

# 22.3 生成函数及其性质

---

- 生成函数的定义
- 牛顿二项式定理
- 生成函数的性质
- 生成函数与序列的对应关系

# 生成函数的定义

---

设序列 $\{a_n\}$ ，构造形式幂级数

$$G(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots$$

称 $G(x)$ 为 $\{a_n\}$ 的生成函数。

实例：

(1)  $\{C(m,n)\}$ 的生成函数为

$$G(x)=1+C(m, 1)x+C(m, 2)x^2+\cdots=(1+x)^m$$

(2) 给定正整数 $k$ ,  $\{k^n\}$ 的生成函数为

$$G(x)=1+kx+k^2x^2+k^3x^3+\cdots=\frac{1}{1-kx}$$

# 牛顿（广义）二项式定理

牛顿二项式系数：

$$\binom{r}{n} = \begin{cases} 0 & n < 0 \\ 1 & n = 0 \\ \frac{r(r-1)\cdots(r-n+1)}{n!} & n > 0 \end{cases}$$

其中 $r$ 为实数， $n$ 为整数

例：  $\binom{-2}{5} = \frac{(-2)(-3)(-4)(-5)(-6)}{5!} = -6$

$$\binom{1/2}{4} = \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)(\frac{1}{2}-3)}{4!} = -\frac{5}{128}$$

# 牛顿二项式定理（续）

牛顿二项式定理：设 $\alpha$ 为实数，则对一切 $x, y$ ， $|x/y| < 1$ 有

$$(x + y)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n y^{\alpha-n},$$

$$\text{其中 } \binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}$$

当 $\alpha = m$ 时，变成二项式定理

$$(x + y)^m = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{m}{n} x^n y^{m-n},$$

$$(1 + x)^m = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{m}{n} x^n$$

# 牛顿二项式定理（续）

---

$$(x + y)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n y^{\alpha-n}, \text{ 其中 } \binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}$$

若  $\alpha = -m$ ，其中  $m$  为正整数，则

$$\begin{aligned} \binom{\alpha}{n} &= \binom{-m}{n} = \frac{(-m)(-m-1)\cdots(-m-n+1)}{n!} \\ &= \frac{(-1)^n m(m+1)\cdots(m+n-1)}{n!} = (-1)^n \binom{m+n-1}{n} \end{aligned}$$

# 牛顿二项式定理（续）

## 重要展开式

令  $x = z, y = 1$ ，则牛顿二项式定理变成

$$(1 + z)^{-m} = \frac{1}{(1+z)^m} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{m+n-1}{n} z^n, \quad |z| < 1$$

在上式中用  $-z$  代替  $z$ ，则有

$$(1 - z)^{-m} = \frac{1}{(1-z)^m} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{m+n-1}{n} z^n, \quad |z| < 1$$

$$m = 1, \quad \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots$$

$$m = 2, \quad \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n$$

# 生成函数的性质——线性与乘积

---

线性性质：

1.  $b_n = \alpha a_n$ , 则  $B(x) = \alpha A(x)$

2.  $c_n = a_n + b_n$ , 则  $C(x) = A(x) + B(x)$

乘积性质：

3.  $c_n = \sum_{i=0}^n a_i b_{n-i}$ , 则  $C(x) = A(x) \cdot B(x)$

# 生成函数的性质——移位

$$4. b_n = \begin{cases} 0 & n < l \\ a_{n-l} & n \geq l \end{cases}, \text{ 则 } B(x) = x^l A(x)$$

$$a_0, a_1, \dots, a_n, \dots$$

$$\underbrace{0, 0, \dots, 0}_{l \text{ 个 } 0}, b_l, b_{l+1}, \dots, b_{l+n}, \dots$$

$$5. b_n = a_{n+l}, \text{ 则 } B(x) = \frac{A(x) - \sum_{n=0}^{l-1} a_n x^n}{x^l}$$

$$a_0, a_1, \dots, a_l, a_{l+1}, \dots$$

$$b_0, b_1, \dots$$



# 生成函数的性质——求和

---

$$6. b_n = \sum_{i=0}^n a_i, \text{ 则 } B(x) = \frac{A(x)}{1-x}$$

$$b_0 = a_0$$

$$b_1x = a_0x + a_1x$$

...

