数字图像处理

第四讲 频域处理（上）

王伟强

中国科学院大学计算机科学与技术学院

内容回顾（1）

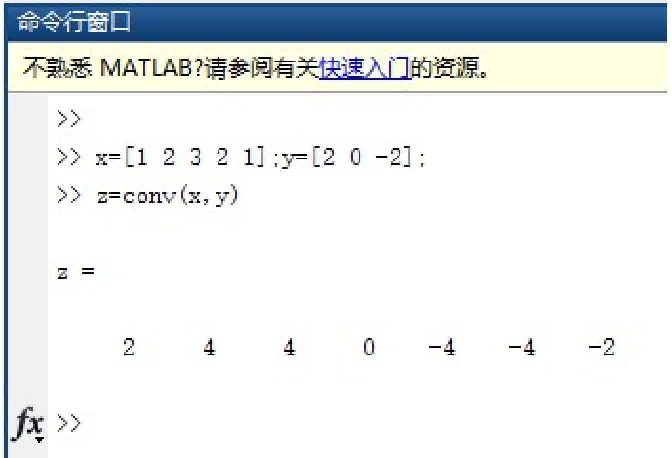
➢ 在信号处理领域，卷积是一种不可或缺的运算。 $(f*g)[n] \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{m=0}^{N-1} f[m]\, g[n-m]$

- 针对一维信号 $x[t]$=[1 2 3 2 1] 与 $y[t]$=[2 0 -2], 计算它们的卷积 $z[t]=x[t]*y[t]$
  - ✓ $y[-t]$=[-2 0 2]，平移到位置p的地方得到$y[-(t-p)]=y[p-t]$=[-2 0 2],
  - ✓ $z[0]=0*(-2)+0*0+1*2=2$ $z[1]=0*(-2)+1*0+2*2=4$

    $z[2]=1*(-2)+2*0+3*2=4$ $z[3]=2*(-2)+3*0+2*2=0$

    $z[4]=3*(-2)+2*0+1*2=-4$ $z[5]=2*(-2)+1*0+0*2=-4$

    $z[6]=1*(-2)+0*0+0*2=-2$ 所以$z[t]=x[t]*y[t]$=[2 4 4 0 −4 −4 −2]
  - ✓ 对于离散情况，输出的信号长度S与输入信号长度L以及卷积核大小l的关系$S= L+ l-1$



内容回顾（2）

➢ **卷积是一种线性运算**

- 针对一维信号 $x[t]$=[1 2 3 2 1] 与 $y[t]$=[2 0 -2]，计算它们的卷积 $z[t]=x[t]*y[t]$

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \\ 0 \\ -4 \\ -4 \\ -2 \end{bmatrix}$$

内容回顾（3）

➢ 卷积是线性移不变系统在空域/时领的数学模型

- 若已知一个线性移不变数字系统对单位脉冲的响应，我们可以知道该系统对任何输入的输出响应，卷积就是获得输出所要采用的数学计算。

首先 $z[t]=x[t]*y[t]=[1]*[2\ 0\ {-2}]=[2\ 0\ {-2}]$, 一般地当输入$x[t]=[1]$, $z[t]=x[t]*y[t]=y[t]$

现在有输入先 $x[t]=[1\ 2\ 3]=1\cdot[1\ \ 0\ \ 0]+2\cdot[0\ \ 1\ \ 0]+3\cdot[0\ \ 0\ \ 1]$

当我们用信号$x_0=1\cdot[1\ \ 0\ \ 0]$刺激系统时，有响应$z_0=[1*2\quad 1*0\quad 1*(-2)\quad 0\quad 0\ ]$

当我们用信号$x_1=2\cdot[0\ \ 1\ \ 0]$刺激系统时，有响应$z_1=[0\quad 2*2\quad 2*0\quad 2*(-2)\quad 0\ ]$

当我们用信号$x_2=3\cdot[0\ \ 0\ \ 1]$刺激系统时，有响应$z_2=[0\quad 0\quad 3*2\quad 3*0\quad 3*(-2)]$

当我们把用信号x_0 x_1 x_2 叠加起来刺激系统时，有响应变成对应响应的叠加

即 $z[t]=z_0+z_1+z_2=[2,\ 4,\ 4,-4,-6]$

内容回顾（4）

- 卷积，相关运算是“动态”的点积运算，度量信号与参考信号或模板的相似度。

内容纲要

- 傅立叶变换
- 频域滤波
- 从空域滤波器获取频域滤波器
- 频域中直接构造滤波器
- 锐化频域滤波器

傅里叶变换

- 任何周期性函数可以表示为不同频率的正弦或余弦的总和，每个乘以不同的系数（傅立叶级数）。
- 即使是不是周期性（但是其曲线下面积是有限的）的函数也可以表示为正弦和/或余弦与数相乘的加权和函数形式（傅里叶变换）。
- 频域是指将一个信号经过傅立叶变换后所得到的信号表示形式。
- 傅里叶变换的目的是将信号表示为各种频率正余弦信号的线性组合。

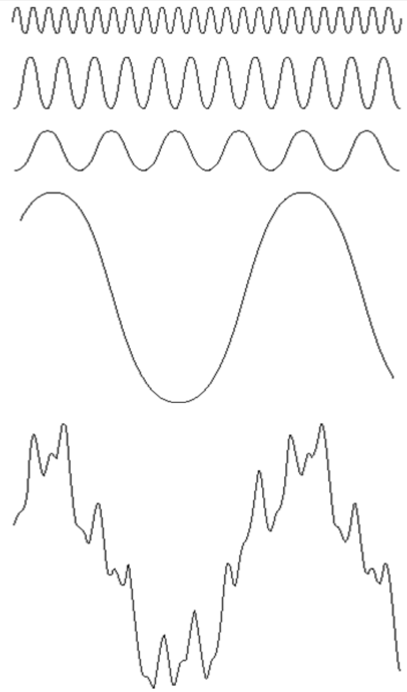


FIGURE 4.1 The function at the bottom is the sum of the four functions above it. Fourier's idea in 1807 that periodic functions could be represented as a weighted sum of sines and cosines was met with skepticism.

连续傅里叶变换

- 一维傅立叶变换及其逆变换

傅里叶变换

$$F(u)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-j2\pi ux}dx, where\ j=\sqrt{-1}$$

傅里叶逆变换

$$f(x)=\int_{-\infty}^{\infty} F(u)e^{j2\pi ux}du \qquad e^{j\theta}=\cos\theta+j\sin\theta$$

- 二维傅里叶变换及其逆变换

傅里叶变换

$$F(u,v)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)e^{-j2\pi(ux+vy)}dxdy$$

傅里叶逆变换

$$f(x,y)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} F(u,v)e^{j2\pi(ux+vy)}dudv$$

