21.3 二项式定理与组合恒等式

- 二项式定理
- 组合恒等式
  - 递推式
  - 变下项求和
  - 变系数和
  - 变上项求和
  - 积
  - 积之和
- 证明方法小结

二项式定理

二项式定理：设n是正整数，对一切x和y

$$(x+y)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n-k}$$

说明：

使用归纳法证明

常用形式：

$$(1+x)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k$$

组合恒等式（递推式）

1. $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

2. $\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$

3. $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$

证明方法：公式代入、组合分析

应用：1式用于化简；2式用于求和时消去变系数；3式用于求和时拆项（两项之和或者差），然后合并。

组合恒等式（变下项求和）

简单和、交错和

4. $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=2^n$

5. $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}=0$

证明方法：二项式定理、组合分析

应用：序列求和

恒等式求和（变下项求和）

变系数和

6. $\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1}$

7. $\sum_{k=0}^{n} k^2\binom{n}{k} = n(n+1)2^{n-2}$

证明方法：二项式定理+求导

已知恒等式代入，消去变系数

应用：序列求和

证明（二项式定理+求导）

6式$\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1}$的证明

证：$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k = 1+\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}x^k$

$n(1+x)^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}x^{k-1}$　　　　求导

$n2^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}$　　　　令$x=1$

$= \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}$

证明（已知恒等式代入）

7式$\sum_{k=0}^{n} k^2\binom{n}{k}=n(n+1)2^{n-2}$的证明

证：$\sum_{k=0}^{n} k^2\binom{n}{k}=\sum_{k=1}^{n} k^2\frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$ 消去变系数

$=\sum_{k=1}^{n} kn\binom{n-1}{k-1}=n\sum_{k=1}^{n}[(k-1)+1]\binom{n-1}{k-1}$ 常量外提

$=n\sum_{k=1}^{n}(k-1)\binom{n-1}{k-1}+n\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}$

4. $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=2^n$

$=n\sum_{k=0}^{n-1}k\binom{n-1}{k}+n2^{n-1}$ 变限

6. $\sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}=n2^{n-1}$

$=n(n-1)2^{n-2}+n2^{n-1}=n(n+1)2^{n-2}$

恒等式（变上项求和）

8. $\sum_{l=0}^{n}\binom{l}{k}=\binom{n+1}{k+1}$, $n,k\in N$

证明方法：组合分析——考虑$S=\{a_1,a_2,\ldots,a_{n+1}\}$的$k+1$子集数

含a_1: $\binom{n}{k}$

不含a_1，含a_2: $\binom{n-1}{k}$

…

不含$a_1,a_2,\ldots,a_n$, 含a_{n+1} $\binom{0}{k}$

应用：求和

恒等式（积）

9. $\binom{n}{r}\binom{r}{k}=\binom{n}{k}\binom{n-k}{r-k}$

证明方法：组合分析——n元集中选取r个元素，然后在这r个元素中再选k个元素。不同的r元子集可能选出相同的k子集，其重复度为$\binom{n-k}{r-k}$.

$$\{a, b, c, d, e\} \to \{a, b, c, d\} \to \{b, c, d\}$$

$$\{b, c, d, e\} \to \{b, c, d\}$$

应用：将变上下限r变成常数k，求和时提到和号外面.

恒等式（积之和）

10. $\sum_{k=0}^{r}\binom{m}{k}\binom{n}{r-k}=\binom{m+n}{r}$

11. $\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\binom{n}{k}=\binom{m+n}{m}$

证明方法：组合分析、二项式定理

11式是10式的特例(10中m和n互换，然后令$r=m$)