$$b_nx^n = a_0x^n + a_1x^n + \cdots + a_nx^n$$

...

$$B(x) = a_0 \frac{1}{1-x} + a_1x \frac{1}{1-x} + \cdots + a_nx^n \frac{1}{1-x} + \cdots$$

# 生成函数的性质——求和

7.  $b_n = \sum_{i=n}^{\infty} a_i$ , 且  $A(1) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$  收敛, 则  $B(x) = \frac{A(1) - xA(x)}{1-x}$

证: 因为  $A(1) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i$  收敛, 故  $b_n = \sum_{i=n}^{\infty} a_i$  存在。

$$b_0 = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots = A(1),$$

$$b_1 x = a_1 x + a_2 x + \cdots = [A(1) - a_0]x,$$

$$b_2 x^2 = a_2 x^2 + \cdots = [A(1) - a_0 - a_1]x^2,$$

...

$$b_n x^n = a_n x^n + \cdots = [A(1) - a_0 - \cdots - a_{n-1}]x^n,$$

...

将以上各式两边分别相加得

$$\begin{aligned} B(x) &= A(1) + [A(1) - a_0]x + [A(1) - a_0 - a_1]x^2 + \cdots + [A(1) - a_0 - \cdots - a_{n-1}]x^n + \cdots \\ &= A(1)(1 + x + x^2 + \cdots) - a_0 x(1 + x + x^2 + \cdots) - a_1 x^2(1 + x + x^2 + \cdots) - \cdots \\ &= [A(1) - x(a_0 + a_1 x + \cdots)](1 + x + x^2 + \cdots) \\ &= \frac{A(1) - xA(x)}{1-x} \end{aligned}$$

# 生成函数性质——换元与微积分

---

换元性质：

8.  $b_n = \alpha^n a_n$ , 则  $B(x) = A(\alpha x)$

求导与积分性质：

9.  $b_n = n a_n$ , 则  $B(x) = x A'(x)$

10.  $b_n = \frac{a_n}{n+1}$ , 则  $B(x) = \frac{1}{x} \int_0^x A(x) dx$

# 生成函数与序列的对应

1. 给定序列 $\{a_n\}$ 或关于 $a_n$ 的递推方程, 求生成函数 $G(x)$

利用级数的性质和下述重要级数

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$$

$$\begin{aligned} (1+x)^{\frac{1}{2}} &= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{1/2}{k} x^k = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - 1\right) \cdots \left(\frac{1}{2} - k + 1\right)}{k!} x^k \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k-3)}{2^k k!} x^k \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} (2k-2)!}{2^k k! \cdot 2^{k-1} (k-1)!} x^k = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{2^{2k-1} k} \binom{2k-2}{k-1} x^k \end{aligned}$$

# 实例

$$8. \quad b_n = \alpha^n a_n, \text{ 则 } B(x) = A(\alpha x)$$

$$1. \quad b_n = \alpha a_n, \text{ 则 } B(x) = \alpha A(x)$$

**例1** 求序列 $\{a_n\}$ 的生成函数

$$(1) \quad a_n = 7 \cdot 3^n \quad (2) \quad a_n = n(n+1)$$

**解:** (1) 设 $b_n = 1$ , 则 $\{b_n\}$ 的生成函数为 $\frac{1}{1-x}$ , 令

$$c_n = 3^n = 3^n b_n$$

由性质8知 $\{c_n\}$ 的生成函数为 $\frac{1}{1-3x}$ , 进而由性质1知

$\{a_n\}$ 的生成函数为 $\frac{7}{1-3x}$ .

