Ü 19 Die Überschallgrenze wird dann nicht erreicht, wenn nach Gl. (4-49) $S_{vorh} < S_{verf}$. Das bedeutet, wenn S_{vorh} unterhalb der zugehörigen Grenzkurve in Bild 5-9 liegt.

$S_{vorh} = \delta_{r,(a)} \cdot n \cdot \sqrt{\dot V_0/(k_N \cdot a_0^3)}$ nach Gl. (5-51)

$S_{verf} = 0{,}24 \cdot \cos\beta_{0,(a)} \cdot \sqrt{\sin\beta_{0,(a)}}$ laut Gl. (4-48)
bei $\lambda = 0{,}25$ (Mittelwert)

a) $\delta_{r,(a)} = 1$, $p_0 = p_R$, $T_0 = T_R \rightarrow v_0 = v_R$; $\dot V_0 = \dot V_R$

Volumenstrom $\dot V_R = \dot m \cdot v_R$ mit v_R aus Gasgleichung $p_R \cdot v_R = R \cdot T_R$

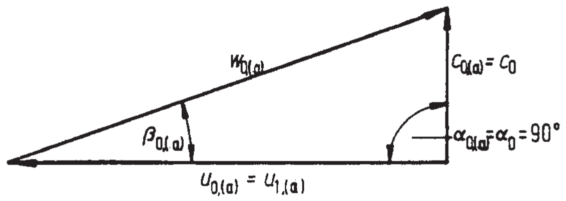

Bild 1. Lösungsskizze 1 zu Ü 19.
Saugkanten-Geschwindigkeitsdreieck.

$v_R = \frac{R \cdot T_R}{p_R} = \frac{287 \cdot 293}{1 \cdot 10^5}\left[\frac{J/(kg \cdot K) \cdot K}{N/m^2}\right] = 0{,}8409\ m^3/kg$

$\dot V_R = \dot m \cdot v_R = 11000 \cdot 0{,}8409\ [kg/h \cdot m^3/kg] = 9250\ m^3/h$

$\dot V_R = 2{,}569\ m^3/s \approx 2{,}57\ m^3/s$

Schallgeschwindigkeit a_R nach LAPLACE:

$a_R = \sqrt{\varkappa \cdot R \cdot T_R} = \sqrt{1{,}4 \cdot 287 \cdot 293}\ \left[\sqrt{m^2/(s^2K) \cdot K}\right]$

$a_R = 343{,}1\ m/s$

Verengungsfaktor k_N lt. Gl. (2-55):

$k_N = 1 - \nu_N^2 = 1 - (D_N/D_{SM})^2 = 1 - (150/250)^2 = 0{,}64$

Relativstromwinkel $\beta_{0,(a)}$ (Eintrittswinkel) nach Bild 1:

$\tan\beta_{0,(a)} = c_{0m}/u_{1,(a)} = c_0/u_{1,(a)}$

Drallfreiheit, also $\delta_r = 1 \longrightarrow \alpha_0 = 90°$

Mit Absolutgeschindigkeit c_0 aus Durchfluß:

$c_{0m} = \frac{\dot V_0}{A_{0m}} = \frac{\dot V_0}{(D_{SM}^2 - D_N^2) \cdot \pi/4} = \frac{\dot V_0}{k_N \cdot D_{SM}^2 \cdot \pi/4}$

$c_{0m} = \frac{2{,}569}{0{,}64 \cdot 0{,}25^2 \cdot \pi/4}\left[\frac{m^3/s}{m^2}\right] = 81{,}77\ m/s$

Umfangsgeschwindigkeit $u_{1,(a)}$: Bei $D_0 = D_{SM}$ (angen.)

$u_{1,(a)} = D_{SM} \cdot \pi \cdot n = 0{,}25 \cdot \pi \cdot 17200/60\ [m/s] = 225{,}15\ m/s$

$\tan\beta_{0,(a)} = 81{,}77/225{,}15 = 0{,}3632 \longrightarrow \beta_{0,(a)} \approx 20°$

Mit diesen Werten ergeben sich:

Vorhandene Schallzahl S_{vorh}:

$S_{vorh} = 1 \cdot \frac{17200}{60} \cdot \sqrt{\frac{2{,}569}{0{,}64 \cdot 343{,}1^3}}\left[\frac{min^{-1}}{s/min} \cdot \sqrt{\frac{m^3/s}{(m/s)^3}}\right]$

$S_{vorh} = 0{,}0904 \approx 0{,}09$

Verfügbare Schallzahl S_{verf}:

$S_{verf} = 0{,}24 \cdot \cos 20° \cdot \sqrt{\sin 20°} = 0{,}132 \approx 0{,}13$

Oder aus Bild 5-9 bei $\delta_{r,(a)} = 1$ folgt ebenfalls $S_{verf} = 0{,}13$

Ergebnis: Da $S_{verf} > S_{vorh}$ keine Überschallgefahr. S_{vorh} liegt unter der Grenzkurve in Bild 5-8, also im zulässigen Bereich.

