2023 代组第八次作业

2000013058 杨仕博

2023 年 4 月 27 日

20

(1)

$\forall a, a' \in A, b, b' \in B, (a+b)-(a'+b') = (a+(-a'))+(b+(-b')) \in A+B$

故 A+B 构成 R 的加法的子群

$\forall a \in A, b \in B, (a+b)(A+B) = aA + aB + bA + bB$

由于 $aA \subseteq A, aB \subseteq B, bA \subseteq A, bB \subseteq B \Rightarrow aA+aB+bA+bB \subseteq A+B$,

同理 $(A+B)(a+b) \subseteq A+B$

故 A+B 构成 R 的理想

(2)

考察四元数集合 $R_0 = \{a+bi+cj+dk|a,b,c,d \in R\}$(后一个 R 指实数域)

A, B 是 R_0 的两个不同方向的复数子环：$A = \{a+bi|a,b \in R\}, B = \{a+cj|a,c \in R\}$

那么，$i \in A+B, j \in A+B$

但是 $ij = k \notin A+B$，因而 $A+B$ 在乘法上不构成半群，进而 $A+B$ 不是 R_0 的子环

23

(1)

$\forall x, y \in Z, 4x+4y = 4(x+y) \in D$

$\forall x \in Z, D(4x) = 4xD = \{16xy|y \in Z\} \subseteq D$

因而 D 是 A 的一个理想

(2)

$\forall x, y \in A, x+D = y+D \Leftrightarrow x-y \in D \Leftrightarrow x \equiv y \pmod 4$

故 $A/D = \{D, 2+D\}$

26

(1)

若 H 是 R 的极大理想:

考察 $f: R \to R/H, f(x) = x + H$，那么，明显 f 为满射，并且 $\forall x, y \in R, f(x+y) = x + H + (y + H) = (x+y) + H = f(x+y)$，$f(xy) = xy + H = xy + xH + Hy + H = (x+H)(y+H) = f(x)f(y)$（利用了 H 的理想性质），故 f 为同态映射，因此 R/H 为环。又同态保幺元和交换，因而 R/H 含幺且可交换。

下面只需要证明 R/H 中除零元 (由上，零元为 $f(0) = H$) 外的每个元素都可逆:

$\forall a \in R, a \notin H$, 令 $A = \{h + ax | h \in H, x \in R\}$，我们证明，$A = R$

由于 $\forall h_1, h_2 \in H, x_1, x_2 \in R, (h_1 + ax_1) - (h_2 + ax_2) = (h_1 - h_2) + a(x_1 - x_2) \in A, \forall r \in R, h \in H, x \in R, r(h + ax) = rh + rax \in A, (h + ax)r = hr + axr \in A$，因而 A 是 R 的理想，并且 $H \subset A$，由 H 的最大性，$A = R$

故而 $1 \in A, \exists b \in R, s.t. ab \in 1 + H$

故 $(a + H)(b + H) = ab + H = 1 + H$

于是 R/H 为域

(2)

如果 R/H 是域:

对于 R 的理想 A，若 $H \subset A$，$\exists a \in A, a \notin H$

那么，$\forall s \in R$，$\exists b \in R, s.t.\ (a + H)(b + H) = s + H$(因为 R/H 是域)$\Rightarrow ab = s + H \Rightarrow s \in A$，由 s 的任意性，$R \subseteq A$，故 A=S

30

(1)

$\forall c \in F, g(x) \equiv c \in F[x], \phi(g) = c$

故 ϕ 为满射

$\forall f(x), g(x) \in F[x], \phi(f+g) = (f+g)(0) = f(0) + g(0) = \phi(f) + \phi(g), \phi(fg) = fg(0)$

设 $f(x) = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i x^i, g(x) = \sum\limits_{i=0}^{m} b_i x^i$，则 $\phi(fg) = fg(0) = a_0 b_0 = f(0)g(0) = \phi(f)\phi(g)$，因而 ϕ 是满同态

(2)

$f \in ker\phi \Leftrightarrow f(0) = 0 \Leftrightarrow x | f(x)$

故 $ker\phi = \{f \in F[x] \Big| x \Big| f(x)\}$

$F[x]/ker\phi = \{g + ker\phi \Big| g \in F[x]\} = \{c + ker\phi \Big| c \in F\}$

34

i.

首先证明 EndG 关于 + 构成 Abel 群:

(1) 证明 EndG 关于 + 封闭（广群）:

$\forall f, g \in EndG, x, y \in G, (f+y)(x+y) = f(x+y) + g(x+y) = f(x) + f(y) + g(x) + g(y) = (f+g)(x) + (f+g)(y)$

(2) 证明 EndG 关于 + 成立结合律（半群）:

$\forall f, g, h \in EndG, x \in G, (f+(g+h))(x) = f(x) + (g+h)(x) = f(x) + g(x) + h(x) = (f+g+h)(x)$

(3) 证明 EndG 关于 + 存在单位元（独异点）:

明显 $e: G \to G, e(x) = 0$ 满足 $e \in EndG$

$\forall f \in EndG, x \in G, (f+e)(x) = f(x) + e(x) = f(x), (e+f)(x) = e(x) + f(x) = f(x)$

故 e 是单位元

(4) 证明每个 EndG 中的元素含有逆元（群）:

$\forall f \in EndG$, 明显 G 上的映射 g, $\forall x \in G, g(x) = -f(x)$ 满足 g 是 G 上的自同态，并且 $\forall x \in G, (f+g)(x) = f(x) + g(x) = 0 = e(x)$

故 EndG 构成群

(5) 证明 EndG 的加法可以交换（Abel 群）:

$\forall f, g \in EndG, x \in G, (f+g)(x) = f(x)+g(x) = g(x)+f(x) = (g+f)(x)$

其次证明 EndG 关于 $\circ$ 构成半群:

(1) 证明 EndG 关于 $\circ$ 封闭:

$\forall f, g \in EndG, x, y \in G, f \circ g(x) = f(g(x)) \in G, f \circ g(x+y) = f(g(x+y)) = f(g(x) + g(y)) = f(g(x)) + f(g(y)) = f \circ g(x) + f \circ g(y)$

故 $f \circ g \in EndG$

(2) 证明 EndG 关于 $\circ$ 满足结合律:

$\forall f, g, h \in EndG, x \in G, f \circ (g \circ h)(x) = f(g \circ h(x)) = f(g(h(x))) = f \circ g \circ h(x)$

故 EndG 关于 $\circ$ 构成半群

最后证明分配律成立:

$\forall f, g, h \in EndG, x \in G, f \circ (g+h)(x) = f((g+h)(x)) = f(g(x)+h(x)) = (f \circ g)(x) + (f \circ h)(x) = (f \circ g + f \circ h)(x)$

同理 $(g+h) \circ f = g \circ f + h \circ f$

故 $< EndG, +, \circ >$ 构成环

ii.

对于在 G 自身上的映射 f,

f 为同态 $\Leftrightarrow \forall i, j \in Z_n, f(ia + ja) = f(ia) + f(ja) \Rightarrow \forall i \in Z_n, f(ia) = if(a)$

而 $\forall i \in Z_n, f(ia) = if(a) \Rightarrow \forall\ i, j \in Z_n, f(ia + ja) = f((i + j)a) = (i + j)f(a) = if(a) + jf(a)$

故所有同态函数 f 必然满足 $f(ia) = if(a)$，且所有这样的 f 均为同态函数，故 G 的自同态环为

$< A, +, \circ >$，其中 $A = \{f_p | \forall i \in Z_n, f_p(ia) = ipa, p \in Z_n\}$