也可如下直接求:

$$G(x) = 7 \sum_{n=0}^{\infty} 3^n x^n = 7 \sum_{n=0}^{\infty} (3x)^n = \frac{7}{1-3x}$$

# 实例

**例1** 求序列 $\{a_n\}$ 的生成函数

$$(1) a_n = 7 \cdot 3^n \quad (2) a_n = n(n+1)$$

**解:** (2)  $G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} n(n+1)x^n$

$$\int_0^x G(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n+1} = x^2 H(x), H(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}$$

$$\int_0^x H(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{x}{1-x}, \quad H(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$$

$$\int_0^x G(x) dx = \frac{x^2}{(1-x)^2} \quad G(x) = \left( \frac{x^2}{(1-x)^2} \right)' = \frac{2x}{(1-x)^3}$$

# 生成函数与序列的对应(续)

2. 给定序列 $\{a_n\}$ 的生成函数 $G(x)$ , 求 $a_n$

待定系数法

**例2**  $G(x) = \frac{2}{1-3x+2x^2} = \frac{A}{1-x} + \frac{B}{1-2x}$

$$\begin{cases} A + B = 2 \\ -2A - B = 0 \end{cases} \Rightarrow A = -2, B = 4$$

$$G(x) = \frac{-2}{1-x} + \frac{4}{1-2x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-2)x^n + \sum_{n=0}^{\infty} 4(2x)^n$$

$$a_n = -2 + 4 \cdot 2^n$$

## 22.4 生成函数的应用

---

- 求解递推方程
- 计数多重集的 $r$ 组合数
- 不定方程非负整数解的个数
- 正整数的拆分



# 求解递推方程

**例1**  $a_n - 5a_{n-1} + 6a_{n-2} = 0, a_0 = 1, a_1 = -2$

$$G(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots$$

$$-5xG(x) = -5a_0x - 5a_1x^2 - 5a_2x^3 - \dots$$

$$6x^2G(x) = +6a_0x^2 + 6a_1x^3 + \dots$$

---

$$(1-5x+6x^2)G(x) = a_0 + (a_1-5a_0)x$$

$$G(x) = \frac{1-7x}{1-5x+6x^2} = \frac{5}{1-2x} - \frac{4}{1-3x}$$

$$= 5 \sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n - 4 \sum_{n=0}^{\infty} 3^n x^n$$

$$a_n = 5 \cdot 2^n - 4 \cdot 3^n$$

# 求解递推方程(续)

例2 
$$\begin{cases} h_n = \sum_{k=1}^{n-1} h_k h_{n-k}, & n \geq 2 \\ h_1 = 1 \end{cases}$$

解：设 $\{h_n\}$ 的生成函数为 $H(x) = \sum_{n=1}^{\infty} h_n x^n$

$$\begin{aligned} H^2(x) &= \sum_{k=1}^{\infty} h_k x^k \cdot \sum_{l=1}^{\infty} h_l x^l \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} x^n \sum_{k=1}^{n-1} h_k h_{n-k} \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} h_n x^n \\ &= H(x) - h_1 x \\ &= H(x) - x \end{aligned}$$

# 求解递推方程(续)

$$(1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{2^{2k-1}k} \binom{2k-2}{k-1} x^k$$

$$H^2(x) - H(x) + x = 0,$$

$$H(x) = \frac{1 - (1 - 4x)^{\frac{1}{2}}}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} (1 - 4x)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \left[ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n 2^{2n-1}} \binom{2n-2}{n-1} (-4x)^n \right]$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n 2^{2n}} \binom{2n-2}{n-1} (-1)^n 2^{2n} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \binom{2n-2}{n-1} x^n$$

$$h_n = \frac{1}{n} \binom{2n-2}{n-1}$$

(0, 0)到(n, n)除端点外不接触对角线  
的非降路径数 =  $\frac{2}{n} \binom{2n-2}{n-1}$

# 多重集的 $r$ 组合数

$S=\{n_1 \cdot a_1, n_2 \cdot a_2, \dots, n_k \cdot a_k\}$ 的 $r$ 组合数就是不定方程

$$x_1 + x_2 + \dots + x_k = r$$

$$x_i \leq n_i$$

的非负整数解的个数。

生成函数

$$G(y)$$

$$= (1 + y + \dots + y^{n_1})(1 + y + \dots + y^{n_2}) \dots (1 + y + \dots + y^{n_k})$$

