P349

考虑 7, 77, 777, ——

3. ~~若有~~ 模N必有两数同余

$$\underbrace{77\cdots7}_{j个} - \underbrace{7\cdots7}_{i个} = \underbrace{7\cdots7}_{j-i个}\underbrace{0\cdots0}_{i个}$$

$(j>i)$

故 $\underbrace{7\cdots7}_{j-i个}\underbrace{0\cdots0}_{i个}$ 为N的倍数

5. ~~考虑~~ 设第i天复习 a_i h $(a_i \geq 1)$

$$\sum_{i=1}^{37} a_i = 60.$$

考虑 $a_1, \cdots, a_1+\cdots+a_{13}$.

中必有13的倍数或~~两~~模13同余者.

故有 $13 \mid a_i + \cdots + a_j$. $(1 \leq i \leq j \leq 13)$

~~故~~ 同理有 $13 \mid a_k + \cdots + a_l$

$(25 \leq k \leq l \leq 37)$.

若任一为13. 证毕

否则, $a_1 + \cdots + a_{13} \geq 26$

$a_{25} + \cdots + a_{37} \geq 26$

$\sum^{37} a_i \geq 26 + 26 + 11 = 63 > 60$

6. 若均不相等，可取值 0, ……, n-1

分别都可取到，由~~度数和~~

但是 0 和 n-1 不能同时存在

（度为0存在，则其余人度数 $\le n-2$）

矛盾！

9. 若均不同，

则至少有 $0+\cdots+n-1 = \frac{n(n-1)}{2} > m$

条边 矛盾！

10. 共有36个含有3个扇形的区段

扇形和为 $(1+\cdots+36)\times 3 = 37\times 18\times 3$

抽屉原理保证至少有一个和为

至少 $\lceil (37\times 18\times 3)/36 \rceil = 56$

P349-351

6. (1) $A_5^5 = 5! = 120$.

(2) $\frac{6!}{2} = 360$.

7. $A_8^5 \times A_8^4 \times A_7^5 = 28449792000$

9. C_{20}^5.

19. $\sum_{k=0}^{\min\{t,r\}} C_t^k \times C_{r-l-1}^{k-t-1}$

24. (1) $x_1 + \cdots + x_n = r, \ x_i \geq 1$.

归纳证明，设 n, r 构成 $A(n, r)$

$A_{(n,r)}^{n} = \cancel{A_{n-1}^{r-1}} + A_{n-1}^{r-2} + \cdots + A_{n-1}^{n-1}$.

先对 n 归纳，再对 r 归纳.
(外层) (内层)

(2) $x_1 + \cdots + x_n = r, \ x_i \geq q$

$(x_1 - (q-1)) + \cdots + (x_n - (q-1)) = r - n(q-1)$

$C_{r-n(q-1)-1}^{n-1}$

28. $3^{5}\cdot(-2)^{13}\cdot C_{18}^{5}$, ①

$\cancel{3^{8}\cdot(-2)^{9}\cdot C_{18}}$

31 (4) 使用数学归纳法

n=1 时显然成立.

设 n 时成立.

$n+1$ 时, $\sum_{k=1}^{n+1}(-1)^{k-1}\frac{1}{k}C_{n+1}^{k}$

$$= \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{1}{k}\cdot C_{n}^{k} + \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{1}{k}\cdot C_{n}^{k-1} + (-1)^{n}\cdot\frac{1}{n+1}.$$

$$= 1+\cdots+\frac{1}{n}+\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k}\cdot\frac{1}{k+1}C_{n}^{k}$$

$$= 1+\cdots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}\cdot\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k}C_{n+1}^{k+1}$$

$$= 1+\cdots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}$$ (因 $\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k}\cdot C_{n+1}^{k}=0$)

故证毕

39. $C_{8}^{2}\cdot C_{6}^{3}\cdot C_{3}^{1}\cdot(-1)^{3}\cdot 2\cdot(-2)^{2} = -13440$.