

磁偶极子源电磁场代数解与积分解的数值计算

洪德成, 王海军

(吉林大学物理学院, 长春 130012)

摘要: 近年来计算物理在大学物理教育中愈加受到关注。本文由麦克斯韦方程出发, 通过引入赫兹式, 推导出磁偶极子源在均匀介质中激发的电磁场代数表达式及相应的积分表达式。采用三次样条拟合与高斯-勒让德数值积分方法联合求解其积分解, 并与其代数解进行数值验证, 为学生提供一个既有物理背景又有数值计算方法的电动力学计算案例。

关键词: 磁偶极子, 电磁场, 数值积分

中图分类号: O 442 **文献标识码** A

1. 引言:

随着计算机模拟技术的发展, 在科学研究领域, 计算物理学与理论物理学、实验物理学成为当代物理学发展的三驾马车。但在目前的大学物理教育体系中仍以理论物理为主, 实验物理次之, 计算物理再次之。理论物理和实验物理都已建立起成熟而完备的教学体系, 而计算物理起步晚, 发展缓慢, 且教学案例较少。

本文针对磁偶极子源, 从麦克斯韦方程组出发, 通过引入赫兹式推导无限大均匀介质中电磁场代数表达式和积分表达式, 并给出相应的数值计算方法。代数解形式简单、参数关系明确, 但不能处理含有边界的非均匀介质电磁场问题; 积分解适用性较广, 可进一步扩展到水平层状分层、圆柱状分层及球状分层介质中电磁场分布问题的求解[1-3]。根据不同的边界类型(水平边界、圆柱边界、球形边界), 积分解的具体表达式形式也不同。

为简明起见¹, 本文给出适用于水平分层介质的电磁场积分解。积分表达式为包含贝塞尔函数的高阶震荡无穷积分(也称 Sommerfeld 积分)。采用三次样条拟合、高斯-勒让德数值积分[4]、以及两种算法相结合的方式分别求解 Sommerfeld 积分。

2. 磁偶极子源的电场和磁场

2.1 场的代数解

无限小电流环可等价于磁偶极子源, 设电流随时间变化关系为 $e^{-i\omega t}$, 麦克斯韦方程组满足如下形式

$$\nabla \times \mathbf{E} = i\omega \mathbf{B} \quad (1)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = -i\omega \mathbf{D} + \mathbf{J} \quad (2)$$

介质的本构关系:

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} + \mu \mathbf{M} \delta(\mathbf{r}) \quad (3.1)$$

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}, \mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} \quad (3.2)$$

其中 μ 、 σ 和 ε 分别为介质磁导率、电导率和介电常数。 \mathbf{M} 代表磁偶极子源的强度。将本构关系(3)代入(1)和(2)得:

$$\nabla \times \mathbf{E} = i\omega \mu \mathbf{H} + i\omega \mu \mathbf{M} \delta(\mathbf{r}) \quad (4)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \sigma^* \mathbf{E} \quad (5)$$

其中 $\sigma^* = \sigma - i\omega \varepsilon$ 为复电导率。对(5)式

取散度, 并考虑到 $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$, 得到:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \quad (6)$$

由此引入赫兹势 $\boldsymbol{\pi}$,

$$\mathbf{E} = i\omega \mu \nabla \times \boldsymbol{\pi} \quad (7)$$

同时, 令赫兹势 $\boldsymbol{\pi}$ 满足如下散度方程:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\pi} = \phi \quad (8)$$

收稿日期:

基金项目:

aa
aa
aa

将 (7) 代入 (5) 得磁场表达式,

$$\mathbf{H} = i\omega\mu\sigma^* \boldsymbol{\pi} + \nabla\phi \quad (9)$$

将式 (7) 和 (8) 代入 (1), 并对方程两端取旋度, 得到如下赫兹式方程:

$$\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{\pi}) = i\omega\mu\sigma^* \boldsymbol{\pi} + \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{\pi}) + \mathbf{M}\delta(\mathbf{r}) \quad (10)$$

在直角坐标系中 $\nabla = \mathbf{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z}$,