连续傅里叶变换举例

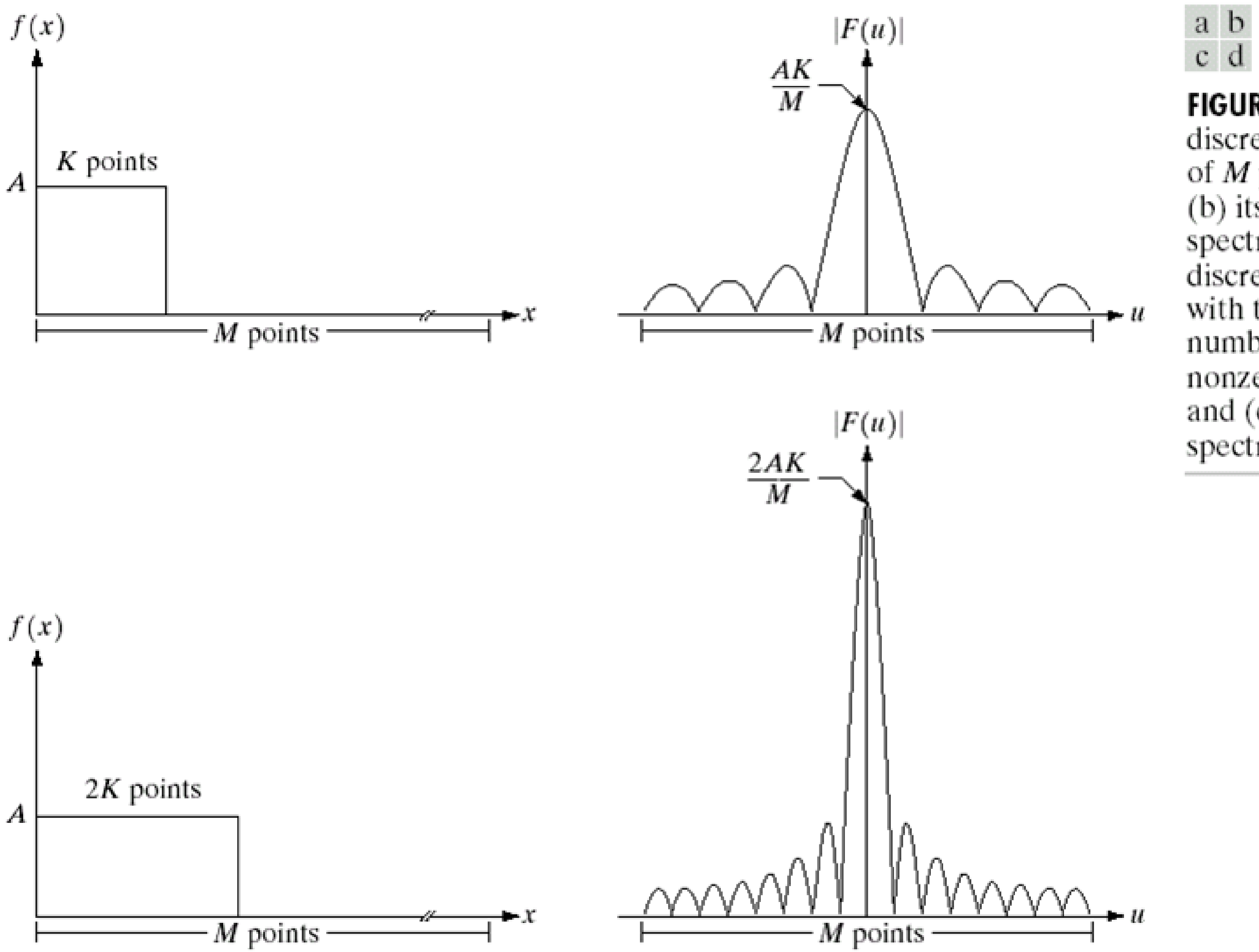


FIGURE 4.2 (a) A discrete function of M points, and (b) its Fourier spectrum. (c) A discrete function with twice the number of nonzero points, and (d) its Fourier spectrum.

一维离散傅里叶变换

- 一维离散傅立叶变换（DFT）及其逆变换

傅里叶变换

$$F(u)=\frac{1}{M}\sum_{x=0}^{M-1}f(x)e^{-\frac{j2\pi ux}{M}} \quad for\ u=0,1,2,...,M-1$$

逆傅立叶变换：

$$f(x)=\sum_{u=0}^{M-1}F(u)e^{\frac{j2\pi ux}{M}} \quad for\ x=0,1,2,...,M-1$$

由于 $e^{j\theta}=\cos\theta+j\sin\theta$，那么离散傅立叶变换可重新定义为

$$F(u)=\frac{1}{M}\sum_{x=0}^{M-1}f(x)[\cos\frac{2\pi ux}{M}-j\sin\frac{2\pi ux}{M}]$$
$$for\ u=0,1,2,...,M-1$$

频域：函数$F(u)$的自变量u所在的定义域的范围，u描述变换中对应的频率分量的频率。

频率分量：$F(u)$的M项中的每一项。

一维离散傅里叶变换

$F(u)$ 可以用极坐标来表示：

$$F(u) = |F(u)|e^{j\phi(u)}$$

其中 $|F(u)| = [R^2(u) + I^2(u)]^{\frac{1}{2}}$ （幅度或幅度频谱）

1

$$\phi(u) = \tan^{-1}[\frac{I(u)}{R(u)}]$$ （相位角或相位谱）

$I(u)$ ：$F(u)$ 的虚部

$R(u)$ ：$F(u)$ 的实部

功率谱：

$$P(u) = |F(u)|^2 = R^2(u) + I^2(u)$$

二维离散傅里叶变换

二维离散傅里叶变换 （2D DFT）及其逆变换

傅立叶变换:

$$F(u,v)=\frac{1}{MN}\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1}f(x,y)e^{-j2\pi(\frac{ux}{M}+\frac{vy}{N})}$$

$$for\ u=0,1,2,...,M-1,\ v=0,1,2,...,N-1$$

傅立叶反变换:

$$f(x,y)=\sum_{u=0}^{M-1}\sum_{v=0}^{N-1}F(u,v)e^{j2\pi(\frac{ux}{M}+\frac{vy}{N})}$$

$$for\ x=0,1,2,...,M-1,\ y=0,1,2,...,N-1$$

u，v：频率变量

x，y：空间变量

二维离散傅里叶变换

我们定义傅立叶频谱，相位角和功率谱如下：

$$|F(u,v)|^2 = [R^2(u,v) + I^2(u,v)]^{\frac{1}{2}}$$ (频谱)

$$\phi(u,v) = \tan^{-1}[\frac{I(u,v)}{R(u,v)}]$$ (相位角)

$$P(u,v) = |F(u,v)|^2 = R^2(u,v) + I^2(u,v)$$ (功率谱)

其中

$I(u,v)$： $F(u,v)$ 的虚部。

$R(u,v)$： $F(u,v)$ 的实部。

二维离散傅里叶变换的性质

- 空域平移性质

$$\Im[f(x-x_0,y-y_0)] = F(u,v)e^{-j2\pi(\frac{ux_0}{M}+\frac{vy_0}{N})}$$

- 频域平移性质

$$\Im[f(x,y)e^{j2\pi(\frac{u_0x}{M}+\frac{v_0y}{N})}] = F(u-u_0,v-v_0)$$

$$\Im[f(x,y)(-1)^{x+y}] = F(u-\frac{M}{2},v-\frac{N}{2})$$

- 平均和对称性质

$$F(0,0) = \frac{1}{MN}\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1} f(x,y) \qquad \text{(平均)}$$

$$F(u,v) = F^*(-u,-v) \qquad \text{(共轭对称)}$$

$$|F(u,v)| = |F(-u,-v)| \qquad \text{(对称)}$$

二维离散傅里叶变换的性质

- 可分离性质

$$
\begin{aligned}
F(u,v) &= \Im[f(x,y)] \\
&= \Sigma_y[\Sigma_x f(x,y) exp(-j2\pi \frac{xu}{M})] exp(-j2\pi \frac{yv}{N}) \\
&= \Sigma_y F(u,y) exp(-j2\pi \frac{yv}{N})
\end{aligned}
$$

