2023 代组第四次作业

2000013058 杨仕博

2023 年 3 月 21 日

13

下面每一题我们设给出的集合为 W

(1)

若 $A, B \in W$，则 $(A-B)^T = A^T - B^T = A - B \Rightarrow A - B \in W$ ，因而 W 是 $M_n(R)$ 的子群。

(2)

若 $A, B \in W$，设 $A = diag\{a_1, a_2, ..., a_n\}, B = \{b_1, b_2, ..., b_n\}$ ，$A - B = diag\{a_1 - b_1, a_2 - b_2, ..., a_n - b_n\} \in W$，因而 W 是 $M_n(R)$ 的子群。

(3)

由于全零矩阵 A 和只有左上角为 1，其余位置为 0 的矩阵 B 都在 W 中，但是 $|A - B| < 0 \notin W$，因而 W 不是子群。

(4)

若 $A, B \in W$ 是上三角矩阵，$A - B$ 也是上三角矩阵。因而 $A - B \in W$。所以 W 是 $M_n(R)$ 的子群。

15

(1)

考察 $G = \{1\}, < G, \times, ^{-1}, 1 >$ 构成了一个只有 1 个元素的群，因而它只有 1 个子群。

(2)

考察 $G = \{1, -1\}, < G, \times, ^{-1}, 1 >$ 构成了一个只有 2 个元素的群。由于 $-1 \times -1 = 1$，因而 $< \{-1\}, \times, ^{-1}, 1 >$ 不构成群。同时，$< \{1\}, \times, ^{-1}, 1 >$,$< \{1, -1\}, \times, ^{-1}, 1 >$ 均为群，因而 $< G, \times, ^{-1}, 1 >$ 是一个只有两个子群的群。

(3)

考察 $G = \{1, -1, i, -i\}, < G, \times, ^{-1}, 1 >$ 构成了只有 4 个元素的群。由于在子群 W 中，$1 \in W, i \in W \Leftrightarrow -i \in W \Rightarrow -1 \in W$，因而它的子群只有 $< \{1\}, \times, ^{-1}, 1 >, < \{1, -1\}, \times, ^{-1}, 1 >, < G, \times, ^{-1}, 1 >$ 三个。

16

(1)

若 $H_1H_2 \leq G$，则

$$\begin{aligned}
&\forall h_1 \in H_1, h_2 \in H2, h_1^{-1}h_2^{-1} \in H_1H_2 \\
\Rightarrow&\forall h_1 \in H_1, h_2 \in H2, (h_2h_1)^{-1} \in H_1H_2 \\
\Rightarrow&\forall h_1 \in H_1, h_2 \in H2, ((h_2h_1)^{-1})^{-1} \in H_1H_2 \\
\Rightarrow&\forall h_1 \in H_1, h_2 \in H2, h_2h_1 \in H_1H_2 \\
\Rightarrow&H_2H_1 \subseteq H_1H_2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\forall h_1 \in H_1, h_2 \in H2, (h_1h_2)^{-1} \in H_1H_2 \\
\Rightarrow&\forall h_1 \in H_1, h_2 \in H2, \exists g_1 \in H_1, g_2 \in H_2, s.t.\ (h_1h_2)^{-1} = g_1g_2 \\
\Rightarrow&\forall h_1 \in H_1, h_2 \in H2, \exists g_1 \in H_1, g_2 \in H_2, s.t.\ h_1h_2 = g_2^{-1}g_1^{-1} \in H_2H_1 \\
\Rightarrow&H_1H_2 \subseteq H_2H_1
\end{aligned}$$

故 $H_1H_2 = H_2H_1$

(2)

若 $H_1H_2 = H_2H_1$，

$\forall h_1, g_1 \in H_1, h_2, g_2 \in H_2$，

$h_1h_2(g_1g_2)^{-1} = h_1(h_2g_2^{-1})g_1^{-1}$，

$h_2g_2^{-1} \in H_2$，记 $c_2 = h_2g_2^{-1} \in H_2$，则

$h_1(h_2g_2^{-1})g_1^{-1} = h_1c_2g_1^{-1}$

由 $H_1H_2 = H_2H_1$，有 $\exists b_1 \in H_1, b_2 \in H_2, s.t.\ h_1c_2g_1^{-1} = h_1b_1b_2$，

由 $h_1b_1 \in H_1$，有 $h_1b_1b_2 \in H_1H_2$，即

$h_1h_2(g_1g_2)^{-1} \in H_1H_2$，故 $H_1H_2 \leq G$

19

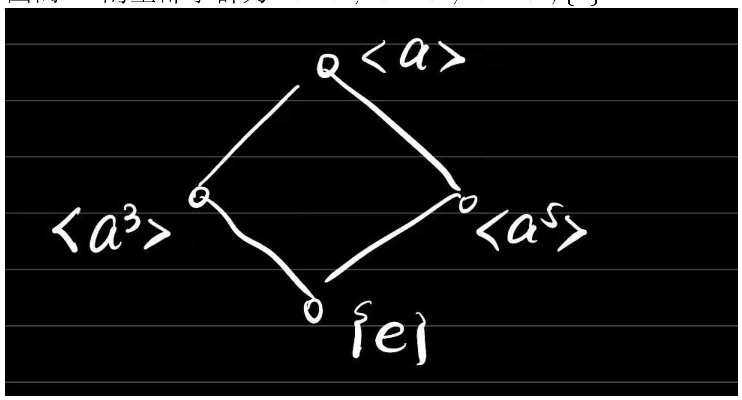
(1)

模 15 的既约剩余系是 $P = \{1, 2, 4, 7, 8, 11, 13, 14\}$，$< a >$ 的生成元为 $\{a^i | i \in P\}$ 中的元素。

(2)

由于对 15 的每个正因子 d, 在 G 中有且仅有一个 d 阶子群，并且 G 中的每个子群的阶均为 15 的因子，且 $|<a^d>|=\frac{15}{(15,d)}$

因而 G 的全部子群为 $<a>,<a^3>,<a^5>,\{e\}$



20

首先，$e\in<a>,e\in B$

其次，若 $\exists c\neq e\in<a>\bigcap<b>$，则可设 $c=a^i=b^j,i(\mod p)\neq 0$，于是 $\exists r\in N,s.t.\ ir(\mod p)=1$，$a=a^{ir}=b^{jr}\in<b>$，矛盾!

因而，$<a>\bigcap<b>=\{e\}$