应用：求和

组合恒等式小结

证明方法：

1. 已知恒等式代入
2. 二项式定理
3. 幂级数的求导、积分
4. 归纳法
5. 组合分析

求和方法：

1. Pascal公式---式3
2. 级数求和
3. 观察和的结果，然后使用归纳法证明
4. 利用已知的公式

非降路径问题

基本模型

- 限制条件下的非降路径数
- 非降路径模型的应用

  证明恒等式

  单调函数计数

  栈的输出

基本模型

全排列：$r = n$，$n_1+n_2+\ldots+n_k=n$

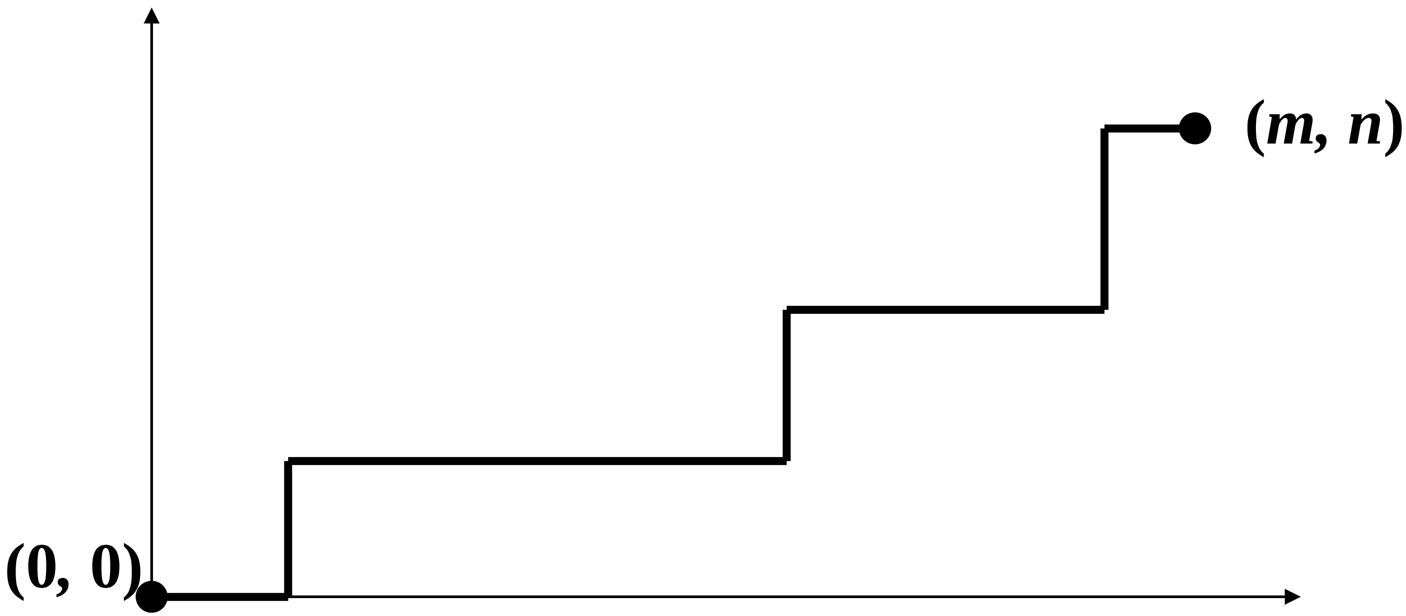
$N = \frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_k!}$

