组 合 数 学

Combinatorial Mathematics

组合存在定理　　基本计数公式

递推方程　　生成函数

容斥原理　　**Polya**定理

组合数学的主要内容

研究离散个体满足约束条件下的配置问题

- 组合存在性
  - 偏序集分解定理
  - Ramsey定理
  - 相异代表系存在定理
- 组合计数
  - 基本计数公式
  - 计数方法
  - 计数定理
- 组合枚举：生成算法、组合设计
- 组合优化：最短路经、最小生成树、网络流

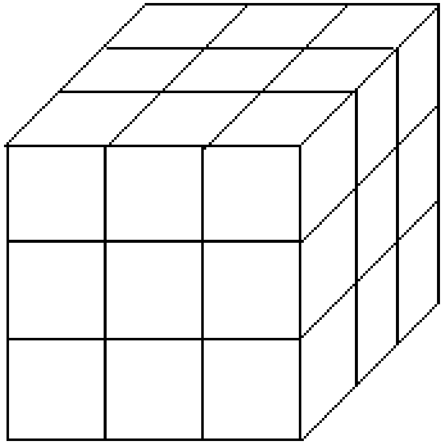
组合数学的主要技巧

重要的组合思想

- 一一对应
- 数学归纳法
- 上下界逼近的处理方法

一一对应

例1 3×3×3的立方体至少需要多少次才能切成27个小立方体？



解：6次

切割 ↔ 中心立方体的面

次数至少等于面数

例2 n个选手两人一组比赛决出冠军，需要多少次比赛？

解：n-1次，比赛 ↔ 淘汰，比赛次数=淘汰人数

组合计数模型与一一对应

- 计数方法：计数模型与实际问题的对应

- 计数模型：
  - 选取问题
  - 不定方程非负整数解问题
  - 非降路径问题
  - 整数拆分问题
  - 放球问题
  - ……

数学归纳法

- 描述一个与自然数相关的命题 $P(n)$

  归纳基础：例如 $P(0)$ 真；

  归纳步骤：例如 $P(n) \Rightarrow P(n+1)$

- 第一数学归纳法：

  $n=0$为真；假设对n为真，证对$n+1$为真

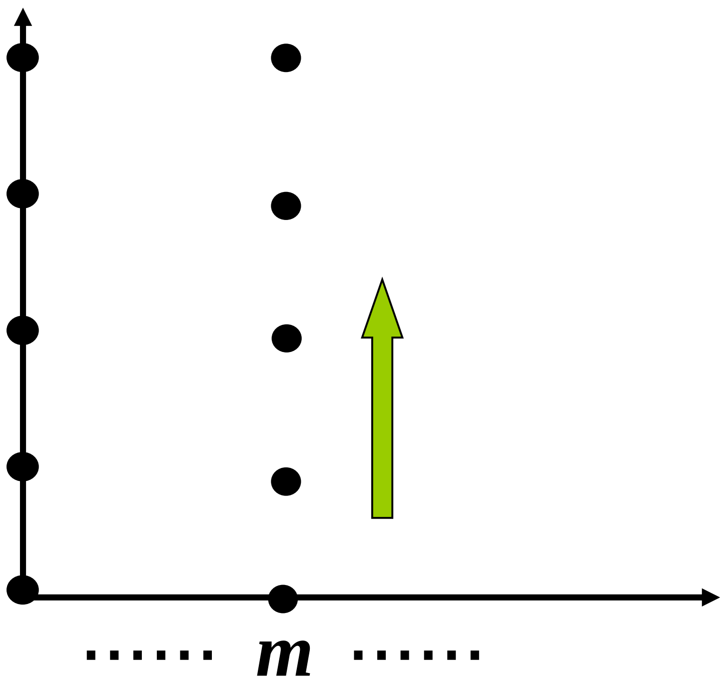
- 第二数学归纳法：

  $n=0$为真；假设对一切小于n 的 k 为真, 证明对

  n 为真

数学归纳法的推广

- 证明命题$P(m, n)$
  针对m, n两个自然数
  任意给定m（或 n）对n (或 m) 归纳

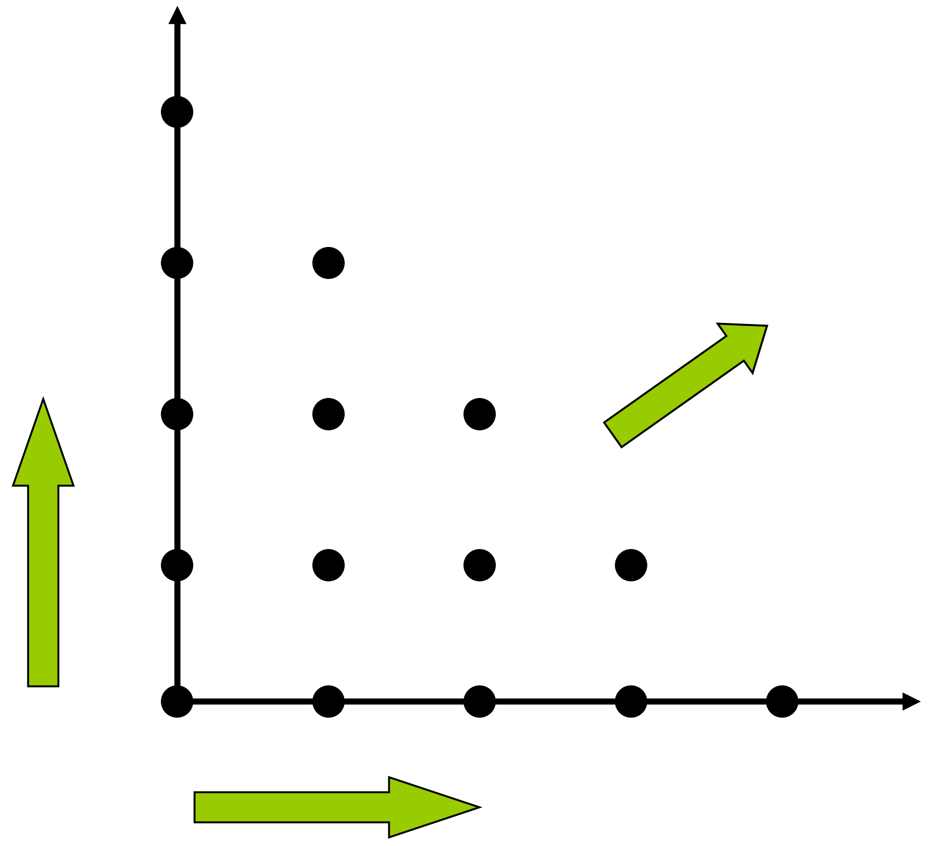


多重归纳

归纳基础

$\langle 0, n' \rangle$为真,

$\langle m', 0 \rangle$为真



归纳步骤

假设$\langle m-1, n \rangle$,

