



吉林大学

# 本科生毕业论文（设计）

中文题目 三量子比特系统在振幅阻尼过程中纠缠结构演化

英文题目 Entanglement Transition during Amplitude  
Damping Process of a Three-qubit System

学生姓名 刘雨辰 班级 05 学号 11170504

学 院 物理学院

专 业 应用物理学

指导教师 赵宝奎 职称 副教授

## 中文摘要

量子信息学作为一门新兴学科，有着很好的发展前景。但是在量子信息的传递过程中，量子纠缠的退相干性质十分令人困扰，这使量子信息的传递效率大大下降。在各类噪声通道中，振幅阻尼通道是描述量子系统丢失能量的重要通道之一。因此，深入研究量子系统在振幅阻尼通道中的纠缠属性与退相干的机制具有重要意义。

在本文中，我们将讨论三比特轮换对称态在振幅阻尼通道中的纠缠属性变化。先解析量子态的取值范围，再用数值模拟方法，分别模拟四类特殊轮换对称态的二体纠缠与三体纠缠的鲁棒图，得到最终的纠缠相图；在模拟过程中发现某类量子态无论初始纠缠强弱，所有态三体纠缠的鲁棒性都很强的特点。而后我们又取随机态，表明普适轮换对称态的鲁棒图边界与其中一类特殊轮换对称态的边界是重合的，从而得到三比特轮换对称态在振幅阻尼通道中的相图。

得到量子系统的纠缠相图意味着可以根据通道的噪声强度 $p$ 值即可判断某量子态所处纠缠状态；从另一个角度看，也可以通过控制噪声通道 $p$ 值来控制量子态的纠缠属性。除此之外，我们还发现三比特轮换对称态在鲁棒图中的范围很大，非常接近任意态的范围：上界与任意态的上界重合，下界与任意态的下界相差 $p$ 值不超过 0.1。这是违反直觉的，也进一步验证研究轮换对称态的重要性。

关键词：量子纠缠 量子退相干 振幅阻尼通道 三比特量子系统

## Abstract

The study of quantum entanglement has become one of the hot topics in quantum information science. But in the process of quantum information transmission, the decoherence of quantum entanglement is a disturbing disadvantage, which will cause the transmission efficiency of quantum information greatly reduce. Amplitude damping channel is one of the most significant channels in studying the energy loss of quantum systems. Therefore, it is of great significance to study the entanglement and decoherence mechanism of quantum system in the amplitude damping channel.

In this paper, we will discuss the variation in entanglement properties of the three-qubit quantum system in the amplitude damping channel. Firstly, the value ranges of quantum states are analyzed, and then use the numerical simulation method to simulate the robust graphs of the two-qubit entanglement and three-qubit entanglement and obtain the final entangled phase diagrams. It is found in the simulation process that the three-qubit entanglement of a kind of quantum state has strong robustness regardless of the initial entanglement. Then we take random points to show that the boundary of the universal rotational symmetry states is coincident with the boundary of one of the special rotational symmetry states in the robust graph. Therefore, the phase diagram of the three-qubit rotational symmetry states in the amplitude damping channel is obtained.

Obtain the entanglement phase diagrams of the quantum system, which means that the entanglement properties of quantum states can be determined by the noise intensity  $p$  value of the channels. From another point of view, the entanglement properties of quantum states can also be controlled by the noise channel's  $p$  value. In addition, we also find that the range of the three-qubit rotational symmetry states in the robust graph is large, very close to the range of the arbitrary state: the upper bound coincides with the upper bound of the arbitrary state, and the difference  $p$  value between the lower bounds of the rotational symmetry and the arbitrary states are not more than 0.1. This is counterintuitive and further validates the importance of studying rotational symmetry states.

**Keywords :** quantum entanglement , the decoherence , the amplitude damping channel ,  
three-qubit quantum system

## 目录

第一章 绪论 .....	1
第二章 基本概念 .....	2
第一节 量子态与判据 .....	2
1.1 纯态与混合态 .....	2
1.2 可分离态与纠缠态 .....	3
1.3 PPT 判据 .....	3
第二节 纠缠的度量方式 .....	4
2.1 负熵 .....	4
2.2 并发度 .....	4
第三节 量子操作 .....	5
3.1 局域操作 .....	5
3.2 非局域操作 .....	5
第四节 量子退相干与鲁棒性 .....	5
第三章 三比特系统在振幅阻尼通道中的退相干性质 .....	7
第一节 三比特轮换对称态的划分 .....	7
第二节 解析量子态系数范围 .....	8
2.1 解析 $\alpha_1$ 态与 $\alpha_2$ 态 .....	8
2.2 解析 $\alpha_3$ 态与 $\alpha_4$ 态 .....	14
第三节 模拟振幅阻尼通道中的量子态演化情况 .....	18
3.1 数值模拟法效率 .....	19
3.2 量子态三体纠缠的鲁棒性边界 .....	20
3.3 量子态二体纠缠的鲁棒性边界 .....	21
3.4 量子态纠缠的相图 .....	22
第四章 轮换对称态在振幅阻尼通道中的纠缠相图 .....	25
第一节 分析四类轮换对称态的三体纠缠边界 .....	25
第二节 随机态的遍历 .....	26
第三节 验证 $\alpha_1$ 态下界 .....	27
3.1 遍历法取随机量子态 .....	27
3.2 随机法取随机量子态 .....	28
第四节 二体纠缠的退相干性质 .....	29
第五节 轮换对称态的纠缠相图 .....	30
结论 .....	32
致谢 .....	33
参考文献 .....	34

# 第一章 绪论

过去的几十年里信息科学进步飞速，在现代科学发展和人类日常生活中起到了不可或缺的作用。量子物理与信息技术交汇产生了一门新兴学科——量子信息技术。然而随着量子信息技术的发展，其广泛的应用前景逐渐凸显<sup>[1]</sup>。

量子信息利用了量子系统的相干性，运用全新的计算方式对信息进行编码与传输，为突破芯片的尺度极限提供了全新的思路与方法。因此，量子信息是21世纪最有潜力的学科之一，它将量子力学运用到信息科学之中，不仅体现了学科交叉的重要性，其物理实现更将引领信息科学领域的重大变革。

量子纠缠是量子力学中最能体现非经典物理的特征，在量子信息技术中起着至关重要的作用。然而，现实中的量子系统不可避免地会与周围环境发生相互作用，这通常会降低其纠缠大小，这就是退相干现象。这种退相干在对量子信息的处理中引入了一些缺点，特别是在某些情况下，纠缠态的纠缠甚至可以在有限的时间内消失（ESD）<sup>[2]</sup>。

近年来，量子纠缠的鲁棒性逐渐成为研究者们关注的主要问题，在不同退相干模型下的量子系统已经有许多有趣且深入的研究。本文主要研究了三比特量子系统在振幅阻尼通道下纠缠的鲁棒性演化情况，其中第二章简要介绍了一些基本概念，第三章研究了几个三比特轮换对称态在退相干过程中的纠缠属性变化，第四章为探究三比特轮换对称态边界位置，最后是结论与总结。

## 第二章 基本概念

### 第一节 量子态与判据

#### 1.1 纯态与混合态

在 Hilbert 空间中，可以用单一态矢描述的量子态就是纯态。根据态叠加原理，纯态 $|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle, \dots, |\psi_n\rangle$ 线性叠加为纯态 $|\psi\rangle$

$$|\psi\rangle = \sum_n a_n \psi_n \quad (2.1)$$

其中， $|\psi_1\rangle$ 和 $|\psi_2\rangle$ 为相干叠加，系数 $a_n$ 对应各态的几率幅。

经过变换后仍无法用单一态矢来描述的量子态为混合态。混合态是处于不确定状态的，由多个子系统 $|\phi_1\rangle, |\phi_2\rangle, \dots, |\phi_n\rangle$ 构成，而各子系统的系数 $p_1, p_2, \dots, p_n$ 对应出现的概率。各子系统通过对概率进行非相干叠加得到混合态 $|\Phi\rangle$ 。

由于混合态无法用波函数表示，因此引入密度矩阵来描述混合态。记某量子态为 $|\Psi\rangle$ ，定义与该量子态对应的密度矩阵

$$\rho = |\Psi\rangle\langle\Psi| \quad (2.2)$$

那么混合态 $|\Phi\rangle$ 表示为

$$|\Phi\rangle = \sum_n p_n |\phi_n\rangle\langle\phi_n| \quad (2.3)$$

显然，纯态的密度矩阵有如下关系，

$$\rho = \rho^2 \quad \text{Tr}\rho^2 = \text{Tr}\rho = 1 \quad (2.4)$$

而混合态的密度矩阵为各子系统密度矩阵的叠加，与纯态密度矩阵性质不同的是，

$$\rho \neq \rho^2 \quad \text{Tr}\rho^2 \neq \text{Tr}\rho = 1 \quad (2.5)$$

除了上述特征，还可以用一些物理图像来帮助区分纯态与混合态。例如在 Bloch 球(图 2.1)中，球表面的点代表纯态，球内部的点代表混合态。

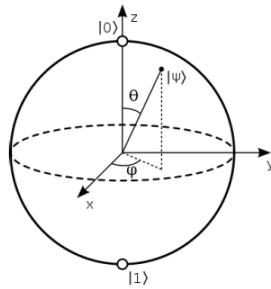


图 2.1 Bloch 球上某二能级量子纯态的表示

## 1.2 可分离态与纠缠态

1935 年 A. Einstein, B. Podolsky 和 N. Rosen 提出著名的 EPR 佯谬<sup>[3]</sup>, 自此纠缠的概念被正式引入。但直到 1989 年, Werner 才给出了纠缠态与可分离态的合理定义<sup>[4]</sup>。我们先考虑两个量子体系 A 和 B 中的量子纯态, 分别用 Hilbert 空间中的态矢 $|\psi_A\rangle$ 、 $|\psi_B\rangle$ 描述。若量子态 $|\psi_{AB}\rangle$ 可以写成 $|\psi_A\rangle$ 与 $|\psi_B\rangle$ 直积的形式, 即

$$|\psi_{AB}\rangle = |\psi_A\rangle \otimes |\psi_B\rangle \quad (2.6)$$

则称 $|\psi_{AB}\rangle$ 为可分离态 (Separable States); 否则称 $|\psi_{AB}\rangle$ 为纠缠态 (Entangled States)。

