

6 Spezifische verlustlose Druckenergie Y_p bei kompressiblen Fluiden, Abschnitt 8.2; Tabelle 8-1

Gegenüber Turbinen sind bei Verdichtern mehrere Arten des Energieumsatzes technisch möglich und üblich. Deshalb ist es aus Platzersparnisgründen sinnvoll, die spezifische Druckenergie beider Maschinengruppen nicht wie in der Darstellung des Buches nebeneinander, sondern hier hintereinander abzuhandeln.

Allgemeines: Die ideale, wärmetausCHFfreie ($dq = 0$) Zustandsänderung eines nichttraumbeständigen Fluids (Gas, Dampf), d. h. reibungsfreie Kompression oder Expansion in einem adiabaten (wärmedichten) System, ist, weil

$$ds = dq/T = 0 \rightarrow s = \text{konst}$$

die Isentrope.

Nach dem ersten Hauptsatz der Thermodynamik, der sog. GIBBS'schen Gleichung, gilt für die Isentrope:

$$dq = du + p \cdot dv = 0$$

Umgeformt mit der differentiellen Gasgleichung:

$$p \cdot v = R \cdot T$$

differentiiert mit Produktenregel:

$$p \cdot dv + v \cdot dp = R \cdot dT \rightarrow p \cdot dv = R \cdot dT - v \cdot dp$$

Eingesetzt ergibt die Isentropenform des ersten Hauptsatzes:

$$du + R \cdot dT - v \cdot dp = 0 :$$

Mit Gl. (8-9), $du = c_v \cdot dT$; $R = c_p - c_v$ und $dh = c_p \cdot dT$ folgt hieraus:

$$c_v \cdot dT + (c_p - c_v) \cdot dT - v \cdot dp = 0$$

$$c_p \cdot dT - v \cdot dp = 0$$

$$dh - v \cdot dp = 0 \rightarrow dh = v \cdot dp$$

Integriert zwischen Anfangszustand p_a, h_a (Index a für den Anfang) des kompressiblen Fluids und isentropem Endzustand $p_e, h_{e,s}$ (Index e für Ende mit Zusatzindex s für isentrop $\rightarrow s = \text{konst}$) führt zu:

$$\int_{h_a}^{h_{e,s}} dh = \int_{p_a}^{p_e} v \cdot dp$$

$$\Delta h_s = h|_{h_a}^{h_{e,s}} = h_{e,s} - h_a = \int_{p_a}^{p_e} v \cdot dp \quad (1)$$

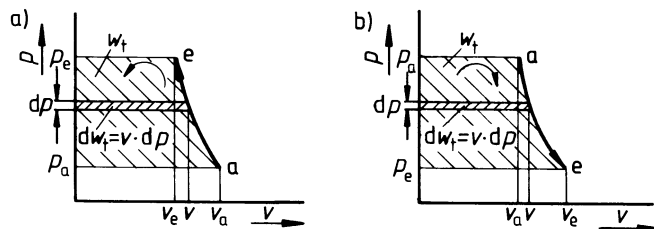


Bild 1 Technische Arbeit $w_t = \int_{p_a}^{p_e} dw_t = \int_{p_a}^{p_e} v \cdot dp$ bei a) Verdichtung, b) Entspannung eines Gases;

Prinzipdarstellung im (p, v) -Diagramm: a ... Anfangszustand (Ausgangspunkt), e ... Endzustand

Hierbei ist das Integral der rechten Gleichungsseite die **spezifische technische Arbeit w_t des Gases**, die zum Verdichten bzw. beim Entspannen des Gases/Dampfes vom Anfangsdruck p_a auf den Enddruck p_e notwendig

ist bzw. frei wird (vergleiche auch Abschnitt 3.2.1.4). Im (p, v) -Diagramm (Bild 1) stellt sich die Kompressionsarbeit (Bild 1a) bzw. Expansionsarbeit (Bild 1b) als Fläche zwischen der Zustandsverlaufskurve a–e und der Ordinate (p -Achse) sowie den Isobaren p_a und p_e dar. Es gilt somit allgemein für die spezifische technische Arbeit eines Fluids (kompressibel oder inkompressibel):

$$w_t = \int_{p_a}^{p_e} v \cdot dp \quad (2)$$

Bemerkung: In der Thermodynamik wird meistens

$$w_t = - \int_{p_a}^{p_e} v \cdot dp$$

gesetzt, da dem Fluid (Gas, Dampf) zugeführte technische Arbeit (bei der Verdichtung) negativ und abgegebene (bei der Expansion) positiv deklariert werden. Analog dazu gilt für die Wärme q :

q negativ: Wärme wird vom Fluid abgeführt

q positiv: Wärme wird dem Medium zugeführt

Im Turbomaschinenbau ist dieses Kennzeichnen zum Unterscheiden überflüssig, weshalb mit den Absolutbeträgen gerechnet wird. Jedem Ingenieur ist klar, dass einem Verdichter mechanische Arbeit zugeführt und bei Kühlung Wärme abgeführt werden muss. Bei einer thermischen Turbinenanlage ist ebenso eindeutig, dass zuerst Wärme zugeführt und anschließend mechanische Arbeit „entzogen“ wird.

