# 2023 代组第九次作业

2000013058 杨仕博

2023 年 5 月 1 日

## 2

(1) 不是格，因为 $[3, 4] = 12$ 不在该集合中。

(2) 是格，因为这个集合是 12 的所有正因子集合，构成 12 的正因子格。（一个数的两个因子的最大公因数和最小公倍数都是这个数的因子）

(3) 是格，因为这个集合是 36 的所有正因子集合，构成 36 的正因子格。（一个数的两个因子的最大公因数和最小公倍数都是这个数的因子）

(4) 是格，因为 $\forall i, j \in N, i \leq j, (5^i, 5^j) = 5^i$, $[5^i, 5^j] = 5^j$ 都在这个集合中。

## 8

（以下集合对应以他为载体的格）

$L_1$

3 元子格：$\{b, c, e\}, \{b, d, e\}, \{a, b, e\}, \{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{a, c, e\}, \{a, d, e\}$

4 元子格：$\{e, c, b, a\}, \{e, d, b, a\}, \{e, c, d, b\}$

5 元子格：$L_1$

$L_2$

写程序枚举得

3 元子格：

{d, e, g}, {e, b, g}, {e, a, g}, {f, d, g}, {f, a, g}, {f, c, g}, {d, a, g}, {a, b, g}, {c, a, g}, {d, e, a}, {e, a, b}, {f, d, a}, {f, c, a}

4 元子格：

{e, d, g, f} {e, a, g, f} {e, a, d, g} {e, b, a, g} {e, c, a, g} {a, d, g, f} {b, a, g, f} {c, a, g, f} {b, a, d, g} {a, c, d, g} {b, c, a, g} {e, a, b, d} {a, c, d, f}

5 元子格：

{a, g, d, f, e} {b, a, g, f, e} {c, a, g, f, e} {b, a, g, d, e} {c, a, g, d, e} {c, b, a, g, e} {b, a, g, d, f} {c, a, g, d, f} {c, b, a, g, f} {c, b, a, g, d}

## 19

G 的子群格为

$L(G)=\{<a>,<a^p>,<a^{p^2}>,...,<a^{p^t}>\}$

记 L 从最小元到最大元依次为 $b_0,b_1,...,b_t$

考察如下映射:$\phi(b_i)=<a^{p^i}>,\forall b_i\in L(1)$

那么，$\phi$ 是单射，因为象的子群相同则该子群的 a 的最低幂次的元素相同，意味者 b 的脚标唯一固定，映射前的脚标一样进而输入相同。

$\phi$ 是满射，因为在 (1) 式中 $a^{p^i},i=0,1,2,...,t$ 都跑遍了，进而所有元素都在象中。

$\phi$ 是同态，因为 $\forall i,j\in\{0,1,2,...,t\},j\le i$，$\phi(b_i\wedge b_j)=\phi(b_j)=<a^{p^j}>=<a^{p^j}>\bigcap<a^{p^i}>=\phi(b_i)\bigcap\phi(b_j)$，类似地 $\phi(b_i\vee b_j)=\phi(b_i)=<a^{p^i}>=<a^{p^j}>\bigcup<a^{p^i}>=\phi(b_i)\bigcup\phi(b_j)$

故而二者同构。

## 28

注：证明中的元素均为 B 中的任意元素

首先证明 $<B,\oplus>$ 构成 Abel 群。

这是因为，由于 B 是布尔代数，故 $\oplus$ 中每一次运算都封闭，进而 $\oplus$ 是封闭的。

$a\oplus b=(a\wedge\bar b)\vee(\bar a\wedge b)=(\bar a\wedge b)\vee(a\wedge\bar b)=(b\wedge\bar a)\vee(\bar b\wedge a)=b\oplus a$，故满足交换律

