7 Wärmetönung bei der technischen Arbeit von Gasen und Dämpfen, Abschnitt 8.5.9

Die Wärmeabfuhr (Verdichtung) bzw. -zufuhr (Entspannung) bei der Polytrope mit $n < \varkappa$ folgt aus dem ersten Hauptsatz der Thermodynamik, auch als GIBBS'sche (Fundamental-)Gleichung bezeichnet:

$$\mathrm{d}q = \mathrm{d}u + p \cdot \mathrm{d}v = \mathrm{d}h - v \cdot \mathrm{d}p \tag{1}$$

Mit

$\mathrm{d}u = c_v \cdot \mathrm{d}T$	innere Wärme
$p \cdot \mathrm{d}v = \mathrm{d}w_\mathrm{G}$	Gasarbeit
$\mathrm{d}q = c_v \cdot \mathrm{d}T + \mathrm{d}w_\mathrm{G}$	Wärmetönung

Hierzu aus

Polytropenbeziehung $p \cdot v^n = \text{konst}$ und

Gasgleichung $p \cdot v = R \cdot T$

die Zusammenhänge mit Anfangszustand 1 (p_1; v_1; T_1):

$$p \cdot v^n = p_1 \cdot v_1^n$$
$$p \cdot (R \cdot T/p)^n = p_1 \cdot (R \cdot T_1/p_1)^n$$
$$T/T_1 = (p/p_1)^{(n-1)/n}$$
$$p \cdot v^n = \text{konst} \rightarrow p = \text{konst} \cdot v^{-n} = p_1 \cdot v_1^n \cdot v^{-n}$$

Damit ergibt sich für die Gasarbeit:

$$\mathrm{d}w_\mathrm{G} = p \cdot \mathrm{d}v = \text{konst} \cdot v^{-n} \cdot \mathrm{d}v = p_1 \cdot v_1^n \cdot v^{-n} \cdot \mathrm{d}v$$

Integriert in den Grenzen von 0 bis w_G bei v_1 bis v:

$$\int_0^{w_\mathrm{G}} \mathrm{d}w_\mathrm{G} = p_1 \cdot v_1^n \cdot \int_{v_1}^{v} v^{-n} \cdot \mathrm{d}v = p_1 \cdot v_1^n \cdot \left. \frac{v^{-n+1}}{-n+1} \right|_{v_1}^{v}$$

$$w_\mathrm{G} = \frac{1}{1-n} \cdot p_1 \cdot v_1^n \cdot \left[v^{-n+1} - v_1^{-n+1}\right]$$

$$w_\mathrm{G} = \frac{1}{1-n} \cdot p_1 \cdot v_1^n \cdot \left[v^{1-n} - v_1^{1-n}\right]$$

$$w_\mathrm{G} = \frac{1}{1-n} \cdot \left[v \cdot \frac{p_1 \cdot v_1^n}{v^n} - p_1 \cdot v_1\right]$$

$$w_\mathrm{G} = \frac{1}{1-n} \cdot (p \cdot v - p_1 \cdot v_1)$$

und mit $p \cdot v = R \cdot T$; $\varkappa = c_p/c_v$ sowie $R = c_p - c_v = c_v \cdot \varkappa - c_v = c_v \cdot (\varkappa - 1)$:

$$w_\mathrm{G} = \frac{1}{1-n} \cdot (R \cdot T - R \cdot T_1) = \frac{1}{1-n} \cdot R \cdot (T - T_1)$$

$$w_\mathrm{G} = \frac{\varkappa - 1}{1-n} \cdot c_v \cdot (T - T_1) = \frac{\varkappa - 1}{n-1} \cdot c_v \cdot (T_1 - T)$$

$$w_\mathrm{G} = -\frac{\varkappa - 1}{n-1} \cdot c_v \cdot (T - T_1)$$

Differenziert:

$$\mathrm{d}w_\mathrm{G} = -\frac{\varkappa - 1}{n-1} \cdot c_v \cdot \mathrm{d}T \tag{2}$$

Eingesetzt in die GIBBS'sche Gleichung:

$$\mathrm{d}q = c_v \cdot \mathrm{d}T - \frac{\varkappa - 1}{n-1} \cdot c_v \cdot \mathrm{d}T = \frac{(n-1)-(\varkappa-1)}{n-1} \cdot c_v \cdot \mathrm{d}T$$

$$\mathrm{d}q = \frac{n-\varkappa}{n-1} \cdot c_v \cdot \mathrm{d}T = c_n \cdot \mathrm{d}T \tag{3}$$

