

## Lagrangian Function in Special Relativity

$$P_i = \frac{\partial L}{\partial u_i} = \frac{m u_i}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

$$L = T^* - U$$

$$\frac{\partial T^*}{\partial u_i} = \frac{m u_i}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad T^* = -mc^2 \sqrt{1 - \beta^2}, \quad U = -mc^2 \sqrt{1 - \beta^2} - L$$

$$H = \sum_i u_i P_i - L = \sum_i \frac{P_i^2 c^2}{\gamma m c^2} + \frac{mc^2}{r} + U$$

$$= \frac{1}{\gamma m c^2} (P^2 c^2 + m^2 c^4) + U$$

$$= \frac{E^2}{\gamma m c^2} + U = E + U = T + U + E_0$$

## Relativistic Kinematics

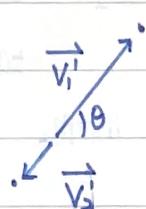
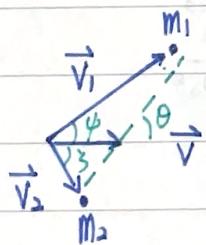
$$P'_1 = P'_2, \quad m_1 u'_1 r'_1 = m_2 u'_2 r'_2$$

system K

$$m_1 \xrightarrow[u_1]{v} m_2, \quad u_2 = 0$$

K'

$$m_1 \xrightarrow[u'_1]{u'_2} m_2$$



$$P'_1 = m_1 u'_1 r'_1 = m_1 c \beta'_1 r'_1$$

$$= m_1 c \sqrt{(r'_1)^2 - 1} = m_2 c \sqrt{(r'_2)^2 - 1}$$

$$= P'_2$$

$$P'_1 = (P_1 - \frac{u'_2}{c^2} E') r'_1$$

$$P_1 = m_1 u_1 r_1$$

$$E_1 = m_1 c^2 r_1$$

$$\begin{aligned} m_1 c \sqrt{(r'_1)^2 - 1} &= (m_1 c \beta_1 r'_1 - \beta_2' m_1 c r'_1) r'_2 \\ &= m_1 c \left[ r'_2 \sqrt{r'_1^2 - 1} - r'_1 \sqrt{(r'_2)^2 - 1} \right] \\ &= m_2 c \sqrt{(r'_2)^2 - 1} \end{aligned}$$

$$r'_1 = \frac{r'_1 + \frac{m_1}{m_2}}{\sqrt{1 + 2r'_1 \frac{m_1}{m_2} + (\frac{m_1}{m_2})^2}} \quad r'_2 = \frac{r'_2 + \frac{m_2}{m_1}}{\sqrt{1 + 2r'_2 \frac{m_2}{m_1} + (\frac{m_2}{m_1})^2}}$$

$$\begin{aligned} P_{1,x} &= (P'_{1,x} + \frac{U'_2}{c^2} E'_1) r'_2 = (m_1 c \beta'_1 r'_1 \cos \theta + m_1 c \beta'_2 r'_1) r'_2 \\ &= m_1 c r'_1 r'_2 (\beta'_1 \cos \theta + \beta'_2) \end{aligned}$$

$$P_{1,y} = m_1 c \beta'_1 r'_1 \sin \theta$$

$$\tan \psi = \frac{1}{r'_2} \frac{\sin \theta}{\cos \theta + \frac{\beta'_2}{\beta'_1}} = \frac{1}{r'_2} \frac{\sin \theta}{\cos \theta + \frac{m_1 r'_1}{m_2 r'_2}}$$

$$\begin{aligned} P_{2,x} &= (P'_{2,x} + \frac{U'_2}{c^2} E'_2) r'_2 = (-m_2 c \beta'_2 r'_2 \cos \theta + m_2 c \beta'_1 r'_2) r'_2 \\ &= m_2 c \beta'_2 r'_2 (1 - \cos \theta) \end{aligned}$$

$$P_{2,y} = -m_2 c \beta'_2 r'_2 \sin \theta \quad \gamma = \frac{P_{2,y}}{P_{2,x}} = -\frac{1}{r'_2} \frac{\sin \theta}{1 - \cos \theta}$$

$$r'_1 = r'_2 = \sqrt{\frac{1+r'_1}{2}} \quad m_1 = m_2 \quad \tan \psi = \sqrt{\frac{2}{1+r'_1}} \frac{\sin \theta}{1+\cos \theta}$$

$$\tan \gamma = -\sqrt{\frac{2}{1+r'_1}} \frac{\sin \theta}{1-\cos \theta}$$

$$\tan \psi \tan \gamma = -\frac{2}{1+r'_1} \quad m_1 = m_2$$

$$\tan \psi = \sqrt{\frac{2}{1+r'_1}}$$

$$\phi = \psi + \gamma + 2\psi = 2 \tan^{-1} \left( \sqrt{\frac{2}{1+r'_1}} \right)$$