Spezifische technische (Gas-)Arbeit $w_{t,s}$ bei isentroper Zustandsänderung (technische Isentropenarbeit)

Bei der Isentropen ($s = \text{konst}$) gilt:

$$p \cdot v^\kappa = \text{konst} \rightarrow p v^\kappa = p_a \cdot v_a^\kappa \quad (\text{Isentropenbeziehung})$$

Nach dem spezifischen Volumen umgestellt:

$$v = v_a \cdot p_a^{1/\kappa} \cdot p^{-1/\kappa}$$

Eingesetzt in Gl. (2) und ausgewertet, ergibt für die **spezifische isentrope technische Arbeit** (Zweitindex s):

$$\begin{aligned} w_{t,s} &= v_a \cdot p_a^{1/\kappa} \cdot \int_{p_a}^{p_e} p^{-1/\kappa} dp \\ &= v_a \cdot p_a^{1/\kappa} \cdot \left[p^{(-1/\kappa)+1} / \left(-\frac{1}{\kappa} + 1 \right) \right]_{p_a}^{p_e} \\ w_{t,s} &= v_a \cdot p_a^{1/\kappa} \cdot \frac{1}{1 - 1/\kappa} \cdot p^{1-1/\kappa} \Big|_{p_a}^{p_e} \\ &= \frac{\kappa}{\kappa - 1} \cdot v_a \cdot p_a^{1/\kappa} \cdot p^{(\kappa-1)/\kappa} \Big|_{p_a}^{p_e} \\ w_{t,s} &= (\kappa/(\kappa - 1)) \cdot v_a \cdot p_a^{1/\kappa} \cdot [p_e^{(\kappa-1)/\kappa} - p_a^{(\kappa-1)/\kappa}] \\ w_{t,s} &= (\kappa/(\kappa - 1)) \cdot p_a \cdot v_a [(p_e/p_a)^{(\kappa-1)/\kappa} - 1] \end{aligned} \quad (3)$$

Hierbei kann nach der Gasgleichung $p_a \cdot v_a = R \cdot T_a$, die allerdings streng genommen nur bei idealem Gasverhalten exakt gilt, $p_a \cdot v_a$ durch $R \cdot T_a$ ersetzt werden. Bei nichtidealem Gasverhalten wäre mit Hilfe des **Realgasfaktors** Z (Erfahrungswert, [79] und Tafel 18) zu setzen: $p_a \cdot v_a = Z \cdot R \cdot T_a$, d. h. an Stelle von R tritt $Z \cdot R$ und c (spez. Wärme) ist durch den Mittelwert c_m ($c_{p,m}$ bzw. $c_{v,m}$) zu ersetzen; auch mit \bar{c} bezeichnet (\bar{c}_p bzw. \bar{c}_v).

Oder wieder mit Isentropenbeziehung $p \cdot v^\kappa = \text{konst}$ und Gasgleichung $p \cdot v = R \cdot T$ lässt sich umformen:

In $p_e \cdot v_e^\kappa = p_a \cdot v_a^\kappa$ wird je entsprechend $v = R \cdot T/p$ ersetzt:

$$p_e \cdot \left(\frac{R \cdot T_{e,s}}{p_e} \right)^\kappa = p_a \cdot \left(\frac{R \cdot T_a}{p_e} \right)^\kappa \rightarrow \left(\frac{p_e}{p_a} \right)^{(\kappa-1)/\kappa} = \frac{T_{e,s}}{T_a}$$

Eingesetzt in Gl. (3) ergibt

$$w_{t,s} = \kappa / (\kappa - 1) \cdot p_a \cdot v_a \cdot [T_{e,s} / T_a - 1] \quad (4)$$

$$w_{t,s} = \frac{\kappa}{\kappa - 1} \cdot R \cdot T_a \cdot [T_{e,s} / T_a - 1] = \frac{\kappa}{\kappa - 1} \cdot R \cdot (T_{e,s} - T_a)$$