上述定义可以推广至 N 个量子体系 ( $N \geq 3$ ) 的纯态。然而在混合态中, 判断 (2.6) 式所示的分解是否存在是非常困难的。本文后面会引入其他判定量子态是否纠缠的方法 (详见第二章第二节)。

三比特系统中存在一些特殊的纠缠态, 这里主要介绍两个: *GHZ* 态<sup>[5]</sup>与 *W* 态<sup>[6]</sup>。

$$|GHZ\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|000\rangle + |111\rangle) \quad (2.7)$$

$$|W\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|001\rangle + |010\rangle + |100\rangle) \quad (2.8)$$

其中,  $|GHZ\rangle$  态以及其衍生态  $|GHZ - like\rangle$  态都是只含有 *three - tangle* 的量子态<sup>[24]</sup>, 任意一个粒子的纠缠的消失都会导致整个系统土崩瓦解。根据 *CKW* 等式<sup>[7]</sup>

$$C_{A(BC)}^2 = C_{AB}^2 + C_{AC}^2 + \tau \quad (2.9)$$

$C_{\alpha\beta}^2$  指代  $\alpha$  粒子与  $\beta$  粒子之间的纠缠大小,  $\tau$  指代系统中的 *three - tangle*。

因此 *GHZ* 态与 *GHZ - like* 态中不存在二体纠缠。

## 1.3 PPT 判据

1996 年, A. Peres 等人提出了部分转置正定判据 (Positive Partial Transposition), 简称 PPT 判据<sup>[8]</sup>。对于一个两体量子系统的密度矩阵  $\rho_{AB}$ , 若  $\rho_{AB}$  对任一粒子的部分转置矩阵无负本征值, 即该矩阵经部分转置后仍然半正定, 那么该系统是可分离态。其中,  $i$  代表了不同的量子比特,  $\rho_{AB}$  的部分转置矩阵为



$$\begin{aligned}\rho_{AB}^{T_A} &= \sum_i \beta_i (\rho_A^i)^{T_A} \otimes \rho_B^i \\ \rho_{AB}^{T_B} &= \sum_i \beta_i \rho_A^i \otimes (\rho_B^i)^{T_B}\end{aligned}\quad (2.10)$$

M. Horodecki 等人于同年证明 PPT 判据对  $2 \otimes 2$  和  $2 \otimes 3$  系统是充分必要条件，但对于更高维的量子系统，PPT 判据只能作为必要条件使用<sup>[9]</sup>。尽管如此，PPT 判据仍然是一个强有力的量子纠缠判据。

## 第二节 纠缠的度量方式

自纠缠被提出以来，如何度量纠缠的方法也是层出不穷。但所有的度量方法必须满足以下几个条件<sup>[10]</sup>：

- ① 可分离态的纠缠度为 0。
- ② 局域么正等价的量子态纠缠度也相同。
- ③ 在局域操作以及经典通信 (LOCC) 作用下，量子系统的纠缠度不会增加。
- ④ 直积态的纠缠度具有可加性。

下面我们简单介绍几个纠缠的度量方法。

### 2.1 负熵

负熵 (Negativity) 是建立在 PPT 判据<sup>[8]</sup>基础之上的一种纠缠度量<sup>[11]</sup>，其本质是衡量部分转置矩阵的非正的程度。其定义式<sup>[12]</sup>为

$$N(\rho) = \frac{\|\rho^{T_A}\|_1 - 1}{2} \quad (2.11)$$

其中  $\|\rho^{T_A}\|_1$  为对 A 粒子部分转置密度矩阵的迹范数。实际上， $N(\rho)$  为  $\rho^{T_A}$  的负本征值之和的绝对值。

### 2.2 并发度

并发度 (Concurrence) 的概念产生于研究一对量子比特之间的纠缠。对于二体纯态量子系统，并发度可以作为衡量其纠缠大小的方法。其定义式<sup>[13]</sup>为

$$C(\rho) = \max \{0, \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_4\} \quad (2.12)$$

其中  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq \lambda_4$  是矩阵  $\rho(\sigma_y \otimes \sigma_y)\rho^*(\sigma_y \otimes \sigma_y)$  本征值的算术平方根， $\rho^*$  是量子态密度矩阵  $\rho$  的共轭矩阵， $\sigma_y$  是泡利第二矩阵。注意，并发度也可以推广至度量多体系统中的二体纠缠大小。

在本文中，我们将利用负熵作为判定三体纠缠是否存在的方法，并发展为判定二体纠缠是否存在的方法。

### 第三节 量子操作

在量子信息学，引起量子系统变化的操作被称为量子操作。计算过程中量子操作还可以表示为量子态之间的映射，即操作算符。而多粒子量子系统中，每个量子比特的动力学特征都受主方程的控制。从主方程我们可以得到相对应的映射 $\varepsilon(t)$ <sup>[14]</sup>，即

$$\rho_i(t) = \varepsilon(t)\rho_i(0) \quad (2.13)$$

$\varepsilon(t)$ 映射又被称为通道，由 Choi-Kraus 定理<sup>[15,16]</sup>可写成如下形式：

$$\varepsilon(\rho_i(0)) = \sum_{j=1}^M E_{ji}(t)\rho_i(0)E_{ji}^\dagger(t) \quad (2.14)$$

其中 $E_j(t)$  ( $j = 1, 2, \dots, M$ )是 Kraus 算符<sup>[14,16]</sup>，是可以完备描述映射(通道)的数学算符。它满足归一化条件

$$\sum_j E_j^\dagger(t)E_j = I \quad (2.15)$$

量子操作分为两大类，一类为局域操作，另一类为非局域操作。

#### 3.1 局域操作

若一个量子系统被操作算符作用时，每个子系统都是分别独立演化的、不受其他子系统的影响，则该操作算符是局域操作。在局域操作算符的作用下，系统中各子系统的纠缠属性互不影响，是非常理想的操作算符。

#### 3.2 非局域操作

当量子系统被操作算符作用时，各子系统不是分别独立演化，而是受到相互的影响，则我们称之为非局域操作。通过非局域操作，量子系统内的纠缠与可分离量子态可以相互转化。

### 第四节 量子退相干与鲁棒性

量子信息领域应用量子纠缠时，还应该考虑系统的退相干效应与鲁棒性。之前的研究发现，薛定谔方程只适用于闭合体系。但对于宏观的量子体系而言，它们不是闭合体系，会不可避免地与周围环境发生相互作用；薛定谔方程

随之失效。因此一个宏观体系的行为，应该由它与环境的共同纠缠波函数来支配，必须考虑体系与相邻环境的相互作用，这个相互作用的过程即为量子退相干(Quantum Decoherence)<sup>[17]</sup>。

环境噪声作用于量子系统发生退相干，而鲁棒性(Robustness)代表了纠缠态克服环境噪声的能力。能力越强，量子态的鲁棒性越好。它可以从不方面比较纠缠态克服噪声的能力大小，产生了多种定义。在本文中，我们将其定义为量子态在通道中可以保持纠缠的最大噪声，也就是纠缠态在噪声通道中演化后纠缠为 0 的最小噪声  $p$  值。

在第三节中，我们介绍了  $\rho_i(0) \rightarrow \rho_i(t)$  的映射  $\varepsilon(t)$ <sup>[14]</sup>，也就是量子通道。显然，能导致退相干效应的通道就是退相干通道。退相干通道由 Kraus 算符<sup>[14, 16]</sup>来描述，并且有多个种类，接下来我们将主要介绍振幅阻尼通道(the Amplitude Damping Channel)。

量子操作的一个重要应用就是描述由于量子系统的能量损失导致的能量耗散效应<sup>[19]</sup>。这些过程的一般行为都可以通过振幅阻尼量子操作很好的描述，因此振幅阻尼通道成为一个不可或缺的退相干通道。它的 Kraus 算符为<sup>[20]</sup>

$$E_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{1-p} \end{bmatrix}, E_1 = \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{p} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

$p$  为振幅阻尼通道的噪声强度。所以量子态在振幅阻尼量子操作下，发生

$$\varepsilon(\rho(0)) = E_0^{\otimes 3} \rho(0) E_0^{\dagger \otimes 3} + E_1^{\otimes 3} \rho(0) E_1^{\dagger \otimes 3} \quad (2.17)$$

式中  $E_0$  使  $|0\rangle$  态保持不变，但让  $|1\rangle$  态的振幅减小； $E_1$  使  $|1\rangle$  态转变为  $|0\rangle$  态，对应量子系统的能量散失到环境中的物理过程<sup>[19]</sup>。

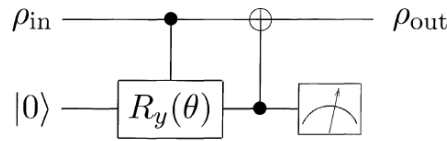


图 2.2 振幅阻尼通道的线路模型

将 (2.16) 式代入 (2.17) 式计算，得到振幅阻尼通道的操作矩阵

$$A_{00} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, A_{01} = \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{1-p} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, A_{10} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \sqrt{1-p} & 0 \end{bmatrix}, A_{11} = \begin{bmatrix} p & 0 \\ 0 & 1-p \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