$\langle m, n-1 \rangle$为真,

证$\langle m, n \rangle$为真

上下界逼近

确定某个值（或阶）

步骤

- 证明这个值的上界
- 证明这个值的下界
- 如果上界与下界相等，则结束
- 否则改进上界或者下界，使得它们逐渐逼近

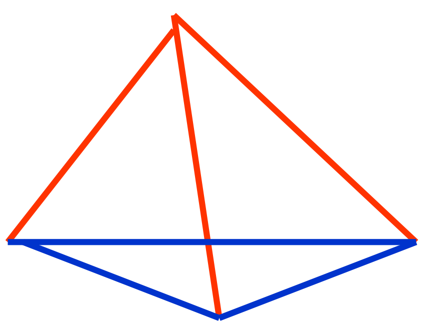
实例

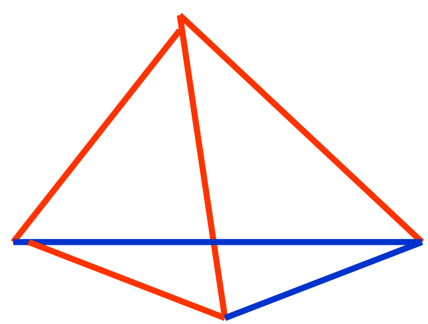
K_n：n个顶点的无向完全图

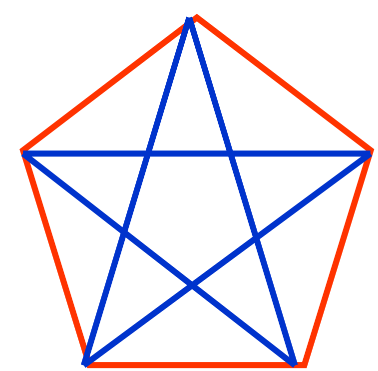
用红、蓝两色任意对K_n的边涂色，n至少是多少才能出现一个红色三角形，或一个蓝色的三角形？

证明

- 上界$n\leq 6$. 某顶点关联的边至少有3条同色







反例

- 下界$n>5$. $n=5$ 不可能做到.
- $n=6$.

第二十章 组合存在性定理

- 有限偏序集的分解定理

  若最大链长度为n, 则偏序集最少可分解成n条不相交的反链

  若最大反链长度为 n，则偏序集最少可分解为n条不相交的链（p. 52-53）

- **Ramsey定理：** 鸽巢原理的推广

- 相异代表系存在定理：**Hall**定理（完美匹配存在条件）的推广

主要内容

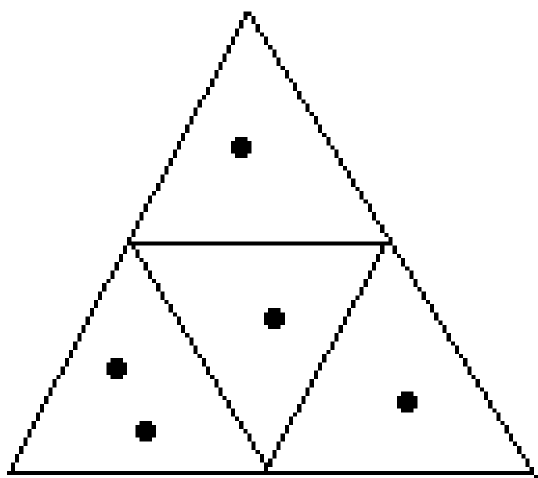
- 鸽巢原理
  - 简单形式
  - 一般形式
- Ramsey定理
  - 简单形式
  - 小Ramsey数的相关结果
  - 一般形式
  - 关于Ramsey数的若干已知结果

鸽巢原理的简单形式

鸽巢原理：n+1个物体放到n个盒子里，则存在一个盒子至少含有2个或者2个以上的物体.

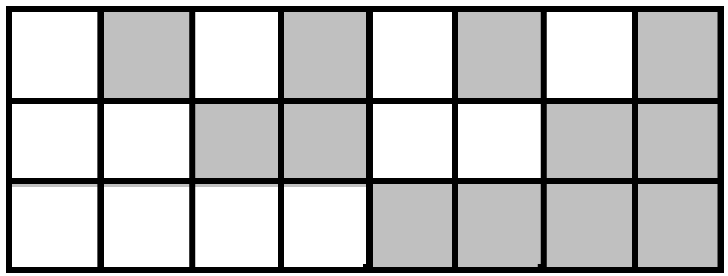
应用实例

例1 边长为2的正三角形中 5个点，则存在2个点距离小于1.



应用实例

例2 3×9的方格用黑、白两色涂色，则存在两列涂色方案相同.



例3 空间9个格点，证明所有两点连线的中点中有一个是格点.

证：若(x, y, z)与(x', y', z')的奇偶性相同，则连线中点为格点. 奇偶模式共8种.

