2023 代组第六次作业

2000013058 杨仕博

2023 年 4 月 4 日

38

(1)

$G = \{e, a, a^2, a^3\}$

$\forall x \in G,\ assume\ x = a^j, \forall i \in Z, a^i x a^{-i} = a^{i+j-i} = a^j = x \Rightarrow$ G 的所有共轭类为 $\{e\}, \{a\}, \{a^2\}, \{a^3\}$

(2)

设 $G = \{e, a, b, c\}$

$\bar{e} = \{e\}$

$\bar{a} = \{eae, aaa, bab, cac\} = \{a, a, a, a\} = \{a\}$

同理 $\bar{b} = \{b\}, \bar{c} = \{c\}$

G 的所有共轭类为 $\{e\}, \{a\}, \{b\}, \{c\}$

41

$k = |\bar{a}| = [G : N(a)] = |G|/|N(a)| \Rightarrow |N(a)| = n/k$

又 $C \leq N(a) \Rightarrow c \Big| |N(a)| \Rightarrow c \Big| n/k \Rightarrow k \Big| n/c$

42

设 $G =< a >$ 为循环群，其任意子群必然形如 $< a^i >$

对任意 $x \in G, y \in < a^i >,\ assume x = a^j, y = a^{is}, xyx^{-1} = a^j a^{is} a^{-j} = a^{j+is-j} = a^{is} = y \in < a^i >$,

故 $< a^i >$ 为正规子群

46

(1)

首先证明 H 是 G 的子群，明显 I 在 H 中，故而 H 非空：$\forall A \in H, B \in H, |AB^{-1}| = \frac{|A|}{|B|} > 0 \Rightarrow AB^{-1} \in H$

其次证明 H 的正规性：$\forall X \in G, A \in H, |X| \neq 0, |XAX^{-1}| = \frac{|X||A|}{|X|} = |A| \Rightarrow XAX^{-1} \in H$

故 H 是 G 的正规子群

(2)

$\forall A, B \in G, AH = BH \Leftrightarrow BA^{-1} \in H \Leftrightarrow \frac{|B|}{|A|} > 0 \Leftrightarrow Sgn(|B|) = Sgn(|A|)$

又 $\forall A \in G, |A| > 0 \vee |A| < 0$，故 $[G:H] = 2$

47

(1)

$\forall A, B \in M_n(Q), \phi(A)\phi(B) = |A||B| = |AB| = \phi(AB)$

故 ϕ 是同态映射

(2)

$\forall A \in G_1, \phi(A) = |A| \in Q^* \Rightarrow \phi(G_1) \subseteq Q^*$

$\forall x \in Q^+, |diag\{x, I_{n-1}\}| = x, |diag\{-x, I_{n-1}\}| = -x \Rightarrow Q^* \subseteq \phi(G_1)$

故 $\phi(G_1) = Q^*$

$A \in ker\phi \Leftrightarrow \phi(A) = 1 \Leftrightarrow |A| = 1$

故 $ker\phi$ 是所有行列式为 1 的 $M_n(Q)$ 中的矩阵构成的集合

48

若 ϕ 是 $< Q, + >$ 到 $< Z, + >$ 的同态映射，且 $\exists a \in Q, s.t. \phi(a) \neq 0$，不妨设 $\phi(a) = s \in Z$

由 $\phi(0) = 0$ 知 $a \neq 0$，我们考察 $\phi(a/2s^2)$

由于 $2s^2\phi(a/2s^2) = \phi(2s^2(a/2s^2)) = \phi(a) = s$，有 $\phi(a/2s^2) = \frac{1}{2s} \notin Z$，与群的定义矛盾!

故对于任意 $< Q, + >$ 到 $< Z, + >$ 的同态映射 ϕ，不存在 $a \in Q, s.t. \phi(a) \neq 0$，故 ϕ 为零同态，命题得证

51

(1)

首先 $e \in \phi^{-1}(H)$，故而 $\phi^{-1}(H)$ 非空

又 $\forall x, y \in \phi^{-1}(H), \phi(xy^{-1}) = \phi(x)\phi(y)^{-1}$

且 $\phi(x) \in H, \phi(y) \in H \Rightarrow \phi(y)^{-1} \in H \Rightarrow \phi(x)\phi(y)^{-1} \in H \Rightarrow xy^{-1} \in \phi^{-1}(H)$

故 $\phi^{-1}(H)$ 构成 G_1 的子群

(2)

若 H 是 G_2 的正规子群，由 (1)，$\phi^{-1}(H)$ 构成 G_1 的子群

$\forall x \in G_1, y \in \phi^{-1}(H), \phi(xyx^{-1}) = \phi(x)\phi(y)\phi(x)^{-1}$

又 H 是 G_2 的正规子群 $\Rightarrow \phi(x)\phi(y)\phi(x)^{-1} \in H \Rightarrow xyx^{-1} \in \phi^{-1}(H)$，由 x，y 的任意性，$\phi^{-1}(H)$ 是 G_1 的正规子群