P396.

~~17(1)(3) 18(1)~~
19 20 23

17.

(1) $$A(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n (n+1) x^n.$$

$$(1+x)A(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \cdot x^n = \frac{1}{1+x}.$$

故 $$A(x) = \frac{1}{(1+x)^2}$$

(3) $$A(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+5) x^n.$$

$$(1-x)A(x) = 5 + x + x^2 + \cdots$$

$$= 5 + x \cdot \frac{1}{1-x} = \frac{5-4x}{1-x}$$

故 $$A(x) = \frac{5-4x}{(1-x)^2}$$

18. (1) $$A(x) = \frac{x(1+x)}{(1-x)^3}$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} (x+x^2) x^n \cdot \frac{(n+2)(n+1)}{2}$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} n^2 \cdot x^n.$$

19. (1) $C(x)=(x+x^3+x^5+\cdots)^4=\dfrac{x^4}{(1-x^2)^4}$

(2) $C(x)=(1+x^3+x^6+\cdots)^4=\dfrac{1}{(1-x^3)^4}$

(3) $C(x)=(1+x)(1+x+x^2+\cdots)^2$

$=\dfrac{1+x}{(1-x)^2}$

(4) $C(x)=(x+x^3+x^{11})(x^2+x^4+x^5)(1+x+x^2+\cdots)^2$

$=\dfrac{(x+x^3+x^{11})(x^2+x^4+x^5)}{(1-x)^2}$

(5) $(x^{10}+x^{11}+\cdots)^4$

$=\dfrac{x^{40}}{(1-x)^4}$

20. $A(x)=\left(1+\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^4}{4!}+\cdots\right)^2\left(1+\dfrac{x}{1!}+\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^3}{3!}+\cdots\right)^2$

$=(e^x+e^{-x})^2\cdot e^{2x}\cdot\dfrac{1}{4}$

$=\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{4}e^{4x}+\dfrac{1}{2}e^{2x}$

~~2~~3.

$$a_n=\begin{cases}4^{n-1}+2^{n-1} & (n\geq 1)\\ 1 & (n=0)\end{cases}$$

23. ~~(…)~~ $P(N-m,m)$ 表示将 $N-m$ 划分为无序的~~…~~整数，均小于等于 m 的方案数，

每一个这样的方案，再分配一个 m，恰好对应到一个 $P(N,m)$ 的含 m 方案。

（双射）

若 $P(N,m)$ 中方案不含 m，恰好对应到一个 $P(N,m-1)$ 的方案

故 $P(N,m)=P(N,m-1)+P(N-m,m)$

26. (1) $A_e(x)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty} n!\cdot\dfrac{x^n}{n!}=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}x^n=\dfrac{1}{1-x}$

(2) $A_e(x)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty} n!\cdot 2^n\cdot\dfrac{x^n}{n!}=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(2x)^n$

(3) $A_e(x)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\cdot\dfrac{x^n}{n!}$ $=\dfrac{1}{1-2x}$

$=e^{-x}$

28.

(1) $A_e(x)=\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}\right)\left(1+x+\frac{x^2}{2!}\right)\left(1+x+\cdots+\frac{x^5}{5!}\right)$.

其中 x^4 系数为 $\frac{71}{4!}$

故方案数为 71.

(2) $A_e(x)=\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}\right)(1+x)\left(1+\cdots+\frac{x^5}{5!}\right)$

末位为 2，x^3 系数为 $\frac{20}{3!}$

故方案数为 20.

30. 将0点连 $2i$ ($i=1, \cdots, n-1$)

故 $h_n=\sum_{i=0}^{n-1} h_i h_{n-i-1}$

从而 指数生成函数

$$H(x)=\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1}x^{n-1}$$

故方案数为 $\frac{1}{n+1}C_{2n}^{n}$

32. $\begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix}=(n-1)\begin{bmatrix} n-1 \\ r \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} n-1 \\ r-1 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix}=0$, $\begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix}=(n-1)!$

故 $\begin{bmatrix} 7 \\ 1 \end{bmatrix}=6!$ $\begin{bmatrix} 7 \\ 2 \end{bmatrix}=1764$

$\begin{bmatrix} 7 \\ 3 \end{bmatrix}=1624$ $\begin{bmatrix} 7 \\ 4 \end{bmatrix}=735$

$\begin{bmatrix} 7 \\ 5 \end{bmatrix}=175$ $\begin{bmatrix} 7 \\ 6 \end{bmatrix}=21$ $\begin{bmatrix} 7 \\ 7 \end{bmatrix}=1$