应用实例(续)

例4 设有 3 个7 位二进制数

$$A: a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7$$

$$B: b_1b_2b_3b_4b_5b_6b_7$$

$$C: c_1c_2c_3c_4c_5c_6c_7$$

证明存在整数*i*和*j*，1≤*i*<*j*≤7, 使得下列之一必然成立：

$$a_i = a_j = b_i = b_j,$$

$$a_i = a_j = c_i = c_j,$$

$$b_i = b_j = c_i = c_j$$

应用实例(续)

$$a_i = a_j = b_i = b_j$$

$$a_i = a_j = c_i = c_j$$

$$b_i = b_j = c_i = c_j$$

A	0	1	0	1	×	×	1
B	0	1	×	×	0	1	1
C	×	×	0	1	0	1	×

证 a_i, b_i, c_i中，必有两个相同，每个同为0或1，有6种选择。例如a_i=b_i=0，记为1-2-0，同样a_i=c_i=1, 记为1-3-1，这6种选择为:

1-2-0，1-2-1，1-3-0，1-3-1，2-3-0，2-3-1

7列数6种选择，由鸽巢原理必有两列相等，这两列中含有一个四角数字相同的矩形，这四角的数字满足要求。

应用实例(续)

例5 从1到2n的正整数中，任取n+1个数，至少有一对数，其中一个数是另一个数的倍数。

证 $a_i = 2^{\alpha_i} r_i, i = 1, 2, \ldots, n+1$，$r_i$为奇数，1到2$n$只有$n$个奇数，故存在$r_i, r_j$使得$r_i = r_j, i < j$. 于是 $a_i = 2^{\alpha_i} r_i, a_j = 2^{\alpha_j} r_j$.

若$a_i > a_j$，则$\frac{a_i}{a_j} = 2^{\alpha_i - \alpha_j}$故$a_i$是$a_j$的倍数。

应用实例(续)

例6 $n+1$个$\leq 2n$的正整数中，必有两个数互素。

证 相邻的数互素，若不然，p是k与$k+1$的公因子，且$1<p<k$. 那么$k=pq_i$，$k+1=pq_j$，因此 $pq_i+1=pq_j$，于是$p(q_j-q_i)=1$，矛盾。

构造n个组：$\{1,2\},\{3,4\},\ldots,\{2n-1,2n\}$，

$n+1$个数必有2个取自同一个组。

应用实例(续)

例7 设$a_1, a_2, \ldots, a_m$是正整数序列，则至少存在整数k和l使得$1 \le k \le l \le m$，使得和$a_k + a_{k+1} + \cdots + a_l$是$m$的倍数.

证 设 $S_1 = a_1$

$$S_2 = a_1 + a_2$$

$$\ldots$$

$$S_m = a_1 + a_2 + \cdots + a_m$$

S_i除以m的余数为$r_i, i = 1, 2, \ldots, m$, 若存在$r_j = 0$, 则命题得证；否则由鸽巢原理有$r_i = r_j, i < j$. 因此$S_j - S_i$ 被m整除。取$k = i + 1, l = j$, 命题得证。

应用实例(续)

例8 设$4, 44, \ldots, 44\ldots4$, 是1997个数的序列，证明存在一个数被1996整除.

证 设这1997个数分别为$a_1, a_2, \ldots, a_{1997}$, 除以1996的余数依次为$i_1, i_2, \ldots, i_{1997}$. 由鸽巢原理，必有$i_k = i_j, k < j$. 于是，$a_j - a_k$ 被1996整除，且

$$a_j - a_k = 44\ldots400\ldots0 = a_{j-k} \times 10^k.$$

其中含 $j-k$个4，k个0.

$1996 = 4 \times 499$，499为素数，必有a_{j-k}被499整除，而同时a_{j-k}被4整除，因此a_{j-k}被1996整除。

鸽巢原理的一般形式

鸽巢原理　设$q_1, q_2, \ldots, q_n$是给定正整数，若把$q_1 + q_2 + \cdots + q_n - n + 1$个物体放入$n$个盒子里，则或第一个盒子至少包含了$q_1$个物体，或者第二个盒子至少包含了$q_2$个物体，…，或者第$n$个盒子至少包含了$q_n$个物体。

说明:

- 证明用反证法
- 这是存在这种配置的最小个数
- 令$q_1 = q_2, = \cdots = q_n = 2$, 则变成简单形式

推论 若$n(r-1) + 1$个物体放到n个盒子里，则存在一个盒子至少包含了r个物体. 令$q_1 = q_2, = \cdots = q_n = r$即可。

鸽巢原理的算术平均形式

设$m_1, m_2, \ldots, m_n$ 是n个正整数，如果它们的算术平均

$$\frac{m_1 + m_2 + \cdots + m_n}{n} > r - 1$$

则存在 $m_i \geq r$.

证：令$m_1, m_2, \ldots, m_n$ 是放入盒子的物体数，则

$$(m_1 + m_2 + \cdots + m_n) > n\,(r-1)$$

$$\Leftrightarrow m_1 + m_2 + \cdots + m_n \geq n\,(r-1) + 1$$

满足鸽巢原理条件。

顶函数与底函数

顶函数(Ceiling function)，底函数(Floor function)

定义 对于实数x，

顶函数$\lceil x \rceil$：大于或等于x的最小整数

底函数$\lfloor x \rfloor$：小于或等于x的最大整数

有时将底函数记作 $[x]$

性质：

(1) $x-1 < \lfloor x \rfloor \le x \le \lceil x \rceil < x+1$

(2) $\lfloor x+m \rfloor = \lfloor x \rfloor + m$, $\lceil x+m \rceil = \lceil x \rceil + m$，$m$为整数

(3) $\lceil m/2 \rceil + \lfloor m/2 \rfloor = m$, m为整数

鸽巢原理的函数形式

设 f: $A \to B$, $|A|=m$, $|B|=n$, 若$m \geq n$, 则存在至少$\lceil m/n \rceil$个元素$a_1, a_2, \ldots, a_{\lceil m/n \rceil}$使得

$$f(a_1) = f(a_2) = \cdots = f(a_{\lceil m/n \rceil})$$

证：令$B = \{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$, m_i表示函数值为y_i的自变量个数，i=1, 2, … , n.

$$\frac{m_1 + m_2 + \cdots + m_n}{n} = \frac{m}{n} > \left\lceil \frac{m}{n} \right\rceil - 1$$

必存在某个$m_i \geq \lceil m/n \rceil$.

鸽巢原理应用

例9 $a_1, a_2, \ldots, a_{n^2+1}$是实数序列，证明可以选出 $n+1$个数的子序列$a_{k_1}, a_{k_2}, \ldots, a_{k_{n+1}}$使得其为递增子序列或递减子序列.