Mit der spezifischen Wärme, auch als Wärmekapazität bezeichnet, der Polytropen:

$$c_n = \frac{n-\varkappa}{n-1} \cdot c_v \tag{4}$$

Bemerkung: c_n ist negativ, da hier $n < \varkappa$

Gleichung (3) integriert, wenn $c_n =$ konst, exakt nur für thermodynamisch ideales Gasverhalten erfüllt, bei:

a) Kompression

Integrationsgrenzen in Verdichtungsrichtung 0 bis q für T_{S} bis T_{D}:

$$\int_0^q \mathrm{d}q = c_n \cdot \int_{T_{\mathrm{S}}}^{T_{\mathrm{D}}} \mathrm{d}T$$

$$q = c_n \cdot (T_{\mathrm{D}} - T_{\mathrm{S}}) = c_n \cdot \Delta T$$

Ergebnis: q negativ, da $T_{\mathrm{D}} > T_{\mathrm{S}}$, weshalb ΔT positiv und c_n negativ. Somit Wärmeabfuhr q notwendig.

b) Expansion

Integrationsgrenzen in Entspannungsrichtung 0 bis q für T_{D} bis T_{S}:

$$\int_0^q \mathrm{d}q = c_n \cdot \int_{T_{\mathrm{D}}}^{T_{\mathrm{S}}} \mathrm{d}T$$

$$q = c_n \cdot (T_{\mathrm{S}} - T_{\mathrm{D}}) = -c_n \cdot (T_{\mathrm{D}} - T_{\mathrm{S}}) = -c_n \cdot \Delta T$$

Ergebnis: q positiv, da $T_{\mathrm{S}} < T_{\mathrm{D}}$, weshalb Wärmezufuhr q notwendig.

Mit

$$\begin{aligned} p \cdot \mathrm{d}v &= R \cdot \mathrm{d}T - v \cdot \mathrm{d}p = (c_p - c_v) \cdot \mathrm{d}T - v \cdot \mathrm{d}p \\ &= \mathrm{d}h - \mathrm{d}u - v \cdot \mathrm{d}p \end{aligned}$$

aus der differenziellen Gasgleichung geht die GIBBS'sche Beziehung über in die Form

$$\mathrm{d}q = \mathrm{d}h - v \cdot \mathrm{d}p = \mathrm{d}h - \mathrm{d}w_{\mathrm{t}} \tag{5}$$

Integriert

$$q = \Delta h - w_{\mathrm{t}} \quad \text{oder} \quad w_{\mathrm{t}} = \Delta h - q$$

w_{t} ... technische Arbeit des Gases/Dampfes

Da bei

- Verdichtung q negativ, ist $w_{\mathrm{t}} = \Delta h + |q|$
- Entspannung q positiv, ist $w_{\mathrm{t}} = \Delta h - |q|$

Zusammengefasst:

$$w_{\mathrm{t}} = \Delta h \pm |q| \tag{6}$$

wobei

- Verdichter oberes Vorzeichen
- Turbinen unteres Vorzeichen

Gemäß Gl. (6) setzt sich die technische Arbeit, gleichgültig ob ohne oder mit Verlusten, aus der Enthalpiedifferenz des Gases (Wärmeinhalt) und der Wärmetönung zusammen. Wärmetönung bedeutet bei Kompression (Verdichter) Wärmeabfuhr und bei Expansion (Turbinen) Wärmezufuhr. Beziehung (6) gilt auch ohne Wärmetönung, also ohne Wärmeaustausch q des Arbeitsgases (-dampfes) mit der Umgebung ($q = 0$). Dabei ist dann $n > \varkappa$. Diese Polytrope wird auch als Überisentrope bezeichnet, da sie gemäß Exponent $n > \varkappa$ oberhalb der Isentropen liegt und deshalb im (p, v)-Diagramm steiler verläuft als diese.

Für das Verhältnis von Wärmetönung, auch als Wärmeänderung bezeichnet, und Gasarbeit liefern die Beziehungen (2) und (3):

$$\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}w_\mathrm{G}} = \frac{((n-\varkappa)/(n-1)) \cdot c_v \cdot \mathrm{d}T}{(-(\varkappa-1)/(n-1)) \cdot c_v \cdot \mathrm{d}T} = \frac{\varkappa - n}{\varkappa - 1} \tag{7}$$

Für die möglichen Zustandsänderungen des Arbeitsmediums in Strömungsmaschinen-Anlagen gelten gemäß vorstehenden Beziehungen:

- *Isobare*: $p = \text{konst} \rightarrow \mathrm{d}p = 0$

  Hierzu noch Gl. (1):

  $\mathrm{d}q = \mathrm{d}h$

  integriert

  $q = \Delta h$

  Liegt vor bei Wärmezufuhr in Dampferzeugern von Dampfkraftanlagen und Brennkammern von Gasturbinen (sog. isobare Wärmeübertragung).