$F(u,v)$ 的二维离散傅立叶变换可通过以下计算方式获得

- ✓ 对图像 $f(x,y)$ 每一行计算其一维傅立叶变换得到 $F(u,y)$
- ✓ 对图像 $F(u,y)$ 再进行一维离散傅立叶变换。

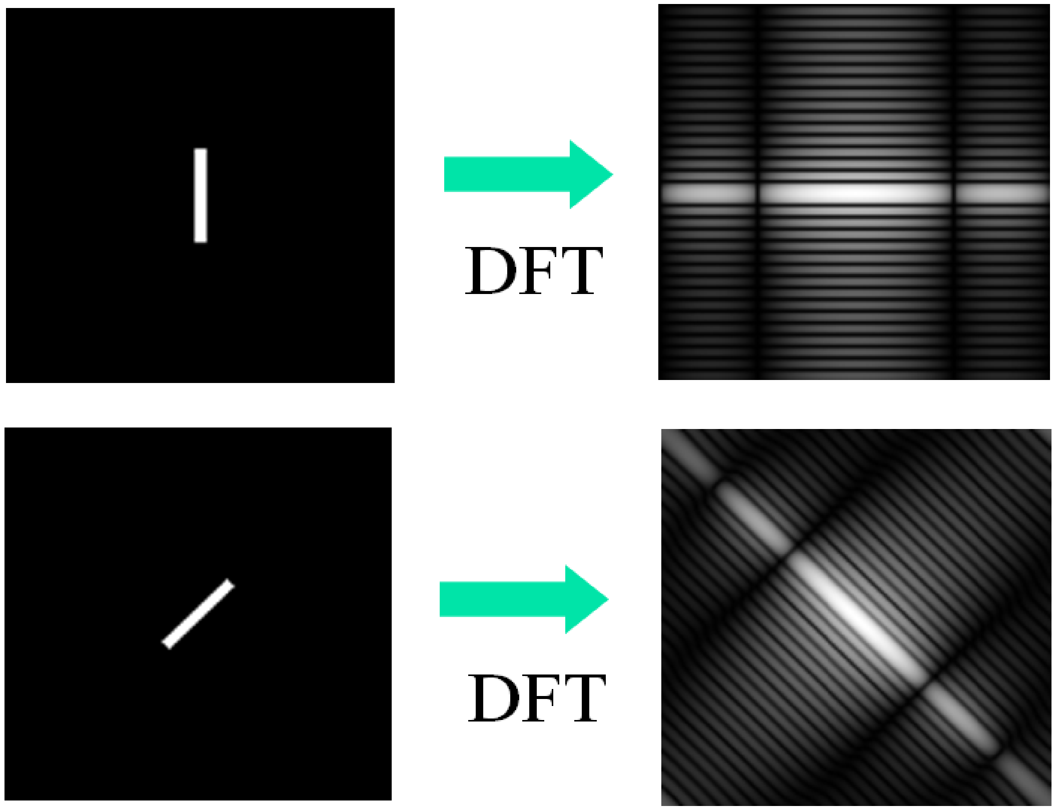
(a)f(x,y) (b) F(u,y) (c)F(u,v)

二维离散傅里叶变换的性质

➢ 旋转性质

令 $$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta, u = \omega\cos\varphi, v = \omega\sin\varphi$$

$$f(r, \theta + \theta_0) \Leftrightarrow F(\omega, \varphi + \theta_0)$$



二维离散傅里叶变换的性质

- 周期性

$$f(x,y)=f(x+M,y)=f(x,y+N)=f(x+M,y+N)$$
$$F(u,v)=F(u+M,v)=F(u,v+N)=F(u+M,v+N)$$

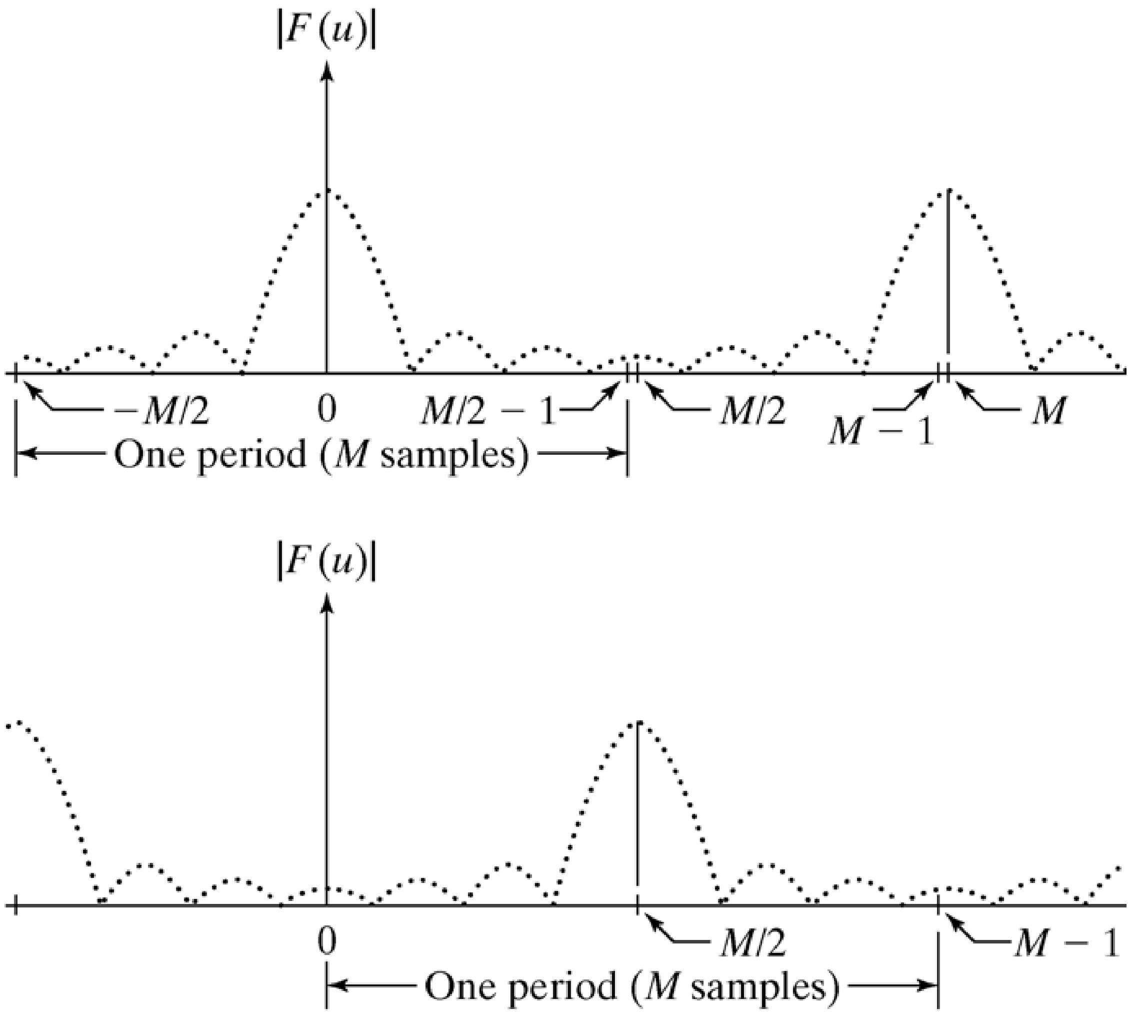
- 线性

$$\Im(af(x,y)+bg(x,y))=a\Im(f(x,y))+b\Im(g(x,y))$$

- 微分性质

$$\Im(\tfrac{\partial^n f(x,y)}{\partial x^n})=(j2\pi u)^n\Im(f(x,y))=(j2\pi u)^n F(u,v)$$
$$\Im((-j2\pi u)^n f(x,y))=\tfrac{\partial^n F(u,v)}{\partial u^n}$$
$$\Im(\nabla^2 f(x,y))=-4\pi^2(u^2+v^2)F(u,v)$$

二维离散傅里叶变换性质图示



a
b

FIGURE 4.1 (a) Fourier spectrum showing back-to-back half periods in the interval $[0, M - 1]$. (b) Centered spectrum in the same interval, obtained by multiplying $f(x)$ by $(-1)^x$ prior to computing the Fourier transform.