证 假设没有长为$n+1$的递增子序列，设m_k表示从 a_k开始的最长递增子序列长度，则$1 \le m_k \le n$, 而 $m_1, m_2, \ldots, m_{n^2+1}$中必存在$\lceil (n^2+1)/n \rceil = n+1$个$m_k$取值相等。设 $m_{k_1} = m_{k_2} = \cdots = m_{k_{n+1}} = l$. 若$a_{k_i} \le a_{k_{i+1}}$, 则从前者开始的递增子序列长度为$l+1$, 矛盾。$a_{k_1} > a_{k_2} > \cdots > a_{k_{n+1}}$是长为 $n+1$的递减子序列.

Ramsey定理

- Ramsey定理的简单形式
  - 两个简单命题
  - Ramsey定理
  - 小Ramsey数的有关结果
  - Ramsey数的性质
  - Ramsey定理的推广
- Ramsey定理的一般形式
  - Ramsey定理
  - 关于一般Ramsey数的结果
- Ramsey定理的应用

Ramsey定理的简单形式

两个简单的命题

命题1 用红蓝两色涂色K_6的边，则或有一个红色K_3，或有一个蓝色K_3.

任意六个人中要么至少三个人认识，要么至少三个不认识。

$R(3,3)=6$

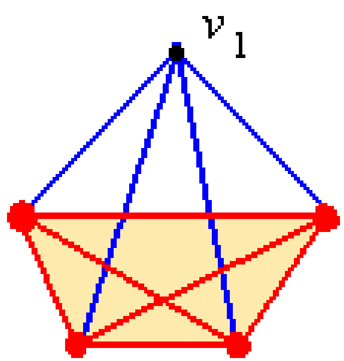
命题2 用红蓝两色涂色K_9的边，则或有一个红色K_4，或有一个蓝色K_3.

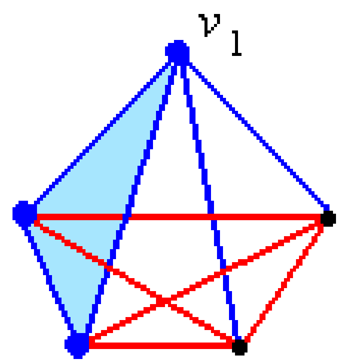
命题2的证明

用红蓝两色涂色K_9的边，则或有一个红色K_4，或有一个蓝色K_3.

证：断言：存在一个顶点至少关联4条蓝边或者6条红边. 否则蓝边数< 4, 红边数< 6，则蓝边总数至多$\lfloor(3 \times 9) / 2\rfloor = 13$，红边总数至多$\lfloor(5 \times 9) / 2\rfloor = 22$，总共35条边，与$K_9$边数为36矛盾。

设v_1关联4条蓝边，若对应4个顶点没有蓝边，则构成红K_4；有1条蓝边，则构成蓝K_3 .

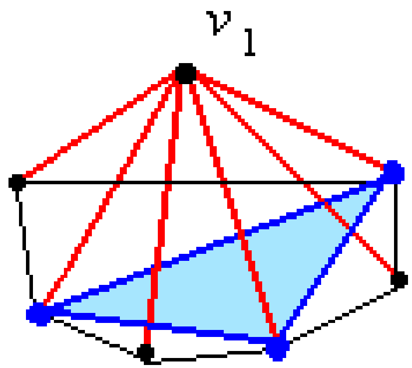


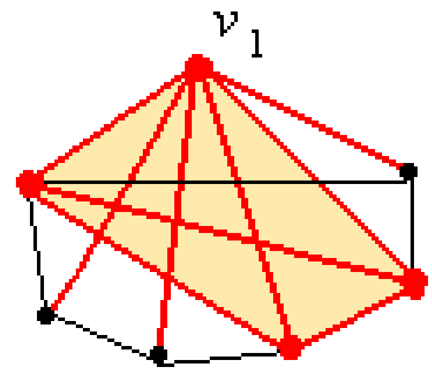


命题2的证明

用红蓝两色涂色K_9的边，则或有一个红色K_4，或有一个蓝色K_3.

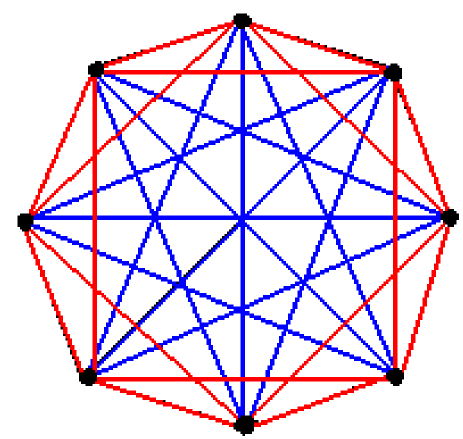
设v_1关联6条红边，对应6个顶点必有蓝K_3或红K_3.





对于K_8，存在一种涂色方案，既没有蓝色三角形，也没有红色完全四边形.

$R(3,4) = 9$.



Ramsey(1903–1930)定理

定理　设 p, q 为正整数，$p, q \geq 2$，则存在最小正整数 $R(p, q)$，使得当 $n \geq R(p, q)$ 时，用红蓝两色涂色 K_n 的边，则或存在一个蓝色的 K_p，或存在一个红色的 K_q.

核心思想是：“任何一个足够大的结构中必定包含一个给定大小的规则子结构”

证明思路：归纳法

归纳基础　$R(p, 2) \leq p$，$R(2, q) \leq q$，

归纳步骤　$R(p-1, q)$，$R(p, q-1)$ 存在

$$\Rightarrow R(p,q) \leq R(p-1, q) + R(p, q-1)$$

证明

证：采用数学归纳法。

设p为任意正整数，$q=2$。用红蓝两色涂色K_p的边:

若没有一条红边，则存在一个蓝色的完全p边形;

若有一条红边，则构成一个完全红2边形，因此

$R(p,2)\le p$。同理可证 $R(2,q)\le q$。

假设对正整数 p',q'命题为真, 其中$p'\le p,q'\le q,p'+q'<p+q$，则$R(p-1,q),R(p,q-1)$ 存在.

