2021 年秋季学期算法基础期末考试（样卷）

学号 ______________　　姓名 ______________

主定理：令 $a \geq 1$ 和 $b > 1$ 是常数，$f(n)$ 是一个函数，$T(n)$ 是定义在非负整数上的递归式：

$$T(n) = aT(n/b) + f(n)$$

其中我们将 n/b 解释为 $\lfloor n/b \rfloor$ 或 $\lceil n/b \rceil$。那么 $T(n)$ 有如下渐进界：

1. 若对某个常数 $\varepsilon > 0$ 有 $f(n) = O(n^{\log_b a - \varepsilon})$，则 $T(n) = \Theta(n^{\log_b a})$。
2. 若对整数 $k \geq 0$ 有 $f(n) = \Theta(n^{\log_b a} \lg^k n)$，则 $T(n) = \Theta(n^{\log_b a} \lg^{k+1} n)$。
3. 若对某个常数 $\varepsilon > 0$ 有 $f(n) = \Omega(n^{\log_b a + \varepsilon})$，且对某个常数 $c < 1$ 和所有足够大的 n 有 $af(n/b) \leq cf(n)$，则 $T(n) = \Theta(f(n))$。

Master Theorem: Let $a \geq 1$ and $b > 1$ be constants and $f(n)$ be a function. Let $T(n)$ be defined on the nonnegative integers by the following recurrence

$$T(n) = aT(n/b) + f(n)$$

Notice that here n/b can be interpreted as either $\lfloor n/b \rfloor$ or $\lceil n/b \rceil$. Then $T(n)$ can be bounded asymptotically as follows:

1. If there exists a constant $\varepsilon > 0$ such that $f(n) = O(n^{\log_b a - \varepsilon})$ then $T(n) = \Theta(n^{\log_b a})$.
2. If there exists an integer $k \geq 0$ such that $f(n) = \Theta(n^{\log_b a} \lg^k n)$ then $T(n) = \Theta(n^{\log_b a} \lg^{k+1} n)$.
3. If there exists a constant $\varepsilon > 0$ such that $f(n) = \Omega(n^{\log_b a + \varepsilon})$, and if $af(n/b) \leq cf(n)$ for some constant $c < 1$, then $T(n) = \Theta(f(n))$.

一、**判断题**（根据表述判断正误，并简要说明理由；每题 6 分，共 30 分）。

1. (**T**,　**F**) 递归式 $T(n) = 3T(\frac{n}{2}) + n\lg n$ 的解为 $T(n) = \Theta(n^{\lg 3})$。

2. (**T**,　**F**) 对于一个无序的数组，可以在 $O(n)$ 的时间内求出，从这数组的第 $\lfloor \sqrt{n} \rfloor$ 小的数到第 $2\lfloor \sqrt{n} \rfloor$ 小的数的所有数之和。

3. (**T**,　**F**) 对于一个含有 n 个点以及 m 条边的有向图，其中所有的边的权重都大于 0，那么可以在 $O(mn + n^2 \lg n)$ 的时间内求出所有点对之间的最短路径。

4. (**T**, **F**) $2-SAT$(可满足性) 问题和 $3-SAT$ 问题均属于 NPC 问题, 其中 $3-SAT$ 问题是 $NP-hard$ 难度的，而 $2-SAT$ 问题可在多项式时间内求解。

5. (**T**, **F**) 多项式时间近似模式（PTAS）是这样一种近似算法：它的输入除了该问题的实例外，还有一个值 $\varepsilon>0$，使得对于任何固定的 ε, 该模式是一个 $(1+\varepsilon)$ 的近似算法并且都以其输入实例规模 n 的多项式时间运行。

二、**简答题**（根据题目要求写出解答过程；每题 10 分，共 40 分）。

1. 分治策略（Divide-and-Conquer）是我们在算法设计中经常用到的方法。同时，递归式与分治方法紧密相关，它可以用来刻画分治算法的运行时间。请说明何为分治策略以及你所知道的求解递归式的 。

2. 数据库中存储了大小为 n, 取值范围在 0 到 750 区间的整数数组，要求数据库对该数组做某种线性时间的预处理，使得对于任意的统计某个区间 $[a,b],a,b\in[0,k]$ 元素个数的查询需求，该数据库可以在 $O(1)$ 时间内返回结果。

3. 对于 n 件物品，背包容量为 W 的 0/1 背包问题，其中第 i 件物品的价值为 v_i，重量为 w_i。请写出用动态规划求解该问题的时间复杂度，并解释为什么该算法被称为伪多项式时间算法。

4. 计算 KMP 算法中对应于模式 $P = ababbabbabbababbabb$ 的前缀函数 π.

三、**综合题**（根据题目要求写出解答过程；每题 15 分，共 30 分）。

1. 给定一排共 n 堆石子，其中第 i 堆石子的个数为 a_i，现在需要将石子合并为一堆，每次操作只允许合并相邻的两堆石子，代价为被合并的两堆石子的个数之和。

（1）请使用动态规划（Dynamic Programming）的方法求合并石子的最小代价，列出状态转移方程并分析时间复杂度。

（2）假设合并操作可以合并任意两堆石子（即不需要相邻），请设计一种渐进时间复杂度为 $O(n \lg n)$ 的算法求解合并石子的最小代价。

2. 给定一个无向图 $G=(V,E)$，假设其所有边的权重各不相同。我们定义一个第二小生成树：假设 $\mathscr{T}$ 是图 G 的所有生成树的集合，T 是图 G 的最小生成树，那么图 G 的第二小生成树 T_2 满足 $w(T_2)=\min_{T'\in\mathscr{T}-T} w(T')$，其中 $w(T')$ 代表了生成树 T' 的权重之和。

（1）请给出一个例子，说明第二小生成树不是唯一的。 w_0 w_1

（2）请证明，存在边 $(u,v)\in T$ 和边 $(x,y)\notin T$ 满足 $T-(u,v)+(x,y)$ 是图 G 的一棵第二小生成树。

四、附加题（根据题目要求写出解答过程；每题 10 分，共 10 分）。

在旅行商问题 (TSP) 中，给定平面 n 个点作为输入，希望求出连接所有点的最短巡游路线。这个问题是 $NP-Hard$ 问题。

为了简化 TSP 问题，我们限制巡游路线为双调巡游 (bitonic tours)，即从最左边的点开始，严格向右前进直到最右端的点，然后调头严格向左前进，直至回到起始点。下图是一个 $n=7$ 的平面图的两种双调巡游的方案。

设计一个 $O(n^2)$ 时间的最优双调巡游路线算法（路线长度最短）。你可以认为任何两个点的 x 坐标均不同，且所有实数运算都花费单位时间。