以上两种通道对量子态都是局域操作，量子态中的各子系统经过通道时互不干扰。

### 第三章 三比特系统在振幅阻尼通道中的退相干性质

多体纠缠在量子信息中起着至关重要的作用，例如量子直通<sup>[21]</sup>、量子直接通信<sup>[22, 23]</sup>等。但在实际应用过程中，量子态会与环境相互作用发生退相干效应，导致量子纠缠退相干为可分离态，对传输过程造成一定的影响与损耗。因此，研究多体系统在噪声通道中的退相干性质尤为重要。

纯态二体系统的鲁棒性完全取决于纠缠，但三体系统具有更复杂的纠缠属性<sup>[24]</sup>；并且三体系统是多体系统的开端，具有一定的代表意义。而振幅阻尼通道描述了量子系统能量的损耗过程，是最重要的噪声通道之一；没有了局域等价态的退相干性质相同这一特性，量子态演化后较退极化通道而言有更丰富的多样性。因此我们在本章节中，利用数值模拟法研究了三比特量子态在振幅阻尼通道作用下的退相干性质。

数值模拟法<sup>[25]</sup>分为两大部分：第一部分是解析某量子态在固定初始纠缠下的系数取值范围，对此我们将采用负熵 $N_0$ 作为纠缠的度量方式；第二部分是对解析得到的一系列量子态进行退相干模拟，分析其退相干过程中的纠缠性质变化，循环得到退相干的边界。其最大的创新点在于对纠缠的逆向思考。之前我们只能已知量子态求解纠缠大小，但现在可以根据初始纠缠值得到对应的一系列量子态，实现了分析具有相同初始纠缠值的量子态性质的可能。

#### 第一节 三比特轮换对称态的划分

利用数值模拟法对量子态模拟之前，我们需要先确定研究对象。在研究多比特系统时，有一类特殊态被称为轮换对称态，它们由轮换对称基矢构成。轮换对称基矢是指对于各粒子轮换对称等价的一类量子态，以三比特系统为例，其轮换对称基矢共有四个：

$$\begin{aligned} |\varphi_1\rangle &= |000\rangle \\ |\varphi_2\rangle &= |111\rangle \\ |\varphi_3\rangle &= |W\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}}(|001\rangle + |010\rangle + |100\rangle) \\ |\varphi_4\rangle &= |\tilde{W}\rangle \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}(|011\rangle + |101\rangle + |011\rangle) \quad (3.1)$$

四个轮换对称基矢线性组合成三比特量子系统中的轮换对称态 $|\alpha\rangle$ :

$$|\alpha\rangle = c_1|000\rangle + c_2|W\rangle + c_3|\tilde{W}\rangle + c_4|111\rangle \quad (3.2)$$

由于 $|\alpha\rangle$ 态计算起来较为复杂，我们尚未求解析出其固定 $N_0$ 下量子态的系数范围，所以从 $|\alpha\rangle$ 态中选取了四类特殊态，先利用这些量子态研究纠缠结构的变化情况，即

$$\begin{aligned} |\alpha_1\rangle &= c_1|000\rangle + c_2|W\rangle + c_3|111\rangle \\ |\alpha_2\rangle &= c_1|000\rangle + c_2|\tilde{W}\rangle + c_3|111\rangle \\ |\alpha_3\rangle &= c_1|000\rangle + c_2|W\rangle + c_3|\tilde{W}\rangle \\ |\alpha_4\rangle &= c_1|W\rangle + c_2|\tilde{W}\rangle + c_3|111\rangle \end{aligned} \quad (3.3)$$

接下来，我们将对这四类量子态分别进行分析。

## 第二节 解析量子态系数范围

根据数值模拟法的第一部分，我们需要先解析得到固定 $N_0$ 下量子态的系数范围。由于 $|\alpha_1\rangle$ 、 $|\alpha_2\rangle$ 、 $|\alpha_3\rangle$ 、 $|\alpha_4\rangle$ 态皆为轮换对称态，因此我们计算负熵时，只取一个粒子的部分转置矩阵即可。

### 2.1 解析 $|\alpha_1\rangle$ 态与 $|\alpha_2\rangle$ 态

对 $|\alpha_1\rangle$ 态与 $|\alpha_2\rangle$ 态，我们可以直接求解，解析出固定初始负熵 $N_0$ 下系数的取值范围。

#### 2.1.1 $|\alpha_1\rangle$ 态

首先求解 $|\alpha_1\rangle$ 态的初始负熵 $N_0$ ，即该量子态的初始纠缠值。 $|\alpha_1\rangle = c_1|000\rangle + c_2|W\rangle + c_3|111\rangle$ ，则 $|\alpha_1\rangle$ 态对 A 粒子的部分转置矩阵

$$\rho_1^{TA} = \begin{bmatrix} c_1^2 & \frac{c_1 c_2}{\sqrt{3}} & \frac{c_1 c_2}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{c_1 c_2}{\sqrt{3}} & \frac{c_2^2}{3} & \frac{c_2^2}{3} & 0 \\ \frac{c_1 c_2}{\sqrt{3}} & \frac{c_2^2}{3} & \frac{c_2^2}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{c_1 c_2}{\sqrt{3}} & \frac{c_2^2}{3} & \frac{c_2^2}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_1 c_3 & \frac{c_2 c_3}{\sqrt{3}} & \frac{c_2 c_3}{\sqrt{3}} & 0 \\ \frac{c_1 c_2}{\sqrt{3}} & 0 & 0 & c_1 c_3 & \frac{c_2^2}{3} & 0 & 0 & \frac{c_2 c_3}{\sqrt{3}} \\ \frac{c_2^2}{3} & 0 & 0 & \frac{c_2 c_3}{\sqrt{3}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{c_2^2}{3} & 0 & 0 & \frac{c_2 c_3}{\sqrt{3}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{c_2 c_3}{\sqrt{3}} & 0 & 0 & c_3^2 \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

求解该矩阵的本征值，得到 $|\alpha_1\rangle$ 态的初始纠缠值，

$$N_0 = \frac{2}{3} \sqrt{2c_2^4 + 9c_1^2 c_3^2 + 6c_2^2 c_3^2} \quad (3.5)$$

将归一化条件 $c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 = 1$ 代入并化简，设 $x = c_1^2$ 、 $y = c_2^2$ ，最终得到，

$$9x^2 + (15y - 9)x + 4y^2 - 6y + \frac{9N_0^2}{4} = 0 \quad (3.6)$$

求解 $x$ 得到，

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{6} \left( 3 - 5y - \sqrt{9y^2 - 6y - 9N_0^2 + 9} \right) \\ x_2 &= \frac{1}{6} \left( 3 - 5y + \sqrt{9y^2 - 6y - 9N_0^2 + 9} \right) \end{aligned} \quad (3.7)$$

下面设置约束条件，对 $x, y$ 的取值范围进一步求解。

条件一： $\Delta = 9y^2 - 6y - 9N_0^2 + 9 \geq 0$

条件二： $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq 1 - x - y \leq 0$

对上述条件解得的范围取交集，最终得到 $|\alpha_1\rangle$ 态的取值范围为

$$0 \leq N_0^2 \leq \frac{8}{9},$$

$$c_2^2 \in \begin{cases} \left[ 0, \frac{3}{4} (1 - \sqrt{1 - N_0^2}) \right], c_1^2 = x_1 \\ \left[ 0, \frac{3N_0}{2\sqrt{2}} \right], c_1^2 = x_2 \end{cases}$$

$$\frac{8}{9} < N_0^2 \leq \frac{24}{25},$$

$$c_2^2 \in \begin{cases} \left[ 0, \frac{1}{3} (1 - \sqrt{-8 + 9N_0^2}) \right] \cup \left[ \frac{1}{3} (1 + \sqrt{-8 + 9N_0^2}), \frac{3}{4} (1 - \sqrt{1 - N_0^2}) \right], c_1^2 = x_1 \\ \left[ 0, \frac{1}{3} (1 - \sqrt{-8 + 9N_0^2}) \right] \cup \left[ \frac{1}{3} (1 + \sqrt{-8 + 9N_0^2}), \frac{3}{4} (1 + \sqrt{1 - N_0^2}) \right], c_1^2 = x_2 \end{cases}$$

$$\frac{24}{25} < N_0^2 \leq 1,$$

$$c_2^2 \in \begin{cases} \left[0, \frac{1}{3}(1 - \sqrt{-8 + 9N_0^2})\right], c_1^2 = x_1 \\ \left[\frac{1}{3}(1 - \sqrt{-8 + 9N_0^2}), \frac{3}{4}(1 - \sqrt{1 - N_0^2})\right] \cup \left[\frac{3}{4}(1 - \sqrt{1 - N_0^2}), \frac{3}{4}(1 + \sqrt{1 - N_0^2})\right], c_1^2 = x_2 \end{cases} \quad (3.8)$$

取固定 $N_0$ 下的随机量子态时，我们先根据上述取值范围对 $c_2^2$ 进行随机取值，再求出对应的 $c_1^2$ 值，最后根据归一化条件确定 $c_3^2$ 值。

我们现在只确定了三个系数的平方值；将其开根号后， $|\alpha_1\rangle$ 态系数的正负显然对 $N_0$ 无影响，但是否会对鲁棒性 $p$ 值造成影响？我们对此进行多次试验，最终发现的规律如表格所示。

表 3.1  $|\alpha_1\rangle$ 态系数的正负对 $p$ 值的影响

$c_1$	+	+	+	-	+	-	-	-
$c_2$	+	+	-	+	-	+	-	-
$c_3$	+	-	+	+	-	-	+	-
$p$	a	a	a	a	a	a	a	a