令

$$n\ge R(p-1,q)+R(p,q-1).$$

证明

用红、蓝两色涂色K_n的边，则v_1或关联$R(p–1, q)$条蓝边或关联$R(p, q–1)$条红边。否则，v_1至多关联 $R(p–1, q) - 1 + R(p, q–1) - 1 = R(p - 1, q) + R(p, q - 1) - 2$条边，与$n \geq R(p–1, q) + R(p, q–1)$矛盾。

Case 1. v_1关联 $R(p–1, q)$ 条蓝边;

Case 2. v_1关联 $R(p, q–1)$ 条红边。

对于case 1，由归纳假设这$R(p–1, q)$个顶点中或含有一个蓝色的完全 $p–1$ 边形，或含有一个红色的完全q边形。

证明

若为前者，则这个$p-1$边形加上v_1构成一个蓝色的完全p边形，命题为真；若为后者，命题也为真。

对于case 2可以类似分析。

因此，

$$R(p,q) \le R(p-1,q) + R(p,q-1)，p \ge 3，q \ge 3$$

定义 对于任意给定的两个正整数a和b，$a,b \ge 2$，最小的正整数$R(a,b)$，使得当$n \ge R(a,b)$时，对K_n任意进行红、蓝两种着色，K_n中均有蓝色K_a或红色K_b，称$R(a,b)$为Ramsey数。

小Ramsey数的值

http://en.wikipedia.org/wiki/Ramsey's_theorem#Ramsey_numbers

p \ q	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	3	4	5	6	7	8	9	10
3		6	9	14	18	23	28	36	40-42 (43)
4			18	25	36-41	49-61	(56) 59-84	73-115	92-149
5				43-48(49)	58-87	80-143	101-216	(126)133-316	(144)149-442
6					102-165	(113)115-298	(132)134-495	(169)183-780	(179)204-1171
7						205-540	(217)219-1031	(241)252-1713	(289)292-2826
8							282-1870	(317)329-3583	(331)343-6090
9								565-6588	581-12677
10									798-23556

Ramsey数的性质

(1) $R(a, b)=R(b, a)$, $R(a, 2)=R(2, a)=a$

(2) $R(a, b)\le R(a-1, b) + R(a, b-1)$, $a\ge 3$， $b\ge 3$.

性质 (2) 给出上界

$$9 = R(3,4) \le R(2,4) + R(3,3) = 4 + 6 = 10$$

$$18 = R(4,4) \le R(3,4) + R(4,3) = 9 + 9 = 18$$

$$25 = R(4,5) \le R(3,5) + R(4,4) = 14 + 18 = 32$$

$$R(3,10) \le R(2,10) + R(3,9) = 10 + 36 = 46$$

$$R(3,10) \le 43$$

Ramsey数的性质

推论 对任意正整数a≥2，b≥2，有

$$R(a,b) \le \binom{a+b-2}{a-1} = \frac{(a+b-2)!}{(a-1)!(b-1)!}$$

证：对$a+b$作归纳。当$a+b$≤5时，a=2或b=2，由前面定理知推论成立。假设对一切满足5≤$a+b<m+n$的a, b推论成立，从而有

$$R(m,n) \le R(m,n-1) + R(m-1,n)$$

$$\le \binom{m+n-3}{m-1} + \binom{m+n-3}{m-2} = \binom{m+n-2}{m-1}$$

所以，对任意的正整数a≥2，b≥2，推论均成立。

Ramsey定理的推广

(1) $R(p,q)$的图表示　　　　$R(p,q)$的集合表述:

K_n的顶点集V	集合S
K_n的边集E	S的2元子集的集合T
用2色涂色K_n的边	将T划分成E_1, E_2
存在蓝色完全p边形	存在S的p子集其所有2元子集$\in E_1$
存在红色完全q边形	存在S的q子集其所有2元子集$\in E_2$

集合表述具有更强的表达能力!

(2) 将2元子集推广到r元子集

(3) 将T划分成 $E_1, E_2, \ldots, E_k$

推广的Ramsey定理

定理2 对于任意给定的正整数 $p,q,r,(p,q\geq r)$，存在一个最小的正整数 $R(p,q;r)$，使得当$|S|\geq R(p,q;r)$时，将S的r元子集族任意划分成 E_1,E_2，则：

或者S有 p元子集A_1，A_1的所有r元子集属于E_1;

或者S有q元子集 A_2，A_2的所有r元子集属于E_2.

推广的Ramsey定理

定理3 设 $r,k\ge 1, q_i\ge r, i=1,2,\dots,k$, 是给定正整数，则存在一个最小的正整数 $R(q_1,q_2,\dots,q_k;r)$，使得当 $n\ge R(q_1,q_2,\dots,q_k;r)$时, 将 n元集 S 的所有 r元子集划分成 k 个子集族 $E_1,E_2,\dots,E_k$，那么

存在S的q_1元子集A_1, 其所有r元子集属于E_1;

或者存在S的q_2元子集A_2，A_2的所有r元子集属于E_2;

…

或者存在S的q_k元子集A_k, 其所有r元子集属于E_k.

关于一般Ramsey数的说明

$R(q_1, q_2, \dots, q_k; r)$

(1) 条件：$r, k \geq 1, q_i \geq r, i = 1, 2, \dots, k$, 都是给定正整数

(2) 当 $r = 2$时，可以简记为 $R(q_1, q_2, \dots, q_k)$

(3) Ramsey定理断定Ramsey数的存在性.

Ramsey数的确定是一个很困难的问题.

(4) $r = 1$, 是鸽巢原理，

$R(q_1, q_2 \ \dots, q_k; 1) = q_1 + q_2 + \cdots + q_k - k + 1$

$r = 2, k = 2$, 是简单的Ramsey定理。

结果：9个(不含$q = 2$)Ramsey数的精确值，部分上界、下界；$r = 2, k = 3$，只有2个精确值$R(3,3,3) = 17$, $R(3,3,4) = 30$.