Und mit $\kappa = c_p / c_v$ sowie $R = c_p - c_v$ wird für ideales Gasverhalten (Stoffwerte konstant, Tafel 14):

$$w_{t,s} = \Delta h_s = c_p \cdot (T_{e,s} - T_a) \quad (5)$$

Spezifische technische (Gas-)Arbeit $w_{t,T}$ bei isothermer Zustandsänderung (technische Isothermenarbeit)

Bei der Isothermen ($T = \text{konst}$) gilt:

$$p \cdot v = \text{konst} \rightarrow p \cdot v = p_a \cdot v_a \quad (\text{Isothermenbeziehung})$$

Wieder nach dem spez. Volumen $v = p_a \cdot v_a \cdot p^{-1}$ umgestellt und in Gl. (2) eingesetzt, liefert für die **spez. isotherme technische Arbeit** (Zweitindex T):

$$w_{t,T} = p_a \cdot v_a \cdot \int_{p_a}^{p_e} dp/p = p_a \cdot v_a \cdot \ln p \Big|_{p_a}^{p_e}$$

$$w_{t,T} = p_a \cdot v_a \cdot \ln(p_e / p_a) \approx R \cdot T_a \cdot \ln(p_e / p_a) \quad (6)$$

Hinweis: Da die Isothermenfunktion $p \cdot v = \text{konst}$ im (p, v) -Diagramm eine gleichseitige Hyperbel zu den Koordinatenachsen ergibt, ist die technische Arbeit $w_{t,T}$ so groß wie die sog. (physikalische) Gasarbeit $w_{G,T}$, also $w_{t,T} = w_{G,T}$.

Spezifische technische (Gas-)Arbeit $w_{t,\text{pol}}$ bei polytropen Zustandsänderung (technische Polytropenarbeit)

Bei der Polytropen ($T \neq \text{konst}, s \neq \text{konst} \rightarrow \Delta s > 0$) gilt sog. Polytropenbeziehung:

$$p \cdot v^n = \text{konst} \rightarrow p \cdot v^n = p_a \cdot v_a^n$$

An Stelle von κ der Isentropen tritt bei der Polytropen die Hochzahl n , der Polytropenexponent. Die entsprechende Integralauswertung (Gl. (2)) ergibt für die **spez. polytrope technische Arbeit**:

$$w_{t,\text{pol}} = (n / (n - 1)) \cdot p_a \cdot v_a \cdot [(p_e / p_a)^{(n-1)/n} - 1] \quad (7)$$

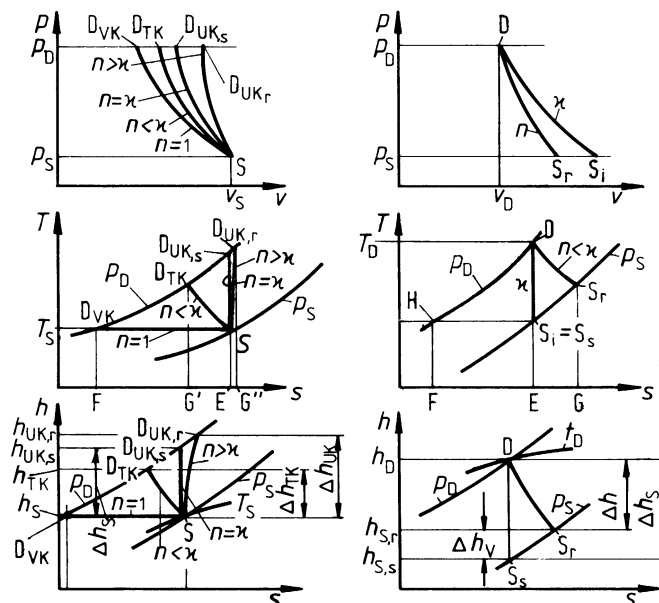


Bild 2 Verdichtung (linke Bildhälfte) und Entspannung (rechte Bildhälfte) im (p, v) -Diagramm (obere Reihe), (T, s) -Diagramm (mittlere Reihe) und (h, s) -Diagramm (untere Reihe).
Bedeutung der Indizes: VK ... voll gekühlt ($T = \text{konst}$), TK ... teilgekühlt, UK ... ungekühlt (adiabat), s ... ideales Gas (isentropen Zustandsänderung i ; $n = \kappa$), r ... reales Gas