二维离散傅里叶变换性质图示

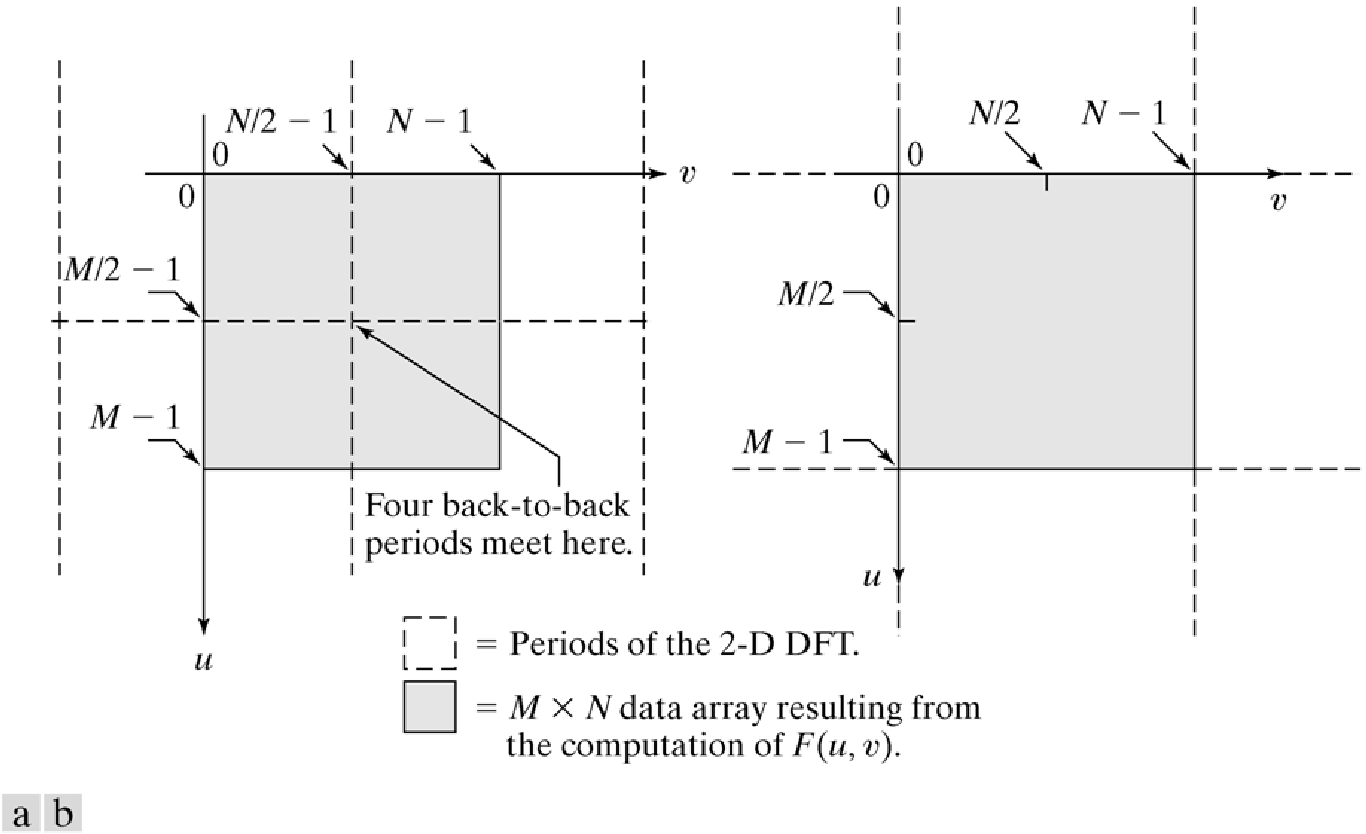


FIGURE 4.2 (a) $M \times N$ Fourier spectrum (shaded), showing four back-to-back quarter periods contained in the spectrum data. (b) Spectrum obtained by multiplying $f(x, y)$ by $(-1)^{x+y}$ prior to computing the Fourier transform. Only one period is shown shaded because this is the data that would be obtained by an implementation of the equation for $F(u, v)$.

二维离散傅里叶变换的性质

- 卷积定理

$$\Im(f(x,y) * g(x,y)) = F(u,v)G(u,v)$$

$$\Im(f(x,y)g(x,y)) = F(u,v) * G(u,v)$$

- 相关定理

$$\Im(f(x,y) \circ g(x,y)) = F^*(u,v)G(u,v)$$

$$\Im(f(x,y) \circ f(x,y)) = |F(u,v)|^2$$

$$\Im(f^*(x,y)g(x,y)) = F(u,v) \circ G(u,v)$$

$$\Im(|f(x,y)|^2) = F(u,v) \circ F(u,v)$$

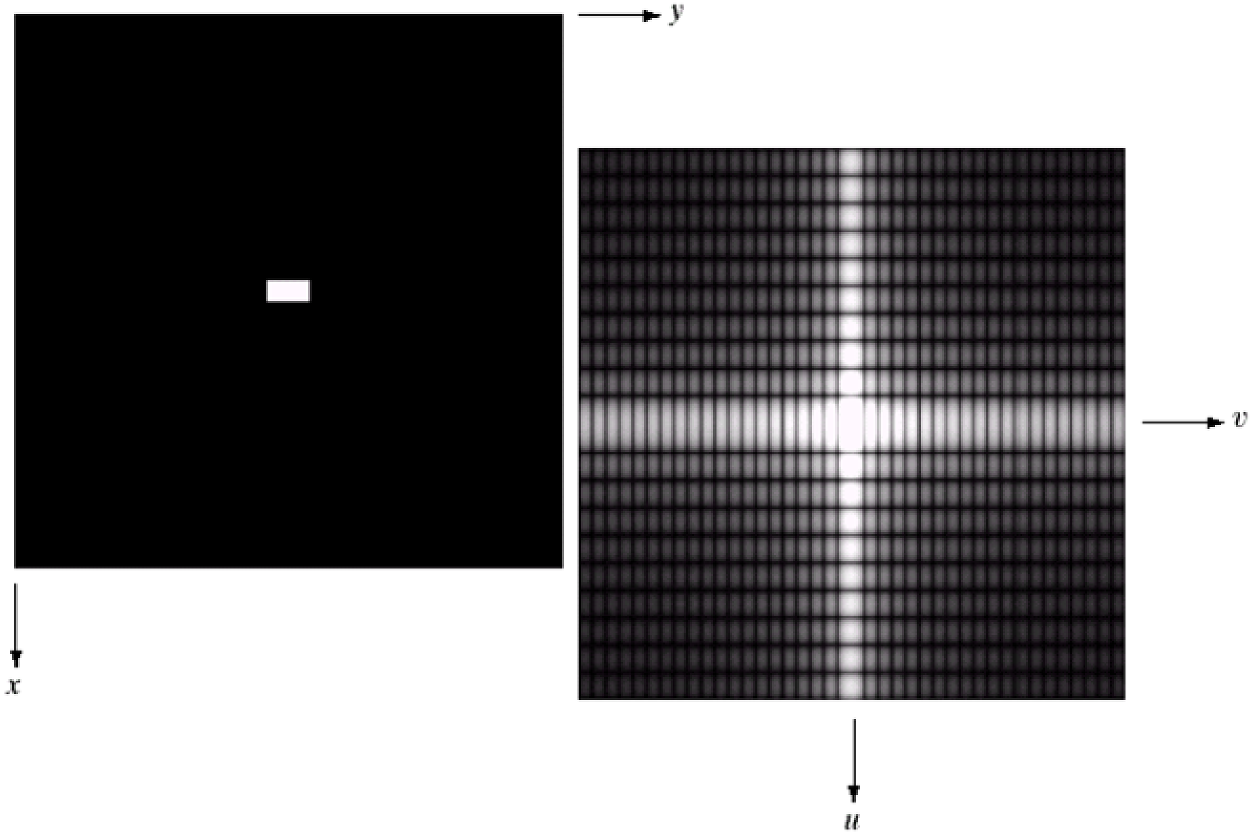
- 伸缩性质

$$\Im(f(ax,by)) = \frac{1}{|ab|}F(\frac{u}{a},\frac{v}{b})$$

一些有用的傅立叶变换对

- $\delta(x,y) \Leftrightarrow 1$
- $A2\pi\sigma^2 exp(-2\pi^2\sigma^2(x^2+y^2)) \Leftrightarrow Aexp(-\frac{(u^2+v^2)}{2\sigma^2})$
- $\cos(2\pi u_0 x + 2\pi v_0 y) \Leftrightarrow \frac{1}{2}[\delta(u+u_0, v+v_0) + \delta(u-u_0, v-v_0)]$
- $\sin(2\pi u_0 x + 2\pi v_0 y) \Leftrightarrow \frac{1}{2}j[\delta(u+u_0, v+v_0) - \delta(u-u_0, v-v_0)]$

