第十周作业 P319-320 4(1), 8, 20, 21

4(1) 因为 $(a\wedge b)\leq a$, $(c\wedge d)\leq c$，由保序不等式，故 $(a\wedge b)\vee(c\wedge d)\leq a\vee c$.

因为 $(c\wedge d)\leq d$, $(a\wedge b)\leq b$，故 $(a\wedge b)\vee(c\wedge d)\leq b\vee d$.

从而 $(a\wedge b)\vee(c\wedge d)\leq(a\vee c)\wedge(b\vee d)$.

8. L_1: 3元子格 $\{c,b,a\}$, $\{d,b,a\}$, $\{a,b,e\}$, $\{a,d,e\}$, $\{a,c,e\}$, $\{b,c,e\}$, $\{b,d,e\}$.

4元子格: $\{a,b,c,e\}$, $\{a,b,d,e\}$, $\{b,c,d,e\}$.

5元子格: $\{a,b,c,d,e\}$

L_2: 3元子格: $\{a,b,e\}$, $\{a,b,g\}$, $\{a,c,f\}$, $\{a,c,g\}$, $\{a,d,e\}$, $\{a,d,f\}$, $\{a,d,g\}$, $\{a,e,g\}$, $\{a,f,g\}$ {b,e,g},{d,e,g},{c,f,g},{d,f,g}

4元子格: $\{a,b,c,g\}$, $\{a,b,d,e\}$, $\{a,d,c,f\}$, $\{a,c,f,g\}$, $\{a,b,e,g\}$

$\{a,b,f,g\}, \{a,c,e,g\}, \{a,d,e,g\}$
$\{a,d,f,g\}, \{d,e,f,g\}$

5元子格: $\{a,b,d,e,g\}, \{a,c,d,f,g\}$,
$\{a,d,e,f,g\}$, $\{a,b,c,e,g\}, \{a,b,c,f,g\}$

20. $f(x)\vee f(y)=(x\vee a)\vee(y\vee a)$

$=x\vee a\vee y\vee a= x\vee y\vee a\vee a$

$=x\vee y\vee a=f(x\vee y)$

因L为分配格, $f(x)=x\vee a\in L$.

因L分配, $f(x)\wedge f(y)=(x\vee a)\wedge(y\vee a)$

$\cancel{=((x\vee a)\wedge y)\vee((x\vee a)\wedge a)}$

$=(x\wedge y)\vee a=f(x\wedge y)$, $\forall x,y\in L$

故 f 为同态.

$g(x)\wedge g(y)=(x\wedge a)\wedge(y\wedge a)$

$=x\wedge a\wedge y\wedge a=x\wedge y\wedge a\wedge a$

$=x\wedge y\wedge a=g(x\wedge y)$

因L分配, $g(x)\vee g(y)=(x\wedge a)\vee(y\wedge a)$
$=(x\vee y)\wedge a=g(x\vee y)$, $\forall x,y\in L$

故g也是L的自同态映射

自同态的

$$\mathrm{Im} f = \{x \mid a \le x, x \in L\}$$

$$\mathrm{Im} g = \{x \mid x \le a, x \in L\}$$

21. 首先证明X为f到g的映射，Y为g到f的映射

$\forall x \in X$，$f(x) = x \vee b \geq b$ 由 $\vee$ 定义可知，

又 $x \leq a$，$b = b$，故由保序不等式 $x \vee b \leq a \vee b$

从而 $f(x) \in Y$。

$\forall y \in Y$，~~故~~ $g(y) = y \wedge a \leq a$，由 $\wedge$ 定义可知，

又 $b \leq y$，$a = a$，由保序不等式，$b \wedge a \leq y \wedge a$

从而 $g(y) \in X$

再证 ~~f(g(~~：$g(f(x)) = x$，$\forall x \in X$，因 $a \wedge b \leq x \leq a$，

$x \wedge a = x$，$x \vee (a \wedge b) = x$

$(x \vee b) \wedge a = (x \wedge a) \vee (b \wedge a)$

$= x \vee (a \wedge b) = x$

故f为单射，~~不然~~，因若 $f(m) = f(n)$，$\forall m, n \in X$

则 $g(f(m)) = m = g(f(n)) = n$ ~~矛盾~~！

同理，可证 $f(g(y)) = y$，$\forall y \in Y$，

因 $b \leq y \leq a \vee b$，$y \vee b = y$，$y \wedge (a \vee b) = y$

$(y \wedge a) \vee b = (y \vee b) \wedge (a \vee b)$

$= y \wedge (a \vee b) = y$

故g为单射，~~不然~~因为若 $g(m) = g(n)$，$\forall m, n \in Y$

$f(g(m)) = m = f(g(n)) = n$。

$\forall x \in X$，有 $g(f(x)) = x$，$f(x) \in Y$，$\forall y \in Y$，有 $f(g(y)) = y$，$g(y) \in X$

故为满射，且f g 互逆

最后再由L是分配格，得f，g保运算

$f(x_1\vee x_2)=(x_1\vee x_2)\vee b=x_1\vee x_2\vee b\vee b$

$=(x_1\vee b)\vee(x_2\vee b)=f(x_1)\vee f(x_2)$

$f(x_1\wedge x_2)=(x_1\wedge x_2)\vee b=(x_1\vee b)\wedge(x_2\vee b)$

$=f(x_1)\wedge f(x_2)$

$g(x_1\wedge x_2)=x_1\wedge x_2\wedge a=(x_1\wedge a)\wedge(x_2\wedge a)$

$=g(x_1)\wedge g(x_2)$

$g(x_1\vee x_2)=(x_1\vee x_2)\wedge a=(x_1\wedge a)\vee(x_2\wedge a)$

$=g(x_1)\vee g(x_2)$

从而为同构，得证