Oder entsprechend Gl. (4) mit $p_a \cdot v_a = R \cdot T_a$ und $(p_e/p_a)^{(n-1)/n} = T_{e,\text{pol}}/T_a$:

$$\begin{aligned} w_{t,\text{pol}} &= \left(\frac{n}{n-1} \right) \cdot R \cdot T_a \cdot \left[(T_{e,\text{pol}}/T_a) - 1 \right] \\ w_{t,\text{pol}} &= \left(\frac{n}{n-1} \right) \cdot R \cdot (T_{e,\text{pol}} - T_a) \end{aligned} \quad (8)$$

Auch hier ist wieder zu setzen bei

- idealem Gasverhalten $p_a \cdot v_a = R \cdot T_a$
- nichtidealem Gasverhalten $p_a \cdot v_a = Z \cdot R \cdot T_a$

Bemerkung: Alle drei Beziehungen, Gl. (3), (6) und (7), ergeben, dass die technische Arbeit jeder Zustandsänderung vom Anfangszustand des Gases bzw. Dampfes (p_a, v_a) und dem Druckverhältnis $\Pi = p_e/p_a$ abhängt.

Kompression (Verdichter): Bei idealer Verdichtung ist zwischen den zuvor dargestellten beiden Grenzfällen – ungekühlt (isentrop) und vollkommen gekühlt (isotherm) – zu unterscheiden. Dazwischen liegt die technisch verwirklichtbare, unvollkommen gekühlte Kompression (polytrop).

Ideale ungekühlte Kompression: Wie zuvor unter „Allgemeines“ aufgezeigt, erfolgt das Verdichten eines idealen Gases ohne Wärmeabfuhr isentrop, Zustandskurve $S-D_{\text{UK},s}$ in Bild 2. Nach Gl. (1) gilt hierfür:

$$\Delta h_s = w_{t,s} \quad (9)$$

Mit der spez. isentropen Enthalpiedifferenz

$$\Delta h_s = h_{\text{UK},s} - h_s \quad (10)$$

und der spez. isentropen technischen Verdichtungsarbeit $w_{t,s}$, wobei $p_s \cdot v_s = R \cdot T_s$ und $\Pi = p_D/p_s$:

$$w_{t,s} = \left(\kappa / (\kappa - 1) \right) \cdot p_s \cdot v_s \cdot \left[\Pi^{(\kappa-1)/\kappa} - 1 \right] \quad (11)$$

Während im (h, s) -Diagramm die isentrope Enthalpiedifferenz Δh_s (thermische Energie) als vertikale Strecke $S-D_{\text{UK},s}$ zwischen den Isobaren p_s und p_D abgegriffen werden kann, stellt sie sich im (T, S) -Diagramm – wie die Thermodynamik beweist ($q = \int T \cdot ds$) – als Fläche $E-S-D_{\text{UK},s}-D_{\text{VK}}-F$ dar. Im (p, v) -Diagramm andererseits wird die spezifische technische Arbeit $w_{t,s}$ des kompressiblen Fluids, wie erwähnt, als Fläche abgebildet.

Ideale vollgekühlte Kompression: Hierbei bleibt die Gastemperatur T während der Verdichtung unverändert, Isotherme $T_s = T_D = T = \text{konst.}$ Die Kompressionswärme wird während des Verdichtungs Vorganges laufend durch Kühlung vollständig abgeführt. Gemäß dem ersten Hauptsatz der Thermodynamik in der unter Abschnitt „Allgemeines“ dargestellten Form $dq = dh - v \cdot dp$ wird dann mit $dh = c_p \cdot dT = 0$, da $dT = 0$ infolge $T = \text{konst.}$:

$$dq = -v \cdot dp$$

Integriert bei Nichtbeachten der Vorzeichen, was wieder Berechnen mit Beträgen bedeutet, ergibt sich: $q = w_{t,T}$.

Daraus folgt: Bei isothermer Kompression ist die abzuführende Wärmemenge im Betrag (nicht jedoch in der Qualität) gerade so groß wie die isotherme technische Verdichtungsarbeit.

Die Wärme q wird im (T, s) -Diagramm, Bild 2, als Rechteckfläche $E-S-D_{\text{VK}}-F$ dargestellt.

