5 Lösung des Integrals von Gl. (7-76), Abschnitt 7.2.1.5

$$I = \int_{r_i=a-\varrho}^{R_\varphi=a+\varrho} \frac{\sqrt{\varrho^2-(r-a)^2}}{r} \cdot \mathrm{d}r$$

Das Integral wird nach BEINHOFF durch Multiplikation des Zählers und des Nenners mit der Wurzel (Erweiterung) und entsprechendem Umformen in zwei Teilintegrale zerlegt.

$$\begin{aligned}
I &= \int_{a-\varrho}^{a+\varrho} \frac{\varrho^2-(r-a)^2}{r\cdot\sqrt{\varrho^2-(r-a)^2}} \cdot \mathrm{d}r \\
&= \int_{a-\varrho}^{a+\varrho} \frac{\varrho^2-r^2+2\cdot a\cdot r-a^2}{r\cdot\sqrt{\varrho^2-(r-a)^2}} \cdot \mathrm{d}r \\
&= \int_{a-\varrho}^{a+\varrho} \frac{\varrho^2-a^2}{r\cdot\sqrt{\varrho^2-(r-a)^2}} \cdot \mathrm{d}r + \int_{a-\varrho}^{a+\varrho} \frac{2\cdot a\cdot r-r^2}{r\cdot\sqrt{\varrho^2-(r-a)^2}} \cdot \mathrm{d}r \\
&= \underbrace{-(a^2-\varrho^2)\cdot\int_{a-\varrho}^{a+\varrho} \frac{\mathrm{d}r}{r\cdot\sqrt{\varrho^2-(r-a)^2}}}_{I_1} + \underbrace{\int_{a-\varrho}^{a+\varrho} \frac{2\cdot a-r}{\sqrt{\varrho^2-(r-a)^2}} \cdot \mathrm{d}r}_{I_2}
\end{aligned}$$

Lösung des 1. Teilintegrals I_1:

Zunächst wird $B^2 = (a^2-\varrho^2)$ gesetzt, dann für $1/r = x$, d. h. $r = 1/x$, eingeführt (substituiert).

Aus $r = 1/x = x^{-1}$ folgt durch Differenzieren:

$$\mathrm{d}r/\mathrm{d}x = -x^{-2} \rightarrow \mathrm{d}r = -\mathrm{d}x/x^2$$

Die Substitution durchgeführt, ergibt für das Integral:

$$\begin{aligned}
I_1 &= -(a^2-\varrho^2)\cdot\int_{r_i=a-\varrho}^{R_\varphi=a+\varrho} \frac{1/r}{\sqrt{\varrho^2-r^2\cdot(1-a/r)^2}} \cdot \mathrm{d}r \\
&= -B^2\cdot\int_{x_i}^{X_\varphi} \frac{x}{\sqrt{\varrho^2-(1/x^2)\cdot(1-a\cdot x)^2}} \cdot (-\mathrm{d}x/x^2) \\
&= B^2\cdot\int_{x_i}^{X_\varphi} \frac{1}{\sqrt{\varrho^2\cdot x^2-(1-a\cdot x)^2}} \cdot \mathrm{d}x
\end{aligned}$$

Des Weiteren müssen die Integrationsgrenzen mit $x = 1/r$ umgeschrieben und eingesetzt werden:

Untere Grenze: $x_i = 1/r_i = 1/(a-\varrho)$
Obere Grenze: $X_\varphi = 1/R_\varphi = 1/(a+\varrho)$

$$I_1 = B^2\cdot\int_{1/(a-\varrho)}^{1/(a+\varrho)} \frac{1}{\sqrt{\varrho^2\cdot x^2-(1-a\cdot x)^2}} \cdot \mathrm{d}x$$

Der Radikand der Nennerwurzel wird umgeformt:

$$\begin{aligned}
\varrho^2\cdot x^2-(1-a\cdot x)^2 &= \varrho^2\cdot x^2-1+2\cdot a\cdot x-a^2\cdot x^2 \\
&= -1+2\cdot a\cdot x-(a^2-\varrho^2)\cdot x^2 \\
&= -1+2\cdot a\cdot x-B^2\cdot x^2
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\varrho^2 \cdot x^2 - (1 - a \cdot x)^2 &= \frac{a^2}{B^2} - \frac{a^2}{B^2} - 1 + \frac{2 \cdot B \cdot a \cdot x}{B} - B^2 \cdot x^2 \\
&= \frac{a^2}{B^2} - 1 - \left(B^2 \cdot x^2 - 2 \cdot B \cdot x \cdot \frac{a}{B} + \frac{a^2}{B^2} \right) \\
&= \frac{a^2 - B^2}{B^2} - \left(B^2 \cdot x - \frac{a}{B} \right)^2 \\
&= \frac{a^2 - B^2}{B^2} - \frac{(B^2 \cdot x - a)^2}{B^2} \\
&= (1/B^2) \cdot \left[a^2 - B^2 - (B^2 \cdot x - a)^2 \right] \\
&= (1/B^2) \cdot \left[a^2 - (a^2 - \varrho^2) - (B^2 \cdot x - a)^2 \right] \\
&= (1/B^2) \cdot \left[\varrho^2 - (B^2 \cdot x - a)^2 \right]
\end{aligned}
$$

Diese Umformung in das Integral I_1 eingesetzt:

$$
I_1 = B^3 \cdot \int\limits_{x_\mathrm{i}=1/(a-\varrho)}^{X_\varphi=1/(a+\varrho)} \frac{1}{\sqrt{\varrho^2 - (B^2 \cdot x - a)^2}} \cdot \mathrm{d}x
$$