几个Ramsey数的上下界

$51 \le R(3,3,3,3) \le 62$ 65→62

$162 \le R(3,3,3,3,3) \le 307$ 322→307

$538 \le R(3,3,3,3,3,3) \le 1838$ 500→538

$45 \le R(3,3,5) \le 57$ 59→57

$55 \le R(3,4,4) \le 79$ 81→79

$93 \le R(3,3,3,4) \le 153$ 84→93, 159→153

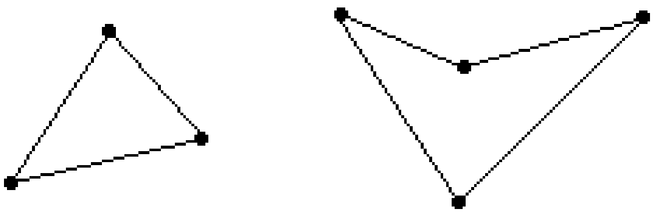
$128 \le R(4,4,4) \le 236$ 242→236

Ramsey定理的应用

例10 对于任意$m\geq 3, m\in Z^+$, 存在正整数$N(m)$，使得当$n\geq N(m)$时，若平面的n个点没有三点共线，则其中总有m个点构成一个凸 m 边形的顶点。

实例： $m=3, N(m)=N(3)=3,$

$m=4, N(m)=N(4)=5,$



需证：$N(m)\leq R(5, m; 4)$

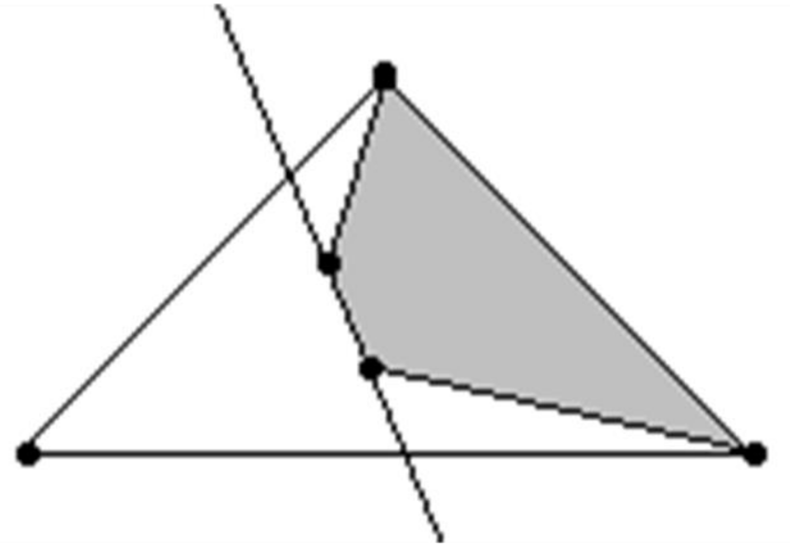
引理1 平面上任给5点，没有3点共线，则必有4点是凸4边形的顶点。

引理2 平面上m个点，若没有3点共线且任4点都是凸4边形的顶点，则这m个点构成凸m边形的顶点。

引理1的证明

引理1 平面上任给5点，没有3点共线，则必有4点是凸4边形的顶点。

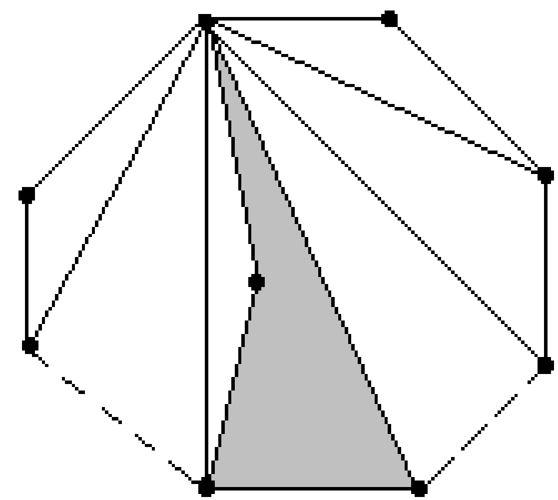
证 做最大的凸多边形*T*。如果*T*是4边形或5边形，则命题为真。如果为3多边形，则3边形内存在2点，与过这2点的直线一侧的另外2点构成凸4边形。



引理2的证明

引理2 平面上m个点，若没有3点共线且任4点都是凸4边形的顶点，则这m个点构成凸m边形的顶点。

证：假设最大的凸多边形是p边形，$p<m$. 则必有点落入这个多边形内部. 将这个多边形划分成三角形，必有点落入某个三角形，这个三角形的顶点与内部的点构成凹4边形，与已知矛盾。



命题证明

任意 $m \geq 3$，存在正整数 $N(m)$，使得当 $n \geq N(m)$ 时，若平面的 n 个点没有三点共线，则其中总有m个点构成一个凸 m 边形的顶点

证 不妨设$m>3$，令$n \geq R(5, m; 4)$，S为n个点的集合。将S的所有的4元子集划分成两个子集族。如果构成凹4边形，放到T_1, 如果构成凸4边形，则放到T_2.