中 $y^r$ 的系数。

$$N = C(k+r-1, r), \text{ 当 } r \leq n_i$$

证明: 一个 $r$ 组合为

$$\{x_1 \cdot a_1, x_2 \cdot a_2, \dots, x_k \cdot a_k\},$$

其中 $x_1 + x_2 + \dots + x_k = r$ ,  $x_i$ 为非负整数

这个不定方程的非负整数解对应于下述排列

$$\begin{array}{ccccccc} 1 \dots 1 & \mathbf{0} & 1 \dots 1 & \mathbf{0} & 1 \dots 1 & \mathbf{0} & \dots \dots \mathbf{0} & 1 \dots 1 \\ x_1 \uparrow & & x_2 \uparrow & & x_3 \uparrow & & & x_k \uparrow \end{array}$$

$r$ 个1,  $k-1$ 个 $\mathbf{0}$ 的全排列数为

$$N = \frac{(r+k-1)!}{r!(k-1)!} = C(k+r-1, r)$$

# 多重集的 $r$ 组合数(续)

**例3**  $S = \{ 3 \cdot a, 4 \cdot b, 5 \cdot c \}$  的10组合数

**解:** 生成函数  $G(y)$

$$= (1+y+y^2+y^3)(1+y+y^2+y^3+y^4)(1+y+y^2+y^3+y^4+y^5)$$

$$= (1+2y+3y^2+4y^3+4y^4+3y^5+2y^6+y^7)(1+y+y^2+y^3+y^4+y^5)$$

$$= (1 + \cdots + 3y^{10} + 2y^{10} + y^{10} + \cdots)$$

$$N = 6$$

$\{a, a, a, b, b, b, b, c, c, c\}, \{a, a, a, b, b, b, c, c, c, c\},$

$\{a, a, a, b, b, c, c, c, c, c\}, \{a, a, b, b, b, b, c, c, c, c\},$

$\{a, a, b, b, b, c, c, c, c, c\}, \{a, b, b, b, b, c, c, c, c, c\}$

# 不定方程非负整数解的个数

基本模型：  $x_1 + x_2 + \cdots + x_k = r$ ,  $x_i$  为自然数

$$G(y) = (1 + y + \cdots)^k = \frac{1}{(1 - y)^k}$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-k)(-k-1) \cdots (-k-r+1)}{r!} (-y)^r$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r k(k+1) \cdots (k+r-1)}{r!} (-1)^r y^r$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty} \binom{k+r-1}{r} y^r \quad \Rightarrow \quad N = \binom{k+r-1}{r}$$

$$N = C(k+r-1, r), \text{ 当 } r \leq n_i$$

证明：一个  $r$  组合为

$$\{x_1 \cdot a_1, x_2 \cdot a_2, \dots, x_k \cdot a_k\},$$

其中  $x_1 + x_2 + \cdots + x_k = r$ ,  $x_i$  为非负整数

这个不定方程的非负整数解对应于下述排列

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & \dots & 1 & 0 & 1 & \dots & 1 & 0 & 1 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 \text{ 个} & & x_2 \text{ 个} & & x_3 \text{ 个} & & & & & & & & & & x_k \text{ 个} \end{array}$$

$r$  个 1,  $k-1$  个 0 的全排列数为

$$N = \frac{(r+k-1)!}{r!(k-1)!} = C(k+r-1, r)$$

# 不定方程非负整数解的个数(续)

带限制条件:  $x_1+x_2+\cdots+x_k=r$ ,  $l_i \leq x_i \leq n_i$

生成函数

$$G(y) = (y^{l_1} + y^{l_1+1} + \cdots + y^{n_1})(y^{l_2} + y^{l_2+1} + \cdots + y^{n_2}) \\ \cdots (y^{l_k} + y^{l_k+1} + \cdots + y^{n_k})$$

