4 Herleitung der Beziehungen (5-14) bis (5-21), Abschnitt 5.2.3 und Gl. (5-45), Abschnitt 5.3.3

Herleitung von Beziehungen (5-14) bis (5-21):

Für den Regelfall, also drallfreier Saugraumstrom ($\delta_{\mathrm{r}} = 1$; Gl. (4-92)), gilt am äußeren Saugkantenpunkt (a_1), Bild 2-14 und 2-19, für das dann rechtwinklige Strömungsdreieck (Bild 4-8a), bei der meist zulässigen Annahme $D_{1,(\mathrm{a})} \approx D_{\mathrm{SM}}$:

$$w_{0,(\mathrm{a})} = \frac{u_{1,(\mathrm{a})}}{\cos\beta_{0,(\mathrm{a})}} \approx \frac{D_{\mathrm{SM}} \cdot \pi \cdot n}{\cos\beta_{0,(\mathrm{a})}} \tag{1}$$

$$c_{0,(\mathrm{a})} = u_{1,(\mathrm{a})} \cdot \tan\beta_{0,(\mathrm{a})} \approx D_{\mathrm{SM}} \cdot \pi \cdot n \cdot \tan\beta_{0,(\mathrm{a})} \tag{2}$$

Über das Durchflussgesetz sind D_{SM} und $\beta_{0,(\mathrm{a})}$ mit dem Laufrad-Volumenstrom $\dot{V}_{\mathrm{La}}$ verbunden, wenn angenommen wird, dass sich der Betrag der Strömungsgeschwindigkeit im Saugraum nicht bzw. wenig ändert, also $c_{0,(\mathrm{a})} = c_{0,(\mathrm{m})} = c_{0,(\mathrm{i})} = c_0 \approx c_{\mathrm{SM}}$:

$$\dot{V}_{\mathrm{La}} = A_{\mathrm{SM}} \cdot c_{\mathrm{SM}} \approx A_{\mathrm{SM}} \cdot c_{0,(\mathrm{a})} \quad \text{mit} \quad A_{\mathrm{SM}} = D_{\mathrm{SM}}^2 \cdot (\pi/4) \cdot k_{\mathrm{N}}$$

$$\dot{V}_{\mathrm{La}} \approx D_{\mathrm{SM}}^2 \cdot (\pi/4) \cdot k_{\mathrm{N}} \cdot D_{\mathrm{SM}} \cdot \pi \cdot n \cdot \tan\beta_{0,(\mathrm{a})}$$

$$\dot{V}_{\mathrm{La}} \approx (1/4) \cdot \pi^2 \cdot k_{\mathrm{N}} \cdot D_{\mathrm{SM}}^3 \cdot n \cdot \tan\beta_{0,(\mathrm{a})}$$

Hieraus, wobei meist $=$ statt $\approx$ gesetzt:

$$D_{\mathrm{SM}} = \sqrt[3]{\frac{4 \cdot \dot{V}_{\mathrm{La}}}{\pi^2 \cdot k_{\mathrm{N}} \cdot n \cdot \tan\beta_{0,(\mathrm{a})}}} \tag{3}$$

Diese Beziehung folgt auch aus Gl. (4-98), wenn dort $\delta_{\mathrm{r},(\mathrm{a})} = 1$ und $\dot{V}/\lambda_{\mathrm{L}} = \dot{V}_{\mathrm{La}}$ gesetzt werden.

Gleichung (3) in Beziehungen (1) und (2) eingeführt. Die sich ergebenden Ausdrücke dann in den Ansatz gemäß Gl. (5-13) eingesetzt, ergibt:

$$Y_{\mathrm{H,M}} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{4 \cdot \dot{V}_{\mathrm{La}}}{\pi^2 \cdot k_{\mathrm{N}} \cdot n \cdot \tan\beta_{0,(\mathrm{a})}}\right)^{2/3} \cdot \left[\lambda_1 \cdot \left(\frac{\pi \cdot n}{\cos\beta_{0,(\mathrm{a})}}\right)^2 + \lambda_2 \cdot (\pi \cdot n \cdot \tan\beta_{0,(\mathrm{a})})^2\right]$$

$$Y_{\mathrm{H,M}} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{4 \cdot \dot{V}_{\mathrm{La}} \cdot \pi \cdot n^2}{k_{\mathrm{N}}}\right)^{2/3} \cdot \left[\frac{\lambda_1}{\cos^2\beta_{0,(\mathrm{a})} \cdot \tan^{2/3}\beta_{0,(\mathrm{a})}} + \lambda_2 \cdot \frac{\tan^2\beta_{0,(\mathrm{a})}}{\tan^{2/3}\beta_{0,(\mathrm{a})}}\right]$$

$$Y_{\mathrm{H,M}} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{4 \cdot \dot{V}_{\mathrm{La}} \cdot \pi \cdot n^2}{k_{\mathrm{N}}}\right)^{2/3} \cdot \left[\frac{\lambda_1}{(\cos^2\beta_{0,(\mathrm{a})} \cdot \sin\beta_{0,(\mathrm{a})})^{2/3}} + \lambda_2 \cdot \tan^{4/3}\beta_{0,(\mathrm{a})}\right] \tag{4}$$

Bei festgehaltenen Werten von $\dot{V}_{\mathrm{La}}$, n und k_{N} ist die Maschinenhalteenergie $Y_{\mathrm{H,M}}$ nach Gl. (4) allein abhängig vom Relativstromwinkel $\beta_{0,(\mathrm{a})}$ außerhalb der äußeren Schaufelsaugkante (Stromfaden a). Den Differenzialquotienten nach $\beta_{0,(\mathrm{a})}$ der Rechteckklammer-Funktion gemäß Extremwertbildung der Mathematik null gesetzt (aus Platzgründen weggelassen), führt zum Optimal-, d. h. Kleinstwert von $Y_{\mathrm{H,M}}$. Dies ergibt Gl. (5-14) für den kavitationsoptimalen Relativströmungswinkel $\beta_{0,(\mathrm{a}),\mathrm{opt}}$.