从上表可以看出，系数的正负对 $p$ 值也无影响。因此在确定量子态时，我们可以对三个系数全部取正。

### 2.1.2 $|\alpha_2\rangle$ 态

首先求解 $|\alpha_2\rangle$ 态的初始负熵 $N_0$ ，即该量子态的初始纠缠值。 $|\alpha_2\rangle = c_1|000\rangle + c_2|\tilde{W}\rangle + c_3|111\rangle$ ，则 $|\alpha_2\rangle$ 态对 A 粒子的部分转置矩阵

$$\rho_2^{T_A} = \begin{bmatrix} c_1^2 & 0 & 0 & \frac{c_1 c_2}{\sqrt{3}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{c_1 c_2}{\sqrt{3}} & 0 & 0 & \frac{c_2^2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{c_1 c_2}{\sqrt{3}} & 0 & 0 & \frac{c_2^2}{3} \\ \frac{c_1 c_2}{\sqrt{3}} & 0 & 0 & \frac{c_2^2}{3} & c_1 c_3 & 0 & 0 & \frac{c_2 c_3}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{c_1 c_2}{\sqrt{3}} & \frac{c_1 c_2}{\sqrt{3}} & c_1 c_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{c_2^2}{3} & \frac{c_2^2}{3} & \frac{c_2 c_3}{\sqrt{3}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{c_2^2}{3} & \frac{c_2^2}{3} & \frac{c_2 c_3}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{c_2^2}{3} & \frac{c_2^2}{3} & \frac{c_2 c_3}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{c_2 c_3}{\sqrt{3}} & \frac{c_2 c_3}{\sqrt{3}} & c_3^2 \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

求解该矩阵的本征值，得到 $|\alpha_2\rangle$ 态的初始纠缠值，

$$N_0 = \frac{2}{3} \sqrt{2c_2^4 + 9c_1^2 c_3^2 + 6c_1^2 c_2^2} \quad (3.10)$$

将归一化条件代入并化简，设 $x = c_1^2$ 、 $y = c_2^2$ ，最终得到，

$$9x^2 + (3y - 9)x - 2y^2 + \frac{9N_0^2}{4} = 0 \quad (3.11)$$

求解 $x$ 得到,

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{6} \left( 3 - y - \sqrt{9y^2 - 6y - 9N_0^2 + 9} \right) \\ x_2 &= \frac{1}{6} \left( 3 - y + \sqrt{9y^2 - 6y - 9N_0^2 + 9} \right) \end{aligned} \quad (3.12)$$

下面设置约束条件, 对 $x, y$ 的取值范围进一步求解。

条件一:  $\Delta = 9y^2 - 6y - 9N_0^2 + 9 \geq 0$

条件二:  $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq 1 - x - y \leq 0$

对上述条件解得的范围取交集, 最终得到 $|\alpha_2\rangle$ 态的取值范围为

$$0 \leq N_0^2 \leq \frac{8}{9},$$

$$c_2^2 \in \begin{cases} \left[ 0, \frac{3N_0}{2\sqrt{2}} \right], c_1^2 = x_1 \\ \left[ 0, \frac{3}{4} \left( 1 - \sqrt{1 - N_0^2} \right) \right], c_1^2 = x_2 \end{cases}$$

$$\frac{8}{9} < N_0^2 \leq \frac{24}{25},$$

$$c_2^2 \in \begin{cases} \left[ 0, \frac{1}{3} \left( 1 - \sqrt{-8 + 9N_0^2} \right) \right] \cup \left[ \frac{1}{3} \left( 1 + \sqrt{-8 + 9N_0^2} \right), \frac{3}{4} \left( 1 + \sqrt{1 - N_0^2} \right) \right], c_1^2 = x_1 \\ \left[ 0, \frac{1}{3} \left( 1 - \sqrt{-8 + 9N_0^2} \right) \right] \cup \left[ \frac{1}{3} \left( 1 + \sqrt{-8 + 9N_0^2} \right), \frac{3}{4} \left( 1 - \sqrt{1 - N_0^2} \right) \right], c_1^2 = x_2 \end{cases}$$

$$\frac{24}{25} < N_0^2 \leq 1,$$

$$c_2^2 \in \begin{cases} \left[ 0, \frac{1}{3} \left( 1 - \sqrt{-8 + 9N_0^2} \right) \right] \cup \left[ \frac{3}{4} \left( 1 - \sqrt{1 - N_0^2} \right), \frac{3}{4} \left( 1 + \sqrt{1 - N_0^2} \right) \right], c_1^2 = x_1 \\ \left[ 0, \frac{1}{3} \left( 1 - \sqrt{-8 + 9N_0^2} \right) \right], c_1^2 = x_2 \end{cases} \quad (3.13)$$

取固定 $N_0$ 下的随机量子态时, 我们先根据上述取值范围对 $c_2^2$ 进行随机取值, 再求出对应的 $c_1^2$ 值, 最后根据归一化条件确定 $c_3^2$ 值。

我们现在只确定了三个系数的平方值; 对其开根号后,  $|\alpha_2\rangle$ 态系数的正负显然对 $N_0$ 无影响, 但是否会对鲁棒性 $p$ 值造成影响? 我们对此进行多次试验, 最终发现的规律如下表格所示。

表 3.2  $|\alpha_2\rangle$ 态系数的正负对 $p$ 值的影响

$c_1$	+	+	+	-	+	-	-	-
$c_2$	+	+	-	+	-	+	-	-
$c_3$	+	-	+	+	-	-	+	-



$p$	a	a	b	b	b	a	b	a
-----	---	---	---	---	---	---	---	---

最终我们将 8 种情况总结为两种，即 $c_1$ 或 $c_2$ 的正负与其他系数正负不同时一种情况，其余为另一种情况。在模拟时，我们取用了系数全正以及 $c_1$ 负、 $c_2$ 与 $c_3$ 正这两种。

## 2.2 解析 $|\alpha_3\rangle$ 态与 $|\alpha_4\rangle$ 态

在求解 $|\alpha_3\rangle$ 态与 $|\alpha_4\rangle$ 态时，用直接解析的方法无法计算出固定 $N_0$ 下两个态的系数范围。因此采取了变换坐标系的方式，即利用三个系数的归一化性质，将系数从笛卡尔坐标系转变到球坐标系，再进行下一步的求解。下面将详细说明 $|\alpha_3\rangle$ 态与 $|\alpha_4\rangle$ 态系数范围的求解过程。

### 2.2.1 $|\alpha_3\rangle$ 态

首先求解 $|\alpha_3\rangle$ 态的初始负熵 $N_0$ ，即该量子态的初始纠缠值。 $|\alpha_3\rangle = c_1|000\rangle + c_2|W\rangle + c_3|\tilde{W}\rangle$ ，则 $|\alpha_3\rangle$ 态对 A 粒子的部分转置矩阵

$$\rho_3^{T_A} = \begin{bmatrix} c_1^2 & \frac{c_1 c_2}{\sqrt{3}} & \frac{c_1 c_2}{\sqrt{3}} & \frac{c_1 c_3}{\sqrt{3}} & \frac{c_1 c_2}{\sqrt{3}} & \frac{c_2^2}{3} & \frac{c_2^2}{3} & \frac{c_2 c_3}{3} \\ \frac{c_1 c_2}{\sqrt{3}} & \frac{c_2^2}{3} & \frac{c_2^2}{3} & \frac{c_2 c_3}{3} & \frac{c_1 c_3}{\sqrt{3}} & \frac{c_2 c_3}{3} & \frac{c_2 c_3}{3} & \frac{c_3^2}{3} \\ \frac{c_1 c_2}{\sqrt{3}} & \frac{c_2^2}{3} & \frac{c_2^2}{3} & \frac{c_2 c_3}{3} & \frac{c_1 c_2}{\sqrt{3}} & \frac{c_2 c_3}{3} & \frac{c_2 c_3}{3} & \frac{c_3^2}{3} \\ \frac{c_1 c_3}{\sqrt{3}} & \frac{c_2 c_3}{3} & \frac{c_2 c_3}{3} & \frac{c_3^2}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{c_1 c_2}{\sqrt{3}} & \frac{c_1 c_3}{\sqrt{3}} & \frac{c_1 c_3}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{c_2^2}{3} & \frac{c_2 c_3}{3} & \frac{c_2 c_3}{3} & 0 \\ \frac{c_2^2}{3} & \frac{c_2 c_3}{3} & \frac{c_2 c_3}{3} & 0 & \frac{c_2 c_3}{3} & \frac{c_3^2}{3} & \frac{c_3^2}{3} & 0 \\ \frac{c_2^2}{3} & \frac{c_2 c_3}{3} & \frac{c_2 c_3}{3} & 0 & \frac{c_2 c_3}{3} & \frac{c_3^2}{3} & \frac{c_3^2}{3} & 0 \\ \frac{c_2 c_3}{3} & \frac{c_3^2}{3} & \frac{c_3^2}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

求解该矩阵的本征值，得到 $|\alpha_3\rangle$ 态的初始纠缠值，

$$N_0 = \frac{2}{3} \sqrt{2c_2^4 + 2c_3^4 + 6c_1^2 c_3^2 + c_2^2 c_3^2 - 4\sqrt{3}c_1 c_2^2 c_3} \quad (3.15)$$

从 $|\alpha_3\rangle$ 态的 $N_0$ 值可以看出，代入归一化条件后无法将式子转化为二次方程的形式，也就无法利用 2.1 节的方法求解。因此我们决定采用转换坐标系的方式，这样可以把该式重新整理为二次方程，从而进行系数范围的求解。

注意，由于这次转换坐标系是直接对系数进行转换，而非系数的平方，因此我们需要先判断系数的正负对 $p$ 值的影响。具体情况如下表所示。

表 3.3  $|\alpha_3\rangle$ 态系数的正负对 $p$ 值的影响

$c_1$	+	+	+	-	+	-	-	-
$c_2$	+	+	-	+	-	+	-	-
$c_3$	+	-	+	+	-	-	+	-
$p$	a	a	a	a	a	a	a	a