Zur Lösung ist eine zweite Substitution notwendig:

$$
u = B^2 \cdot x - a
$$

differenziert:

$$
\mathrm{d}u/\mathrm{d}x = B^2
$$

hieraus:

$$
\mathrm{d}x = (1/B^2) \cdot \mathrm{d}u
$$

Damit wird mit den neuen Grenzen u_i (untere) und U_φ (obere):

$$
I_1 = B^3 \cdot \int\limits_{u_\mathrm{i}}^{U_\varphi} \frac{1}{\sqrt{\varrho^2 - u^2}} \cdot \left(\frac{1}{B^2} \cdot \mathrm{d}u \right) = B \cdot \int\limits_{u_\mathrm{i}}^{U_\varphi} \frac{1}{\sqrt{\varrho^2 - u^2}} \cdot \mathrm{d}u
$$

Bemerkung: Der Integrand ist symmetrisch zur Ordinate.

Zugehörend müssen die Integrationsgrenzen entsprechend $u = B^2 \cdot x - a$ abermals umgeschrieben werden:

Untere Grenze:

$$
u_\mathrm{i} = B^2 \cdot x_\mathrm{i} - a
$$

Mit

$$
\begin{aligned}
& x_\mathrm{i} = (a - \varrho)^{-1} \quad \text{und} \quad B^2 = a^2 - \varrho^2 \\
& u_\mathrm{i} = (a^2 - \varrho^2) \cdot \frac{1}{a - \varrho} - a = a + \varrho - a \\
& u_\mathrm{i} = \varrho
\end{aligned}
$$

Obere Grenze:

$$
U_\varphi = B^2 \cdot X_\varphi - a
$$

Mit

$$
\begin{aligned}
& X_\varphi = 1/(a + \varrho) \\
& U_\varphi = (a^2 - \varrho^2)/(a + \varrho) - a = a - \varrho - a \\
& U_\varphi = -\varrho
\end{aligned}
$$

Eingesetzt in die letzte Form des Integrals I_1:

$$I_1 = B \cdot \int\limits_{\varrho}^{-\varrho} \frac{1}{\sqrt{\varrho^2 - u^2}} \cdot \mathrm{d}u = -B \cdot \int\limits_{-\varrho}^{\varrho} \frac{1}{\sqrt{\varrho^2 - u^2}} \cdot \mathrm{d}u$$

Da der Integrand symmetrisch ist, kann gesetzt werden:

$$I_1 = -2 \cdot B \cdot \int\limits_{0}^{\varrho} \left(1/\sqrt{\varrho^2 - u^2}\right) \cdot \mathrm{d}u$$

Letztlich ausgewertet mit [86] ergibt:

$$I_1 = -2 \cdot B \cdot \arcsin(u/\varrho)|_0^{\varrho} = -2 \cdot B \cdot (\arcsin 1 - \arcsin 0)$$

$$I_1 = -2 \cdot B \cdot (\pi/2) = -\pi \cdot B$$

$$\boldsymbol{I_1 = \pi \cdot \sqrt{a^2 - \varrho^2}}$$

Lösung des 2. Teilintegrals I_2:

$$I_2 = \int\limits_{r_\mathrm{i}=a-\varrho}^{R_\varphi=a+\varrho} \frac{2 \cdot a - r}{\sqrt{\varrho^2 - (r-a)^2}} \cdot \mathrm{d}r$$

Mit der Substitution $z = r - a \rightarrow r = z + a$:

Differenziert

$$\mathrm{d}z/\mathrm{d}r = 1 \rightarrow \mathrm{d}r = \mathrm{d}z$$

und entsprechend die Grenzen: untere z_i, obere Z_φ

geht das Integral über in die Form:

$$I_2 = \int\limits_{z_\mathrm{i}}^{Z_\varphi} \frac{2 \cdot a - (z+a)}{\sqrt{\varrho^2 - z^2}} \cdot \mathrm{d}z = \int\limits_{z_\mathrm{i}}^{Z_\varphi} \frac{a - z}{\sqrt{\varrho^2 - z^2}} \cdot \mathrm{d}z$$

Umschreibung der Integrationsgrenzen entsprechend $z = r - a$:

Untere Grenze: $z_\mathrm{i} = r_\mathrm{i} - a = a - \varrho - a = -\varrho$
Obere Grenze: $Z_\varphi = R_\varphi - a = a + \varrho - a = \varrho$

Eingesetzt und das Integral ausgewertet mit [86]:

$$I_2 = \int\limits_{-\varrho}^{\varrho} \frac{a - z}{\sqrt{\varrho^2 - z^2}} \cdot \mathrm{d}z$$

$$= a \cdot \int\limits_{-\varrho}^{\varrho} \frac{1}{\sqrt{\varrho^2 - z^2}} \cdot \mathrm{d}z - \int\limits_{-\varrho}^{\varrho} \frac{z}{\sqrt{\varrho^2 - z^2}} \cdot \mathrm{d}z$$

$$I_2 = a \cdot \arcsin(z/\varrho)|_{-\varrho}^{+\varrho} + \sqrt{\varrho^2 - z^2}|_{-\varrho}^{+\varrho}$$

$$I_2 = a \cdot [\arcsin 1 - \arcsin(-1)] + 0$$

$$= a \cdot [(\pi/2) - (-\pi/2)]$$

$$\boldsymbol{I_2 = a \cdot \pi}$$

Der **Gesamtwert des Integrals** als Summe der beiden Teilintegrale ist demnach:

$$I = I_1 + I_2 = -\pi\sqrt{a^2 - \varrho^2} + a \cdot \pi$$

$$\boldsymbol{I = \pi \cdot (a - \sqrt{a^2 - \varrho^2})}$$