(0, 0)到(m, n)的非降路径数：$C(m+n, m)$

(a, b)到(m, n)的非降路径数：$\binom{(m+n)-(a+b)}{m-a} = \binom{(m+n)-(a+b)}{n-b}$

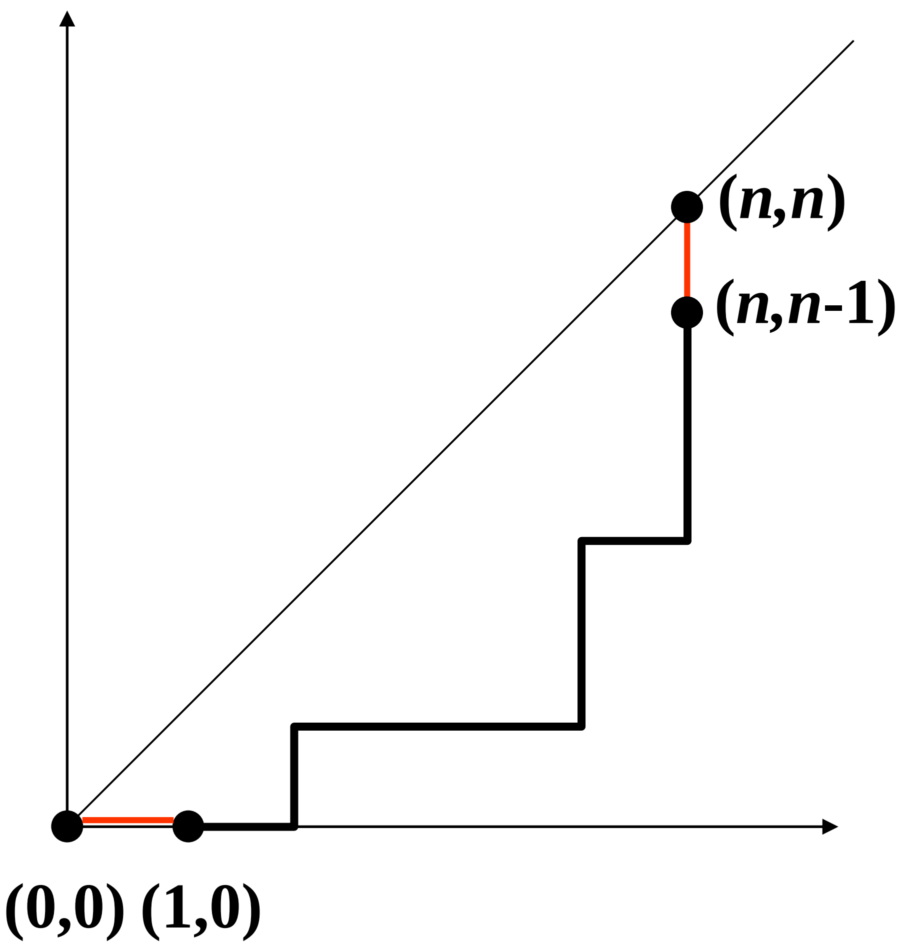
等于 (0, 0)到(m–a, n–b)的非降路径数

(a, b)经过(c, d)到(m, n)的非降路径数：乘法法则



限制条件的非降路径数

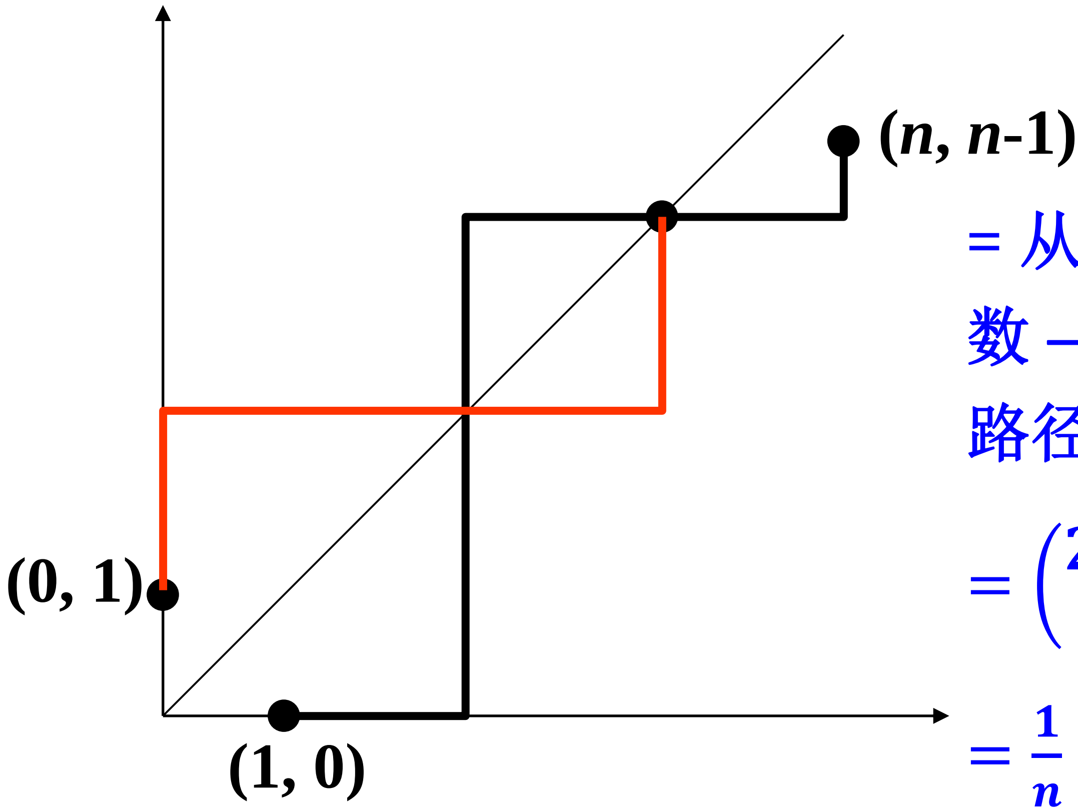
从(0, 0)到(n, n)除端点外不接触对角线的非降路径数



下方从(0, 0)到(n, n)不接触对角线非降路径数的2倍

下方从(0, 0)到(n, n)不接触对角线非降路径数
=从(1, 0)到(n, n-1)不接触对角线非降路径数

限制条件下非降路径数（续）



从(1, 0)到(n, n-1)不接触对角线的非降路径数

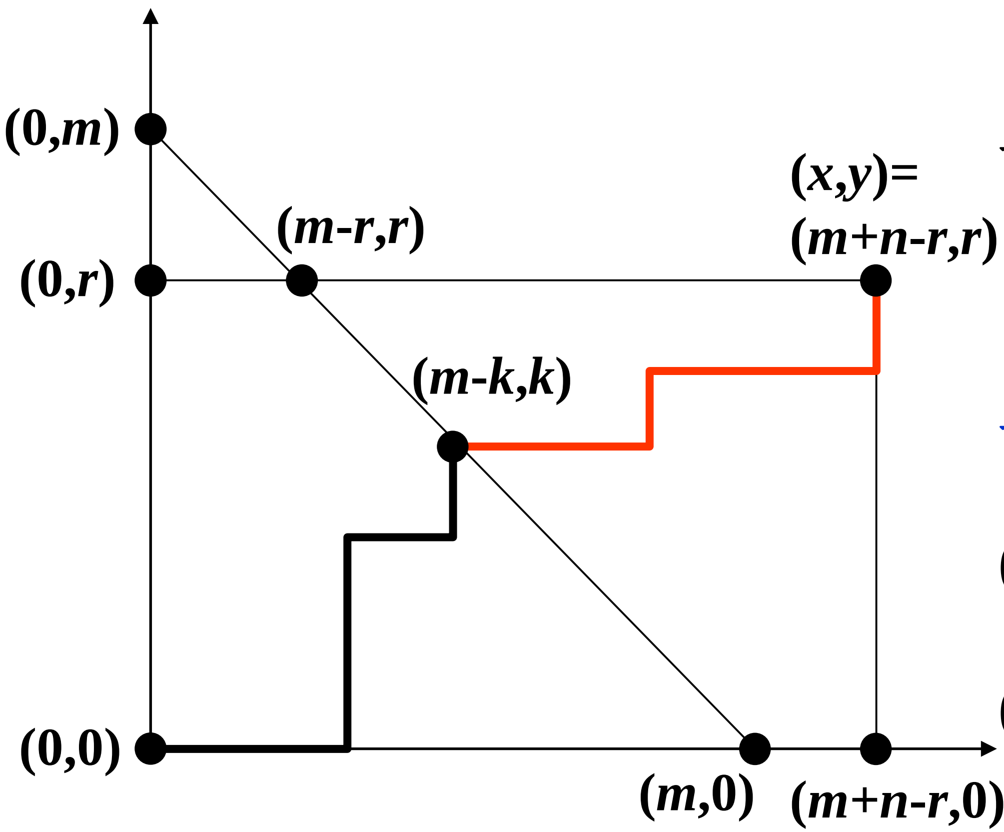
= 从(1, 0)到(n, n-1)非降路径数 – 从(0, 1)到(n, n-1)的非降路径数

$$= \binom{2n-2}{n-1} - \binom{2n-2}{n}$$

$$= \frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1}$$

故(0, 0)到(n, n)除端点外不接触对角线的非降路径数$= \frac{2}{n}\binom{2n-2}{n-1}$

应用（证明恒等式）



例（组合恒等式10）

证明 $\sum_{k=0}^{r}\binom{m}{k}\binom{n}{r-k}=\binom{m+n}{r}$

证：

(0, 0)到$(m-k, k)$路径数$\binom{m}{k}$,

$(m-k, k)$到(x, y)路径数$\binom{n}{r-k}$

$$\begin{cases} x+y-(m-k)-k=n \\ y-k=r-k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=m+n-r \\ y=r \end{cases}$$