从表中数据可以看出， $|\alpha_3\rangle$ 态系数的正负对 $p$ 值无影响。但由(3.15)式，显然 $c_1$ 与 $c_3$ 的正负是影响 $N_0$ 值的。我们在此取系数全正、 $c_1$ 负 $c_2$ 与 $c_3$ 正两种情况。

情况一：系数全部为正数。

由归一化条件，设

$$\begin{aligned} c_1 &= \sin\theta\cos\varphi \\ c_2 &= \cos\theta \\ c_3 &= \sin\theta\sin\varphi \end{aligned} \quad (3.16)$$

再设 $x = \cos^2\theta, y = \cos^2\varphi$ ，最后三个系数分别转换为

$$\begin{aligned} c_1 &= \sqrt{(1-x)y} \\ c_2 &= \sqrt{x} \\ c_3 &= \sqrt{(1-x)(1-y)} \end{aligned} \quad (3.17)$$

代入并整理得到

$$N_0 = \frac{2}{3}\sqrt{2y^2 - 9y + 3 + 4\sqrt{3y - 3y^2}x^2 + (12y^2 - 17y + 5 - 4\sqrt{3y - 3y^2})x - 4y^2 + 2y + 2} \quad (3.18)$$

解得

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{8y^2 - 5y + 4\sqrt{3y - 3y^2} - 3 - \sqrt{(36N_0^2 + 15)y^2 - (27N_0^2 + 30)y + (8y + 36N_0^2 - 8)\sqrt{3y - 3y^2}}}{8y^2 - 6y + 8\sqrt{3y - 3y^2} - 6} \\ x_2 &= \frac{8y^2 - 5y + 4\sqrt{3y - 3y^2} - 3 + \sqrt{(36N_0^2 + 15)y^2 - (27N_0^2 + 30)y + (8y + 36N_0^2 - 8)\sqrt{3y - 3y^2}}}{8y^2 - 6y + 8\sqrt{3y - 3y^2} - 6} \end{aligned} \quad (3.19)$$

同样地，设置与 2.1 节中同样的三个约束条件并取交集，得到系数范围

$$0 \leq N_0 \leq \frac{1}{12}\sqrt{6\sqrt{17} - 10}, \begin{cases} \text{root}(2) \leq y < \frac{1}{4} + \frac{3\sqrt{1-N_0^2}}{4}, x = x_1 \\ \text{root}(1) \leq y < 1, x = x_2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{12}\sqrt{6\sqrt{17}-10} < N_0 \leq \frac{\sqrt{5}}{3}, & \begin{cases} \text{root}(1) \leq y < \frac{1}{4} + \frac{3\sqrt{1-N_0^2}}{4}, x = x_1 \\ \text{root}(1) \leq y < 1, x = x_2 \end{cases} \\
\frac{\sqrt{5}}{3} < N_0 \leq \frac{2\sqrt{2}}{3}, & \begin{cases} 0 \leq y < \frac{1}{4} + \frac{3\sqrt{1-N_0^2}}{4}, x = x_1 \\ 0 \leq y \leq 1, x = x_2 \end{cases} \\
\frac{2\sqrt{2}}{3} \leq N_0 \leq 1, & \frac{1}{4} - \frac{3\sqrt{1-N_0^2}}{4} \leq y < \frac{1}{4} + \frac{3\sqrt{1-N_0^2}}{4}, x = x_1
\end{aligned} \quad (3.20)$$

$\text{root}(1)$ 与 $\text{root}(2)$ 会在后面综合情况中有详细说明。

情况二：  $c_1$ 负 $c_2$ 与 $c_3$ 正

由归一化条件， 设

$$\begin{aligned}
c_1 &= -\sin\theta\cos\varphi \\
c_2 &= \cos\theta \\
c_3 &= \sin\theta\sin\varphi
\end{aligned} \quad (3.21)$$

再设 $x = \cos^2\theta$ ,  $y = \cos^2\varphi$ , 最后三个系数分别被转换为

$$\begin{aligned}
c_1 &= -\sqrt{(1-x)y} \\
c_2 &= \sqrt{x} \\
c_3 &= \sqrt{(1-x)(1-y)}
\end{aligned} \quad (3.22)$$

代入并整理得到

$$N_0 = \frac{2}{3}\sqrt{(2y^2 - 9y + 3 - 4\sqrt{3y-3y^2})x^2 + (12y^2 - 17y + 5 + 4\sqrt{3y-3y^2})x - 4y^2 + 2y + 2} \quad (3.23)$$

解得

$$\begin{aligned}
x_1 &= \frac{8y^2 - 5y - 4\sqrt{3y-3y^2} - 3 - \sqrt{(36N_0^2+15)y^2 - (27N_0^2+30)y - (8y+36N_0^2-8)\sqrt{3y-3y^2}}}{8y^2 - 6y - 8\sqrt{3y-3y^2} - 6} \\
x_2 &= \frac{8y^2 - 5y - 4\sqrt{3y-3y^2} - 3 + \sqrt{(36N_0^2+15)y^2 - (27N_0^2+30)y - (8y+36N_0^2-8)\sqrt{3y-3y^2}}}{8y^2 - 6y - 8\sqrt{3y-3y^2} - 6}
\end{aligned} \quad (3.24)$$

同样地， 设置与 2.1 节中同样的三个约束条件并取交集， 得到系数范围

$$0 \leq N_0 \leq \frac{\sqrt{5}}{3}, \quad \frac{1}{4} + \frac{3\sqrt{1-N_0^2}}{4} < y \leq 1, \quad x = x_2$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\sqrt{5}}{3} < N_0 \leq \frac{23}{9} - \frac{49+(681-416\sqrt{2})^{2/3}}{9(681-416\sqrt{2})^{1/3}}, \\
& \begin{cases} 0 \leq y \leq \text{root}(1), & x = x_1 \\ 0 \leq y \leq \text{root}(1) \cup \frac{1}{4} + \frac{3\sqrt{1-N_0^2}}{4} < y \leq 1, & x = x_2 \end{cases} \\
& \frac{23}{9} - \frac{49+(681-416\sqrt{2})^{2/3}}{9(681-416\sqrt{2})^{1/3}} < N_0 < \frac{2\sqrt{2}}{3}, \\
& \begin{cases} 0 \leq y \leq \text{root}(1) \cup \text{root}(2) \leq y \leq \frac{1}{4} + \frac{3\sqrt{1-N_0^2}}{4}, & x = x_1 \\ 0 \leq y \leq \text{root}(1) \cup \text{root}(2) \leq y \leq 1, & x = x_2 \end{cases} \\
& \frac{2\sqrt{2}}{3} \leq N_0 \leq 1, \\
& \frac{1}{4} - \frac{3\sqrt{1-N_0^2}}{4} < y < \frac{1}{4} + \frac{3\sqrt{1-N_0^2}}{4}, \quad x = x_1
\end{aligned} \tag{3.25}$$

其中,  $\text{root}(1)$ 、 $\text{root}(2)$ 与情况一中的 $\text{root}(1)$ 、 $\text{root}(2)$ 相同。

最终, 综合情况一与情况二写出如下系数范围, 其中 $x = x^+$ 为系数全正时的 $x$ 解,  $x = x^-$ 为 $c_1$ 负 $c_2$ 与 $c_3$ 正时的 $x$ 解。

$$\begin{aligned}
0 \leq N_0 \leq \frac{1}{12}\sqrt{6\sqrt{17}-10}, y \in & \begin{cases} \text{root}(2) \leq y < \frac{1}{4} + \frac{3\sqrt{1-N_0^2}}{4}, & x = x_1^+ \\ \text{root}(1) \leq y < 1, & x = x_2^+ \\ \frac{1}{4} + \frac{3\sqrt{1-N_0^2}}{4} < y \leq 1, & x = x_2^- \end{cases} \\
\frac{1}{12}\sqrt{6\sqrt{17}-10} < N_0 \leq \frac{\sqrt{5}}{3}, y \in & \begin{cases} \left[ \text{root}(1), \frac{1}{4} + \frac{3\sqrt{1-N_0^2}}{4} \right], & x = x_1^+ \\ [\text{root}(1), 1], & x = x_2^+ \\ \left[ \frac{1}{4} + \frac{3\sqrt{1-N_0^2}}{4}, 1 \right], & x = x_2^- \end{cases} \\
\frac{\sqrt{5}}{3} < N_0 \leq \frac{23}{9} - \frac{49+(681-416\sqrt{2})^{2/3}}{9(681-416\sqrt{2})^{1/3}}, y \in & \begin{cases} \left[ 0, \frac{1}{4} + \frac{3\sqrt{1-N_0^2}}{4} \right], & x = x_1^+ \\ [0, 1], & x = x_2^+ \\ [0, \text{root}(1)], & x = x_1^- \\ [0, \text{root}(1)] \cup \left[ \frac{1}{4} + \frac{3\sqrt{1-N_0^2}}{4}, 1 \right], & x = x_2^- \end{cases}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{23}{9} - \frac{49 + (681 - 416\sqrt{2})^{2/3}}{9(681 - 416\sqrt{2})^{1/3}} < N_0 < \frac{2\sqrt{2}}{3}, y \in \begin{cases} \left[0, \frac{1}{4} + \frac{3\sqrt{1-N_0^2}}{4}\right], x = x_1^+ \\ [0, 1], x = x_2^+ \\ [0, \text{root}(1)] \cup \left[\text{root}(2), \frac{1}{4} + \frac{3\sqrt{1-N_0^2}}{4}\right], x = x_1^- \\ [0, \text{root}(1)] \cup [\text{root}(2), 1], x = x_2^- \end{cases} \\
& \frac{2\sqrt{2}}{3} \leq N_0 \leq 1, y \in \begin{cases} \left[\frac{1}{4} - \frac{3\sqrt{1-N_0^2}}{4}, \frac{1}{4} + \frac{3\sqrt{1-N_0^2}}{4}\right], x = x_1^+ \\ \left[\frac{1}{4} - \frac{3\sqrt{1-N_0^2}}{4}, \frac{1}{4} + \frac{3\sqrt{1-N_0^2}}{4}\right], x = x_1^- \end{cases}
\end{aligned} \tag{3.26}$$

