



Bild 1. Gebogenes Rohr, das rotiert, das gefüllt ist und in Wasser eintaucht.

a) Gemäß Energiegleichung der Relativströmung (Gl. 2-23) gilt mit der Höhenlagenenergie $g \cdot z$:

$$g \cdot z + p/\rho + w^2/2 - u^2/2 = \text{konst}$$

Angewendet auf den Stromfaden ① - ② im Relativsystem (Bild 1):

$$\text{ER ①-②: } g \cdot z_1 + \frac{p_1}{\rho} + \frac{w_1^2}{2} - \frac{u_1^2}{2} = g \cdot z_2 + \frac{p_2}{\rho} + \frac{w_2^2}{2} - \frac{u_2^2}{2}$$

$$\text{Mit } z_1 = -h; \quad p_1 = p_b + \rho \cdot g \cdot h; \quad w_1 \approx 0; \quad u_1 = 0 \\ z_2 = H; \quad p_2 = p_b; \quad w_2 = ?; \quad u_2 = R \cdot \omega$$

$$\text{wird } -g \cdot h + \frac{p_b + \rho \cdot g \cdot h}{\rho} = g \cdot H + \frac{p_b}{\rho} + \frac{w_2^2}{2} - \frac{R^2 \cdot \omega^2}{2}$$

$$\text{Hieraus } w_2 = \sqrt{R^2 \cdot \omega^2 - 2 \cdot g \cdot H} \quad (16-1)$$

Damit ergibt sich:

$$\dot{V} = A_2 \cdot w_2 = \frac{d^2 \cdot \pi}{4} \cdot \sqrt{R^2 \cdot \omega^2 - 2 \cdot g \cdot H} \quad (16-2)$$

b) Die durch die Rotation des Rohres dem Fluid zugeführte spezifische Energie ist im Absolutsystem entlang dem Stromfaden ① - ②:

$$e_{12} = e_2 - e_1 = z_2 \cdot g + \frac{p_2}{\rho} + \frac{c_2^2}{2} - \left(z_1 \cdot g + \frac{p_1}{\rho} + \frac{c_1^2}{2} \right)$$

$$\text{Mit } z_2 = H; \quad p_2 = p_b; \quad c_2^2 = w_2^2 + u_2^2 \\ z_1 = -h; \quad p_1 = p_b + \rho \cdot g \cdot h; \quad c_1^2 \approx 0$$

$$\text{wird } e_{12} = g \cdot H + \frac{p_b}{\rho} + \frac{w_2^2 + u_2^2}{2} - \left(-g \cdot h + \frac{p_b + \rho \cdot g \cdot h}{\rho} \right)$$

$$e_{12} = g \cdot H + \frac{w_2^2 + u_2^2}{2} = g \cdot H + \frac{w_2^2 + \omega^2 \cdot R^2}{2}$$

Gl. (16-1) eingesetzt, führt letztlich zu:

$$e_{12} = R^2 \cdot \omega^2 \quad (16-3)$$

Damit ergibt sich für die Gesamtenergie und die Leistung:

$$\text{Energie: } E_{12} = m \cdot e_{12} = m \cdot R^2 \cdot \omega^2$$

$$\text{Leistung: } P = \frac{dE_{12}}{dt} = \frac{d}{dt} (m \cdot e_{12}) = \dot{m} \cdot e_{12}$$

$$P = \dot{m} \cdot R^2 \cdot \omega^2 = \rho \cdot \dot{V} \cdot R^2 \cdot \omega^2$$

Mit $\dot{V} = A_2 \cdot w_2$ und Gl. (16-2):

$$P = \rho \cdot A_2 \cdot R^2 \cdot \omega^2 \cdot \sqrt{R^2 \cdot \omega^2 - 2 \cdot g \cdot H} \quad (16-4)$$

$$c) \quad \eta = P_{\text{nutz}} / P_{\text{zu}}$$

Die Nutzleistung P_{nutz} ist durch das Anheben des Wasserstromes \dot{V} um die Höhe H bedingt:

$$P_{\text{nutz}} = \rho \cdot \dot{V} \cdot H = \rho \cdot g \cdot \dot{V} \cdot H \quad (16-5)$$

Die zugeführte Leistung ist die in Frage b) berechnete:

$$P_{\text{zu}} = \rho \cdot \dot{V} \cdot R^2 \cdot \omega^2 \quad (16-6)$$

Damit wird der Förderwirkungsgrad:

$$\eta = \frac{g \cdot H}{R^2 \cdot \omega^2} \quad (16-7)$$