利用旋度与散度运算规则:

$$\nabla \times \boldsymbol{\pi} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \pi_x & \pi_y & \pi_z \end{bmatrix} \quad (11.1)$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\pi} = \frac{\partial \pi_x}{\partial x} + \frac{\partial \pi_y}{\partial y} + \frac{\partial \pi_z}{\partial z} \quad (11.2)$$

式 (10) 进一步展开为:

$$\frac{\partial^2 \pi_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \pi_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \pi_x}{\partial z^2} + i\omega\mu_0 \sigma \pi_x = -M_x \delta(\mathbf{r}) \quad (12.1)$$

$$\frac{\partial^2 \pi_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \pi_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \pi_y}{\partial z^2} + i\omega\mu_0 \sigma \pi_y = -M_y \delta(\mathbf{r}) \quad (12.2)$$

$$\frac{\partial^2 \pi_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \pi_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \pi_z}{\partial z^2} + i\omega\mu_0 \sigma \pi_z = -M_z \delta(\mathbf{r}) \quad (12.3)$$

可以看出, 由于空间对称关系, 每个分量满足形式相同的偏微分方程。这里我们只考虑

z 方向磁偶极子源 M_z , 即令 $M_x = M_y = 0$,

则式 (12) 的解为[5]:

$$\pi_x = 0, \quad \pi_y = 0, \quad \pi_z = \frac{M_z}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \quad (13)$$

其中, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ 。将 (13) 代入

(8) 得,

$$\phi = \frac{M_z}{4\pi} \frac{z}{r^3} (ikr - 1) e^{ikr} \quad (14)$$

将式 (13) 代入 (7), 得到电场分量表达式:

$$E_x = \frac{M_z}{4\pi} i\omega\mu_0 \frac{ye^{ikr}}{r^3} (ikr - 1) \quad (15.1)$$

$$E_y = -\frac{M_z}{4\pi} i\omega\mu_0 \frac{xe^{ikr}}{r^3} (ikr - 1) \quad (15.2)$$

$$E_z = 0 \quad (15.3)$$

将式 (13) 和 (14) 代入 (9), 得到磁场分量表达式:

$$H_x = -\frac{M_z x z e^{ikr}}{4\pi} \left[\frac{k^2}{r^3} + \frac{3ik}{r^4} - \frac{3}{r^5} \right] \quad (16.1)$$

$$H_y = -\frac{M_z y z e^{ikr}}{4\pi} \left[\frac{k^2}{r^3} + \frac{3ik}{r^4} - \frac{3}{r^5} \right] \quad (16.2)$$

$$H_z = \frac{M_z e^{ikr}}{4\pi r} \left[k^2 + \frac{ik}{r} - \frac{k^2 z^2 + 1}{r^2} - \frac{3ik z^2}{r^3} + \frac{3z^2}{r^4} \right] \quad (16.3)$$

2.1 场的积分表达式

在圆柱坐标系 (ρ, φ, z) 中, 有如下恒等式

$$\frac{e^{ikr}}{r} = \int_0^{+\infty} J_0(k_\rho \rho) \frac{ik_\rho}{k_z} e^{ik_z |z|} dk_\rho \quad (17)$$

其中, k_ρ 为水平波数, $k_z = \sqrt{i\omega\mu\sigma^* - k_\rho^2}$

为垂直波数, $r = \sqrt{\rho^2 + z^2}$ 。将式 (17) 分

别代入 (13) 和 (14), 赫兹式 π_z 分量和标

势 ϕ 改写为:

$$\pi_z = \frac{M_z}{4\pi} \int_0^{+\infty} J_0(k_\rho \rho) \frac{ik_\rho}{k_z} e^{i|z|k_z} dk_\rho \quad (18)$$

$$\phi = \frac{M_z}{4\pi} \int_0^{+\infty} -J_0(k_\rho \rho) \frac{|z|}{z} e^{i|z|k_z} k_\rho dk_\rho \quad (19)$$

将上面两式分别代入 (7) 和 (9), 并应用柱坐标系下偏微分算子

$\nabla = \mathbf{e}_\rho \frac{\partial}{\partial \rho} + \mathbf{e}_\phi \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \phi} + \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z}$, 得电场分量

$$\begin{cases} E_\rho = 0 \\ E_\phi = -\frac{\omega\mu M_z}{4\pi} \int_0^{+\infty} \frac{k_\rho^2}{k_z} J_1(k_\rho \rho) e^{i|z|k_z} dk_\rho \\ E_z = 0 \end{cases} \quad (20)$$