Infolge der vollkommenen Abfuhr der Kompressionswärme bleibt die innere Energie u (spezifischer Wert) des Fluids während des Verdichtens unverändert:

$$u = c_v \cdot T + C = \text{konst.} \text{ bzw. } du = c_v \cdot dT = 0, \text{ da bei der Isothermen definitionsgemäß } T = \text{konst.}$$

Für die spezifische isotherme technische Verdichtungsarbeit gilt nach Gl. (6):

$$w_{t,T} = p_s \cdot v_s \cdot \ln(p_D/p_s) \approx R \cdot T_s \cdot \ln \Pi \quad (12)$$

Unvollkommen gekühlte Kompression: Die Zustandsänderung des Gases (Dampfes) verläuft bei unvollkommenem oder teilgeköhltem Verdichten polytrop entsprechend Linie $S-D_{TK}$ in Bild 2. Dieser Zustandsverlauf wird, da $n < \kappa$ (meist $n = 1,3 \dots 1,1$ bei $\kappa = 1,4$), auch als **unterisentrop** bezeichnet. Im (T, s) -Diagramm stellen hierzu dar:

- Fläche $E-S-D_{TK}-G'$: Durch Teilkühlung abgeführte Verdichtungs-Wärme q
- Fläche $G'-D_{TK}-D_{VK}-F$: Zunahme des Enthalpieinhaltes Δh_{TK} des verdichteten Fluids
- Fläche $E-S-D_{TK}-D_{VK}-F$: Zur Verdichtung notwendiger spezifischer Arbeitsaufwand (mechanische Energie) $q + \Delta h_{TK}$

Je nach Intensität der Kühlung liegt Punkt D_{TK} mehr oder weniger dicht bei Punkt D_{VK} . Je besser die Kühlung, desto näher liegt D_{TK} bei D_{VK} . Entsprechend Gl. (7) folgt für die spezifische polytrope technische Verdichtungsarbeit, wobei wieder $p_S \cdot v_S \approx R \cdot T_S$ (da $R \approx \text{konst}$ bei realem Gas) und $\Pi = p_D/p_S$.

$$w_{t,\text{pol}} = (n/(n-1)) \cdot p_S \cdot v_S \cdot [\Pi^{(n-1)/n} - 1] \quad (13)$$

Der Polytropenexponent n kann letztlich nur experimentell bestimmt werden. Er liegt, wie zuvor erwähnt, zwischen 1 und κ , d. h. $1 < n < \kappa$, den Grenzwerten für ideale Verdichtung mit Voll- und Nichtkühlung.

Beziehungen für die abzuführende Wärme enthält Ergänzung 7.

Reale ungekühlte Verdichtung: Erfolgt bei der Kompression realer Gase keine Kühlung, verläuft die Zustandsänderung entlang der Kurve $S-D_{UK,r}$ in Bild 2. Dieser Zustandsverlauf wird, da $n > \kappa$, auch als **überisentrop** (früher überadiabat) bezeichnet. Infolge der bei realen Gasen vorhandenen Reibung wird während des Verdichtungs Vorganges ein Teil der zugeführten Energie zusätzlich in Wärme umgesetzt. Die notwendige technische Kompressionsenergie erhöht sich dadurch entsprechend.

Im zugehörigen (T, s) -Diagramm von Bild 2 stellen dar:

- Fläche $E-S-D_{UK,r}-G''$: Dem Fluid durch Reibung zusätzlich aufgeprägte Wärme (spez. Wert)
- Fläche $G''-D_{UK,r}-D_{VK}-F$: Zunahme des spezifischen Energieinhaltes des verdichteten Fluids (gesamte oder technische spezifische Verdichtungsarbeit)
- Fläche $E-S-D_{UK,r}-D_{VK}-F$: Wärmewert der gesamten reinen spezifischen Verdichtungsarbeit (Gasarbeit)
- Fläche $S-D_{UK,s}-D_{UK,r}$: Durch die Gasreibung bedingte spezifische Mehrarbeit für die Verdichtung

Mit $n > \kappa$ kann die spezifische technische Verdichtungsarbeit $w_{t,\text{pol}}$ nach Gl. (13) berechnet oder aus dem (h, s) -Diagramm (Bild 2) durch $w_{t,\text{pol}} = \Delta h_{UK}$ abgegriffen werden. Da in der Regel jedoch weder die Größe des Polytropenexponenten n noch der Zustandspunkt $D_{UK,r}$ im (h, s) -Diagramm bekannt sind, ist die tatsächliche Verdichtungsarbeit w_t realer Gase über den erfahrungsgemäß festzulegenden **Vergleichswirkungsgrad** η_V (Abschnitt 8.5 und Tabelle 8-1) aus der idealen Kompressionsarbeit zu berechnen:

$$w_t = w_{t,\text{id}}/\eta_V \quad (14)$$

Hierbei ist als spezifische ideale technische Verdichtungsarbeit $w_{t,\text{id}}$ (Zweitindex id) jeweils diejenige einzusetzen (isentrop oder isotherm), auf welche sich der Vergleichs-Wirkungsgrad bezieht. In der Technik dient meist die isentrope Verdichtung als Bezugsgröße. Dafür gilt:

$$w_t = w_{t,s}/\eta_{V,s} = c_p \cdot \Delta T_s/\eta_{V,s} = c_p \cdot \Delta T \quad (15)$$

Die spezifische Arbeit entspricht auch der Temperatursteigerung des Fluids infolge des Verdichtungs Vorganges. In diesem Zusammenhang sei auch auf Abschnitt 8.5 verwiesen.

