2023 代组第二次作业

2000013058 杨仕博

2023 年 3 月 7 日

29

(1)

$\forall x \in Z, \phi(\Delta x) = \phi(x+1) = (x+1) \mod 2 = (x \mod 2+1) \mod 2 = \bar{\Delta}\phi(x)$

因而，ϕ 是 V_1 到 V_2 的同态

(2)

对于 ϕ 引出的等价关系 $\sim$，

$$\begin{aligned} x \sim y &\Leftrightarrow \phi(x) \sim \phi(y) \\ &\Leftrightarrow x \equiv y \mod 2 \end{aligned}$$

因而 ϕ 导出的划分是 $\{2Z+1, 2Z\}$

30

(1)

由 $\forall x \in A_k, nx \geq m \Rightarrow nx \in A_m$ 并且 $\forall x, y \in A_k, \phi(x+y) = n(x+y) = nx + ny = \phi(x) + \phi(y)$ 知 ϕ 是 V_1 到 V_2 的同态

(2)

对于 $a, b \in V_1$，

$$\begin{aligned} a \sim b &\Leftrightarrow \phi(a) = \phi(b) \\ &\Leftrightarrow na = nb \\ &\Leftrightarrow a = b \vee n = 0 \end{aligned}$$

故

$$V_1/\sim = \begin{cases} <\{\{x\}|x \in Z \wedge x \geq k\}, \bigoplus>, \{x\}\bigoplus\{y\} = \{x+y\} & (n \neq 0) \\ <\{A_k\}, \bigoplus>, A_k \bigoplus A_k = A_k & (n = 0) \end{cases}$$

7

由 $(a*b)*(a*b) = a*(b*a)*b = a*(a*b)*b = (a*a)*(b*b) = a*b$ 知 $a*b$ 是幂等元。

10

(1)

对于 V 的子半群 W，

若 $3 \in W$，则 $3 \bigotimes 3 = 1 \in W$，此时若 $2 \in W$，则 $2 \bigotimes 2 = 0 \in W, W = Z_4$；若 $2 \notin W \wedge 0 \in W$，则 $W = \{1,3,0\}$，其中元素的乘积均在 W 中，从而构成子半群；若 $2 \notin W \wedge 4 \notin W$，则 $W = \{1,3\}$，其中元素的乘积均在 W 中，从而构成子半群。

若 $3 \notin W$，同样的，若 $2 \in W$，则 $2 \bigotimes 2 = 0 \in W, W = \{0,1,2\} \vee W = \{0,2\}$，上述两种可能中 W 的任两个（可以相同）的元素的积均在 W 中，构成子半群；若 $2 \notin W$，则 $W = \{0\} \vee W = \{1\} \vee W = \{0,1\}$，上述三种可能中 W 的任两个（可以相同）的元素的积均在 W 中，构成子半群

因此，$W = \{1,3,0\}$ 或 $W = \{1,3\}$ 或 $W = \{0,1,2\}$ 或 $W = \{0,2\}$ 或 $W = \{0\}$ 或 $W = \{1\}$ 或 $W = \{0,1\}$

(2)

在上述子半群中，有 1 在的 W 或者只有一个元素的 W 必然是子独异点，剩余的 $W = \{0,2\}$ 中任何两数相乘皆不为 2，因此不是子独异点。

因此对于子独异点 W，$W = \{1,3,0\}$ 或 $W = \{1,3\}$ 或 $W = \{0,1,2\}$ 或 $W = \{0\}$ 或 $W = \{1\}$ 或 $W = \{0,1\}$