应用（单调函数计数）

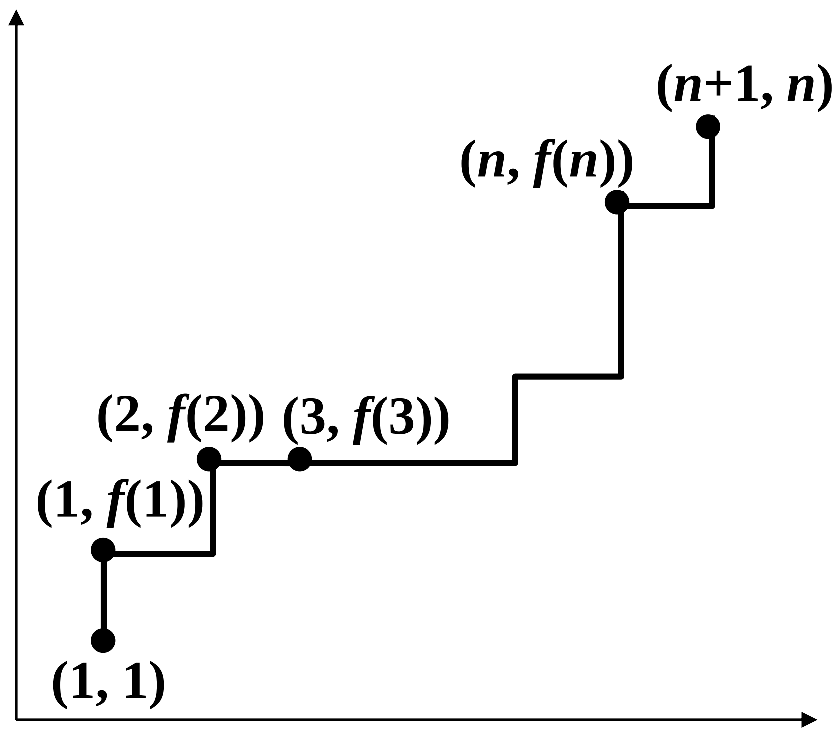
例 集合$\{1,2,\dots,n\}$上单调递增函数个数$=(1,1)$到$(n+1,n)$的非降路径数$=\binom{2n-1}{n}$

单调函数个数$=2\binom{2n-1}{n}-n$

一般地，$A=\{1,2,\dots,m\}$，$B=\{1,2,\dots,n\}$，A到B单调递增函数个数$=(1,1)$到$(m+1,n)$的非降路径数$=\binom{m+n-1}{m}$

A到B单调函数个数$=2\binom{m+n-1}{m}-n$

严格单调递增函数个数$C(n,m)$，
严格单调递减函数个数$C(n,m)$



函数计数小结

$\boldsymbol{A} = \{\mathbf{1}, \mathbf{2}, \dots, \boldsymbol{m}\}, \boldsymbol{B} = \{\mathbf{1}, \mathbf{2}, \dots, \boldsymbol{n}\}$

$\boldsymbol{f}: \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$

函数	单射	满射	双射	单调	严格单调
计数	$P(n,m)$	$\left\{ {m \atop n} \right\} n!$	$\left\{ {n \atop n} \right\} n! = n! = P(n,n)$	$2\binom{m+n-1}{m}-n$	$2C(n,m)$
模型	排列	放球	排列	非降路径	组合

括号内是第二类Stirling数，即m个不同的球恰好放到n个相同的盒子里的方法数

应用（栈输出的计数）

例 将1, 2, … , n按照顺序输入栈，有多少个不同的输出序列?

