深蓝学院
shenlanxueyuan.com

数字图像处理-第四章作业分享

主讲人 金鑫

纲要

深蓝学院
shenlanxueyuan.com

- 第一题：傅立叶变换的定义和性质
- 第二题：计算傅立叶变换的乘法次数
- 第三题：利用傅立叶变换的性质处理图像

第一题：傅立叶变换定义和性质

1. 请根据傅立叶变换的定义，证明傅立叶变换的空域平移性质、频域平移性质、对称性质、线性性质。

第一题：傅立叶变换的定义

深蓝学院 shenlanxueyuan.com

二维离散傅里叶变换 （2D DFT）及其逆变换

傅立叶变换：

$$F(u,v)=\frac{1}{MN}\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1}f(x,y)e^{-j2\pi\left(\frac{ux}{M}+\frac{vy}{N}\right)}$$

$$for\ u=0,1,2,...,M-1,\ v=0,1,2,...,N-1$$

傅立叶反变换：

$$f(x,y)=\sum_{u=0}^{M-1}\sum_{v=0}^{N-1}F(u,v)e^{j2\pi\left(\frac{ux}{M}+\frac{vy}{N}\right)}$$

$$for\ x=0,1,2,...,M-1,\ y=0,1,2,...,N-1$$

u，v：频率变量

x，y：空间变量

第一题：空域平移性质

➢ 空域平移性质

$$\Im[f(x-x_0,y-y_0)]=F(u,v)e^{-j2\pi(\frac{ux_0}{M}+\frac{vy_0}{N})}$$

1.空域平移，频域旋转

2. 平移性还体现了：当空域中f(x,y)产生移动时，在频域中只发生相移，并不影响他的傅里叶变换的幅度，因为 $e^{-j2\pi(\frac{ux_0}{M}+\frac{vy_0}{N})}$ 的模是1.

第一题：空域平移性质

思路：从右向左推导。

1.

a) 空域平移性质

$$F(u,v)=\frac{1}{MN}\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1} f(x,y)\, e^{-j2\pi\left(\frac{ux}{M}+\frac{vy}{N}\right)}$$

$$F(u,v)\, e^{-j2\pi\left(\frac{ux_0}{M}+\frac{vy_0}{N}\right)}$$

$$=\frac{1}{MN}\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1} f(x,y)\, e^{-j2\pi\left(\frac{ux}{M}+\frac{vy}{N}\right)}\cdot e^{-j2\pi\left(\frac{ux_0}{M}+\frac{vy_0}{N}\right)}$$

$$=\frac{1}{MN}\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1} f(x,y)\, e^{-j2\pi\left(\frac{ux}{M}+\frac{ux_0}{M}+\frac{vy_0}{N}+\frac{vy}{N}\right)}$$

$$=\frac{1}{MN}\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1} f(x,y)\, e^{-j2\pi\left(\frac{u}{M}(x+x_0)+\frac{v}{N}(y+y_0)\right)}$$

令 $x+x_0=x'$

则 原式 $=\frac{1}{MN}\sum_{x'=x_0}^{-x_0+M-1}\sum_{y'=y_0}^{N-1-y_0} f(x'-x_0,y'-y_0)\, e^{-j2\pi\left(\frac{u}{M}x'+\frac{v}{N}y'\right)}$

$=F\{f(x'-x_0,\ y'-y_0)\}$ 将 x' 变为 x

故此性质成立.

第一题：频域平移性质

➢ 频域平移性质

$$\Im[f(x,y)e^{j2\pi(\frac{u_0x}{M}+\frac{v_0y}{N})}] = F(u-u_0, v-v_0)$$

$$\Im[f(x,y)(-1)^{x+y}] = F(u-\frac{M}{2}, v-\frac{N}{2})$$

1.需要将F(u,v)的原点移到N*N频域的中心，以便能清楚地分析傅里叶谱的情况，平移前空域、频域原点均在左上方。

第一题：频域平移性质

思路：类似空频平移性质

2) 频域平移性质

$$F\{f(x,y)\,e^{j2\pi\left(\frac{u_0x}{M}+\frac{v_0y}{N}\right)}\}$$

$$=\frac{1}{MN}\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1}f(x,y)e^{-j2\pi\left(\frac{u}{M}x+\frac{v}{N}y\right)}e^{j2\pi\left(\frac{u_0x}{M}+\frac{v_0y}{N}\right)}$$

$$=\frac{1}{MN}\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1}f(x,y)e^{-j2\pi\left(\frac{u-u_0}{M}x+\frac{v-v_0}{N}y\right)}$$

