1 Einfluss der Fluidlinien-Krümmung, Abschnitt 2.5.2

Infolge der Krümmung der Flutlinien bei Diagonalmaschinen (Radius R in Bild 2-19) unterliegt die Strömung einer zusätzlichen Fliehkraft. Das hat zur Folge, dass sich außer dem Druck p auch die Meridiangeschwindigkeit c_m quer zur Kanalströmung, also in Normalenrichtung, ändert. Dies in der Art, dass $c_{\mathrm{m,(a)}} > c_{\mathrm{m,(m)}} > c_{\mathrm{m,(i)}}$. Das ist beim Auslegen (Berechnen) und Gestalten (Konstruktion) von Diagonal-Kanälen bzw. -Beschaufelungen, also der Leit- sowie Laufräder, zu beachten.

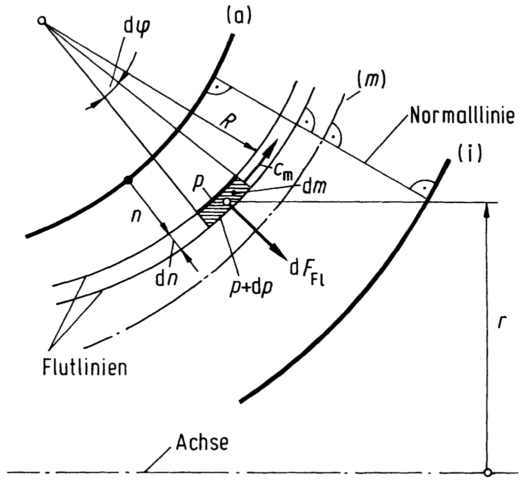

Bild 1 Meridianschnitt (Flutlinien) von räumlich gekrümmten Strombahnen auf Rotationsflächen (Flussflächen). Nicht eingetragen: Breite $\mathrm{d}b$ des Teilchens $\mathrm{d}m$ senkrecht zur Bildebene, $n \ldots$ Normalenrichtung

Herleitung der Zusammenhänge mit Hilfe von Bild 1:

Am Teilchen

$$\mathrm{d}m = \varrho \cdot \mathrm{d}V = \varrho \cdot \mathrm{d}n \cdot \mathrm{d}A = \varrho \cdot \mathrm{d}n \cdot R \cdot \mathrm{d}\varphi \cdot \mathrm{d}b$$

wirken

in Normalenrichtung n

Druckkraft $\quad F_p = p \cdot \mathrm{d}A = p \cdot R \cdot \mathrm{d}\varphi \cdot \mathrm{d}b$

Fliehkraft $\quad \mathrm{d}F_\mathrm{Fl} = \mathrm{d}m \cdot c_\mathrm{m}^2/R$

entgegen Normalenrichtung n

Druckkraft $\quad (F_p + \mathrm{d}F_p) = (p + \mathrm{d}p) \cdot \mathrm{d}A$

Nach dem dynamischen Gleichgewicht $\sum F = 0$ in der Meridianebene muss sein:

$$F_p + \mathrm{d}F_\mathrm{Fl} - (F_p + \mathrm{d}F_p) = 0$$

$$\mathrm{d}F_p = \mathrm{d}F_\mathrm{Fl}$$

Ausgewertet mit den Termen für $\mathrm{d}F_\mathrm{Fl}$ und $\mathrm{d}F_p$, bei Infinitesimalfläche $\mathrm{d}A = R \cdot \mathrm{d}\varphi \cdot \mathrm{d}b$:

$$\mathrm{d}p \cdot \mathrm{d}b \cdot R \cdot \mathrm{d}\varphi = \varrho \cdot \mathrm{d}n \cdot R \cdot \mathrm{d}\varphi \cdot \mathrm{d}b \cdot c_\mathrm{m}^2/R$$

Hieraus

$$\mathrm{d}p = \varrho \cdot \mathrm{d}n \cdot c_\mathrm{m}^2/R \tag{1}$$

Andererseits liefert die Energiegleichung (BERNOULLI-Gl.), [3], in differenzieller Form bei $\varrho = \text{konst}$:

$$g \cdot \mathrm{d}z + \mathrm{d}p/\varrho + c_\mathrm{m} \cdot \mathrm{d}c_\mathrm{m} = 0$$

Wird $\mathrm{d}z$ vernachlässigt bzw. entfällt bei waagerechter Ebene, gilt

$$\mathrm{d}p/\varrho + c_\mathrm{m} \cdot \mathrm{d}c_\mathrm{m} = 0$$

Hieraus

$$\mathrm{d}p = -\varrho \cdot c_\mathrm{m} \cdot \mathrm{d}c_\mathrm{m} \tag{2}$$

Beziehungen (1) und (2) gleichgesetzt, ergibt die Differenzialgleichung (Dgl.) für $c_\mathrm{m} = f(n)$:

$$\varrho \cdot \mathrm{d}n \cdot c_\mathrm{m}^2/R = -\varrho \cdot c_\mathrm{m} \cdot \mathrm{d}c_\mathrm{m}$$

$$\frac{\mathrm{d}n}{R} = -\frac{\mathrm{d}c_\mathrm{m}}{c_\mathrm{m}}$$

Ausführbare Teilintegration dieser Dgl. zwischen den Grenzen $c_{\mathrm{m,(a)}}$ bei $n = 0$ an Flutlinie (a) und c_m an Flutlinie im Abstand n von (a), ergibt:

$$\int\limits_{c_{\mathrm{m,(a)}}}^{c_\mathrm{m}} \frac{\mathrm{d}c_\mathrm{m}}{c_\mathrm{m}} = -\int\limits_0^n \frac{\mathrm{d}n}{R}$$

$$\ln(c_\mathrm{m}/c_{\mathrm{m,(a)}}) = -\int\limits_0^n \mathrm{d}n/R$$

$$\frac{c_\mathrm{m}}{c_{\mathrm{m,(a)}}} = \exp\left[-\int\limits_0^n \mathrm{d}n/R\right] \tag{3}$$

Für den zwischen den Flutlinien von $n = 0$ (Flutlinie (a)) bis n durchfließenden Volumenstrom $\dot{V}_\mathrm{n}$ ergibt sich mit $\mathrm{d}\dot{V}_\mathrm{n} = c_\mathrm{m} \cdot \mathrm{d}A_\mathrm{m}$ und $\mathrm{d}A_\mathrm{m} = 2 \cdot r \cdot \pi \cdot \mathrm{d}n$:

$$\dot{V}_\mathrm{n} = \int\limits_0^n \mathrm{d}\dot{V}_\mathrm{n} = 2 \cdot \pi \cdot \int\limits_0^n c_\mathrm{m} \cdot r \cdot \mathrm{d}n \tag{4}$$

Da analytische, d. h. funktionelle Zusammenhänge zwischen $R(n)$, $r(n)$ und $c_\mathrm{m}(n)$ fehlen, müssen die Integrale der Gleichungen (3) und (4) näherungsweise über zeichnerisch-rechnerische oder numerische Methoden ausgewertet werden [3], [29].

Gleichung (3) bestätigt, dass die Meridiangeschwindigkeit c_m in gekrümmten Kanälen – sowohl beschaufelt als auch nichtbeschaufelt – entlang der Normalen von Flutlinie (a) – äußerer – nach (i) – innerer – abfällt.