分析：将进栈、出栈分别记作x, y, 进栈、出栈的操作序列是n个x，n个y的排列，其中，排列的任何前缀中，x个数不少于y的个数，等于从$(0, 0)$到(n, n)的不穿过对角线的非降路径数。

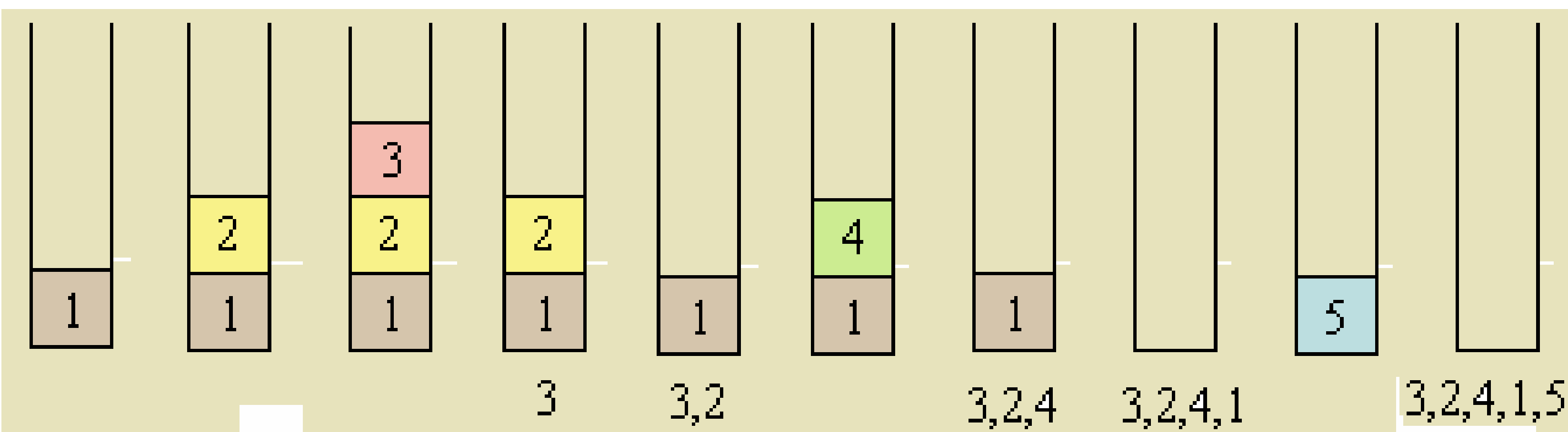
应用（栈输出的计数）

输入： 1, 2, 3, 4, 5

输出 ： 3, 2, 4, 1, 5

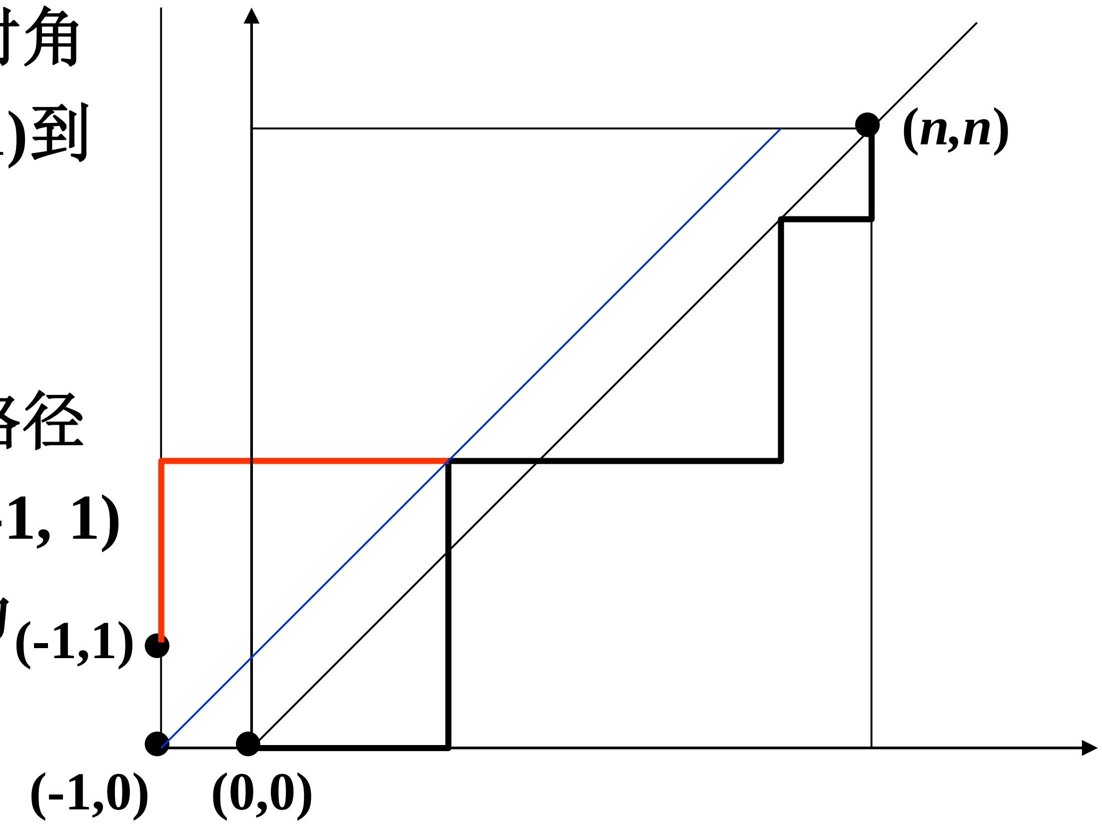
⇔ 进,进,进,出,出,进,出,出,进,出

⇔ *x, x, x, y, y, x, y, y, x, y*



栈输出的计数（续）

从(0, 0)到(*n*, *n*)的穿过对角线的非降路径⇔从(-1, 1)到(*n*, *n*)的非降路径



从(0, 0)到(*n*, *n*)的非降路径总数为C(2*n*, *n*)条，从(-1, 1)到(*n*, *n*)的非降路径数为C(2*n*, *n*-1)条，

故

$$N=\binom{2n}{n}-\binom{2n}{n-1}=\frac{(2n)!}{n!n!}-\frac{(2n)!}{(n-1)!(n+1)!}=\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

21.4 多项式定理

定理 设n为正整数，x_i为实数，$i=1, 2, \ldots, t$.

$$(x_1+x_2+\cdots+x_t)^n=\sum_{\substack{\text{满足}n_1+\cdots+n_t=n\\ \text{的非负整数解}}}\binom{n}{n_1 n_2 \ldots n_t} x_1^{n_1} x_2^{n_2} \ldots x_t^{n_t}$$

推论1 不同的项数为方程$n_1+n_2+\cdots+n_t=n$的非负整数解的个数$C(n+t-1,n)$

推论2 $\sum\binom{n}{n_1 n_2 \ldots n_t}=t^n$

定理证明

证：选n_1个因式贡献x_1,

从$n-n_1$个因式选n_2个因式贡献x_2,

…

从$n-n_1-\cdots-n_{t-1}$个因式中选n_t个因式贡献x_t .

因此系数为,