其中

$$\begin{aligned}
\text{root}(1) &= \frac{3a}{b} - \frac{1}{2}\sqrt{s+r} - \frac{1}{2}\sqrt{2s-r - \frac{t}{4\sqrt{s+r}}} \\
\text{root}(2) &= \frac{3a}{b} - \frac{1}{2}\sqrt{s+r} + \frac{1}{2}\sqrt{2s-r - \frac{t}{4\sqrt{s+r}}}
\end{aligned} \tag{3.27}$$

而

$$\begin{aligned}
r &= \frac{27e}{b} \left(\frac{2}{f}\right)^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{3b} \left(\frac{2}{f}\right)^{\frac{1}{3}} \\
s &= \frac{9a^2}{b^2} - \frac{2c}{b} \\
t &= \frac{216a^3}{b^3} - \frac{72ac}{b^2} + \frac{16d}{b}
\end{aligned} \tag{3.28}$$

式中

$$\begin{aligned}
a &= 82 + 69N_0^2 + 108N_0^4 \\
b &= 139 + 360N_0^2 + 432N_0^4 \\
c &= 214 - 174N_0^2 + 297N_0^4 \\
d &= 182 - 423N_0^2 + 405N_0^4 \\
e &= 2368N_0^4 - 7920N_0^6 + 5913N_0^8 \\
f &= 11943936N_0^4 - 93312000N_0^6 + 859123584N_0^8 - \\
& 1646758512N_0^{10} + 879003414N_0^{12} + (142657607172096N_0^8 - \\
& 2229025112064000N_0^{10} + 1003061300428800N_0^{12} + 83549991019216896N_0^{14} -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 92292610622423040N_0^{16} - 523087730569322496N_0^{18} + \\
& 1328813646798200832N_0^{20} - 1129067428271947776N_0^{22} + \\
& 333167437850738688N_0^{24})^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned} \tag{3.29}$$

在取固定 $N_0$ 下的各量子态时，先对 $x$ 、 $y$ 随机取值，而后根据(3.17)式与(3.22)式进行对 $c_1$ 、 $c_2$ 、 $c_3$ 系数的转换，从而求得各随机 $|\alpha_3\rangle$ 态。

### 2.2.2 $|\alpha_4\rangle$ 态

首先求解 $|\alpha_4\rangle$ 态的初始负熵 $N_0$ ，即该量子态的初始纠缠值。 $|\alpha_4\rangle = c_1|W\rangle + c_2|\tilde{W}\rangle + c_3|111\rangle$ ，则 $|\alpha_4\rangle$ 态对 A 粒子的部分转置矩阵为

$$\rho_4^{TA} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{c_1^2}{3} & \frac{c_1^2}{3} & \frac{c_1c_2}{3} \\ 0 & \frac{c_1^2}{3} & \frac{c_1^2}{3} & \frac{c_1c_2}{3} & 0 & \frac{c_1c_2}{3} & \frac{c_1c_2}{3} & \frac{c_2^2}{3} \\ 0 & \frac{c_1^2}{3} & \frac{c_1^2}{3} & \frac{c_1c_2}{3} & 0 & \frac{c_1c_2}{3} & \frac{c_1c_2}{3} & \frac{c_2^2}{3} \\ 0 & \frac{c_1c_2}{3} & \frac{c_1c_2}{3} & \frac{c_2^2}{3} & 0 & \frac{c_1c_3}{\sqrt{3}} & \frac{c_1c_3}{\sqrt{3}} & \frac{c_2c_3}{\sqrt{3}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{c_1^2}{3} & \frac{c_1c_2}{3} & \frac{c_1c_2}{3} & \frac{c_1c_3}{\sqrt{3}} \\ \frac{c_1^2}{3} & \frac{c_1c_2}{3} & \frac{c_1c_2}{3} & \frac{c_1c_3}{\sqrt{3}} & \frac{c_1c_2}{3} & \frac{c_2^2}{3} & \frac{c_2^2}{3} & \frac{c_2c_3}{\sqrt{3}} \\ \frac{c_1^2}{3} & \frac{c_1c_2}{3} & \frac{c_1c_2}{3} & \frac{c_1c_3}{\sqrt{3}} & \frac{c_1c_2}{3} & \frac{c_2^2}{3} & \frac{c_2^2}{3} & \frac{c_2c_3}{\sqrt{3}} \\ \frac{c_1c_2}{3} & \frac{c_2^2}{3} & \frac{c_2^2}{3} & \frac{c_2c_3}{\sqrt{3}} & \frac{c_1c_3}{\sqrt{3}} & \frac{c_2c_3}{\sqrt{3}} & \frac{c_2c_3}{\sqrt{3}} & c_3^2 \end{bmatrix} \tag{3.30}$$

求解该矩阵的本征值，得到 $|\alpha_4\rangle$ 态的初始纠缠值，

$$N_0 = \frac{2}{3} \sqrt{2c_1^4 + 2c_2^4 + c_1^2c_2^2 + 6c_1^2c_3^2 - 4\sqrt{3}c_1c_2^2c_3} \tag{3.31}$$

从 $|\alpha_4\rangle$ 态的 $N_0$ 值可以看出，代入归一化条件后无法将式子转化为二次方程的形式，也就无法利用 2.1 节的方法求解。因此我们决定采用转换坐标系的方式，这样可以把该式重新整理为二次方程，从而进行系数范围的求解。

注意，由于这次转换坐标系是直接对系数进行转换，而非系数的平方，因此我们需要先判断系数的正负对 $p$ 值的影响。具体情况如下表所示。

表 3.4  $|\alpha_4\rangle$ 态系数的正负对 $p$ 值的影响

$c_1$	+	+	+	-	+	-	-	-
$c_2$	+	+	-	+	-	+	-	-

$c_3$	+	-	+	+	-	-	+	-
$p$	a	b	a	b	b	b	a	a

根据表中数据与(3.31)式，显然 $c_1$ 与 $c_3$ 的正负是影响 $p$ 与 $N_0$ 值的。

通过上述分析，可以发现 $|\alpha_4\rangle$ 态与 $|\alpha_3\rangle$ 态的 $N_0$ 公式、系数正负情况极其相似，因此采用与 $|\alpha_3\rangle$ 态相同的方法对 $|\alpha_4\rangle$ 态进行求解；且可以通过调整坐标变换的对应值，使得二者在求解时完全相同，从而大大简化了求解过程。

设系数

$$\begin{aligned} c_1 &= \sin\theta\sin\varphi \\ c_2 &= \cos\theta \\ c_3 &= \sin\theta\cos\varphi \end{aligned} \quad (3.32)$$

再设 $x = \cos^2\theta, y = \cos^2\varphi$ ，最后三个系数分别转换为

$$\begin{aligned} c_1 &= \sqrt{(1-x)(1-y)} \\ c_2 &= \sqrt{x} \\ c_3 &= \pm\sqrt{(1-x)y} \end{aligned} \quad (3.33)$$

代入并整理得到

$$N_0 = \frac{2}{3}\sqrt{\left(2y^2 - 9y + 3 \pm 4\sqrt{3y - 3y^2}\right)x^2 + \left(12y^2 - 17y + 5 \mp 4\sqrt{3y - 3y^2}\right)x - 4y^2 + 2y + 2} \quad (3.34)$$

将(3.34)式与(3.18)式、(3.23)式进行对比，发现完全一致。因此 $x$ 、 $y$ 的取值范围与2.2.1节中求得的范围也完全一致，这里不再过多赘述。虽然 $x$ 、 $y$ 的取值范围相同，但 $c_1$ 、 $c_2$ 、 $c_3$ 系数的范围不同，要按照(3.33)式进行转换。

### 第三节 模拟振幅阻尼通道中的量子态演化情况

在解析出各量子态的系数范围之后，进行数值模拟法的第二部分——模拟量子态在噪声通道中的退相干上下界。在本节中，我们将会模拟 $|\alpha_1\rangle$ 、 $|\alpha_2\rangle$ 、 $|\alpha_3\rangle$ 、 $|\alpha_4\rangle$ 四类量子态在振幅阻尼通道中三体纠缠的鲁棒性边界、二体纠缠的鲁棒性边界，并将二者结合为量子态在振幅阻尼通道中纠缠变化的相图。另外，还会给出数值模拟法的效率图，以说明其可靠性。

我们先设定一个初始噪声强度 $p$ 值，随机取态后将设定 $p$ 值代入该量子态，

比较二者鲁棒性的强弱；若模拟上边界则保留更强的量子态，若模拟下边界则保留更弱的量子态。而后求出保留量子态纠缠刚好为 0 时的  $p$  值（即量子系统的鲁棒性），若旧  $p$  值被保留则不用再求；将比较后的  $p$  值设定为噪声强度，代入下一次循环中。