$S_{vorh}/S_{verf} = 0{,}09/0{,}13 \approx 0{,}69 \mathrel{\hat{=}} 69\%$ (→ Gl. 5-49)

b) $\delta_{r,(a)} = 1$, $(p_0, T_0) \neq (p_R, T_R)$

$\dot V_0/\dot V_R = 1 + Ma_0^2/2$ (Gl. 5-40) Mit

$Ma_0 = c_0/a_0$

Da $c_0 = \dot V_0/A_0$ und $a_0 = \sqrt{\varkappa \cdot R \cdot T_0}$ noch nicht berechenbar, weil $\dot V_0$ sowie T_0 noch unbekannt, wird vorerst näherungsweise gesetzt:

$c_0 \approx 1{,}05 \cdot c_{0,R}$ (5 % Volumenzunahme erwartet!)

$c_0 \approx 1{,}05 \cdot 81{,}77\ [m/s] = 86\ m/s$

$a_0 \approx a_R = \sqrt{\varkappa \cdot R \cdot T_R} = \sqrt{1{,}4 \cdot 287 \cdot 293}\ \left[\sqrt{m^2/(s^2K) \cdot K}\right]$

$a_0 \approx 343\ m/s$

$Ma_0 \approx 86/343 = 0{,}25$ (< 0,3 !) Damit

$\dot V_0/\dot V_R = 1 + 0{,}25^2/2 = 1{,}03$ und nach Gl. (5-38)

$\varrho_R/\varrho_0 = 1 + Ma_0^2/2 = 1{,}03 = v_0/v_R$ Hieraus

$v_0 = 1{,}03 \cdot v_R = 1{,}03 \cdot 0{,}841\ [m^3/kg] = 0{,}866\ m^3/kg$

Die etwa 3 % Volumen- bzw. Dichteänderung sind eigentlich vernachlässigbar. Trotzdem soll zur Veranschaulichung eine "Genaurechnung" durchgeführt, d. h. die Dichteänderung berücksichtigt werden.

Bei isentroper Zustandsänderung im Saugrohr gilt:

$p_R \cdot v_R^\varkappa = p_0 \cdot v_0^\varkappa$ Hieraus

$p_0 = p_R \cdot (v_R/v_0)^\varkappa = 1 \cdot (1/1{,}03)^{1{,}4}\ [bar] = 0{,}959\ bar$

Desweiteren mit Gasgleichung $p_0 \cdot v_0 = R \cdot T_0$:

$T_0 = \frac{p_0 \cdot v_0}{R} = \frac{0{,}959 \cdot 10^5 \cdot 0{,}866}{287}\left[\frac{N/m^2 \cdot m^3/kg}{Nm/(kg \cdot K)}\right]$

$T_0 = 289{,}5\ K \longrightarrow t_0 = 16{,}5\ °C$ Damit

$a_0 = \sqrt{\varkappa \cdot R \cdot T_0} = \sqrt{1{,}4 \cdot 287 \cdot 289{,}5}\ \left[\sqrt{m^2/(s^2K) \cdot K}\right]$

$a_0 = 341{,}06\ m/s$

$c_0 = \dot V_0/A_0 = 1{,}03 \cdot \dot V_R/A_0 = 1{,}03 \cdot 81{,}81\ m/s = 84{,}26\ m/s$

$Ma_0 = c_0/a_0 = 84{,}26/341{,}06 = 0{,}247 \approx 0{,}25$

Damit Kontrollrechnung der Dichteänderung

$\varrho_R/\varrho_0 = 1 + Ma_0^2/2 = 1 + 0{,}247^2/2$

$= 1{,}0305$ (praktisch wie zuvor!)

Ergebnis dieser "Genaurechnung":

In der Zuströmung

- Dichteänderung 3 %
- Druckabfall 1 - 0,959 bar = 0,041 bar
- Temperaturabnahme 20 - 16,5 = 3,5 °C

Sind also sehr geringe Abweichungen und deshalb, wie bereit erwähnt, praktisch vernachlässigbar. Trotzdem wird mit den Werten weitergerechnet.