$$\binom{n}{n_1}\binom{n-n_1}{n_2}\cdots\binom{n-n_1-\cdots-n_{t-1}}{n_t}$$

$$=\frac{n!}{n_1!\,n_2!\ldots n_t!}=\binom{n}{n_1 n_2 \ldots n_t}$$

多项式系数

组合意义

多项式系数 $\binom{n}{n_1 n_2 \ldots n_t}$

多重集的全排列数

n个不同的球放到t个不同的盒子使得第一个盒子含n_1个球，第二个盒子含n_2个球，…，第t个盒子含n_t个球的方案数

多项式系数（续）

恒等式

$$(1)\ \sum \binom{n}{n_1 n_2 \dots n_t} = t^n$$

$$(2)\ \binom{n}{n_1 n_2 \dots n_t} = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_t!}$$

$$(3)\ \binom{n}{n_1 n_2 \dots n_t} = \binom{n-1}{n_1 - 1\ \ n_2 \dots n_t} + \binom{n-1}{n_1 n_2 - 1 \dots n_t} + \cdots + \binom{n-1}{n_1 n_2 \dots n_t - 1}$$

基本计数的应用

11. $\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\binom{n}{k}=\binom{m+n}{m}$

证明整除

命题1 k个连续正整数乘积可以被$k!$整除。（书例21.13）

命题2 设p为素数，$p\neq 2$, 证明当$C(2p, p)$被p除时余数是2.

证 $$\binom{2p}{p}=\binom{p}{0}^2+\binom{p}{1}^2+\cdots+\binom{p}{p}^2$$

由命题1，或直接由$p(p-1)\cdots(p-k+1)=\binom{p}{k}k!$知

$k! \mid p(p-1)\cdots(p-k+1)$

因此对任意$0<k<p$, 有 $k! \mid (p-1)(p-2)\cdots(p-k+1)$，故

$p \mid \binom{p}{k}$, $0<k<p$. 从而$C(2p, p)$被p除余数为$\binom{p}{0}^2+\binom{p}{p}^2=2$.