$$X_4 = i c t \quad X'_4 = i c t'$$

$$\sum_{\mu=1}^4 X_{\mu}^2 = 0 \quad \sum_{\mu=1}^4 (X'_{\mu})^2 = 0$$

$$\sum_j X_j^2 - c^2 t^2 = \sum_{\mu} X_{\mu}^2 \equiv S^2 = 0 \text{ in } K$$

$$\sum_j (X'_j)^2 - c^2 (t')^2 = \sum_{\mu} (X'_{\mu})^2 \equiv (S')^2 = 0 \text{ in } K'$$

assume  $(S')^2 = k S^2$ ,  $(S')^2 = \underbrace{k(v) S^2}_{k^2=1 \text{ or } k(v)=\pm 1}$ ,  $S^2 = k(-v)(S')^2$

in the limit of zero velocity,  $K$  and  $K'$  become identical  $k(v=0)=+1$

$$\Rightarrow S^2 = (S')^2$$

$$\Rightarrow \sum_{\mu} X_{\mu}^2 = \sum_{\mu} (X'_{\mu})^2$$

the Lorentz transformations are then orthogonal transformation in Minkowski space.

$$X'_{\mu} = \sum_{\nu} \lambda_{\mu\nu} X_{\nu}$$

elements of the Lorentz transformation matrix

$$\lambda = \begin{bmatrix} r & 0 & 0 & iBr \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -iBr & 0 & 0 & r \end{bmatrix}$$

$$A'_{\mu} = \sum_{\nu} \lambda_{\mu\nu} A_{\nu} \quad \text{four-vector } \mathbf{X} = (X, y, z, i c t) = (\vec{X}, i c t)$$

$$d\mathbf{X} = (d\vec{X}, i c dt) \quad ds = \sqrt{\sum_{\mu} dX_{\mu}^2} \quad d\tau = \frac{i}{c} \sqrt{\sum_{\mu} dX_{\mu}^2} = \frac{i}{c} ds$$

$$\text{four-vector velocity } \mathbf{V} = \frac{d\mathbf{X}}{d\tau} = \left( \frac{d\vec{X}}{d\tau}, i c \frac{dt}{d\tau} \right)$$

$$\text{ordinary velocity } \vec{U}, \quad U_j = \frac{dx_j}{dt}$$

$$d\tau = dt \sqrt{1 - \frac{1}{c^2} \sum_j \frac{dx_j^2}{dt^2}} \quad \text{or} \quad d\tau = dt \sqrt{1 - \beta^2}$$

NO.

DATE / /

$$V = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} (\vec{u}, i c)$$

$$P = m V = \left( \frac{m \vec{u}}{\sqrt{1-\beta^2}}, i P_4 \right) \quad P_4 \equiv \frac{mc}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$P_j = \gamma m u_j \quad P_4 = \gamma mc = \frac{E}{c} \quad P = (\vec{P}, i \frac{E}{c})$$

$$P'_1 = \frac{P_1 - \frac{v}{c^2} E}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad P'_2 = P_2 \quad P'_3 = P_3$$

$$E' = \frac{E - v P_1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

Einheitszeit ist die Zeit, die ein Beobachter auf der Erde als Zeitintervall zwischen zwei Ereignissen wahrnimmt.

Zeitdilatation: Ein Beobachter auf einer bewegten Plattform misst eine längere Zeitdauer zwischen zwei Ereignissen als ein Beobachter auf der Erde.

Zeitdilatation: Ein Beobachter auf einer bewegten Plattform misst eine längere Zeitdauer zwischen zwei Ereignissen als ein Beobachter auf der Erde.

Zeitdilatation: Ein Beobachter auf einer bewegten Plattform misst eine längere Zeitdauer zwischen zwei Ereignissen als ein Beobachter auf der Erde.

Zeitdilatation: Ein Beobachter auf einer bewegten Plattform misst eine längere Zeitdauer zwischen zwei Ereignissen als ein Beobachter auf der Erde.

Zeitdilatation: Ein Beobachter auf einer bewegten Plattform misst eine längere Zeitdauer zwischen zwei Ereignissen als ein Beobachter auf der Erde.

Zeitdilatation: Ein Beobachter auf einer bewegten Plattform misst eine längere Zeitdauer zwischen zwei Ereignissen als ein Beobachter auf der Erde.

Zeitdilatation: Ein Beobachter auf einer bewegten Plattform misst eine längere Zeitdauer zwischen zwei Ereignissen als ein Beobachter auf der Erde.

Zeitdilatation: Ein Beobachter auf einer bewegten Plattform misst eine längere Zeitdauer zwischen zwei Ereignissen als ein Beobachter auf der Erde.

Zeitdilatation: Ein Beobachter auf einer bewegten Plattform misst eine längere Zeitdauer zwischen zwei Ereignissen als ein Beobachter auf der Erde.