1. 最佳陷波滤波器

$$\frac{\partial \sigma^2}{\partial w(x,y)} = 0 \Rightarrow w(x,y) = \frac{\overline{g(x,y)\eta(x,y)} - \bar{g}(x,y)\bar{\eta}(x,y)}{\overline{\eta^2}(x,y) - \bar{\eta}^2(x,y)}$$

噪声的初始估计：

G：被污染的图像. F_N：滤波器（噪声通，有效信号阻）

$N(u,v) = F_N(u,v)\,G(u,v) \rightarrow N(u,v)$：噪声的频谱

$\eta(x,y) = \mathcal{F}^{-1}\{F_N(u,v)\,G(u,v)\}$

其中 F_N 为获取噪声干扰模式的陷波滤波器.

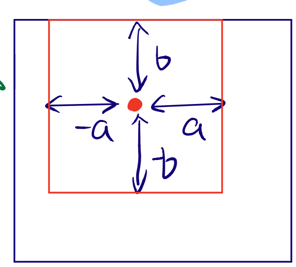
令 $\hat{f}(x,y) = g(x,y) - w(x,y)\,\eta(x,y)$ 1)

$\hat{f}(x,y)$ 为恢复的图像 $w(x,y)$ 调制函数.

↳ 定义 loss function $\sigma(x,y)$ 以 x,y 为中心的邻域方差.

$$\min \sigma^2(x,y) = \frac{1}{(2a+1)(2b+1)} \sum_{s=-a}^{s=a} \sum_{t=-b}^{t=b} \left[\hat{f}(x+s,y+t) - \bar{f}\right]^2 \quad 2)$$

$$\bar{f} = \frac{1}{(2a+1)(2b+1)} \sum_{s=-a}^{s=a} \sum_{t=-b}^{t=b} \hat{f}(x+s,y+t)$$



思路. 若信号邻域方差小，说明该区域无极值，无突变，即平缓发生变化.
通常图像很小邻域内都具有平滑性质（Markov 随机场）→ 信号相邻像素之间，信号值具有很强的相关性.

可将 1)式代入 2)式

$$\sigma^2=\frac{1}{(2a+1)(2b+1)}\sum_{s=-a}^{a}\sum_{s=-b}^{b}\Big(\big[g(x+s,y+t)-\omega(x+s,y+t)\eta(x+s,y+t)\big]-\big[\overline{g(x,y)}-\overline{\omega(x,y)\eta(x,y)}\big]\Big)^2$$

若令 $\omega(x+s,y+t)=\omega(x,y)$: 变量个数 $(2a+1)(2b+1)$

对每个 (x,y) 位置, $\omega(x,y)$ 相同 变量为 ω 矩阵

即问题从之前的在邻域 $g(x+s,y+t)$ $s\in[-a,a]$ $t\in[-b,b]$

每个位置都乘一个像素 变成了只乘一个 ω, 即 $\omega(x,y)$.

$$\hookrightarrow \sigma^2=\frac{1}{(2a+1)(2b+1)}\sum_{s=-a}^{a}\sum_{s=-b}^{b}\Big(\big[g(x+s,y+t)-\omega(x,y)\eta(x+s,y+t)\big]-\big[\overline{g(x,y)}-\overline{\omega(x,y)\eta(x,y)}\big]\Big)^2$$

为了最小化 σ^2, 求 $\dfrac{\partial\sigma^2}{\partial\omega(x,y)}=0$.

$$\frac{\partial\sigma^2}{\partial\omega(x,y)}=\frac{\partial}{\partial\omega(x,y)}\frac{1}{(2a+1)(2b+1)}\sum_{s=-a}^{s=a}\sum_{s=-b}^{b}\big[g(x+s,y+t)-\overline{g(x,y)}+\omega\big[\overline{\eta(x,y)}-\eta(x+s,y+t)\big]\big]^2$$

$$u(s,t)=g(x+s,y+t)-\overline{g(x,y)} \qquad (2a+1)(2b+1)=N$$

$$v(s,t)=\overline{\eta}(x,y)-\eta(x+s,y+t)$$

$$\frac{\partial \sigma^2}{\partial w(x,y)} = \frac{\partial}{\partial w(x,y)} \frac{1}{N} \sum_{s=-a}^{s=a} \sum_{t=-b}^{t=b} \left[u(s,t) + w\, v(s,t)\right]^2$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{s=-a}^{s=a} \sum_{t=-b}^{t=b} 2\left[u(s,t) + w\, v(s,t)\right] \cdot v(s,t) \overset{!}{=} 0$$

$$u(s,t) + w\, v(s,t) = 0$$

$$w = -\frac{u(s,t)}{v(s,t)}$$

$$w(x,y) = -\frac{1}{N} \sum_{s=-a}^{s=a} \sum_{t=-b}^{t=b} \frac{g(x+s,y+t) - \overline{g(x,y)}}{\bar{\eta}(x,y) - \eta(x+s,y+t)}$$

$$= -\frac{1}{N} \sum_{s=-a}^{s=a} \sum_{t=-b}^{t=b} \frac{g(x+s,y+t) - \overline{g(x,y)}}{\bar{\eta}(x,y) - \eta(x+s,y+t)} \cdot \frac{\bar{\eta}(x,y) + \eta(x+s,y+t)}{\bar{\eta}(x,y) + \eta(x+s,y+t)}$$

$$= -\frac{1}{N} \sum \sum \frac{g(x+s,y+t)\bar{\eta}(x,y) - \overline{g(x,y)}\,\bar{\eta}(x,y) + g(x+s,y+t)\eta(x+s,y+t) - \overline{g(x,y)}\,\eta(x+s,y+t)}{\bar{\eta}^2 - \eta^2(x+s,y+t)}$$

简化 $g(x+s,y+t) = g \qquad \eta(x+s,y+t) = \eta$

$$= \frac{1}{N} \sum \sum \frac{g\bar{\eta} - \bar{g}\bar{\eta} + g\eta - \bar{g}\eta}{\eta^2 - \bar{\eta}^2}$$

$$= \frac{\overline{g(x+s,y+t)\,\eta(x+s,y+t)} - \bar{g}(x+s,y+t)\,\bar{\eta}(x+s,y+t)}{\eta^2(x+s,y+t}$$

2. 垂直方向上做了匀速直线运动 $y(t) = V_x t$

水平方向上做了匀速直线运动 $x(t) = V_y t$

$$g(x,y) = \int_0^{T_1}\int_0^{T_2} f(x - V_x t_1,\ y - V_y t_2)\, dt_1\, dt_2$$

$$G(u,v) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} g(x,y)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^{T_1}\int_0^{T_2} f(x - V_x t_1, y - V_y t_2)\, dt_1\, dt_2\, e^{-j2\pi(ux+vy)}\, dx\, dy$$

$$= \int_0^{T_1}\int_0^{T_2}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x - V_x t_1, y - V_y t_2)\, e^{-j2\pi(ux+vy)}\, dx\, dy\right] dt_1\, dt_2$$

$$= \int_0^{T_1}\int_0^{T_2} F(u,v)\, e^{-j2\pi(uV_x t_1 + vV_y t_2)}\, dt_1\, dt_2$$

$$= F(u,v)\int_0^{T_1}\int_0^{T_2} e^{-j2\pi(uV_x t_1 + vV_y t_2)}\, dt_1\, dt_2$$

$$H(u,v) = \int_0^{T_1}\int_0^{T_2} e^{-j2\pi(uV_x t_1 + vV_y t_2)}\, dt_1\, dt_2$$

$$V_x = \frac{a_x}{T_1} \qquad V_y = \frac{a_y}{T_2}$$