令 $u-u_0=u'$ $\quad v-v_0=v'$

$=F(u',v')=F(u-u_0,v-v_0)$ 见频域平移性质成立

第一题：对称性质

- 平均和对称性质

$$F(0,0) = \frac{1}{MN}\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1} f(x,y) \qquad \text{(平均)}$$

$$F(u,v) = F^*(-u,-v) \qquad \text{(共轭对称)}$$

$$|F(u,v)| = |F(-u,-v)| \qquad \text{(对称)}$$

1.平均可以理解为频域中心的值是空域图像的平均灰度，在频域视为直流分量。

2. 根据周期性和共轭对称性，在对图像进行频谱分析处理时只需要关注一个周期就可以了，同时利用图像的傅里叶变换和傅里叶变换的共轭可以直接计算图像的幅度谱，因此使得图像的频谱计算和显示得以简化。

第一题：对称性质

思路：将u=v=0代入定义

3) 对称性质

- $F(u,v)=\frac{1}{MN}\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1} f(x,y)\, e^{-j2\pi\left(\frac{ux}{M}+\frac{vy}{N}\right)}$

令 $u=v=0$

则 $F(0,0)=\frac{1}{MN}\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1} f(x,y)$

求和求平均，在频谱中为

平均灰度 ✓ $F(0,0)$

原点处的F

第一题：对称性质

思路：图像的像素都是实数， $f(x, y) \;=\; f(x, y)^*$

- 若 $F(u,v) - F^*(-u,-v) = 0$

则 $\frac{1}{MN}\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1} f(x,y)\, e^{-j2\pi\left(\frac{ux}{M}+\frac{vy}{N}\right)}$

$- \frac{1}{MN}\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1} f^*(x,y)\, e^{j2\pi\left(-\frac{ux}{M}-\frac{vy}{N}\right)}$

$= \frac{1}{MN}\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1} \overline{f(x,y)}\left(e^{-j2\pi\left(\frac{ux}{M}+\frac{vy}{N}\right)} - e^{j2\pi\left(-\frac{ux}{M}-\frac{vy}{N}\right)}\right)$

$=0.$ 共轭对称也成立 ✓ → 中心对称

第一题：对称性质

思路：根据共轭性质，改变的只是e项，e^{ix}**的模是1**，可忽略，剩余项相同即可证明。

- 由共轭性质可知，其模一定相等，即 if $x^* = x'$ $|x| = |x'|$

  对称性质实际是利用了上述性质，则成立 ✓

  $|F(u,v)| = |F(-u,-v)|$

纲要

深蓝学院
shenlanxueyuan.com

- 第一题：傅立叶变换的定义和性质
- 第二题：计算傅立叶变换的乘法次数
- 第三题：利用傅立叶变换的性质处理图像

第二题：傅立叶变换的乘法次数

深蓝学院 shenlanxueyuan.com

2. 请估算对于一幅的图像若根据如下的算式

$$F(u,v)=\frac{1}{MN}\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1}f(x,y)e^{-j2\pi\left(\frac{ux}{M}+\frac{vy}{N}\right)}$$

$$for\ u=0,1,2,\ldots,M-1,\ v=0,1,2,\ldots,N-1$$

计算其傅立叶变换所涉及的乘法次数，但若根据傅立叶变换的可分离性质去计算重新估算所涉及的乘法次数，从而体会这种可分离的变换核给变换计算带来的效率。

第二题：可分离性质

- 可分离性质

$$
\begin{aligned}
F(u,v) &= \Im[f(x,y)] \\
&= \Sigma_y[\Sigma_x f(x,y)exp(-j2\pi\frac{xu}{M})]exp(-j2\pi\frac{yv}{N}) \\
&= \Sigma_y F(u,y)exp(-j2\pi\frac{yv}{N})
\end{aligned}
$$