二维离散傅里叶变换



a b

FIGURE 4.3 (a) Image of a 20×40 white rectangle on a black background of size 512×512 pixels. (b) Centered Fourier spectrum shown after application of the log transformation given in Eq. (3.2-2). Compare with Fig. 4.2.

Matlab中的二维离散傅里叶变换

- ✓ 在工程实践中使用快速傅里叶变换（FFT）算法来计算离散傅立叶变换及其反变换。可以利用matlab中的函数fft2计算获得 $M \times N$ 图像阵列 f 的FFT，其具有简单的语法如下：

F=fft2(f)

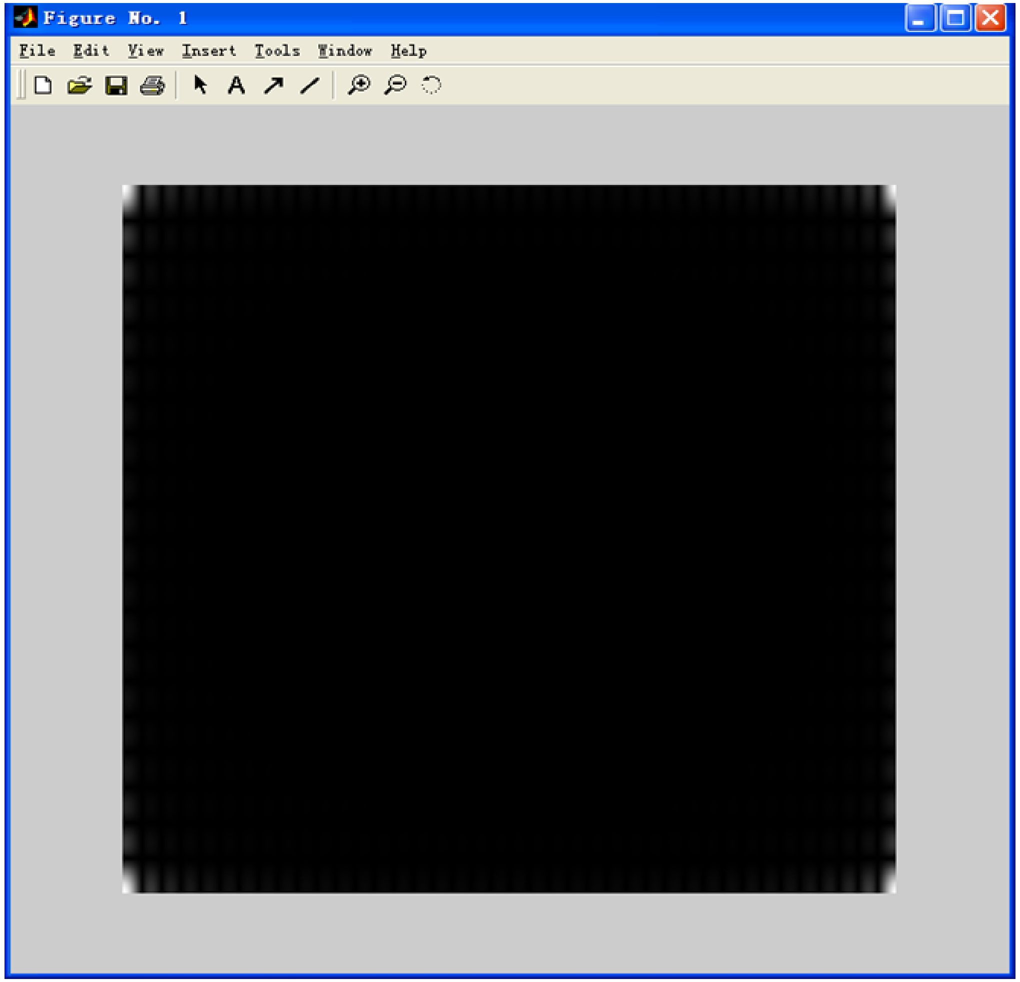
此函数返回的傅里叶变换也具有大小$M \times N$，数据的原点位于左上角，四个四分之一周期在频率矩形的中心相交。

- ✓ 可通过使用函数abs获得傅里叶幅度谱：

S=abs(F)

Matlab中的二维离散傅里叶变换

```
f=imread('Fig0403(a)(image).tif');
F=fft2(f);
S=abs(F);
imshow(S,[])
```