及磁场分量

$$\begin{cases} H_\rho = \frac{M_z}{4\pi} \int_0^{+\infty} J_1(k_\rho \rho) k_\rho^2 \frac{|z|}{z} e^{i|z|k_z} dk_\rho \\ H_\phi = 0 \\ H_z = \frac{M_z}{4\pi} \int_0^{+\infty} J_0(k_\rho \rho) \frac{ik_\rho^3}{k_z} e^{i|z|k_z} dk_\rho \end{cases} \quad (21)$$

运算过程中应用到了贝塞尔函数的导数关

系 $\frac{\partial}{\partial x} J_0(x) = -J_1(x)$ 。直角坐标系与圆柱

坐标系中电磁场分量满足如下变换关系:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{e}_x \\ \mathbf{e}_y \\ \mathbf{e}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \phi & -\sin \phi & 0 \\ \sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{e}_\rho \\ \mathbf{e}_\phi \\ \mathbf{e}_z \end{bmatrix} \quad (22)$$

3. 数值积分方法

式 (20) 和 (21) 中的 Sommerfeld 积分可统一写为如下形式:

$$F(\rho) = \int_0^\infty f(k_\rho) J_m(k_\rho \rho) k_\rho^n dk_\rho \quad (23)$$

本文分别采用三次样条插值、高斯-勒让德积分、及这两种方法结合的方式求解式 (23) 的数值积分。

3.1 三次样条拟合积分方法

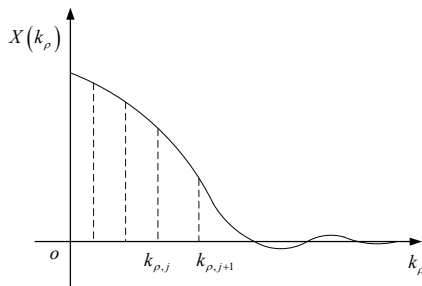


图 1 被积函数随自变量变化关系

令 $X(k_\rho) = f(k_\rho) J_m(k_\rho \rho) k_\rho^n$, 其随自

变量 k_ρ 变化关系如图 1 所示, 积分结果即

为函数 $X(k_\rho)$ 曲线与 k_ρ 轴围成的面积。我们将函数曲线分成若干段, 在任意区间上 $[k_{\rho,j}, k_{\rho,j+1}]$ 上采用三次样条函数去拟合原函数:

$$\begin{aligned} X_j(k_\rho) &\approx \sum_{l=0}^3 C_{j,l} (k_\rho)^l \\ &= C_{j,3} k_\rho^3 + C_{j,2} k_\rho^2 + C_{j,1} k_\rho + C_{j,0} \end{aligned} \quad (24)$$

其中, 多项式系数由下式给出

$$C_{j,3} = \frac{1}{6h_j} (M_{j+1} - M_j) \quad (25.1)$$

$$C_{j,2} = \frac{1}{2h_j} (k_{\rho,j+1} M_j - k_{\rho,j} M_{j+1}) \quad (25.2)$$

$$\begin{aligned} C_{j,1} &= \frac{h_j}{6} (M_j - M_{j+1}) \\ &+ \frac{1}{2h_j} (-k_{\rho,j+1}^2 M_j + k_{\rho,j}^2 M_{j+1}) \\ &+ \frac{1}{h_j} [X(k_{\rho,j+1}) - X(k_{\rho,j})] \end{aligned} \quad (25.3)$$

$$\begin{aligned} C_{j,0} &= \frac{h_j}{6} (k_{\rho,j} M_{j+1} - k_{\rho,j+1} M_j) \\ &+ \frac{1}{6h_j} (k_{\rho,j+1}^3 M_j - k_{\rho,j}^3 M_{j+1}) \\ &- \frac{1}{h_j} [k_{\rho,j} X(k_{\rho,j+1}) - k_{\rho,j+1} X(k_{\rho,j})] \end{aligned} \quad (25.4)$$