$F(u,v)$ 的二维离散傅立叶变换可通过以下计算方式获得

- ✓ 对图像 $f(x,y)$ 每一行计算其一维傅立叶变换得到 $F(u,y)$
- ✓ 对图像 $F(u,y)$ 再进行一维离散傅立叶变换。

(a)f(x,y) (b) F(u,y) (c)F(u,v)

第二题：可分离性质推导

$$F(u,v) = \frac{1}{MN}\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1} f(x,y)\, e^{-j2\pi\left(\frac{xu}{M}+\frac{vy}{N}\right)}$$

$$= \frac{1}{MN}\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1} f(x,y)\, e^{-j2\pi\frac{xu}{M}}\, e^{-j2\pi\frac{vy}{N}}$$

$$= \frac{1}{MN}\sum_{y=0}^{N-1} \underbrace{\left[\sum_{x=0}^{M-1} f(x,y)\, e^{-j2\pi\frac{xu}{M}}\right]}_{f(0,y)+f(1,y)e^{-j2\pi\frac{u}{M}}+\dots+f(M-1,y)e^{-j2\pi\frac{(M-1)u}{M}}} e^{-j2\pi\frac{vy}{N}}$$

第二题：傅立叶变换的乘法次数

思路：将定义打开，
就会直观感受到乘法的次数

Tipps: 对于傅立叶变换每一个频率点，即(u,v), 都有M*N次乘法，一共有M*N个频率点，所以有M*N*M*N次！！！

2. Fourier Transf. 的乘法次数：对于一组 u, v, 有

$$F(u,v) = \frac{1}{MN} \underbrace{f(0,0) e^{-j2\pi(0+0)}}_{\text{一次}} + \frac{1}{MN} f(0,1) e^{-j2\pi(\frac{u}{M}0+\frac{v}{N}1)} + \cdots + \frac{1}{MN} f(M-1, N-1) e^{-j2\pi(\frac{u(M-1)}{M}+\frac{v(N-1)}{N})}$$

一共 M·N 次乘法

分离性质

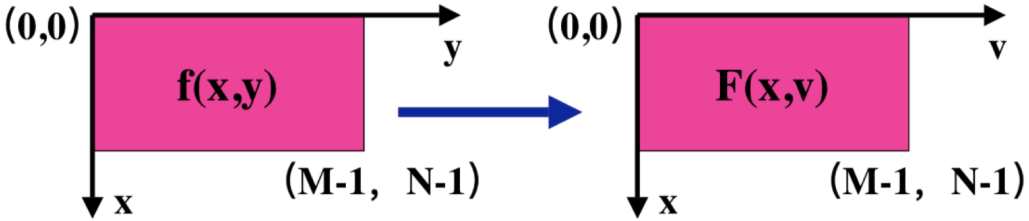
$$F(u,v) = \mathcal{F}\{f(x,y)\}$$

$$= \underbrace{\sum_y \Big[\underbrace{\sum_x f(x,y) \exp(-j2\pi \frac{xu}{M})}_{M\text{次乘法}} \Big] e^{-j2\pi \frac{vy}{N}}}_{N\text{次乘法}}$$

