2023 代组第七次作业

2000013058 杨仕博

2023 年 4 月 11 日

53

由于 $|\phi(H)|\Big||H|$(因为 $\phi(H)$ 同构于 H 的某个商群)，

$|\phi(H)|\Big||G_2|$(因为 $\phi(H)$ 是 G_2 的子群)，

故 $|\phi(H)|\Big|(|H|,|G_2|) \Rightarrow |\phi(H)| = 1 \Rightarrow \phi(H) = \{e_2\}$(其中 e_2 是 G_2 中的单位元)

故 $H \subseteq ker(\phi)$

61

首先,若 ϕ 是自同构,那么 $\forall x, y \in G, xy = \phi(x^{-1})\phi(y^{-1}) = \phi(x^{-1}y^{-1}) = yx$，故 G 是交换群

其次，若 G 是交换群，那么，

$\forall x, y \in G, \phi(x) = \phi(y) \Rightarrow x^{-1} = y^{-1} \Rightarrow x = y$，故 ϕ 是单射

$\forall x \in G, \phi(x^{-1}) = x$，故 ϕ 是满射，

$\forall x, y \in G, \phi(xy) = y^{-1}x^{-1} = x^{-1}y^{-1} = \phi(x)\phi(y)$，故 ϕ 是自同态，

因而，ϕ 是自同构

62

(1)

记 $I = \{0, 1, ..., n-1\}$

$\forall i, j \in I, \phi_t(a^i a^j) = a^{t(i+j)} = a^{ti}a^{tj} = \phi_t(a^i)\phi_t(a_j)$

故 ϕ_t 是 G 的自同态

(2)

若 ϕ_t 是自同构，那么 $\exists i \in I, s.t.\ \phi(a^i) = a \Rightarrow \exists i \in I, s.t.\ it \mod n = 1 \Rightarrow (n, t) = 1$

若 $(n, t) = 1$，由裴蜀定理，$\exists i_0 \in I, s.t.\ i_0 t \mod n = 1$

因为 $\forall i, j \in I, \phi_t(a^i) = \phi_t(a^j) \Leftrightarrow a^{it} = a^{jt} \Leftrightarrow it \equiv jt(\mod n) \Leftrightarrow ii_0t \equiv ji_0t(\mod n) \Leftrightarrow j \equiv i(\mod n) \Leftrightarrow a^i = a^j$，故 ϕ_t 为单射

又因为 $\forall i \in I, \phi_t(a^{ii_0}) = a^{ii_0t} = a^i$，故 ϕ_t 为满射。

因此，ϕ_t 是自同构。

68

考察如下函数:

$f : G \to G/H \times G/K, \forall x \in G,\ f(x) = (xH, xK)$

我们证明这是一个单射 + 同态映射，这样，G 即和 $f(G)(G/H \times G/K$ 的子群) 同构。

由于 $\forall x, y \in G, f(x) = f(y) \Rightarrow (xH, xK) = (yH, yK) \Rightarrow y^{-1}x \in H \wedge y^{-1}x \in K \Rightarrow y^{-1}x \in H \bigcap K \Rightarrow y^{-1}x = e \Rightarrow x = y$，因而 f 是单射

又 $\forall x, y \in G, f(xy) = (xyH, xyK) = (xH, xK) \times (yH, yK) = f(x)f(y)$ 因而 f 是同态映射

故命题得证。

5

我们先证明 (2):

$a+a = a+a+a+a+(-a)+(-a) = a^2+aa+aa+a^2+(-a)+(-a) = (a+a)^2+(-a)+(-a) = a+a+(-a)+(-a) = 0$

接下来我们证明 (1):

$x+y = (x+y)^2 = x^2+xy+yx+y^2 = x+xy+yx+y \Rightarrow xy+yx = 0$

又 $xy+xy = 0$，故 $xy = yx$

最后我们证明 (3):

反设 R 是整环，由于 $|R| > 3$，R 中必然有和零元与幺元不同的元素，设为 x，由上有 $x(x-1) = x^2 - x = x - x = 0$，故 $x = 0 \vee x - 1 = 0 \Rightarrow x = 0 \vee x = 1$，与 x 不为零元或幺元矛盾

故命题得证

7

(1)

由于 n 不是素数，可以设 $n = pq, p \neq 1 \wedge q \neq 1$，这样 $1 < p, q < n$，又 $pq = qp = 0$，故而 Z_n 中有零因子

(2)

若 $(r, n) = d \neq 1$，则 $r \times (n/d) = n \times (r/d) = 0, (n/d) \times r = 0$，故 r 为零因子

故 r 不是零因子 $\Rightarrow (r, n) = 1$

若 $(r,n)=1$，由裴蜀定理知 $\exists s\in Z, s.t.\ rs\equiv 1(\mod n)$，若此时有 $\exists t\in Z, s.t.\ rt=0$，则 $t=srt=0$，故 r 不为左零因子，同理 r 不为右零因子，故 r 不为零因子

命题得证

(3)

由 (2)，Z_{18} 中的全部零因子为 $2,3,4,6,8,9,10,12,14,15,16$

12

首先证明 n 为素数。若 n 不为素数，则可设 $n=pq, p,q\neq 1$，有 $0=ne=(pe)(qe)$，与 F 没有零因子矛盾!

之后，由于 $\forall s\in\{1,2,...,n-1\}C_n^s=(n/s)C_{n-1}^{s-1}$，该式展开分母中没有 n 的倍数 (因为所有数都比 n 小)，分子中有 n，故 $n|C_n^s$，故 $(a+b)^n=\sum\limits_{i=0}^{n}C_n^i a^i b^{n-i}=a^n+b^n$