$\tan\beta_{0,(a)} = c_0/u_{1,(a)} = 84{,}26/225{,}15 = 0{,}3747 \rightarrow$

$\beta_{0,(a)} = 20{,}52°$

Hiermit aus Gl. (5-52) mit $\lambda = 0{,}25$

$$S_{verf} = \sqrt{\frac{\cos^2\beta_{0,(a)} \cdot \sin\beta_{0,(a)}}{4\cdot\pi\cdot(1+\lambda)^{3/2}\cdot(1+0{,}5\cdot Ma_0^2)}}$$

$$S_{verf} = \sqrt{\frac{\cos^2 20{,}52° \cdot \sin 20{,}52°}{4\cdot\pi\cdot(1+0{,}25)^2\cdot(1+0{,}5\cdot 0{,}247^2)}}$$

$\underline{S_{verf} = 0{,}1303 > S_{vorh}}$

Wie zuvor (ohne Dichteänderung) nach Gl. (5-51):

$S_{vorh} = 0{,}09$

Ohne Berücksichtigen der Dichtänderung war zudem

$S_{verf} = 0{,}132$

Abweichung somit unbedeutend.

Oder wieder aus Diagramm, Bild 5-9 bei $\beta_{0,(a)} = 20°$ ebenfalls $S_{verf} = 0{,}13$

c) $S_{vorh} = \delta_r \cdot n \cdot \sqrt{\dot V_0/(k_N \cdot a_0^3)}$ Gl. (5-51)

$\delta_r = 0{,}7$ laut Aufgabe

$S_{vorh} = 0{,}7 \cdot 0{,}09$ (0,09 aus Frage a)

$\underline{S_{vorh} = 0{,}063}$ (günstiger, da kleiner!)

Jetzt $\alpha_0 \neq 90°$, da $\delta_r \neq 1$, und zwar $\alpha_0 < 90°$, da $\delta_r < 1$ (Gleichdrall).

$\tan\beta_{0,(a)} = c_{0m}/w_{0u,(a)}$ (Bild 2)

$c_{0m} = \dot V_0/A_{0m} = \dot V_R/A_0$

$= 81{,}81$ m/s (lt. Frage a)

$\delta_r = (u_1 - c_{0u})/u_1 = |w_{0u}|/u_1$ (Gl. 4-92) Hieraus:

$w_{0u,(a)} = \delta_{r,(a)} \cdot u_{1,(a)} = 0{,}7 \cdot 225{,}15$ m/s $= 157{,}61$ m/s

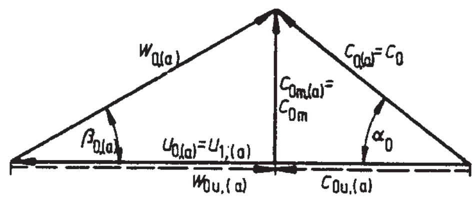

Bild 2. Lösungsskizze 2 zu Ü 19.
Druckkanten-Geschwindigkeitsdreieck.

$c_{0u,(a)} = (1-\delta_{r,(a)})\cdot u_{1,(a)} = (1-0{,}7)\cdot 225{,}15 = 67{,}54$ m/s

$c_{0,(a)} = \sqrt{c_{0u,(a)}^2 + c_{0m,(a)}^2} = \sqrt{67{,}54^2 + 81{,}81^2}$

$c_{0,(a)} = 106{,}09$ m/s $= c_0$

$$\tan\beta_{0,(a)} = \frac{c_{0m}}{\delta_{r,(a)}\cdot u_{1,(a)}} = \frac{c_{0m}}{u_{1,(a)}}\cdot\frac{1}{\delta_{r,(a)}}$$

$$= \frac{81{,}81}{225{,}15}\cdot\frac{1}{0{,}7} = 0{,}3634\cdot\frac{1}{0{,}7} = 0{,}5191$$

$\beta_{0,(a)} = 27{,}4°$

Hierzu wieder aus Gl. (5-47) bei $\lambda = 0{,}25$

$$S_{verf} = \sqrt{\frac{\cos^2 27{,}4°\cdot\sin 27{,}4°}{4\cdot\pi\cdot(1+0{,}25)^{3/2}}} = 0{,}144 \gg S_{vorh}$$

$S_{vorh}/S_{verf} = 0{,}063/0{,}144 = 0{,}44 \mathrel{\hat{=}} 44\%$

Damit bestätigt sich, daß Gleichdrall ($\delta_r < 1$) eine erhebliche Verbesserung hinsichtlich Überschallempfindlichkeit ergibt.

Oder wieder aus Diagramm, Bild 5-9 für $\beta_{0,(a)} = 27{,}4°$ und ohne Dichteänderung. Es ergibt sich ebenfalls $S_{verf} = 0{,}144$.