根据Ramsey数定义，或有5个点，其所有4元子集都构成凹4边形；或有m个点，其所有的4子集都构成凸4边形。

若为前者，与引理1矛盾。若为后者，根据引理2，这m个点构成凸m边形的顶点。

组合存在性定理的应用

例11 最少连接缆线问题

条件：15台工作站和10台服务器，每个工作站可以用一条电缆直接连到某个服务器，同一时刻每个服务器只能接受一个工作站的访问。

目标：任何时刻，任意选10台工作站，保证这组工作站可以同时访问不同的服务器。

问题：达到这个目标需要的最少缆线数目N是多少？

方案1：每个工作站都连到每个服务器，需要

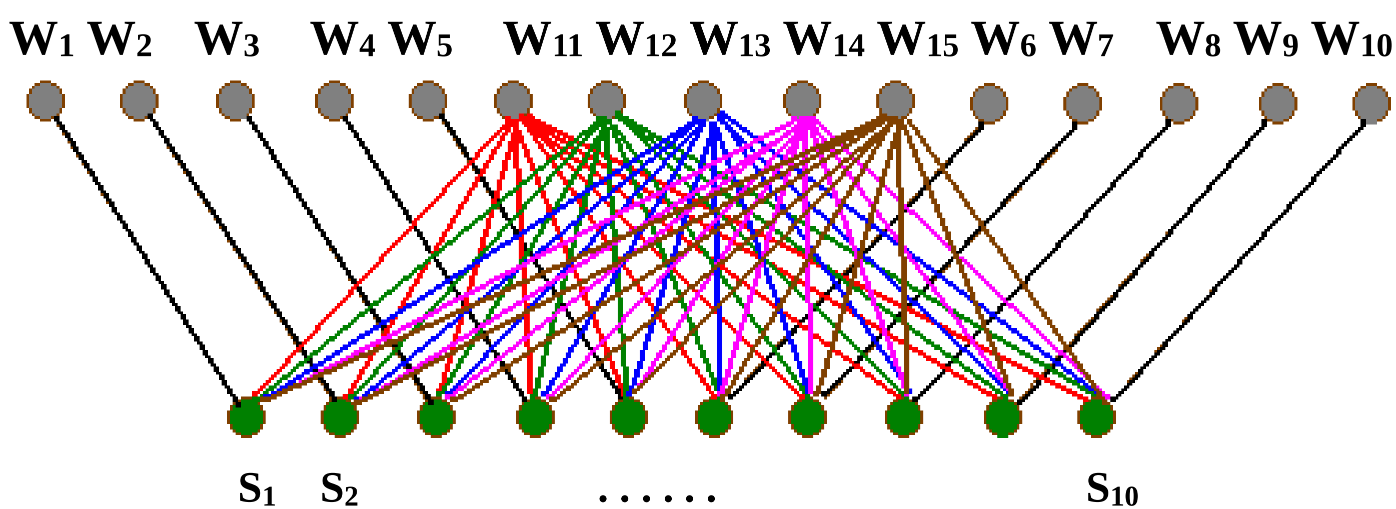
$10\times15=150$，缆线数$N\leq150$.

例11的解决方案

方案2 将工作站标记为$W_1, W_2, \ldots, W_{15}$, 服务器标记为$S_1, S_2, \ldots, S_{10}$.

对于k=1,2,…,10，我们连接W_k到S_k, 剩下5个工作站的每一个都连接到10个服务器。

总共60条直接连线。



方案的最优性

满足目标要求：任取10个工作站. 如果恰好为W_1, W_2,…, W_{10}，W_i访问S_i，i=1,…10, 满足要求; 如果W_1-W_{10}中只选中k个工作站，不妨设为W_1-W_k, 剩下的10–k个选自W_{11}-W_{15}. 那么W_i访问S_i，i=1,…,k. 还剩下10–k个服务器空闲，恰好分配给10–k个工作站.

结论：$N \le 60$.

证明 $N \ge 60$.

假设在工作站和服务器之间缆线至多59条，那么某个服务器将至多连接$\lfloor 59/10 \rfloor = 5$工作站。若选择剩下的10个工作站作为一组，则只有9个空闲的服务器，必有2个工作站连接同一服务器，与题目要求矛盾。

例12 电路板排列问题

电路板集合：$\boldsymbol{B} = \{\mathbf{1}, \mathbf{2}, \ldots, \boldsymbol{n}\}$

连接块集合：$\boldsymbol{L} = \{\boldsymbol{N_1}, \boldsymbol{N_2}, \boldsymbol{N_i}, \ldots, \boldsymbol{N_m}\}$

$\boldsymbol{N_j} \subseteq \boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{N_j}$中所有电路板用一根导线连接

排列：$\boldsymbol{X} = < \boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}, \ldots, \boldsymbol{x_n} >$