- *Isotherme*: $T = \text{konst} \rightarrow \mathrm{d}T = 0 \quad \mathrm{d}h = 0$

  Liegt vor bei sog. vollgekühlter Verdichtung, die jedoch technisch nicht vollständig zu verwirklichen ist.

  Hierbei nach Gl. (6) $|q| = |w_\mathrm{t}|$. Der Betrag der Wärmetönung ist demnach gleich dem Betrag der technischen Arbeit des Gases/Dampfes.

  Verdichtung: Die abzuführende Wärme ist so groß wie die zugeführte technische Arbeit.

  Entspannung: Die zuzuführende Wärme ist so groß wie die gewonnene technische Arbeit.

  Technische Arbeit

  $$\Delta Y \equiv w_{\mathrm{t},T} = R \cdot T_\mathrm{S} \cdot \ln \varPi \tag{8}$$

  Hieraus Druckverhältnis

  $$\varPi = \exp\left[\Delta Y/(R \cdot T_\mathrm{S})\right] \equiv \mathrm{e}^{[\Delta Y/(R \cdot T_s)]} \tag{9}$$

- *Isentrope*: $s = \text{konst} \rightarrow \mathrm{d}s = 0 \quad \mathrm{d}q = T\,\mathrm{d}s = 0$

  Bedeutet Expansion oder Kompression von strömungstechnisch idealem, d. h. reibungsfreiem Arbeitsmedium in adiabatem, also wärmedichtem Raum (ohne Wärmezu- oder -abfuhr). Ist Idealvorgang für ungekühlte Verdichtung bzw. Entspannung ohne Wärmeaustausch.

Technische Verdichtungsarbeit

$$\Delta h_s = w_{\mathrm{t},s} = \frac{\varkappa}{\varkappa - 1} \cdot R \cdot T_\mathrm{S} \cdot \left[\varPi^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}} - 1\right] \tag{10}$$

Hieraus Druckverhältnis

$$\varPi = \left[\frac{\varkappa - 1}{\varkappa} \cdot \frac{\Delta h_s}{R \cdot T_\mathrm{S}} + 1\right]^{\frac{\varkappa}{\varkappa-1}} \tag{11}$$

Mit

$\Delta h_s = Y$	für gesamte Maschine (spez. Stutzenarbeit). Hierbei wird $\varPi$ oft mit $\varPi_\mathrm{M}$ bezeichnet.
$\Delta h_s = \Delta Y$	für die betreffende Stufe (spez. Stufenarbeit). Hierbei wird Δh_s vielfach mit $\Delta h_{s,\mathrm{St}}$ und $\varPi$ mit $\varPi_\mathrm{St}$ bezeichnet.

Hinweise:
Thermodynamisch ideal bedeutet, das Medium erfüllt exakt die Gasgleichung ($R = \text{konst}$, $\varkappa = \text{konst}$). *Strömungstechnisch ideal* bedeutet, das Medium ist reibungsfrei, also ohne Viskosität ($\nu = 0$). Oft zugleich beides vorausgesetzt.

Die Summe aus mechanischer und thermischer Energie wird auch als **Totalenergie** bezeichnet:
- Mechanische Energie besteht aus Lagen- oder potenzieller Energie $g \cdot z$ mit Höhe z und kinetischer Energie $c^2/2$ mit Geschwindigkeit c.
- Thermische Energie (Enthalpie) ist $h = p \cdot v + u$.

Bemerkungen:

In der Natur gibt es drei verschiedene *Energieformen* durch:
a) Massenkräfte (Wasser, Wind)
b) Molekularkräfte (Verbrennung)
c) Kernkräfte der Atome (Fission, Fusion)

Hierbei beträgt die Energiedichte
- bei b) etwa das 10^6-Fache der bei a).
- bei c) etwa das 10^6-Fache der bei b) und damit ca. das 10^{12}-Fache der von a).

Energieträger und -arten:
α) fossile Brennstoffe (Kohle, Erdöl, Erdgas) $\rightarrow$ chemisch gebundene Energie.
β) fissile Brennstoffe (Kernspaltung (Fission), Kernverschmelzung (Fusion)) $\rightarrow$ physikalisch gebundene Energie.
γ) regenerative Energien: Sonne (Strahlung, Wärme), Wasser, Wind, Biomasse und Erdwärme.