$$
\begin{aligned}
a\oplus(b\oplus c)&=(a\wedge\overline{(b\wedge\bar c)\vee(\bar b\wedge c)})\vee(\bar a\wedge((b\wedge\bar c)\vee(\bar b\wedge c)))\\
&=(a\wedge\overline{b\wedge\bar c}\wedge\overline{\bar b\wedge c})\vee(\bar a\wedge b\wedge\bar c)\vee(\bar a\wedge\bar b\wedge c)\\
&=(a\wedge(\bar b\vee c)\wedge(b\vee\bar c))\vee(\bar a\wedge b\wedge\bar c)\vee(\bar a\wedge\bar b\wedge c)\\
&=(a\wedge\bar b\wedge\bar c)\vee(a\wedge c\wedge b)\vee(\bar a\wedge b\wedge\bar c)\vee(\bar a\wedge\bar b\wedge c)\\
&=(a\wedge c\wedge b)\vee(\bar a\wedge\bar b\wedge c)\vee(\bar a\wedge b\wedge\bar c)\vee(a\wedge\bar b\wedge\bar c)
\end{aligned}
$$

类似地，$a\oplus b\oplus c=(a\wedge c\wedge b)\vee(\bar a\wedge\bar b\wedge c)\vee(\bar a\wedge b\wedge\bar c)\vee(a\wedge\bar b\wedge\bar c)$，故 $\oplus$ 满足结合律

又 $a\oplus 0=(a\wedge 1)\vee(\bar a\wedge 0)=a\vee 0=a$

$a\oplus a=(a\wedge\bar a)\vee(\bar a\wedge a)=0\vee 0=0$

故 B 中存在单位元和逆元

进而 $<B,\oplus>$ 构成 Abel 群

接下来，由于 $\wedge$ 封闭且满足结合律，故 $<B,\otimes>$ 构成半群

由于 $a \otimes (b \oplus c) = a \wedge ((b \wedge \bar{c}) \vee (\bar{b} \wedge c)) = (a \wedge b \wedge \bar{c}) \vee (a \wedge \bar{b} \wedge c)$

$$\begin{aligned}(a \otimes b) \oplus (a \otimes c) &= ((a \wedge b) \wedge \overline{a \wedge c}) \vee (\overline{a \wedge b} \wedge (a \wedge c)) \\ &= (a \wedge b \wedge \bar{c}) \vee (a \wedge \bar{b} \wedge c)\end{aligned}$$

故分配律成立

因而 $< B, \oplus, \otimes >$ 构成环

最后，由于 $a \otimes a = a \wedge a = a$，故 $< B, \oplus, \otimes >$ 构成布尔环

## 3

在 $7, 77, ..., 77...7$(共 N+1 个 7) 中，必然有两项模 N 同余，他们的差必然形如 77...700...0，为 N 的倍数，得证

## 5

令 $x_i$ 为第 i 天复习的小时数 (i = 1,2,...,37)，$S_l = \sum\limits_{i=1}^{l} x_i$

考察 $S_1, S_2, ..., S_37, S_1 + 13, S_2 + 13, ..., S_37 + 13$ 这 74 个数，由于这些数中每一项均大于等于 0，小于等于 60 + 13 = 73，故而必然有两项一样，又明显前一半数中两两不同，后一半数中两两不同，因而必然是 $\exists i, j \in \{1, 2, ..., 37\}, i < j, s.t. S_j = S_i + 13, S_j - S_i = 13$，故第 i+1 天到第 j 天该生学习了 13 小时

## 9

反设不然，那么放球数最少的盒子里至少有 0 个球，第二少的盒子里至少有 1 个球，第 k 少的盒子里至少有 k - 1 个球（否则前 k 少的盒子中球的数目种类少于 k，必然有两个盒子球数相当）

所以总球数至少为 $0 + 1 + 2 + ... + (n-1) = \frac{n(n-1)}{2}$，矛盾！

## 10

由于所有数的和为 $36 \times 37/2 = 666$，故随机将圆盘 12 等分，必有一个扇形上数的和不少于 $\lceil 666/12 \rceil = 56$，这个扇形上有 3 个数字，得证