2023 代组第五次作业

2000013058 杨仕博

2023 年 3 月 28 日

21

熟知循环群的子群仍为循环群，因而 H_1, H_2 为循环群，设 $H_1 =< a >, H_2 =< b >, G =< g >, a = g^s, b = g^t$，有 $ab = g^{s+t} = ba$，又有 $(r, s) = 1$，因而由熟知结论，$< ab >$ 为 rs 阶循环群。而 $< ab >\subseteq G$，故 $G =< ab >\subseteq H_1H_2$。

又对任意 $x = a^p \in H_1, y = b^q \in H_2$，由中国剩余定理，存在 $l \in Z^+$，$s.t. l \equiv p(\mod r), l \equiv q(\mod s)$，$xy = (ab)^l \in< ab >= G$。故 $H_1H_2 \subseteq G$

故 $H_1H_2 = G$

23

对于无限群 G，如果 G 中存在某个元素生成的循环群 a 是无限群，则 $\forall r \in Z^+, < a^r >\leq G$，因而 G 有无限多的子群

如果不存在这样的元素，那么我们可以每次从 G 中任取一个不属于已经被取出的集合的元素，取出它生成的循环群，这是有限阶的。因而我们取出的子群的元素总是有限的，总能取出不在这些里的元素，进而能不断取出不同的子群。这个过程可以无限重复下去，因而 G 有无限多的子群

24

(1)

$$\sigma\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\tau\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\tau^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

(2)

$\sigma = (1\ 5\ 2)(3\ 4) = (1\ 2)(1\ 5)(3\ 4)$

$\tau = (1\ 4\ 5\ 2\ 3) = (1\ 3)(1\ 2)(1\ 5)(1\ 4)$

25

(1)

对任意 $i \neq j, 1 \notin \{i, j\}$，$(1\ i)(1\ j)(1\ i) = (1\ i)(1\ i\ j) = (i\ j)$，因而这个集合可以生成所有对换，而所有置换可以通过对换生成，因而这个集合可以生成所有置换

(2)

由于对任意 x, y, z, $(y\ z)(x\ y)(y\ z) = (x\ z)$

因而对任意 $i < j$，在原来集合中，

$((i+1)\ (i+2))(i\ (i+1))((i+1)\ (i+2)) = (i\ (i+2))$

$((i+2)\ (i+3))(i\ (i+2))((i+2)\ (i+3)) = (i\ (i+3))$

依次类推，最终可以生成 $(i\ (i+k)), \forall k \in N^+$，从而可以生成 $(i\ j)$

因而这个集合可以生成所有对换，而所有置换可以通过对换生成，因而这个集合可以生成所有置换

27

$(1\ 2\ 3\ 4)(1\ 2\ 3\ 4) = (1\ 3)(2\ 4)$

$(1\ 3)(2\ 4)(1\ 2\ 3\ 4) = (1\ 4\ 3\ 2)$

$(1\ 4\ 3\ 2)(1\ 2\ 3\ 4) = (1)$

因而，$H = \{(1\ 2\ 3\ 4), (1\ 3)(2\ 4), (1\ 4\ 3\ 2), (1)\}$

H 在 S_4 中共有 $|S_4|/|H| = 6$ 个右陪集，他们分别是：

$H = \{(1\ 2\ 3\ 4), (1\ 3)(2\ 4), (1\ 4\ 3\ 2), (1)\}$

$H(1\ 2) = \{(1\ 3\ 4), (1\ 4\ 2\ 3), (2\ 4\ 3), (1\ 2)\}$

$H(1\ 3) = \{(1\ 4)(2\ 3), (2\ 4), (1\ 2)(3\ 4), (1\ 3)\}$

$H(1\ 4) = \{(2\ 3\ 4), (1\ 2\ 4\ 3), (1\ 3\ 2), (1\ 4)\}$

$H(2\ 3) = \{(1\ 2\ 4), (1\ 3\ 4\ 2), (1\ 4\ 3), (2\ 3)\}$

$H(3\ 4) = \{(1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2\ 4), (1\ 4\ 2), (3\ 4)\}$

28

对于 $x, y \in G, xH = yH \Leftrightarrow y^{-1}x \in H$

设 $x = \begin{pmatrix} r_x & s_x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} r_y & s_y \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, 则 $y^{-1} = \begin{pmatrix} 1/r_y & -s_y/r_y \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, y^{-1}x = \begin{pmatrix} r_x/r_y & s_x/r_y - s_y/r_y \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$y^{-1}x \in H \Leftrightarrow r_x = r_y$

又 $\begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

故 H 在 G 中的全部左陪集形如 $\{\begin{pmatrix} r & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} | t \in Q\}, r \neq 0, r \in Q$

31

假设题设中的 p^m 阶群为 G

对 m 作归纳法:

当 m=1 时，G 本身为自己的 p 阶子群

当 $m \geq 2$ 时, 假设命题对所有小于 m 的正整数成立, 那么, G 中一定存在不为单位元的元素 a，$<a>$ 构成 G 的子群。若 $|a| = p^m$，则 $<a^{p^{m-1}}>$ 构成 G 的 p 阶子群。否则，由于 $|a| \Big| p$，知 $|a| = p^k, k < m$，又 $a \neq e$，知 $k \neq 0$，因而由归纳假设，$<a>$ 有 p 阶子群