Näherungsbeziehungen für geringe Druckverhältnisse Π : Bei kleinen Druckverhältnissen $\Pi = p_D/p_S$ wie hauptsächlich in Ventilatoren ($\Pi \leq 1,1$) lohnt sich Kühlen in der Technik nicht. Berechnungsgrundlage der Verdichtungsarbeit ist daher Gl. (11). Durch Entwickeln des Klammerausdruckes in eine unendliche Potenzreihe nach dem binomischen Satz und Abbrechen nach dem 3. Glied lässt sich Gl. (11) für niedrige Druckverhältnisse in eine Näherungsbeziehung (eine Formel) umschreiben.

Ausgangspunkt: Das Druckverhältnis $\Pi = p_D/p_S$ wird in Gl. (11) durch den Anfangsdruck, also den Saugdruck p_S und die Druckdifferenz der Maschine $\Delta p_M = p_D - p_S$ ersetzt:

$$\Pi = \frac{p_D}{p_S} = \frac{p_D - p_S + p_S}{p_S} = \frac{\Delta p_M + p_S}{p_S} = 1 + \frac{\Delta p_M}{p_S} \quad (16)$$

Damit geht Gl. (11) für die spezifische isentrope technische Verdichtungsarbeit über in:

$$w_{t,s} = \frac{\kappa}{\kappa - 1} \cdot p_S \cdot v_S \left[\left(1 + \Delta p_M / p_S \right)^{(\kappa-1)/\kappa} - 1 \right] \quad (17)$$

Über den **binomischen Satz** für $x \ll 1$

$$\begin{aligned} (1 \pm x)^n &= \binom{n}{0} \cdot x^0 \pm \binom{n}{1} \cdot x^1 + \binom{n}{2} \cdot x^2 \pm \binom{n}{3} \cdot x^3 + \pm \dots \\ &= 1 \pm n \cdot x + \frac{n \cdot (n-1)}{1 \cdot 2} \cdot x^2 \pm \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot x^3 + \pm \dots \end{aligned}$$

wird die Potenz $(1 + \Delta p_M / p_S)^{(\kappa-1)/\kappa}$ in eine Potenzreihe entwickelt und näherungsweise nach dem dritten Glied abgebrochen:

$$\begin{aligned} (1 + \Delta p_M / p_S)^{(\kappa-1)/\kappa} &\approx 1 + \frac{\kappa-1}{\kappa} \cdot \frac{\Delta p_M}{p_S} + \frac{((\kappa-1)/\kappa) \cdot [((\kappa-1)/\kappa - 1)]}{1 \cdot 2} \cdot \left(\frac{\Delta p_M}{p_S} \right)^2 \\ &\approx 1 + \frac{\kappa-1}{\kappa} \cdot \frac{\Delta p_M}{p_S} - \frac{\kappa-1}{2 \cdot \kappa^2} \cdot \left(\frac{\Delta p_M}{p_S} \right)^2 \end{aligned}$$

Diese abgebrochene Potenzreihe in Gl. (17) eingesetzt, ergibt bei guter Näherung für die spez. isentrope Kompressionsarbeit bei kleinen Druckverhältnissen folgende vereinfachte Beziehung:

$$w_{t,s} \approx \kappa / (\kappa - 1) \cdot p_S \cdot v_S \cdot \left[1 + \frac{\kappa-1}{\kappa} \cdot \frac{\Delta p_M}{p_S} - \frac{\kappa-1}{2 \cdot \kappa^2} \cdot \left(\frac{\Delta p_M}{p_S} \right)^2 - 1 \right]$$

Weiter vereinfacht und zusammengefasst:

$$\begin{aligned} w_{t,s} &\approx p_S \cdot v_S \left[(\Delta p_M / p_S) - (1/(2 \cdot \kappa)) \cdot (\Delta p_M / p_S)^2 \right] \\ w_{t,s} &\approx v_S \cdot \Delta p_M \left[1 - (1/(2 \cdot \kappa)) \cdot \Delta p_M / p_S \right] \end{aligned} \quad (18)$$

Wird in dieser Formel des Weiteren der zweite Ausdruck in der Klammer weggelassen, was bedeutet, die Potenzreihe bereits nach dem zweiten Glied abgebrochen, ergibt sich in grober Näherung:

$$w_{t,s} \approx v_S \cdot \Delta p_M = \Delta p_M / \varrho_S = (p_D - p_S) / \varrho_S \quad (19)$$

Die Beziehung stimmt mit Gl. (8-17) überein und gilt deshalb exakt nur für $\varrho = \text{konst}$, also inkompressible Fluide, d. h. Flüssigkeiten.