式中 $h_j = k_{\rho,j+1} - k_{\rho,j}$ 为离散点间隔, 参量

M_j 由下列矩阵求解。

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & & & \\ \mu_2 & 2 & \lambda_2 & & \\ & \mu_3 & 2 & \lambda_3 & \\ & & \mu_4 & 2 & \ddots \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & & \ddots & 2 & \lambda_N \\ & & & & & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ \vdots \\ M_{N-1} \\ M_N \\ M_{N+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ \vdots \\ d_{N-1} \\ d_N \\ d_{N+1} \end{bmatrix} \quad (26)$$

方程两侧矩阵元素分别为:

$$\mu_j = \frac{h_{j-1}}{h_{j-1} + h_j}, \lambda_j = \frac{h_j}{h_{j-1} + h_j} \quad (27.1)$$

$$d_j = 6 \frac{h_{j-1} [X(k_{\rho,j+1}) - X(k_{\rho,j})]}{h_j (h_j + h_{j-1})} - 6 \frac{h_j [X(k_{\rho,j}) - X(k_{\rho,j-1})]}{h_{j-1} (h_j + h_{j-1})} \quad (27.2)$$

$$d_1 = d_2, d_{N+1} = d_N \quad (27.3)$$

在数值计算中,通常将(23)的无穷积分截断为有限积分。取 $k_{\rho,N+1}$ 为积分上限, $k_{\rho,N+1}$ 以

后对应的被积函数足够小,在满足积分精度要求下可以忽略不计。由(25) - (27)确定所有区间内的三次函数系数后,每一区间积分结果为:

$$\begin{aligned} & \int_{k_{\rho,j}}^{k_{\rho,j+1}} X_j(k_\rho) dk_\rho \\ &= \left(\frac{1}{4} C_{j,3} k_\rho^4 + \frac{1}{3} C_{j,2} k_\rho^3 + \frac{1}{2} C_{j,1} k_\rho^2 + C_{j,0} k_\rho \right) \Big|_{k_{\rho,j}}^{k_{\rho,j+1}} \end{aligned} \quad (24)$$

将所有区间积分结果相加即为(23)的积分结果。

3.2 高斯-勒让德积分方法

高斯-勒让德积分是一种将积分运算转换为乘积运算的成熟数学积分方法,其运算规则如下

$$\int_{-1}^1 g(t) dt = \sum_{l=1}^L W_l g(t_l) \quad (25)$$

其中,方程左侧 $g(t)$ 是任意形式的被积函

数,积分限为 $[-1,1]$;方程右侧为采样点对应函数值与加权系数的乘积的加和,其中 t_l 为自变量分布在 $[-1,1]$ 区间的固定采样点, W_l 为对应点的加权系数。

例如:当 $L=5$ 时

$$t_l = \pm 0.9061798459 \quad W_l = 0.2369268851$$

$$t_l = \pm 0.5384693101 \quad W_l = 0.4786286705$$

$$t_l = 0 \quad W_l = 0.568888889$$

一般来讲,阶数 L 越大数值结果精度越高,但耗时也越多。

在求解式(23)积分时,首先将被积函数划分为若干区间,然后对每一区间积分上下限做变量替换。令,

$$k_\rho = \frac{k_{\rho,j+1} + k_{\rho,j}}{2} + \frac{k_{\rho,j+1} - k_{\rho,j}}{2} t, \quad t \in [-1,1] \quad (26)$$

则每一区间的积分变形为:

$$\begin{aligned} & \int_{x_j}^{x_{j+1}} X(k_\rho) dk_\rho = \frac{k_{\rho,j+1} - k_{\rho,j}}{2} \\ & \times \int_{-1}^1 X \left(\frac{k_{\rho,j+1} + k_{\rho,j}}{2} + \frac{k_{\rho,j+1} - k_{\rho,j}}{2} t \right) dt \end{aligned} \quad (27)$$