由归纳原理，命题得证

34

我们记 $f(\sigma)$ 为 σ 的轮换指数，记 $g((a_1\ a_2\ ...a_n)) = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$

我们希望证明，对任意置换 σ 和任意 $a \neq b$，$f(\sigma(a\ b)) = f((a\ b)\sigma)$

我们设 $\sigma = \sigma_1\sigma_2...\sigma_n$ 为 σ 的不交轮换分解。我们设下标最大的零个、一个或两个轮换中的元素与 $A = \{a, b\}$ 有交

我们分类讨论这些情况:

(1) 若仅有 σ_n 与 A 有交，那么:

i. 若 $|g(\sigma_n) \bigcap A| = 1$，可不妨设 $\sigma_n = (a\ a_2\ ...a_n)$，则 $\sigma_n(a\ b) = (a\ b\ a_2\ a_3\ ...a_n)$，$(a\ b)\sigma_n = (a\ a_2\ a_3\ ...\ a_n\ b)$，这两项都与其他轮换不交，长度相等，故 $f(\sigma(a\ b)) = f(\sigma_1\sigma_2...\sigma_n(a\ b)) = f(\sigma_1\sigma_2...\sigma_{n-1}(a\ b)\sigma_n) = f((a\ b)\sigma_1\sigma_2...\sigma_n) = f((a\ b)\sigma)$

ii. 若 $|g(\sigma_n)\bigcap A| = 2$，且对应的两个元素在 σ_n 中相连，可不妨设 $\sigma_n = (a\ b\ a_3\ ...a_n)$，有 $\sigma_n(a\ b) = (a\ a_3\ ...a_n)$，$(a\ b)\sigma_n = (b\ a_3\ ...a_n)$，这两项都与其他轮换不交，长度相等，故 $f(\sigma(a\ b)) = f(\sigma_1\sigma_2...\sigma_n(a\ b)) = f(\sigma_1\sigma_2...\sigma_{n-1}(a\ b)\sigma_n) = f((a\ b)\sigma_1\sigma_2...\sigma_n) = f((a\ b)\sigma)$

iii. 若 $|g(\sigma_n)\bigcap A| = 2$，且对应的两个元素在 σ_n 中不相连，可不妨设 $a_1 = a, a_i = b(i \neq 2 \wedge i \neq n)$，有 $\sigma_n(a\,b) = (a\ a_{i+1}\ a_{i+2}\ ...a_n)(b\ a_2\ a_3\ ...a_{i-1})$，$(a\ b)\sigma_n = (a\ a_2\ a_3\ ...a_{i-1})(b\ a_{i+1}...a_n)$ 这四项与其他轮换不交，且前者的前一部分和后者的后一部分等长，后者的前一部分和前者的后一部分等长，故 $f(\sigma(a\,b)) = f(\sigma_1\sigma_2...\sigma_n(a\,b)) = f(\sigma_1\sigma_2...\sigma_{n-1}(a\,b)\sigma_n) = f((a\,b)\sigma_1\sigma_2...\sigma_n) = f((a\ b)\sigma)$

(2) 若 A 与 σ_{n-1} 与 σ_n 都相交，不妨设 $\sigma_n = (a\ a_2\ ...a_n)$，$\sigma_{n-1} = (b\ b_2\ ...b_n)$，则 $\sigma_{n-1}\sigma_n(a\ b) = \sigma_{n-1}(b\ a_2\ ...\ a_n\ a) = (b\ a_2\ ...\ a_n\ a\ b_2\ b_3\ ...\ b_n)$，$(a\,b)\sigma_{n-1}\sigma_n = (a\,b\,b_2\ ...b_n)\sigma_n = (a\,a_2\ ...a_n\ b\,b_2\ ...b_n)$，这两项都与其他轮换不交，长度相等，故 $f(\sigma(a\,b)) = f(\sigma_1\sigma_2...\sigma_n(a\,b)) = f(\sigma_1\sigma_2...\sigma_{n-2}(a\,b)\sigma_{n-1}\sigma_n) = f((a\ b)\sigma_1\sigma_2...\sigma_n) = f((a\ b)\sigma)$

(3) 若没有一项与 A 有交，那么这些轮换都可交换，进而结论成立。

由此，对于 $\tau^{-1}\sigma\tau$，我们设 $\tau = \tau_1\tau_2...\tau_n$ 为 τ 的轮换分解，有 $f(\tau^{-1}\sigma\tau) = f(\tau_n\tau_{n-1}...\tau_1\sigma\tau_1\tau_2...\tau_n) = f(\tau_n\tau_n\tau_{n-1}...\tau_1\sigma\tau_1\tau_2...\tau_{n-1}) = f(\tau_{n-1}...\tau_1\sigma\tau_1\tau_2...\tau_{n-1}) = f(\tau_{n-2}...\tau_1\sigma\tau_1\tau_2...\tau_{n-2}) = ... = f(\sigma)$

因而此题得证。