带系数:  $p_1x_1+p_2x_2+\cdots+p_kx_k=r$ ,  $x_i \in N$

生成函数

$$G(y) = (1 + y^{p_1} + y^{2p_1} + \cdots)(1 + y^{p_2} + y^{2p_2} + \cdots) \\ \cdots (1 + y^{p_k} + y^{2p_k} + \cdots)$$

# 不定方程非负整数解的个数(续)

**例4** 1克砝码2个，2克砝码1个，4克砝码2个，问能称出哪些重量，方案有多少？

**解：**  $x_1 + 2x_2 + 4x_3 = r$

$$0 \leq x_1 \leq 2, 0 \leq x_2 \leq 1, 0 \leq x_3 \leq 2$$

$$G(y) = (1+y+y^2)(1+y^2)(1+y^4+y^8)$$

$$= 1+y+2y^2+y^3+2y^4+y^5+2y^6+y^7+2y^8+y^9+2y^{10}+y^{11}+y^{12}$$

重量	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
方案	1	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	1



# 不定方程非负整数解的个数(续)

如果重物放右边，允许砝码放在天平两边（同种砝码放一侧），则

$$G(y)=(y^{-2}+y^{-1}+1+y+y^2)(y^{-2}+1+y^2)(y^{-8}+y^{-4}+1+y^4+y^8) \\ =\cdots+5+3y+4y^2+3y^3+5y^4+3y^5+4y^6+3y^7+4y^8+2y^9+2y^{10}+y^{11}+y^{12}$$

称0克:     | ; 1, 1 | 2; 1, 1, 2 | 4; 4 | 1, 1, 2; 2 | 1, 1

称1克:     1 | 1; 2 | 1, 1; 4 | 1, 2, 1

称2克:     1, 1 | 2; 2 | 2; 4 | 1, 1, 2; 4 | 2, 2

# 正整数的拆分

---

- 拆分的定义与分类
- 无序拆分
- 有序拆分

# 拆分的定义与分类

	有序	无序
不重复	$4 = 4$ $4 = 1+3$ $4 = 3+1$	$4 = 4$ $4 = 1+3$
重复	$4 = 4$ $4 = 1+3$ $4 = 3+1$ $4 = 2+2$ $4 = 2+1+1$ $4 = 1+2+1$ $4 = 1+1+2$ $4 = 1+1+1+1$	$4 = 4$ $4 = 1+3$ $4 = 2+2$ $4 = 2+1+1$ $4 = 1+1+1+1$

# 无序拆分

---

基本模型：将 $N$ 无序拆成正整数 $a_1, a_2, \dots, a_n$

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = N$$

不允许重复  $G(y) = (1 + y^{a_1})(1 + y^{a_2}) \dots (1 + y^{a_n})$

允许重复

$$\begin{aligned} G(y) &= (1 + y^{a_1} + y^{2a_1} + \dots)(1 + y^{a_2} + y^{2a_2} + \dots) \\ &\quad \dots (1 + y^{a_n} + y^{2a_n} + \dots) \\ &= \frac{1}{(1 - y^{a_1})(1 - y^{a_2}) \dots (1 - y^{a_n})} \end{aligned}$$

# 实例

**例5** 证明任何正整数都可以唯一表示成2进制数。

**证：** 对应于将任何正整数 $N$ 拆分成2的幂，  
 $2^0, 2^1, 2^2, 2^3, \dots$ ，且不允许重复。

$$G(y) = (1 + y)(1 + y^2)(1 + y^4)(1 + y^8) \dots$$

$$= \frac{1-y^2}{1-y} \frac{1-y^4}{1-y^2} \frac{1-y^8}{1-y^4} \dots$$

$$= \frac{1}{1-y}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} y^n$$

对于所有的 $n, a_n=1$ ，这就证明了存在且仅有一种表法。

# 有限制条件的无序拆分

---

将 $N$ 无序拆成正整数 $a_1, a_2, \dots, a_n$

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = N$$

限制条件:  $l_i \leq x_i \leq t_i$ ,

转变为方程非负整数解的问题:

$$G(y) = \dots (y^{l_i a_i} + y^{(l_i+1)a_i} + \dots + y^{t_i a_i}) \dots$$

# 有限制条件的无序拆分

**例6** 给定 $r$ , 求 $N$ 允许重复无序拆分成 $k$ 个数( $k \leq r$ )的方法数。

**解**  $N$ 允许重复无序拆分成 $k$ 个数( $k \leq r$ )的方案

$\Leftrightarrow N$ 允许重复无序拆分成不超过 $k$ ,  $k \leq r$ , 的正整数的方案

做下述Ferrers图

将图以 $y=x$ 对角线翻转180度,

得到共轭的Ferrers图,

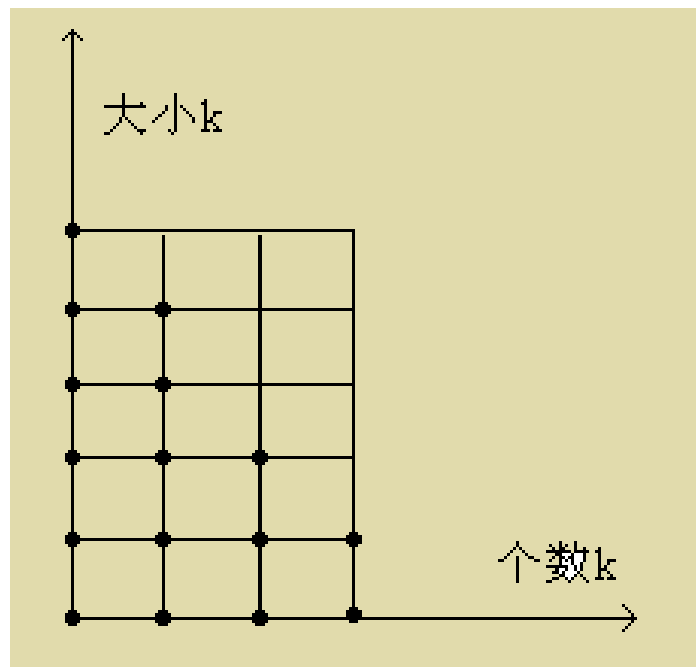
$$16 = 6+5+3+2 \quad (k \leq 4)$$

对应每个数不超过4的拆分.

$$16 = 4+4+3+2+2+1$$

这种拆分数数的生成函数为

$$G(y) = \frac{1}{(1-y)(1-y^2)\dots(1-y^r)}$$



# 有序拆分

(1) 将 $N$ 允许重复地有序拆分成 $r$ 个部分的方案数为  
 $C(N-1, r-1)$

方法一：一一对应. 设  $N = a_1 + a_2 + \cdots + a_r$  是满足条件的拆分，则令

$$S_i = \sum_{k=1}^i a_k, \quad i = 1, 2, \dots, r$$

$$0 < S_1 < S_2 < \cdots < S_r = N$$

$r-1$ 个 $S_i$ 取值为 $1, 2, \dots, N-1$ ，方法数为 $C(N-1, r-1)$

**推论：**对 $N$ 做任意重复的有序拆分，方案数为

$$\sum_{r=1}^N \binom{N-1}{r-1} = 2^{N-1}$$



# 有序拆分(续)

$$\frac{1}{(1-y)^k} = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-k)(-k-1)\dots(-k-r+1)}{r!} (-y)^r$$
$$= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r k(k+1)\dots(k+r-1)}{r!} (-1)^r y^r = \sum_{r=0}^{\infty} \binom{k+r-1}{r} y^r$$

方法二：生成函数.  $G(y) = (y+y^2+y^3+\dots)^r$  中  $y^N$  项的系数.

$$G(y) = (y + y^2 + \dots)^r = \frac{y^r}{(1-y)^r}$$
$$= \sum_{N=0}^{\infty} \binom{N-r+r-1}{N-r} y^N = \sum_{N=0}^{\infty} \binom{N-1}{N-r} y^N = \sum_{N=0}^{\infty} \binom{N-1}{r-1} y^N$$

所求的方法数为  $\binom{N-1}{r-1}$

(2) 不允许重复有序拆分：不允许重复无序拆分+全排列  
(see PPT p.26)