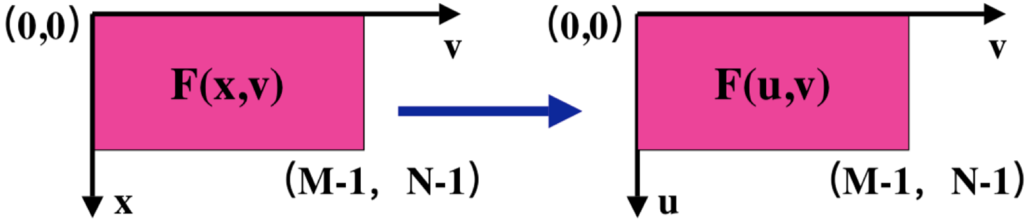
第二题：傅立叶变换的乘法次数

所以 u为1,…,M. v为1…,N. 所以对于整个数据空间 Fourier Transf. 有 M^2N^2 次乘法. 分离定律之后有 $MN(M+N)$次

– 先对行做变换：



– 然后对列进行变换：

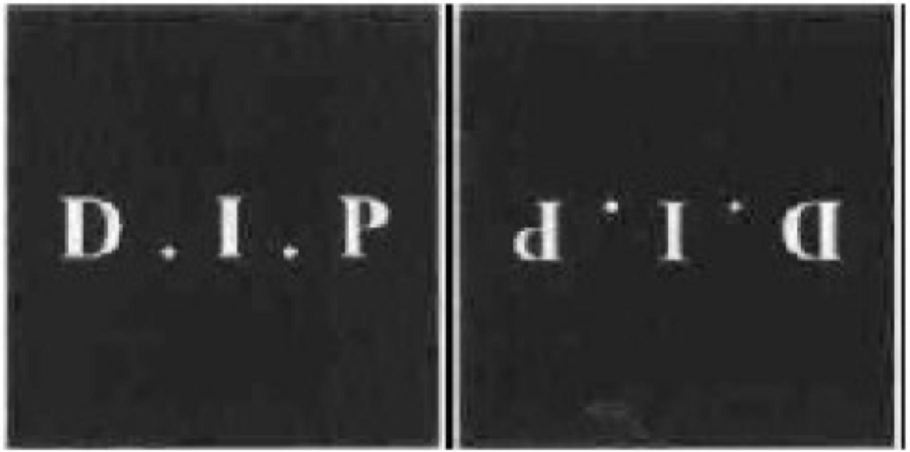


纲要

- 第一题：傅立叶变换的定义和性质
- 第二题：计算傅立叶变换的乘法次数
- **第三题：利用傅立叶变换的性质处理图像**

第三题：理解傅立叶变换

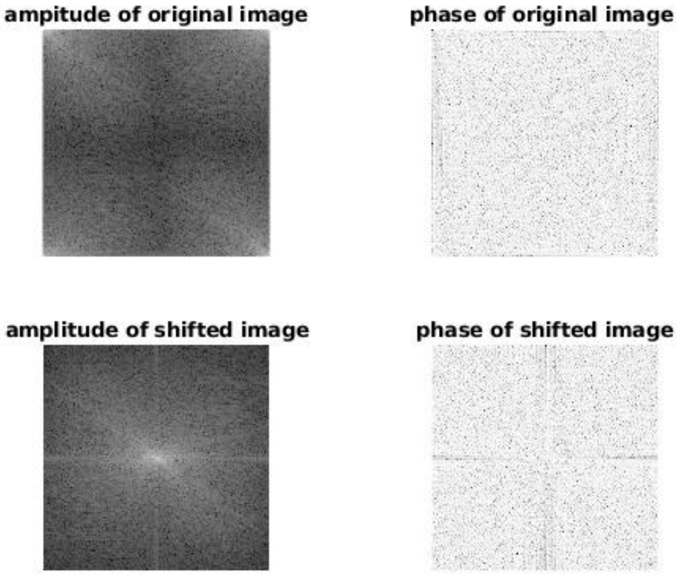
3. 观察如下所示图像。右边的图像这样得到：(a) 在原始图像左边乘以 $(-1)^{x+y}$；(b) 计算离散傅里叶变换(DFT)；(c) 对变换取复共轭；(d) 计算傅里叶反变换；(d) 结果的实部再乘以 $(-1)^{x+y}$ 。(用数学方法解释为什么会产生右图的效果。)



第三题：a), b)

深蓝学院
shenlanxueyuan.com

频域平移性质，将频域原点移动到中心



可以看出，上图为没经过频域平移的频谱图，幅度谱的左上角为低频信号，比较亮，经过平移以后，亮点移动到中心。相位图同理。

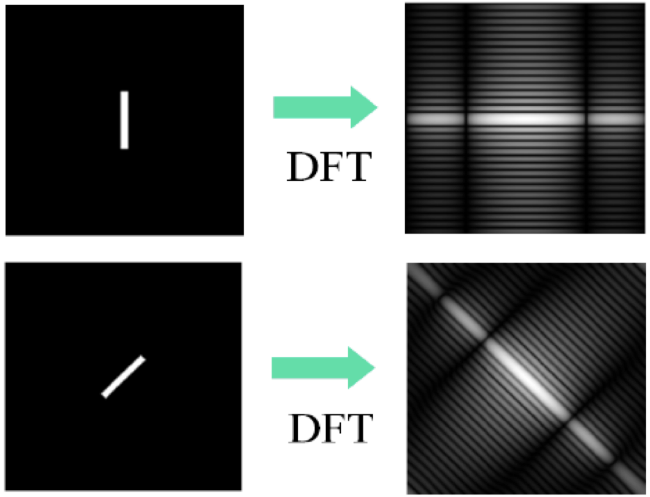
第三题: 旋转性质

深蓝学院 shenlanxueyuan.com

- 旋转性质

令 $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta, u = \omega\cos\varphi, v = \omega\sin\varphi$