与(25)式对照,应用高斯-勒让德积分方法即可求出该区间的积分结果,然后将所有区间结果相加即为(23)的积分结果。

3.3 三次样条拟合结合高斯-勒让德积分方法

三次样条拟合方法和高斯-勒让德积分方法都可以独立求解式(23)的数值积分问题,为增加对积分方法的深入理解与灵活应用,也可将两种方法结合起来。采用三次样条函数拟合(23)中被积函数随自变量变化相对平滑的部分,

$$\begin{aligned} f(k_\rho) & \approx \sum_{l=0}^3 C_{j,l} (k_\rho)^l \\ &= C_{j,3} k_\rho^3 + C_{j,2} k_\rho^2 + C_{j,1} k_\rho + C_{j,0} \end{aligned} \quad (28)$$

该区间内的函数积分可进一步表达为:

$$f(\rho) = \int_{k_{\rho\min}}^{k_{\rho\max}} f(k_{\rho}\rho) J_m(k_{\rho}\rho) k_{\rho}^n dk_{\rho} \quad (29)$$

$$= \sum_{l=0}^3 C_{j,l} \int_{k_{\rho,j}}^{k_{\rho,j+1}} J_m(k_{\rho}\rho) k_{\rho}^{n+l} dk_{\rho}$$

方程(29)右侧积分可采用上述的高斯-勒让德积分方法求出。

上述三种积分方法是严格完备的,理论上,计算结果也可以无限逼近真实值。但计算机编程中总会存在由多种因素引起的计算误差,其中被积分函数形态及采样点分布规则是常见的主要因素。对同一积分问题采用不同的积分方法,一方面可以相互验证数值积分结果的正确性,另一方面也可通过对计算精度和计算效率的评估优选出最适合该问题的最佳积分方法。

4. 数值结果

本小节针对一个给定的物理模型,给出电磁场分量的数值计算结果。假定介质磁导率为真空磁导率 $\mu = \mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H/m}$; 介电常

数为真空介电常数 $\varepsilon = \varepsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12}$

F/m, 电导率 $\sigma = 0.1 \text{ S/m}$. 磁偶极子强度

$M_z = 1 \text{ A} \cdot \text{m}^2$, 频率 $f = 20 \text{ kHz}$. 发射点位置

$(0,0,0)$, 场点位置 $(0.5,0,1)$ 。表1给出了

代数解与积分解对比结果。

表 1 电磁场代数解与积分解数值对比

计算方法	磁场分量 Hx	磁场分量 Hz	电场分量 Ey
代数解	0.068328156049941 +0.000224738884688i	0.079648898701932 +0.000937301781691i	-0.000041439358930 +0.004493156224034i
三次样条拟合积分	0.068328076677982 +0.000224738623625i	0.079648806179472 +0.000937300692895i	-0.000041439310793 +0.004493151004654i
高斯-勒让德积分	0.068328156053357 +0.000224738884700i	0.079648898705915 +0.000937301781738i	-0.000041439358932 +0.004493156224259i
三次样条结合高斯-勒让德	0.068317390285967 +0.000225240047018i	0.079624219173633 +0.000937629270671i	-0.000041461031224 +0.004503171261626i

5. 结论

本文从麦克斯韦方程出发推导了磁偶极子源在均匀介质中激发的电磁场代数解与积分解。并采用三次样条拟合方法、高斯-勒让德积分方法及它们相结合的方式分别求解 Sommerfeld 数值积分。为学生提供了一个以电动力学为背景的计算物理教学案例。

参考文献:

- [1] D. Hong[†], J. Xiao, G. Zhang, S. Yang. Characteristics of the sum of cross-components of triaxial induction logging tool in layered anisotropic formation [J], *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, vol.52, no.6, pp.3107-3115, 2014
- [2] D. Hong[†], W. Huang, Q. Liu. Radiation of arbitrary magnetic Dipoles in a cylindrically layered anisotropic medium for well-logging

applications [J], *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, vol.54, no.11, pp.6362-6370, 2016

[3] W. C. Chew. Waves and fields in inhomogeneous media [M], New York, NY, USA: Van Nostrand Reinhold, 1990.

[4] 关治, 陆金甫. 数值分析基础[M], 北京: 高等教育出版社, 2010.

[5] J.H. Moran, and S. Gianzero, Effects of formation anisotropy on resistivity-logging measurements[J], *Geophysics*, vol.44, no. 7, pp:1266-1286, 1979.