时放弃另外一个.

进程代数(续)

$|: A \times A \to A$，称为并行，$a|b$是把a与b的并行执行看成一个新进程，当一个分支有输出动作，另外一个分支有同名的输入动作时，两个分支可以通信.

$(\mathbf{new}\ \tilde{a}): A \to A$，称为限制，表示动作集合$\tilde{a}$里的动作不能与外界交互.

$!: A \to A$，称为重复，表示可以不断执行.

所有进程及算子构成进程代数$< A, 0, ., +, |, (\mathbf{new}\ \tilde{a}), ! >$.为了使得表达式更为简洁，上述算子的优先级规定如下

$$. > | > +, \qquad ! > | > +, \qquad (\mathbf{new}\ \tilde{a}) > | > +$$

设x, y, z是CCS中的任意进程，可以证明进程代数CCS的一些主要算律。

进程代数(续)

选择运算满足交换律和结合律，即

$$x + y = y + x, \qquad (x + y) + z = x + (y + z)$$

并行运算满足交换律和结合律，即

$$x|y = y|x, \qquad (x|y)|z = x|(y|z)$$

0是+和|运算的单位元，即

$$0 + x = x, \qquad x + 0 = x, \qquad x|0 = x, \qquad 0|x = x$$

利用进程代数可以分析通信并发系统的性质，也可以通过互模拟来研究系统之间行为的等价性，从而在保证系统性能的前提下进一步简化系统，实现预定的设计目标。

小结

- 代数系统的基本概念
  - 构成：载体、运算集（包括0元运算）、公理（算律，特异元素）
  - 分类
- 子代数、积代数、商代数
  - 子代数：构成、判定（封闭）、性质（同种代数）　　——分解
  - 积代数：构成（直积）、性质（同类型，消去律例外）——组合
  - 商代数：构成（同余）、性质（同类型，消去律例外）——抽象
- 同态
  - 同态映射的概念
  - 性质（同类型，消去律例外）
  - 同态映射与商代数之间的关系