$$f(r, \theta + \theta_0) \Leftrightarrow F(\omega, \varphi + \theta_0)$$



第三题: 旋转性质推导

深蓝学院
shenlanxueyuan.com

$$F(\omega,\phi)=\frac{1}{MN}\sum_{r\cos\theta=0}^{M-1}\sum_{r\sin\theta=0}^{N-1} f(r,\theta)\, e^{-j2\pi\left(\frac{r\omega\cos\theta\cos\phi}{M}+\frac{r\omega\sin\theta\sin\phi}{N}\right)}$$

$$F(\omega,\phi+\theta_0)=\frac{1}{MN}\sum_{r\cos\theta=0}^{M-1}\sum_{r\sin\theta=0}^{N-1} f(r,\theta)\, e^{-j2\pi\left(\underbrace{\frac{r\omega\cos\theta\cos(\phi+\theta_0)}{M}}_{①}+\underbrace{\frac{r\omega\sin\theta\sin(\phi+\theta_0)}{N}}_{②}\right)}$$

① : $\dfrac{r\omega\cos\theta\cos\phi\cos\theta_0-r\omega\cos\theta\sin\phi\sin\theta_0}{M}$

② $\dfrac{r\omega\sin\theta\sin\phi\cos\theta_0+r\omega\sin\theta\cos\phi\sin\theta_0}{N}$

旋转性质默认 $M=N$!

$$F(\omega,\phi+\theta_0)=\frac{1}{MN}\sum_{r\cos\theta=0}^{M-1}\sum_{r\sin\theta=0}^{N-1} f(r,\theta)\, e^{-j2\pi\left(\frac{r\omega\cos\theta\cos\phi\cos\theta_0-r\omega\cos\theta\sin\phi\sin\theta_0}{M}+\frac{r\omega\sin\theta\sin\phi\cos\theta_0+r\omega\sin\theta\cos\phi\sin\theta_0}{N}\right)}$$

$$=\frac{1}{MN}\sum_{r\cos\theta=0}^{M-1}\sum_{r\sin\theta=0}^{N-1} f(r,\theta)\, e^{-j2\pi\left(\frac{r\omega(\cos\theta\cos\theta_0+\sin\theta\sin\theta_0)\cos\phi}{M}+\frac{r\omega(\sin\theta\cos\theta_0-\cos\theta\sin\theta_0)\sin\phi}{N}\right)}$$

$$=\frac{1}{MN}\sum_{r\cos\theta=0}^{M-1}\sum_{r\sin\theta=0}^{N-1} f(r,\theta)\, e^{-j2\pi\left(\frac{r\omega\cos(\theta-\theta_0)\cos\phi}{M}+\frac{r\omega\sin(\theta-\theta_0)\sin\phi}{N}\right)}$$

第三题: 旋转性质推导

深蓝学院
shenlanxueyuan.com

$\theta - \theta_0 = \theta'$

$$F(r, \phi+\theta_0) = \frac{1}{MN} \sum \sum f(r, \theta'+\theta_0) e^{-j2\pi \left(\frac{r\omega \cos\theta' \cos\phi}{M} + \frac{r \sin\theta' \sin\phi}{N}\right)}$$