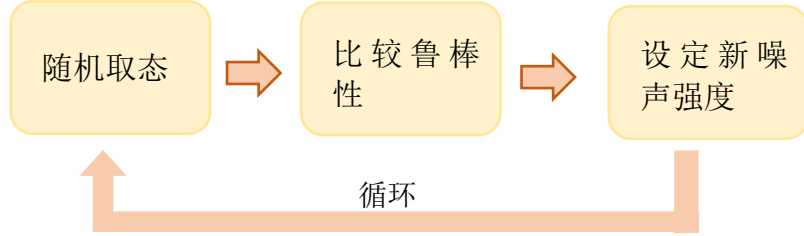


图 3.1 模拟边界流程图

### 3.1 数值模拟法效率

我们先对数值模拟法模拟边界计算一下效率。经过试验，我们发现  $|\alpha_4\rangle$  态的标准下界为特殊态

$$\begin{aligned}
 |\psi\rangle &= |W\rangle + |111\rangle \\
 &= \frac{1}{\sqrt{3}}(|001\rangle + |010\rangle + |100\rangle) + |111\rangle \quad (3.35)
 \end{aligned}$$

因此我们可以利用此特殊态来计算  $|\alpha_4\rangle$  态模拟下界的误差，以获得数值模拟法的模拟效率，验证其可靠性与准确性。显然，误差越低，模拟效率越高。

抽取态数是模拟下界时每个  $N_0$  值随机抽取的量子态数。相对误差由同一  $N_0$  下的  $|\psi\rangle$  态鲁棒值  $p_1$  与  $|\alpha_4\rangle$  态模拟下界鲁棒值  $p_2$  求得：

$$\text{相对误差} = \frac{p_1 - p_2}{p_1} \quad (3.36)$$

变化抽取态数，画出抽取随机态数量为 10、100、1000 时的相对误差图。



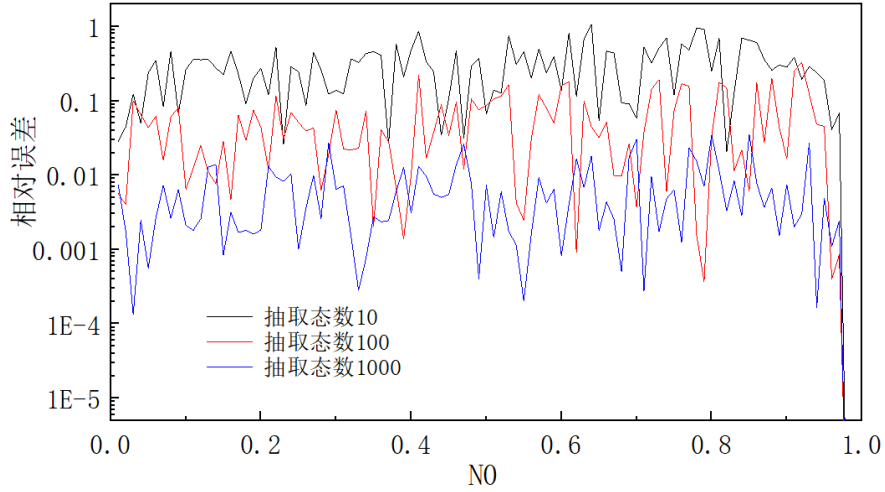


图 3.2  $|\alpha_4\rangle$ 态模拟下界的相对误差

由图 3.2，我们可以得到以下结论：

- 随着样本数的增加，相对误差逐渐减小，模拟效率逐渐升高。
- 样本数增加至 1000 个时，误差已经缩小至1%左右，效率非常可观。

综上所述，数值模拟法是一个兼具可靠性与准确性的方法，且模拟边界的随机量子态数取为 1000 时，模拟得到的边界准确性很高。

### 3.2 量子态三体纠缠的鲁棒性边界

我们用初始负熵 $N_0$ 与鲁棒性 $p$ 的关系图，来展现振幅阻尼通道中三比特轮换对称 $|\alpha_i\rangle$ 态( $i = 1,2,3,4$ )的三体纠缠性质。模拟上、下界时， $|\alpha_1\rangle$ 、 $|\alpha_2\rangle$ 、 $|\alpha_3\rangle$ 、 $|\alpha_4\rangle$ 四个量子态都分别取了 1000 个随机态，并分别随机取了 2500 个量子态画出其对应的坐标点，即图中上下边界之间的黑色圆点。

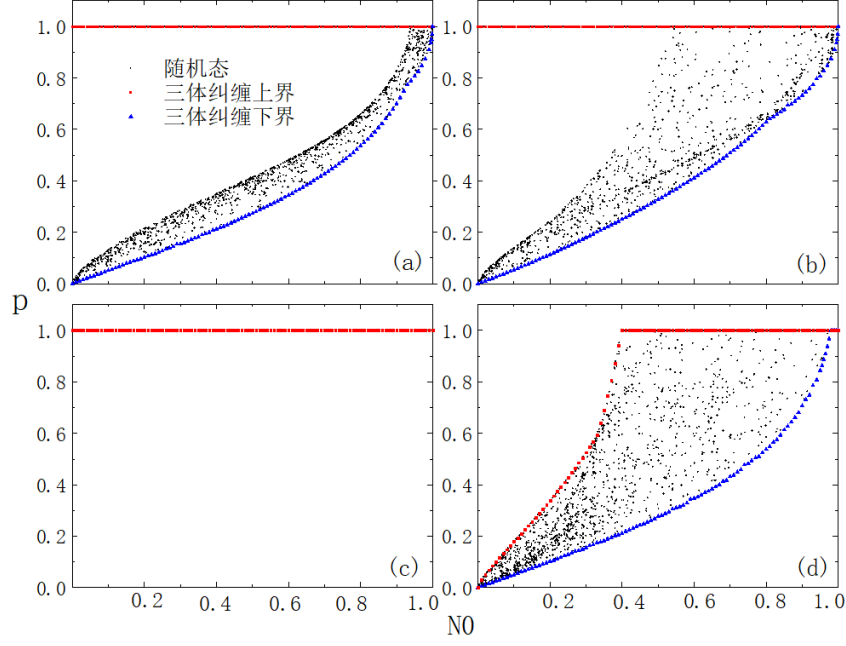


图 3.3 振幅阻尼通道中三比特轮换对称 $|\alpha_i\rangle$ 态( $i = 1,2,3,4$ )的鲁棒图，(a)、(b)、(c)和 (d)分别代表 $|\alpha_1\rangle$ 态、 $|\alpha_2\rangle$ 态、 $|\alpha_3\rangle$ 态、 $|\alpha_4\rangle$ 态。图中黑色圆点、红色方块、蓝色三角分别代表随机态、模拟上界、模拟下界

在图 3.3 中， $|\alpha_1\rangle$ 、 $|\alpha_2\rangle$ 态的上界为 $p = 1$ ， $|\alpha_3\rangle$ 态的随机态分布有且仅有 $p = 1$ ，因此它的边界与随机态皆为 $p = 1$ 直线。而且 $|\alpha_1\rangle$ 、 $|\alpha_2\rangle$ 、 $|\alpha_4\rangle$ 态的下界皆为单调递增，量子态的纠缠强弱与抵抗噪声能力是正相关的，这也符合我们平常的认知。

可以注意到， $|\alpha_1\rangle$ 、 $|\alpha_2\rangle$ 态的随机态分布在上下界之间不是铺满的，而是分成了两部分： $p = 1$ 直线与图中下方的量子态。这说明 $|\alpha_1\rangle$ 、 $|\alpha_2\rangle$ 态中有一部分量子态在振幅阻尼通道中的鲁棒性非常强，无论初始负熵 $N_0$ 为何值，都需要通道达到最强噪声值 $p = 1$ 才会发生解纠缠，成为可分离态。除此之外， $|\alpha_3\rangle$ 态这一类量子态的鲁棒性很强。在取随机态时，无论初始负熵 $N_0$ 的值是多少， $|\alpha_3\rangle$ 态的所有随机量子态的鲁棒值都是 $p = 1$ 。所以，量子态的基矢不同，其鲁棒性会有很大差别，甚至产生了某类量子态无论系数取值，所有态的鲁棒性都很强的现象，这是不符合我们平常认知的。

### 3.3 量子态二体纠缠的鲁棒性边界

要研究三比特轮换对称态在振幅阻尼通道中的纠缠性质，不仅要模拟三体纠缠，还要模拟系统中二体纠缠的演化情况。在此，我们选择采用并发度

(Concurrence)作为系统中二体纠缠的度量。画出量子态初始纠缠 $N_0$ 与鲁棒值 $p$ 的关系图，此处鲁棒性含义为演化时并发度刚好等于0时的通道噪声强度 $p$ 。

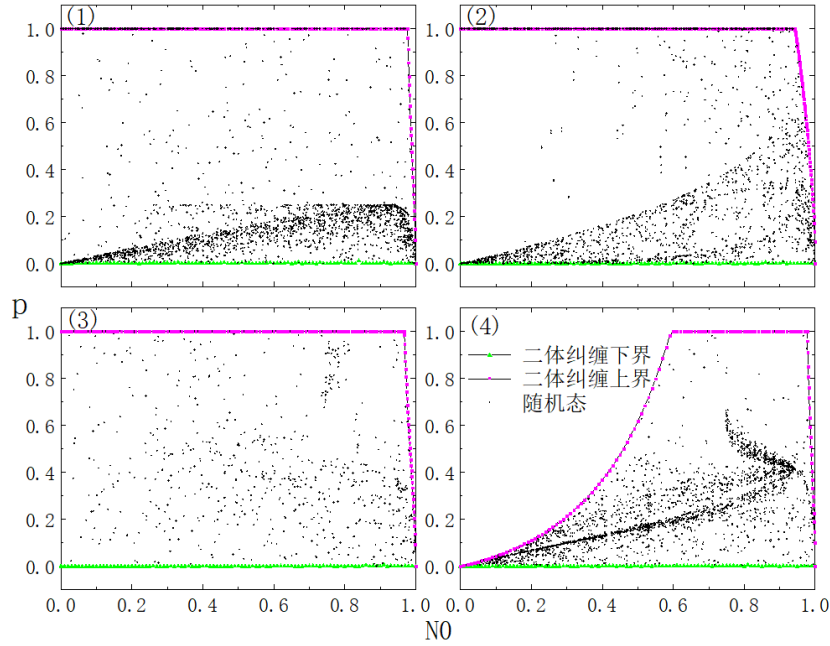


图 3.4 振幅阻尼通道中三比特轮换对称 $|\alpha_i\rangle$ 态( $i = 1,2,3,4$ )的二体纠缠鲁棒图，(1)、(2)、(3)和 (4)分别代表 $|\alpha_1\rangle$ 态、 $|\alpha_2\rangle$ 态、 $|\alpha_3\rangle$ 态、 $|\alpha_4\rangle$ 态。图中黑色圆点、洋红色方块线、绿色三角分别代表随机态、模拟上界、模拟下界。