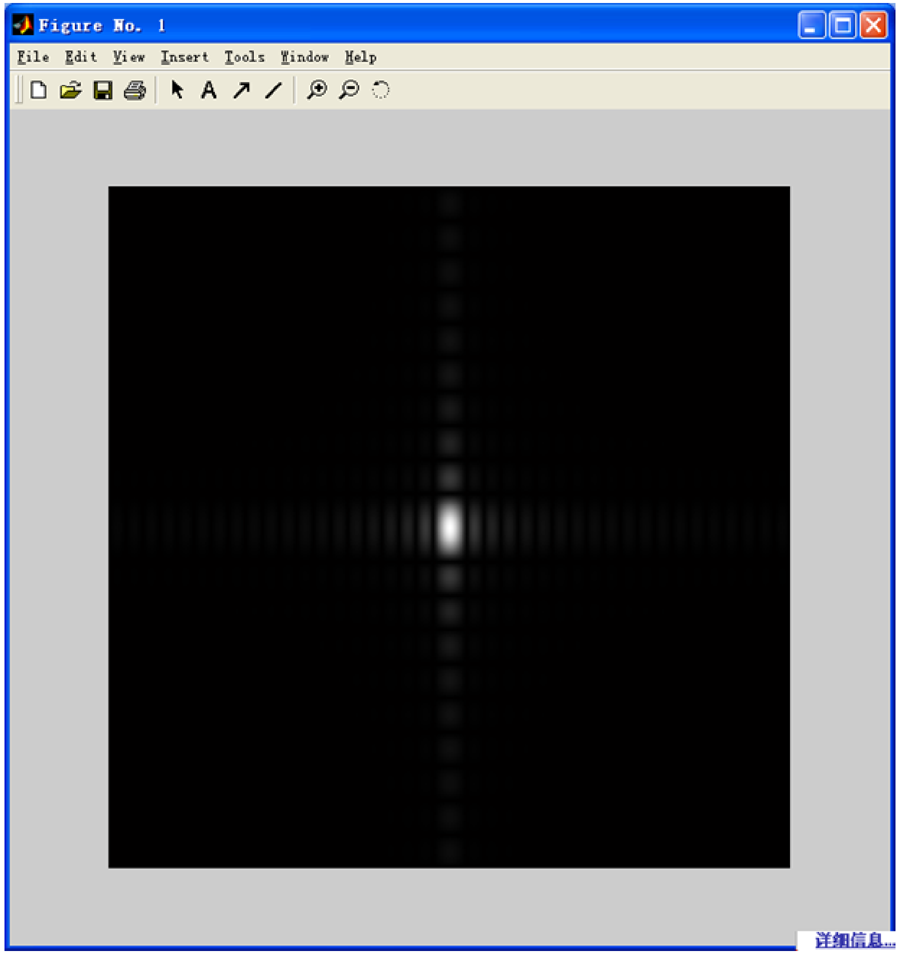


Matlab中的二维离散傅里叶变换

```
Fc=fftshift(F);
imshow(abs(Fc),[])
```

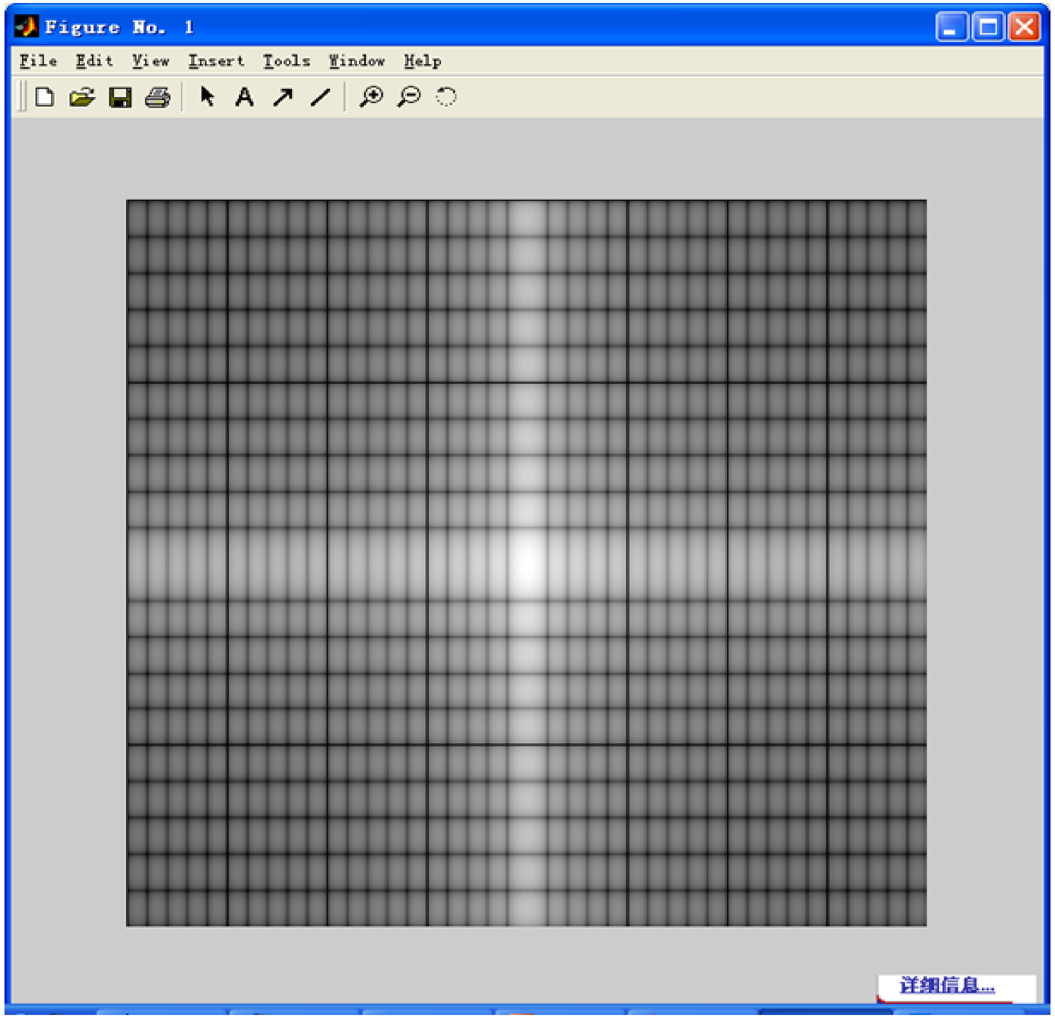
使用fftshift的最终结果与在计算变换之前输入图像乘以 $(-1)^{x+y}$ 相同。

但请注意，这两个过程不可互换。



Matlab中的二维离散傅里叶变换

```
S2=log(1+abs(Fc));
imshow(S2,[])
```



Matlab中的二维离散傅里叶变换

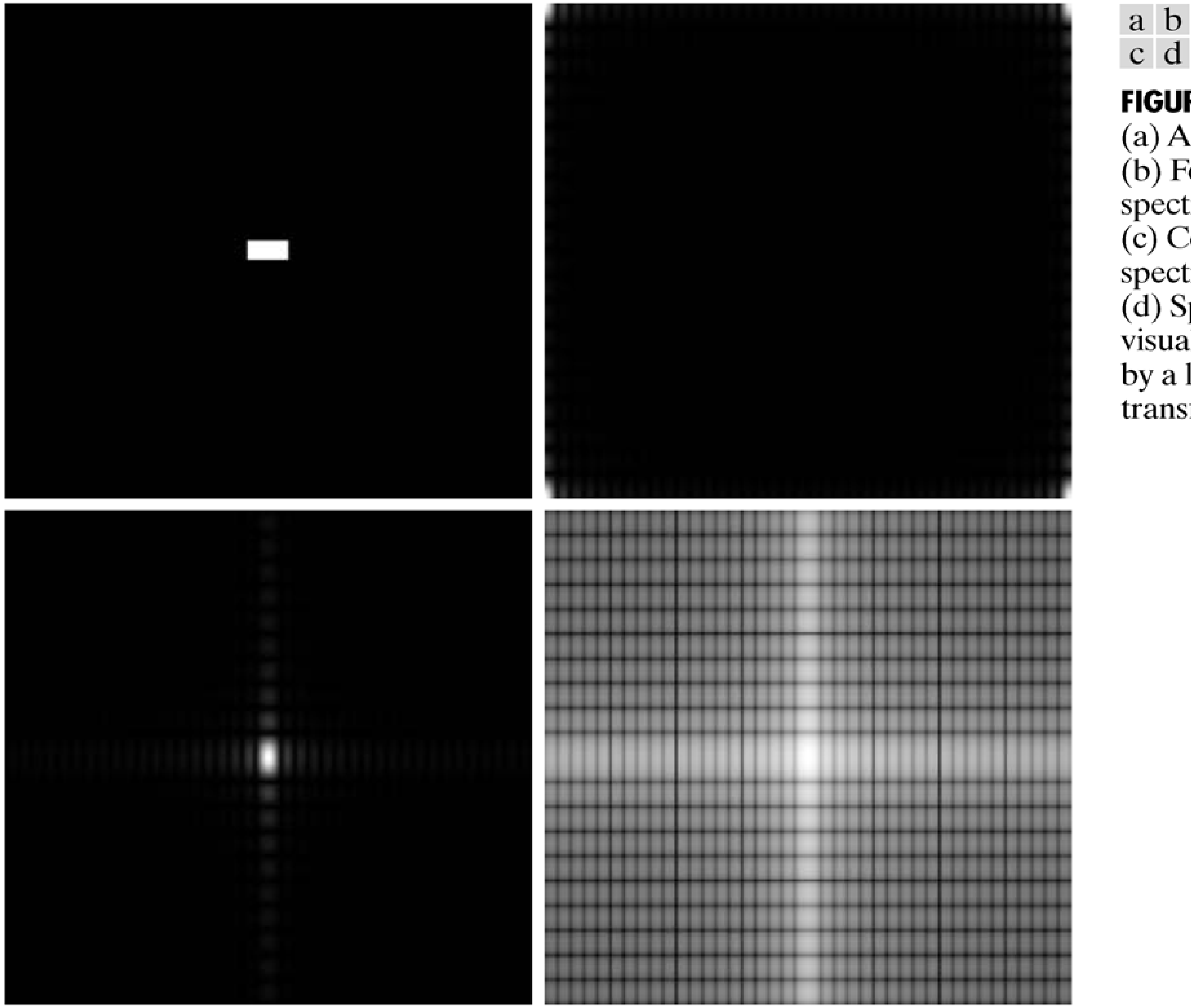


FIGURE 4.3
(a) A simple image.
(b) Fourier spectrum.
(c) Centered spectrum.
(d) Spectrum visually enhanced by a log transformation.