Gleichung (4) weiter umgeschrieben und anders zusammengefasst:

$$Y_{\mathrm{H,M}} = \left(n \cdot \sqrt{\dot{V}_{\mathrm{La}}}\right)^{4/3} \cdot (1/2) \cdot (4 \cdot \pi/k_{\mathrm{N}})^{2/3} \cdot \left[\frac{\lambda_1}{(\cos^2\beta_{0,(\mathrm{a})} \cdot \sin\beta_{0,(\mathrm{a})})^{2/3}} + \lambda_2 \cdot \tan^{4/3}\beta_{0,(\mathrm{a})}\right]$$

Mit der Saugzahl S_y (Abkürzung)

$$S_y^{-4/3} = \frac{1}{2 \cdot [k_{\mathrm{N}}/(4 \cdot \pi)]^{2/3}} \cdot \left[\frac{\lambda_1}{(\cos^2\beta_{0,(\mathrm{a})} \cdot \sin\beta_{0,(\mathrm{a})})^{2/3}} + \lambda_2 \cdot \tan^{4/3}\beta_{0,(\mathrm{a})}\right] \tag{5}$$

ergibt sich letztlich Gl. (5-20).

Entsprechend ergibt sich bei Saugraumdrall ($\delta_r \neq 1$) nach Bild 4-8 und Gl. (4-92):

$$w_{0,(a)} = \frac{|w_{0u,(a)}|}{\cos\beta_{0,(a)}} = \frac{\delta_{r,(a)} \cdot u_{1,(a)}}{\cos\beta_{0,(a)}} \tag{6}$$

Nach Kosinus-Satz und dieser Beziehung folgt:

$$\begin{aligned} c^2_{0,(a)} &= u^2_{1,(a)} + w^2_{0,(a)} - 2 \cdot u_{1,(a)} \cdot w_{0,(a)} \cdot \cos\beta_{0,(a)} \\ &= u^2_{1,(a)} + \frac{\delta^2_{r,(a)} \cdot u^2_{1,(a)}}{\cos^2\beta_{0,(a)}} - 2 \cdot u^2_{1,(a)} \cdot \delta_{r,(a)} \\ &= u^2_{1,(a)} \cdot (1 - 2 \cdot \delta_{r,(a)} + \delta^2_{r,(a)} / \cos^2\beta_{0,(a)}) \end{aligned}$$

Mit diesen Ausdrücken und Gl. (4-98) an Stelle von Gl. (3) ergibt Ansatz (5-13) nach entsprechendem Umformen der Beziehungen für die drallbehaftete Saugraumströmung ($\delta_{r,(a)} \neq 1$ vor Saugkanten-Außenpunkt (a_1)). Das sind Gl. (5-19) für den optimalen Relativstromwinkel $\beta_{0,(a),opt}$ und Gl. (5-21) für die Saugzahl S_y.

Gleichung (5-21) geht für Regelfall $\delta_{r,(a)} = 1$ über in Beziehung (5).

Herleitung von Gl. (5-45):

In Beziehung (4) werden gemäß Abschnitt 5.3.3 ersetzt:

$\dot{V}_{La}$	durch	$\dot{V}_0$		
$2 \cdot Y_{H,M}$	durch	a^2		
λ_1	durch	$(1+\lambda)$	und	$\lambda_2 = 0$

Eingeführt, ergibt:

$$\begin{aligned} \frac{a_0^2}{2} &= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{4 \cdot \dot{V}_0 \cdot \pi \cdot n^2}{k_N}\right)^{2/3} \cdot \left[\frac{1+\lambda}{(\cos^2\beta_{0,(a)} \cdot \sin\beta_{0,(a)})^{2/3}}\right] \\ a_0^3 &= \frac{4 \cdot \dot{V}_0 \cdot \pi \cdot n^2}{k_N} \cdot \frac{(1+\lambda)^{3/2}}{\cos^2\beta_{0,(a)} \cdot \sin\beta_{0,(a)}} \\ \frac{1}{a_0^{3/2}} &= \frac{1}{n} \cdot \sqrt{\frac{k_N}{\dot{V}_0}} \cdot \sqrt{\frac{\cos^2\beta_{0,(a)} \cdot \sin\beta_{0,(a)}}{4 \cdot \pi \cdot (1+\lambda)^{3/2}}} \\ n \cdot \sqrt{\frac{\dot{V}}{k_N \cdot a_0^3}} &= \sqrt{\frac{\cos^2\beta_{0,(a)} \cdot \sin\beta_{0,(a)}}{4 \cdot \pi \cdot (1+\lambda)^{3/2}}} \end{aligned}$$

Ergebnis: Gl. (5-45)