与定义对照

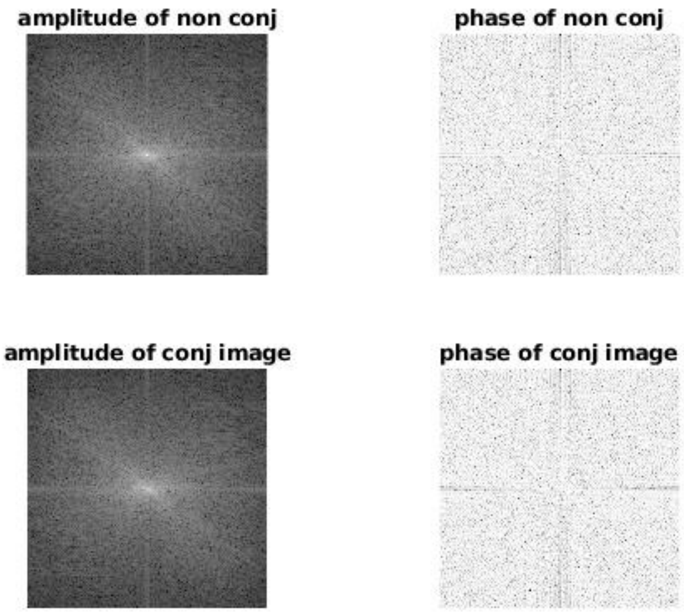
$$F(\omega, \phi) = \frac{1}{MN} \sum \sum f(r, \theta) e^{-j2\pi \left(\frac{r\omega \cos\theta \cos\phi}{M} + \frac{r\omega \sin\theta \sin\phi}{N}\right)}$$

$$\Rightarrow F(r, \phi+\theta_0) \Leftrightarrow \mathcal{F}\{f(r, \theta+\theta_0)\}$$

即空域旋转 θ_0，频域旋转 θ_0，反之亦然

第三题：c), d)

旋转性质，取共轭相当于旋转了180度。（why）



第三题：复共轭是旋转180度？

变换取共轭???

$$F^*(u,v) = \frac{1}{MN}\sum_x\sum_y f(x,y)\, e^{j2\pi\left(\frac{ux}{M}+\frac{vy}{N}\right)}$$

$$= \frac{1}{MN}\sum_x\sum_y f(x,y)\, e^{-j2\pi\left(\frac{u(-x)}{M}+\frac{v(-y)}{N}\right)}$$

$x' = -x \quad y' = -y$

$x = r\cos\theta$ 时 $\quad x' = -r\cos\theta = r\cos\theta'$

$y = r\sin\theta$ 时 $\quad y' = -r\sin\theta = r\sin\theta'$

根据三角函数的性质 $\quad \theta' = \theta + 180^\circ$

所以，取共轭实际上时旋转180°（空域，频域）

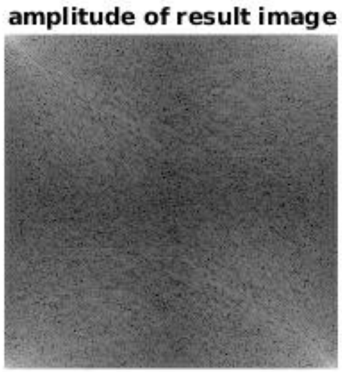
第三题：d)

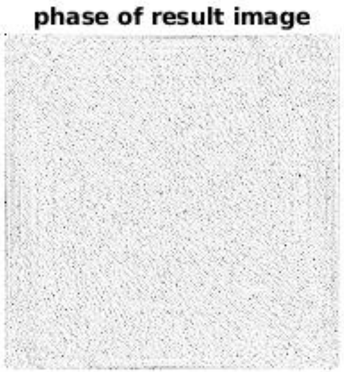
Original Image

Resulting Image

第三题：e)

因为之前已经将频谱图的原点移动到了中心位置，现在要将其放回左上角





小问题：左乘(-1)^(x+y)明明是中心点向右下方移动（左加右减），这里应该向左上方移动，为什么公式不变？

第三题：e)

根据理解，频谱原点应该左上方移动，所以要加上相应的移动距离

$$F\left(u+\frac{M}{2}, v+\frac{N}{2}\right) = \mathcal{F}\left\{ f(x,y)\, e^{-j2\pi\left(\frac{\frac{M}{2}x}{M} + \frac{\frac{N}{2}y}{N}\right)} \right\}$$

$$= \mathcal{F}\left\{ f(x,y)\, e^{-j\pi(x+y)} \right\}$$

$$e^{-j\pi} = \cos\pi - j\sin\pi = -1$$

竟然还是-1！！

解释：二维傅立叶变换中心对称。

在线问答

Q&A

感谢各位聆听！

Thanks for Listening