基本计数的应用（续）

例 证明**Fermat小定理**：若p为素数，则$p|(n^p-n)$.

证 先证明：若$\binom{p}{k_1 k_2 \ldots k_n} \neq 1$，则$p\left|\binom{p}{k_1 k_2 \ldots k_n}\right.$.

事实上，$\binom{p}{k_1 k_2 \ldots k_n}=1$当且仅当存在$k_j=p$，其他$k_i=0$, $i\neq j$.

故若$\binom{p}{k_1 k_2 \ldots k_n} \neq 1$，则$k_1!\,k_2!\ldots k_n!$中不含$p$，从而

$k_1!\,k_2!\ldots k_n!$整除$(p-1)!$，故$p\left|\binom{p}{k_1 k_2 \ldots k_n}\right.$.

证明Fermat小定理（续）

下面证明Fermat小定理：由

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^p = \sum_{\sum k_i = p} \binom{p}{k_1 k_2 \ldots k_n} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots x_n^{k_n},$$

令x_i=1, 则有 $n^p = \sum_{\sum k_i = p} \binom{p}{k_1 k_2 \ldots k_n}$.

右边恰有n项的值等于1，其余各项之和为$n^p - n$.

因为当$\binom{p}{k_1 k_2 \ldots k_n} \neq 1$时，有$p \mid \binom{p}{k_1 k_2 \ldots k_n}$,

即p整除其余的每一项，因此$p \mid (n^p - n)$.

基本计数的应用（续）

Ipv4协议网址计数

32位地址　网络标识+主机标识

A类：最大网络；B类：中等网络；C类：最小网络；

D类：多路广播；E类：备用

限制条件：1111111在A类中的netid部分无效；

hostid部分不允许全为0或全为1

A	0	netid (7位)	hostid (24位)			
B	1	0	netid （14位）	hostid（16位）		
C	1	1	0	netid （21位）	hostid（8位）	
D	1	1	1	0	（28位）	
E	1	1	1	1	0	（27位）

基本计数的应用（续）

	netid	hostid
A类：	0+7位，	24位
B类：	10+14位，	16位
C类：	110+21位，	8位

限制条件：1111111在A类中的netid部分无效

hostid部分不允许全0或全1

A类： netid 2^7-1, hostid $2^{24}-2$，

地址数：$127 \cdot 16777214=2130706178$

B类： netid 2^{14}, hostid $2^{16}-2$，

地址数：$16384 \cdot 65534=1073709056$

C类： netid 2^{21}, hostid 2^8-2,

地址数：$2097152 \cdot 254=532676608$

$|A|+|B|+|C|=3737091842$. Ipv6 改为 128位

本章小结

基本计数

计数法则：加法法则、乘法法则

计数模型：

选取问题：有序不重复、有序可重复（部分公式）

无序不重复、无序可重复（部分公式）

非降路径问题：基本公式

有限制条件的情况

方程的非负整数解问题子类型

放球问题子类型（球没区别）

处理方法：分类处理、分步处理、一一对应思想

本章小结（续）

组合恒等式： 基本公式、证明方法、应用

求和： 基本和式、求和方法、应用

计数符号：

组合数或二项式系数$C(m, n)$

排列数$P(m, n)$

多项式系数$\binom{n}{n_1 n_2 \ldots n_t}$

定义、基本公式、恒等式、对应的组合计数问题

组合恒等式小结

1. $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

2. $\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$

3. $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$

4. $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$

5. $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0$

6. $\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1}$

7. $\sum_{k=0}^{n} k^2\binom{n}{k} = n(n+1)2^{n-2}$

8. $\sum_{l=0}^{n} \binom{l}{k} = \binom{n+1}{k+1}, \quad n, k \in N$

9. $\binom{n}{r}\binom{r}{k} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{r-k}$

10. $\sum_{k=0}^{r} \binom{m}{k}\binom{n}{r-k} = \binom{m+n}{r}$

11. $\sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k}\binom{n}{k} = \binom{m+n}{m}$