1.

a) 空域平移性质

$$F(u,v)=\frac{1}{MN}\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1} f(x,y)\, e^{-j2\pi\left(\frac{ux}{M}+\frac{vy}{N}\right)}$$

$$F(u,v)\, e^{-j2\pi\left(\frac{ux_0}{M}+\frac{vy_0}{N}\right)}$$

$$=\frac{1}{MN}\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1} f(x,y)\, e^{-j2\pi\left(\frac{ux}{M}+\frac{vy}{N}\right)}\cdot e^{-j2\pi\left(\frac{ux_0}{M}+\frac{vy_0}{N}\right)}$$

$$=\frac{1}{MN}\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1} f(x,y)\, e^{-j2\pi\left(\frac{ux}{M}+\frac{ux_0}{M}+\frac{vy_0}{N}+\frac{vy}{N}\right)}$$

$$=\frac{1}{MN}\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1} f(x,y)\, e^{-j2\pi\left(\frac{u}{M}(x+x_0)+\frac{v}{N}(y+y_0)\right)}$$

令 $x+x_0=x'$

则 原式 $=\frac{1}{MN}\sum_{x'=x_0}^{-x_0+M-1}\sum_{y'=y_0}^{N-1-y_0} f(x'-x_0,y'-y_0)\, e^{-j2\pi\left(\frac{u}{M}x'+\frac{v}{N}y'\right)}$

$=F\{f(x'-x_0,\ y'-y_0)\}$ 将 x' 变为 x

故此性质成立

2) 频域平移性质

$$F\{f(x,y)\, e^{j2\pi\left(\frac{u_0x}{M}+\frac{v_0y}{N}\right)}\}$$

$$=\frac{1}{MN}\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1} f(x,y)\, e^{-j2\pi\left(\frac{u}{M}x+\frac{v}{N}y\right)}\, e^{j2\pi\left(\frac{u_0x}{M}+\frac{v_0y}{N}\right)}$$

$$=\frac{1}{MN}\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1} f(x,y)\, e^{-j2\pi\left(\frac{u-u_0}{M}x+\frac{v-v_0}{N}y\right)}$$

令 $u-u_0=u'$ $v-v_0=v'$

$=F(u',v')=F(u-u_0,\ v-v_0)$ 故频域平移性质成立

3) 对称性质

- $F(u,v) = \frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x,y)\, e^{-j2\pi\left(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N}\right)}$

令 $u=v=0$ → 求和求平均.在数据中为

则 $F(0,0) = \frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x,y)$ 平均成立 ✓ $F(0,0)$ 原点处的 F

- 若 $F(u,v) - F^*(-u,-v) = 0$

则 $\frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x,y)\, e^{-j2\pi\left(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N}\right)}$

$- \frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f^*(x,y)\, e^{j2\pi\left(-\frac{ux}{M} - \frac{vy}{N}\right)}$

$= \frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} \overline{f(x,y)} \left(e^{-j2\pi\left(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N}\right)} - e^{j2\pi\left(-\frac{ux}{M} - \frac{vy}{N}\right)}\right)$

$=0$. 共轭对称也成立 ✓ → 中心对称

- 由共轭性质可知. 其模一定相等.即 if $x^* = x'$ $|x| = |x'|$

对称性质实际是利用了上述性质, 则成立 ✓

$|F(u,v)| = |F(-u,-v)|$

4) 线性性质

$F\{a f(x,y) + b g(x,y)\} =$

$= \frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} \left(a f(x,y) + b g(x,y)\right) e^{-j2\pi\left(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N}\right)}$

$= \frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} a f(x,y)\, e^{-j2\pi\left(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N}\right)}$

$$+\frac{1}{MN}\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1} b\,g(x,y)\,e^{-j2\pi\left(\frac{ux}{M}+\frac{vy}{N}\right)}$$

$$=a\frac{1}{MN}\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1} f(x,y)\,e^{-j2\pi\left(\frac{ux}{M}+\frac{vy}{N}\right)}$$

$$+b\frac{1}{MN}\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1} g(x,y)\,e^{-j2\pi\left(\frac{ux}{M}+\frac{vy}{N}\right)}$$

$$=a\mathcal{F}\{f(x,y)\}+b\mathcal{F}\{g(x,y)\}$$

2. Fourier Transf. 的乘法次数：

$$F(u,v)=\frac{1}{MN}\underbrace{f(0,0)\,e^{-j2\pi(0+0)}}_{一次}+\frac{1}{MN}f(0,1)\,e^{-j2\pi\left(\frac{u}{M}0+\frac{v}{N}1\right)}$$

$$+\cdots+\frac{1}{MN}f(M-1,N-1)\,e^{-j2\pi\left(\frac{u(M-1)}{M}+\frac{v(N-1)}{N}\right)}$$

一共 $M\cdot N$ 次乘法

分离性质

$$F(u,v)=\mathcal{F}\{f(x,y)\}$$

$$=\underbrace{\sum_y\Big[\underbrace{\sum_x f(x,y)\exp\left(-j2\pi\frac{xu}{M}\right)}_{M次乘法}\Big]e^{-j2\pi\frac{vy}{N}}}_{N次乘法}$$

$\Rightarrow$ $M+N$ 次

3. a,b) 左乘 $(-1)^{x+y}$，再进行DFT.

利用了频域平移性质，将原点移到频谱图像中心点

c) 取共轭.

即 $F^*(u,v) = F(-u,-v)$

原图像上下左右翻转

d) 反变换变到空域 spatial domain

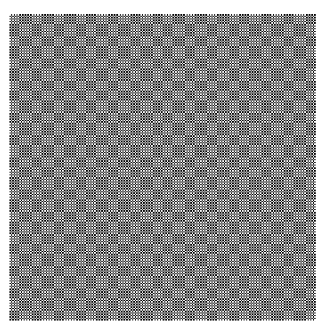
e) 结果乘 $(-1)^{x+y}$ 即移原点到中心点

空域左乘 $(-1)^{(x+y)}$ 并未对图像的可视化造成太大影响，只是在频谱中使 $F(0,0)$ 在图像中心，所以在(d)步结果就已经得到了翻转的图像

用 Matlab 做了组实验

原图像

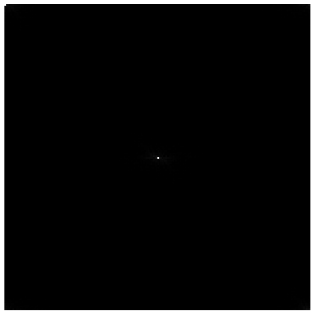
a)

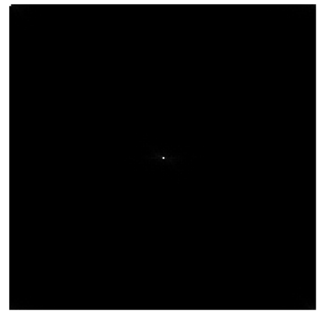


b)

c)

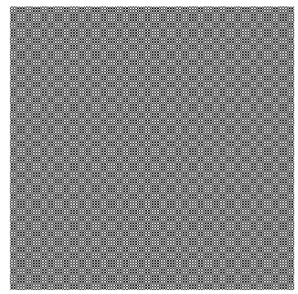
b)





d)

e)



感觉和分析有些出入 -_-|||