Matlab中的二维离散傅里叶变换

- 我们可以利用图像工具箱中的函数ifft2来计算一幅图像的傅里叶反变换，它的基本的语法

f=ifft2(F)

- 在实践中ifft2的输出通常具有由舍入误差引起的非常小的虚部。因此，提取结果的实部是一种好方法。

f=real(ifft2(F))

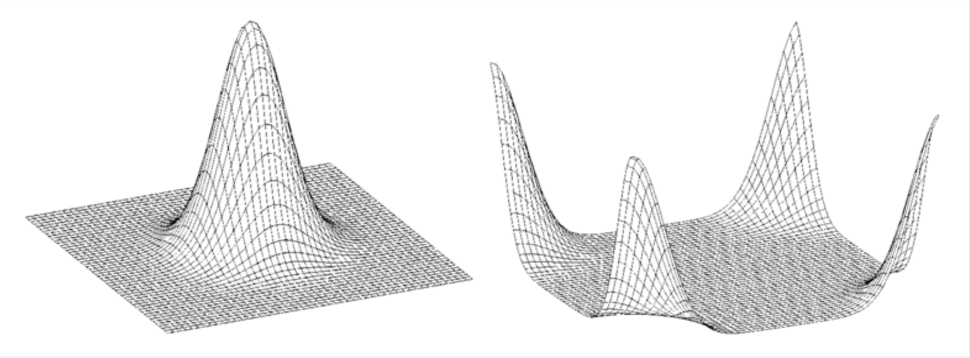
频域滤波

- 空间域和频域中线性滤波的基础是卷积定理，它可以写成

$$f(x,y) * h(x,y) \Longleftrightarrow F(u,v)H(u,v)$$

- 频域滤波的基本想法就是选择一个特定的滤波器传递函数来修改输入图像的傅立叶变换 $F(u,v)$ 。

- 例如，图4. 4中的低通滤波器



a b

FIGURE 4.4 Transfer functions of (a) a centered lowpass filter, and (b) the format used for DFT filtering. Note that these are frequency domain filters.

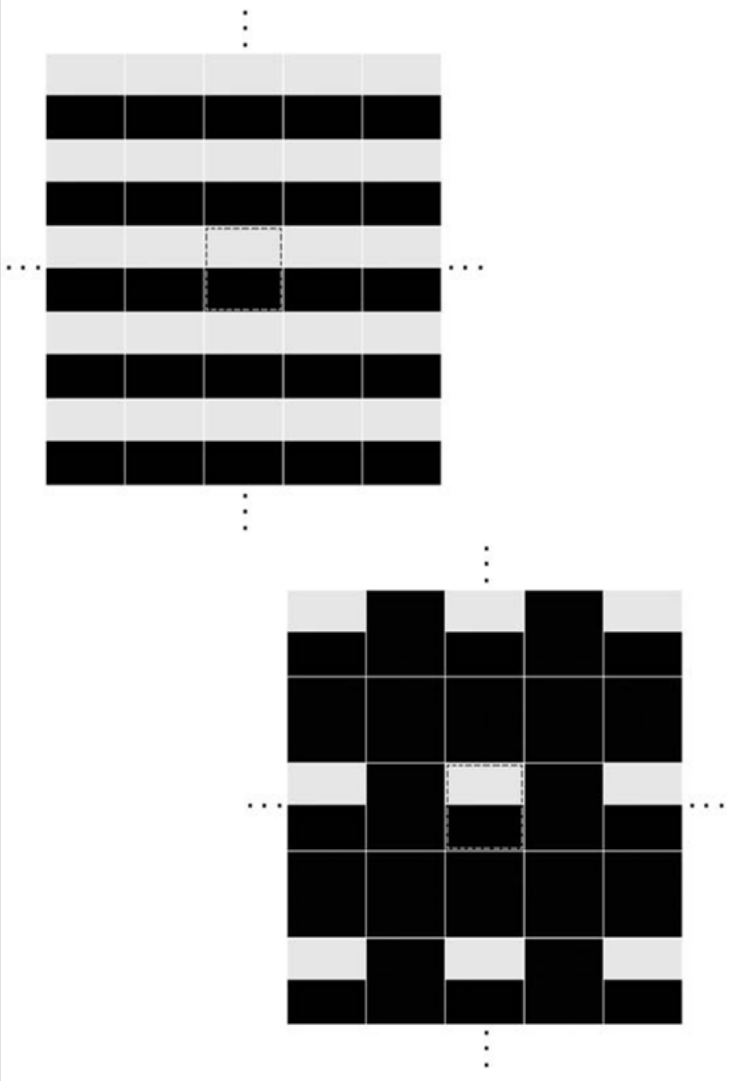
频域滤波

- 基于卷积定理，我们知道为了在空间域中获得相应的滤波图像，我们只需简单地计算乘积输入图像与滤波器乘积 $H(u,v)F(u,v)$ 的逆傅里叶变换。
- 如果周期相对于函数的非零部分的长度非常接近，则周期函数的卷积可能带来相邻周期内的非零部分信号的干扰。这种干扰称为混叠误差，它可以用零填充这种技术手段来消除。
- 例如，我们采用图4. 4中的低通滤波器对图4. 5 (a) 中的图像进行频域内的滤波

a b c

FIGURE 4.5 (a) A simple image of size 256 × 256. (b) Image lowpass-filtered in the frequency domain without padding. (c) Image lowpass-filtered in the frequency domain with padding. Compare the light portion of the vertical edges in (b) and (c).

频域滤波



a
b

FIGURE 4.6 (a) Implied, infinite periodic sequence of the image in Fig. 4.5(a). The dashed region represents the data processed by `fft2`. (b) The same periodic sequence after padding with 0s. The thin white lines in both images are shown for convenience in viewing; they are not part of the data.