排列密度**density**(X)：跨越相邻电路板插槽的最大连线数

求具有最小排列密度**density**(X)的排列。

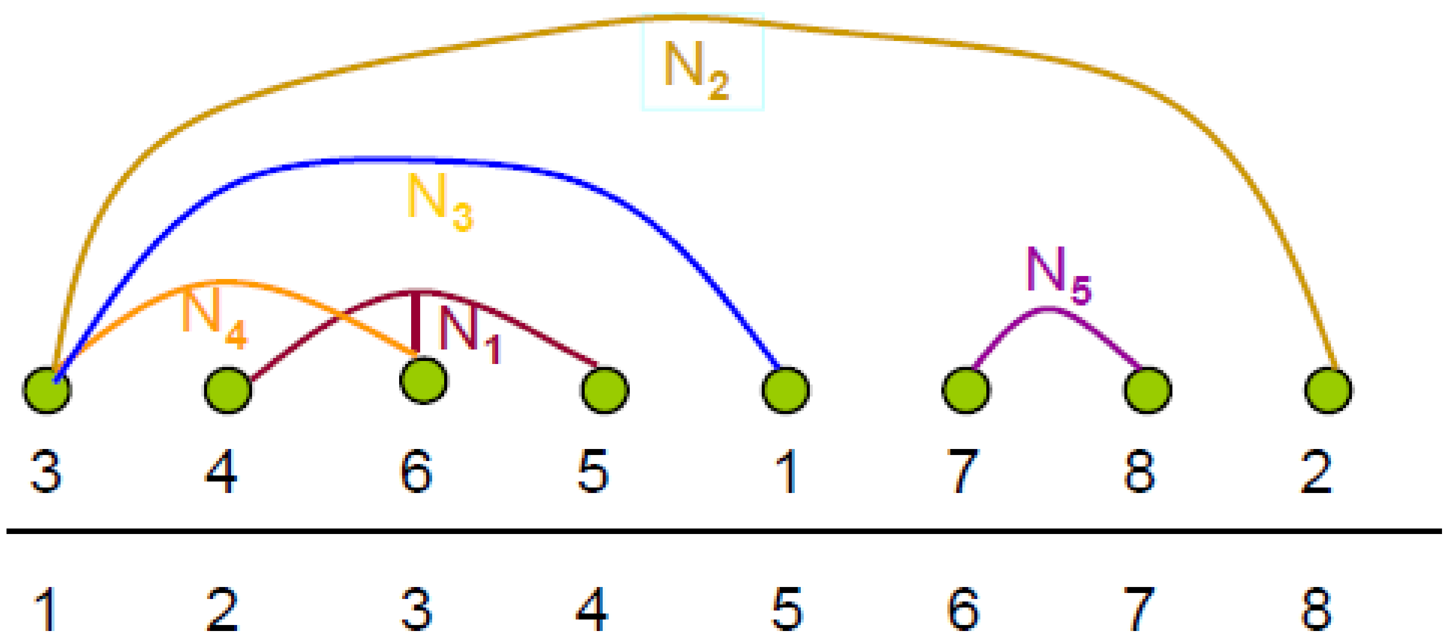
实例：方案1

$B=\{1,2,\dots,8\}, L=\{N_1,N_2,\dots,N_5\}$,

$N_1=\{4,5,6\}, N_2=\{2,3\}, N_3=\{1,3\}$,

$N_4=\{3,6\}, N_5=\{7,8\}$

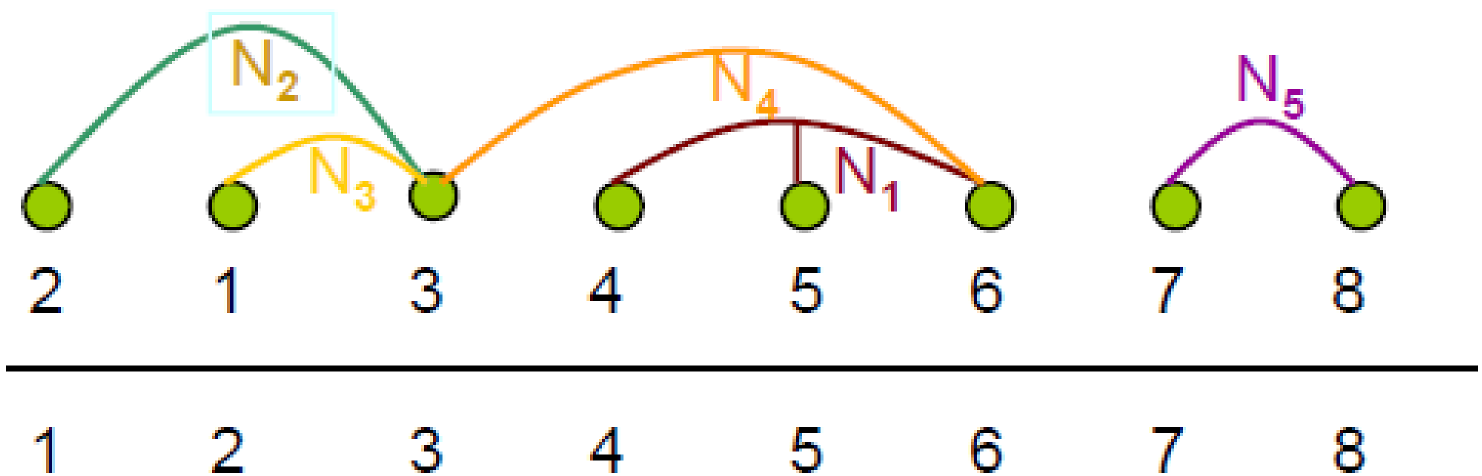
排列$X_2=<3,4,6,5,1,7,8,2>$，$\mathbf{density}(X_2)=4$



方案2

$B=\{1, 2, \ldots, 8\}, L=\{N_1, N_2, \ldots, N_5\},$
$N_1=\{4,5,6\}, N_2=\{2,3\}, N_3=\{1,3\}, N_4=\{3,6\}, N_5=\{7,8\}$

排列$X_1 =< 2, 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8 >$, $\text{density}(X_1) = 2$



因为3出现在3个连接块中，以横跨电路板2-3为一边，3-4为另一边。根据鸽巢原理，无论怎样排列，都存在某一边至少有2条线，因此$\text{density}(X) \geq 2$，这是一个最优方案。

例13 通信抗噪音编码问题

例13 通信噪音干扰

混淆图$G=<V,E>$，V为有穷字符集，

$\{u,v\}\in E \Leftrightarrow u$和$v$易混淆.

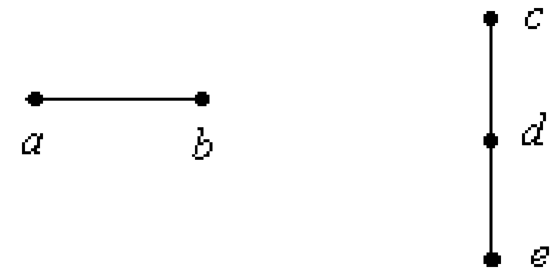
$\beta_0(G)$：点独立数，最大不混淆字符集大小

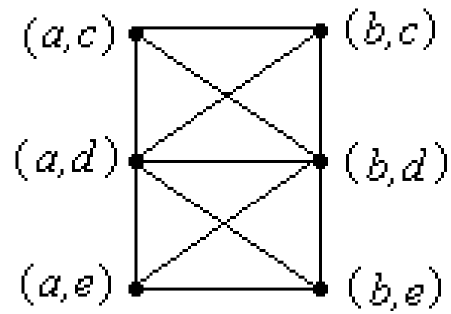
编码是字符串的集合

xy与uv混淆$\Leftrightarrow$ x与u混淆且y与v混淆

$\vee\ x=u$且y与v混淆

$\vee\ x$与u混淆且$y=v$





$V_1\times V_2$的混淆图是两个混淆图G与H的正规积$G\cdot H$

定理 $\beta_0(G\cdot H)\le R(\beta_0(G)+1,\beta_0(H)+1)-1$

实例：设$|G|=5,\beta_0(G)=3$，则$\beta_0(G\cdot G)\le R(\beta_0(G)+1,\beta_0(G)+1)-1$

$=R(4,4)-1=17$

Ramsey定理的应用和推广

- 应用
  - 数论、代数、几何、拓扑学、集合论、逻辑等；
  - 信息论、理论计算机科学
- 推广（超图、有向图、无限...）
- V. Rosta, Ramsey theory applications, Electronic Journal of Combinatorics, 2004.
- Applications of Ramsey Theory to Computer Science: http://www.cs.umd.edu/~gasarch/ramsey/ramsey.html