B3 Das Abweichen der Näherungsbeziehungen vom genauen Wert nach Gl. (11) lässt sich am besten mittels Beispiel zeigen. Beim Ventilator-Grenzwert des Druckverhältnisses von $\Pi = 1,1$ ergibt sich für Luft ($\kappa = 1,4$):

Nach Gl. (16)

$$\Delta p_M / p_S = \Pi - 1 = 0,1$$

Exakt wird nach Gl. (11):

$$\begin{aligned} w_{t,s} / (p_S \cdot v_S) &= \left[\kappa / (\kappa - 1) \right] \cdot \left[\Pi^{(\kappa-1)/\kappa} - 1 \right] \\ &= \left[1,4 / (1,4 - 1) \right] \cdot \left[1,1^{(1,4-1)/1,4} - 1 \right] \\ &= 0,09662 \end{aligned}$$

Näherung gemäß Beziehung (18)

$$\begin{aligned} w_{t,s} / (p_S \cdot v_S) &= \left[\Delta p_M / p_S - (1/(2 \cdot \kappa)) \cdot (\Delta p_M / p_S)^2 \right] \\ &= \left[0,1 - (1/(2 \cdot 1,4)) \cdot 0,1^2 \right] = 0,09642 < 0,09662 \end{aligned}$$

$$\text{Abweichung: } \frac{0,096\,62 - 0,096\,42}{0,096\,62} \cdot 100 = 0,21\,\%$$

Grobe Näherung laut Formel (19):

$$w_{t,s}/(p_s \cdot v_s) \approx \Delta p_M/p_s = 0,1 > 0,096\,62$$

$$\text{Abweichung: } \frac{0,096\,62 - 0,1}{0,096\,62} \cdot 100 = -3,4\,\%$$

Ergebnis: Die Abweichung bleibt bei der guten Näherung vernachlässigbar klein, während sie bei der groben Näherung schon vielfach nicht mehr zulässig ist. Deshalb darf nach den Regeln VDI 2044 die grobe Näherung (Gl. (19)) als Berechnungsgrundlage nur bis zu Druckverhältnissen von $\Pi \leq 1,05$ verwendet werden, da sich hierbei bereits ein Fehler von 1 % ergibt. Andererseits liefert die Näherung nach Gl. (18) bei Druckverhältnissen $\Pi = 1,5$ auch schon eine Abweichung von ca. 5 %, die grobe Näherung Gl. (19) wäre sogar um etwa 15 % ungenau. Für Überschlagsrechnungen bei Ventilatoren ($\Pi \leq 1,1$) genügt jedoch stets Gl. (19). Schon Niederdruckgebläse ($\Pi \leq 1,5$) erfordern dagegen hierzu Gl. (18). Die Näherungsrechnungen liefern dabei zu große Werte. Deren Ergebnisse liegen somit auf der sog. sicheren Seite.

Expansion (Turbinen): Bei Dampf- und Gasturbinen, den thermischen Turbokraftmaschinen (Turbinen) erfolgt Entspannen meist ohne Wärmeaustausch (-zufuhr oder -abfuhr), falls von der normalerweise vernachlässigbaren Wärmeableitung durch die meist kältere Maschinenmasse und die Umgebung abgesehen wird. Die ideale Turbinenentspannung (ideales Gas) verläuft deshalb isentrop, die tatsächliche (reales Gas) polytrop (überisentrop, $n > \kappa$). In der rechten Hälfte von Bild 2 sind die Zustandskurven idealer und realer Fluid-Entspannung von Turbinenströmungen in prinzipieller Form im (p, v) -, (T, s) - und (h, s) -Diagramm nach MOLLIER dargestellt. Wichtig ist wieder der Anfangszustand des Fluids, d. h. Druck p_D , spez. Volumen v_D bzw. Temperatur T_D an der Druckseite der Maschine und das Druck-, besser **Entspannungsverhältnis** $p_s/p_D = 1/\Pi$.