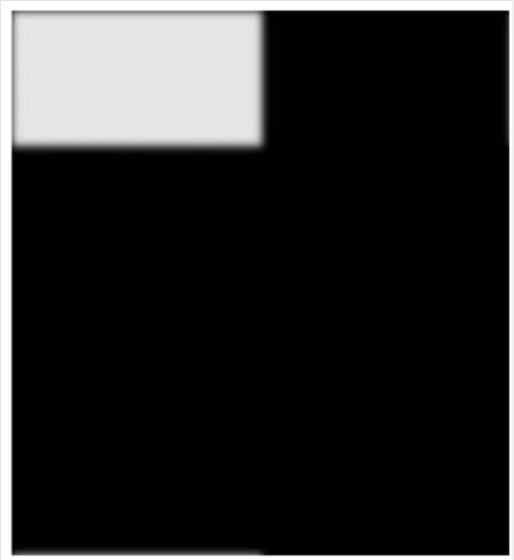
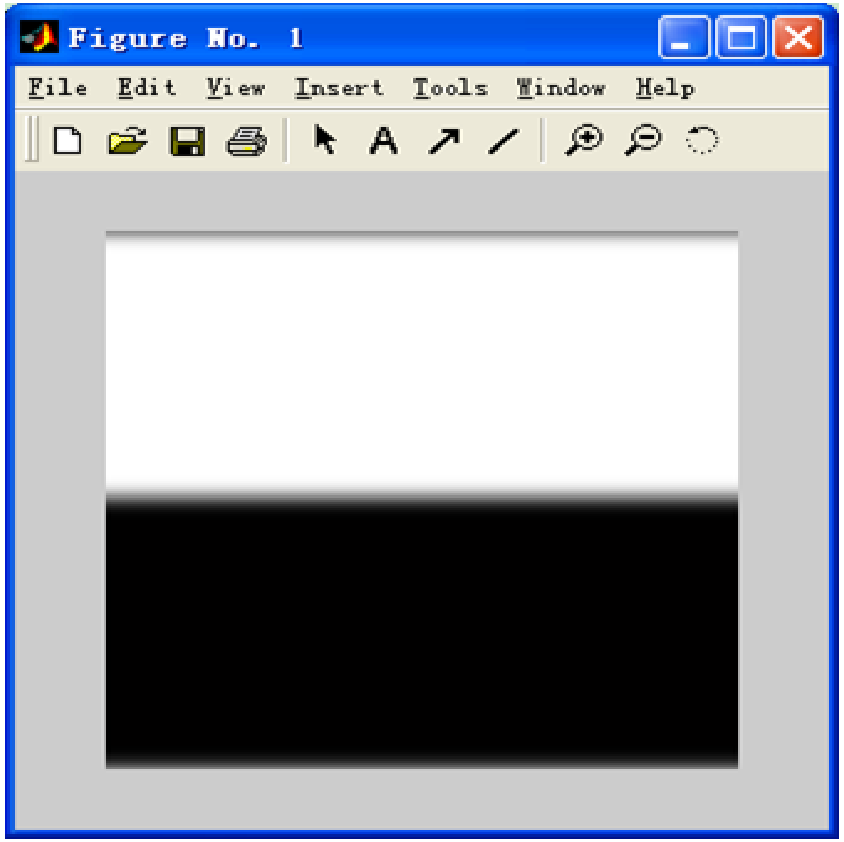


FIGURE 4.7 Full padded image resulting from `ifft2` after filtering. This image is of size 512×512 pixels.

频域滤波

- 在频域中没有填充进行低通滤波获得的图像

```
f=imread('Fig0405(a)(square_original).tif');
[m n]=size(f)
F=fft2(f);
H=lpfilter('gaussian',m,n,10);
G=H.*F;
g=real(ifft2(G))
imshow(g,[])
```



离散傅立叶变换频域滤波的基本步骤

- 使用paddeds i ze函数获取填充参数: PQ=paddedsize(size(f));
- 使用填充获取傅里叶变换:
  F=fft2(f,PQ(1),PQ(2));
- 使用本章其余部分讨论的任何方法生成大小为PQ（1）×PQ（2）的滤波函数H.
- 过滤器必须采用图4.4（b）所示的格式。如果它居中，如图4.4（a）所示，在使用滤波器之前让 H = fftshift(H)。
- 乘以滤波器的变换：G = H.* F;
- 获得G的傅立叶反变换的实部 g = real(ifft2(G))
- 将滤波处理后图像按输入图像的尺寸剪裁出左上角矩形作为输出图像： g = g(1:size(f,1),1:size(f,2));

离散傅立叶变换频域滤波的基本步骤图示

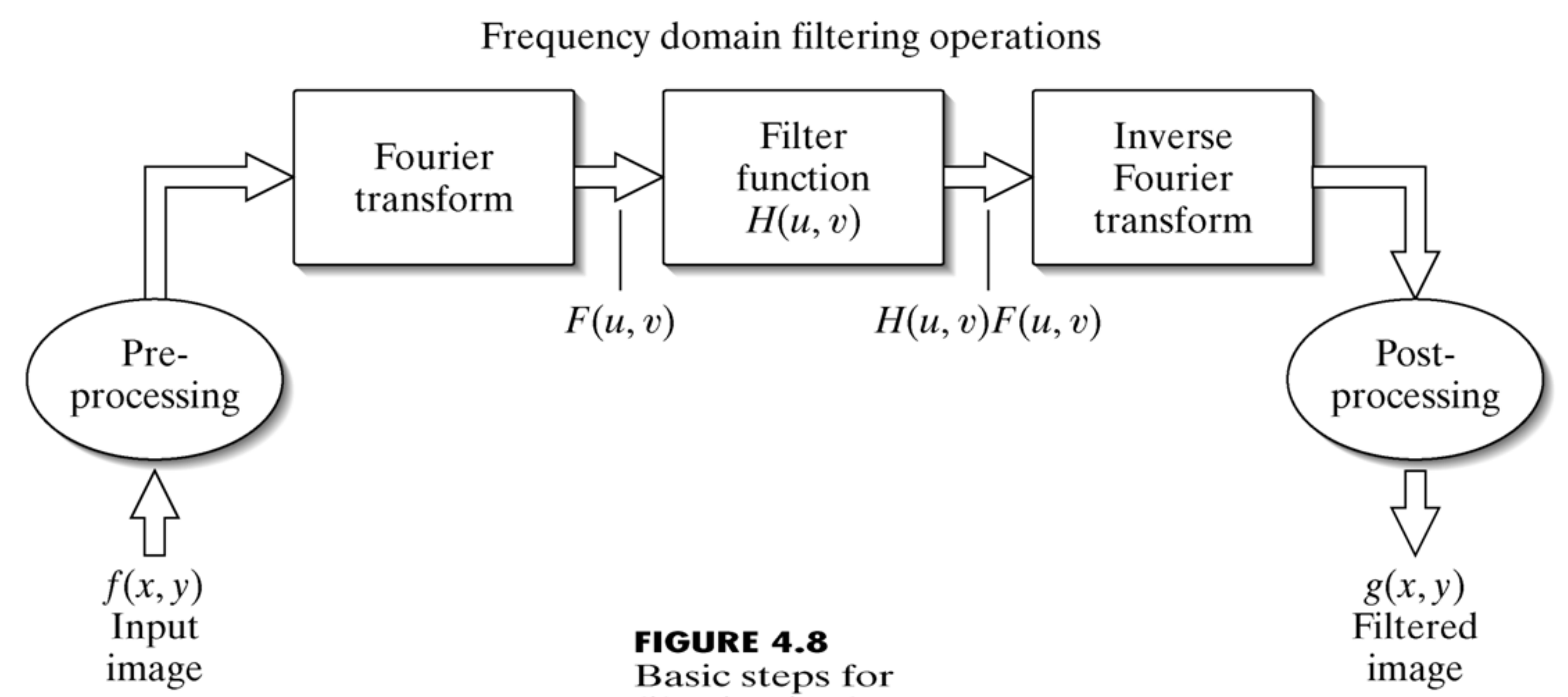


FIGURE 4.8 Basic steps for filtering in the frequency domain.

作业（1）

1. 请根据傅立叶变换的定义，证明傅立叶变换的空域平移性质、频域平移性质、对称性质、线性性质。

2. 请估算对于一幅的图像若根据如下的算式

$$F(u,v)=\frac{1}{MN}\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1}f(x,y)e^{-j2\pi\left(\frac{ux}{M}+\frac{vy}{N}\right)}$$

$$for\ u=0,1,2,...,M-1,\ v=0,1,2,...,N-1$$

计算其傅立叶变换所涉及的乘法次数，但若根据傅立叶变换的可分离性质去计算重新估算所涉及的乘法次数，从而体会这种可分离的变换核给变换计算带来的效率。

作业（1）

3. 观察如下所示图像。右边的图像这样得到：(a)在原始图像左边乘以$(-1)^{x+y}$；(b) 计算离散傅里叶变换(DFT)；(c) 对变换取复共轭；(d) 计算傅里叶反变换；(d) 结果的实部再乘以$(-1)^{x+y}$ 。(用数学方法解释为什么会产生右图的效果。)