Ideale Entspannung: Erfolgt isentrop, da reibungsfrei und adiabat (wärmedicht). Deshalb gilt nach Gl. (1) und Gl. (2):

$$h_D - h_{s,s} = \int_{p_D}^{p_s} v \cdot dp = w_{t,s}$$

Mit $h_D - h_{s,s}$ nach Bild 2 und entsprechend Gl. (3)

$$w_{t,s} = (\kappa/(\kappa - 1)) \cdot p_D \cdot v_D \cdot [(p_s/p_D)^{(\kappa-1)/\kappa} - 1]$$

$$w_{t,s} = -(\kappa/(\kappa - 1)) \cdot p_D \cdot v_D \cdot [1 - (p_s/p_D)^{(\kappa-1)/\kappa}]$$

wird

$$\Delta h_s = -w_{t,s} = |w_{t,s}|$$

Bleiben die Vorzeichen unberücksichtigt, welche wie bei Gl. (2) ausgeführt nur die Energieübertragungsrichtung kennzeichnen, ergibt sich für die von Wärme in mechanische Arbeit umgewandelte spezifische Energie, die sog. **Exergie**:

$$\begin{aligned} \Delta h_s = |w_{t,s}| &= (\kappa/(\kappa - 1)) \cdot p_D \cdot v_D \cdot [1 - (p_s/p_D)^{(\kappa-1)/\kappa}] \\ &= (\kappa/(\kappa - 1)) \cdot R \cdot T_D \cdot [1 - (1/\Pi)^{(\kappa-1)/\kappa}] \end{aligned} \quad (20)$$

Wie bereits ausgeführt, sollte, wenn immer möglich, insbesondere jedoch bei Dämpfen als Arbeitsmedium, das Enthalpiegefälle Δh_s aus dem zugehörigen (h, s) -Diagramm nach MOLLIER abgegriffen werden. Grund: Im (h, s) -Diagramm ist das Abweichen des kompressiblen Fluids vom idealen Gasverhalten eingearbeitet. Die isentrope Enthalpiedifferenz stellt sich auch hier im (h, s) -Diagramm als vertikale Strecke zwischen dem Anfangszustand (p_D, T_D) des Mediums und der Isobaren des Gegendruckes p_s dar – im (T, s) -Diagramm als Fläche $D-E-F-H$ (Bild 2).

Die Differenz zwischen der für den Anfangszustand zugeführten Wärme, der **Energie** des Fluids, und dann dem in mechanische Arbeit umgesetzten Wärmeanteil, der **Exergie**, geht als Abwärme, mit **Anergie** bezeichnet, für die weitere mechanische Nutzung verloren.

Die **Abwärme** gilt als **Schadwärme**, weil sie meist nicht nur aufwändig zu beseitigen, sondern zudem für die Umwelt oft mit schädlichen Auswirkungen verbunden ist (Wärmeabfall).

Reale Entspannung: Während des Expansionsvorganges wird laufend ein Teil der gerade aus Wärme in mechanische Arbeit umgesetzten Energie durch Fluidreibung wieder in Wärme zurückverwandelt. Um diese Reibungswärme, die sog. spezifische **Verlustenergie** Δh_v (Enthalpieverlust) (Bild 2), verringert sich die durch den Turbinenprozess gewonnene mechanische Energie entsprechend. Für das tatsächlich genutzte Enthalpiegefälle Δh gilt daher:

$$\Delta h = \Delta h_s - \Delta h_v \quad (21)$$

Da die Verlustenergie Δh_v (spezifischer Wert) meist nicht explizit bekannt ist, wird wieder mittels erfahrungsgemäßem oder nach Versuchen festzulegendem Vergleichswirkungsgrad $\eta_{v,s}$ bestimmt:

$$\Delta h = \eta_{v,s} \cdot \Delta h_s \quad (22)$$

Im (T, s) -Diagramm wird die spezifische Minderarbeit (Verlustenergie) durch die Fläche S_s-D-S_r und die zugehörige Reibungswärme durch die Fläche $E-S_s-D-S_r-G$ dargestellt (Bild 2). Der erfahrungsgemäße (Verlust-)Wirkungsgrad $\eta_{v,s}$ entspricht dem Vergleichswirkungsgrad bei Verdichtern entsprechend Gl. (14) bzw. den entsprechenden Wirkungsgraden nach Abschnitt 8.5.

Bemerkungen:

Bei mehrstufigen Maschinen wird die gesamte Enthalpie- bzw. Druckdifferenz meist gleichmäßig auf die einzelnen Stufen unterteilt.

Druck und Temperatur werden auch als **primäre Zustandsgrößen** bezeichnet, da mit Messgeräten direkt ermittelbar.