很明显， $|\alpha_1\rangle$ 、 $|\alpha_2\rangle$ 态的二体纠缠鲁棒图有一条明显的分界线，将随机态分为两部分； $|\alpha_1\rangle$ 态图中的分界线与 $|\gamma_1\rangle = \sqrt{c}|W\rangle + \sqrt{1-c}|111\rangle$ 大致重合， $|\alpha_2\rangle$ 态图中分界线与 $|\gamma_2\rangle = \sqrt{c}|\tilde{W}\rangle + \sqrt{1-c}|111\rangle$ 大致重合。

三比特量子系统的二体纠缠的下界皆为 $p = 0$ ，这是 $GHZ - like$ 态的特性。在振幅阻尼通道中这四类量子态的二体纠缠上界与下界之间相差很大，不同量子态二体纠缠的鲁棒性差别非常大，有一部分量子态的二体纠缠抗噪声能力很弱，很小的 $p$ 值便发生退相干；还有一部分量子态的二体纠缠抗噪声能力很强，基矢初始纠缠小，也能抵抗很大的噪声强度。这是违反直觉的，也正是量子世界的神奇所在。

### 3.4 量子态纠缠的相图

前面两节中我们分别模拟了三比特轮换对称 $|\alpha_i\rangle$ 态( $i = 1,2,3,4$ )在振幅阻尼通道里三体纠缠与二体纠缠的演化情况。然而，将二者曲线放在同一张图中，便可以清晰地看出 $|\alpha_i\rangle$ 态( $i = 1,2,3,4$ )纠缠属性的变化情况，即量子态纠缠的相

图。

在画图时，为了方便看清区域的划分，去掉了图中的黑色圆点。

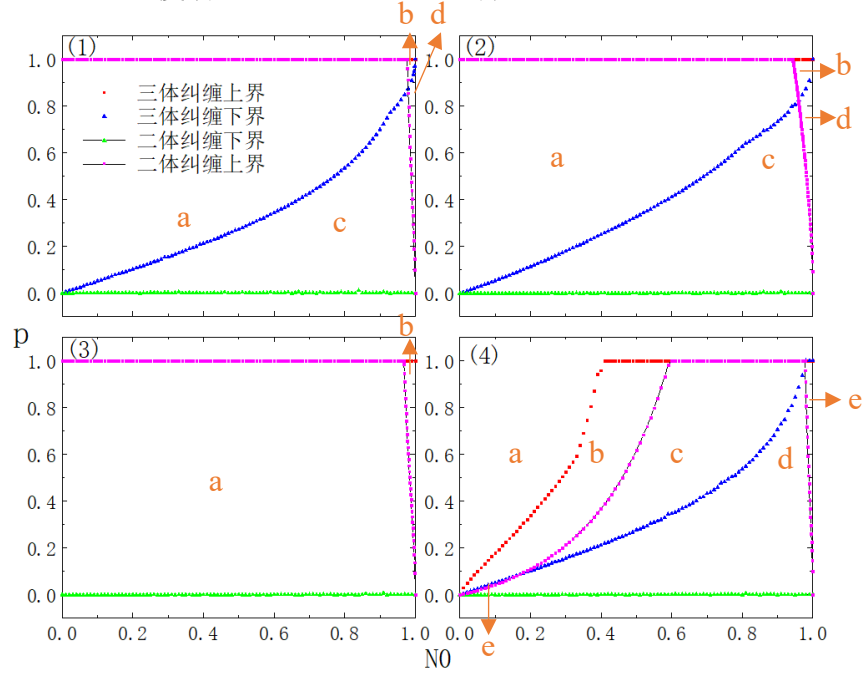


图 3.5 振幅阻尼通道中三比特轮换对称 $|\alpha_i\rangle$ 态( $i = 1,2,3,4$ )的纠缠属性相图，(1)、(2)、(3)和 (4)分别代表 $|\alpha_1\rangle$ 态、 $|\alpha_2\rangle$ 态、 $|\alpha_3\rangle$ 态、 $|\alpha_4\rangle$ 态。图中红色方块、蓝色三角、洋红色方块线、绿色三角线分别代表三体纠缠上界、三体纠缠下界、二体纠缠上界、二体纠缠下界

可以看到，每个 $|\alpha_i\rangle$ 态( $i = 1,2,3,4$ )的纠缠图都被分成了若干个区域，不同的区域有着不同的含义，像水的三相图一样。因此我们称之为纠缠的相图。

$|\alpha_1\rangle$ 态：a 区域中，三体纠缠和二体纠缠都可能存在；b 区域中，三体纠缠可能存在，二体纠缠一定不存在；c 区域中，三体纠缠一定存在，二体纠缠不一定存在；d 区域中，三体纠缠一定存在，二体纠缠一定不存在。

$|\alpha_2\rangle$ 态：a 区域中，三体纠缠和二体纠缠都可能存在；b 区域中，三体纠缠可能存在，二体纠缠一定不存在；c 区域中，三体纠缠一定存在，二体纠缠不一定存在；d 区域中，三体纠缠一定存在，二体纠缠一定不存在。

$|\alpha_3\rangle$ 态：a 区域中，三体纠缠一定存在，二体纠缠可能存在；b 区域中，三体纠缠一定存在，二体纠缠一定不存在。

$|\alpha_4\rangle$ 态：a 区域中，三体纠缠和二体纠缠一定不存在；b 区域中，三体纠缠一定存在，二体纠缠一定不存在；c 区域中，三体纠缠和二体纠缠可能存在；d 区域中，三体纠缠一定存在，二体纠缠可能存在；e 区域中，三体纠缠一定存在，二体纠缠一定不存在。

很明显，相图中不同区域的大小有很大差别，量子态的初始纠缠 $N_0$ 较大时，相图中的区域较小。其中，试验发现 $|\alpha_1\rangle$ 态的二体纠缠上界是特殊态

$$\begin{aligned} |\psi\rangle &= |W\rangle + |111\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}}(|001\rangle + |010\rangle + |100\rangle) + |111\rangle \end{aligned} \quad (3.37)$$

代入 (2.12) 式进行数值计算，得到 $|\alpha_1\rangle$ 态与 $|\alpha_4\rangle$ 态二体纠缠上界 $p = 1 \rightarrow p < 1$ 处的拐点 $N'_1 = N'_4 = 0.977$ 。另外，我们并未成功找到与 $|\alpha_2\rangle$ 、 $|\alpha_3\rangle$ 态的二体纠缠上界相符的特殊态；所以采用二分法找到 $|\alpha_2\rangle$ 、 $|\alpha_3\rangle$ 态的二体纠缠上界拐点分别为 $N'_2 = 0.942$ 、 $N'_3 = 0.967$ 。可以看到，四类态的二体纠缠上界拐点数值都很大，从图中也能明显看出 $|\alpha_1\rangle$ 态、 $|\alpha_2\rangle$ 态的 b、d 区域， $|\alpha_3\rangle$ 态的 b 区域， $|\alpha_4\rangle$ 态的 e 区域范围很小，它们的含义皆对应于二体纠缠一定不存在；也就是说，二体纠缠一定不存在的区域非常小。

经过分析，我们最终总结出了三比特轮换对称态 $|\alpha_i\rangle$ 态( $i = 1,2,3,4$ )在振幅阻尼通道中的纠缠演化相图，从多个角度分析了其退相干情况，初步研究了三比特轮换对称态纠缠与鲁棒性的关系。可以发现，三比特系统中量子态的纠缠与鲁棒性非一一对应，可能出现纠缠弱但鲁棒性强的量子态。而且在一个三比特系统中，即使任意两个比特之间的纠缠消失，三比特之间的纠缠仍然存在。这是不符合经典物理规律的，也正是量子世界的魅力所在。

## 第四章 轮换对称态在振幅阻尼通道中的纠缠相图

第三章中我们分析了从 $|\alpha\rangle$ 态中选取了四类 $|\alpha_i\rangle$ 态( $i = 1,2,3,4$ )的退相干性质, 得到其纠缠相图, 其中 $|\alpha\rangle$ 态是三比特系统中最普适的轮换对称态。然而, 这四类量子态的并集也不能完全代表 $|\alpha\rangle$ 态, 无法说明所有轮换对称态的情况。因此直接对 $|\alpha\rangle$ 态进行分析是十分有必要的。

经过尝试, 发现无法解析出 $|\alpha\rangle$ 态在固定初始纠缠下的系数范围, 那么数值模拟法对于 $|\alpha\rangle$ 态是失效的, 不能利用其分析出其退相干性质。那么必须尝试别的方法来分析 $|\alpha\rangle$ 态。

### 第一节 分析四类轮换对称态的三体纠缠边界

我们将目光重新移回图 3.2, 观察 $|\alpha_i\rangle$ 态( $i = 1,2,3,4$ )的上、下边界。可以发现 $|\alpha_i\rangle$ 态( $i = 1,2,3$ )的上界皆为 $p = 1$ , 而 $|\alpha\rangle$ 态的上界是大于等于 $|\alpha_i\rangle$ 态( $i = 1,2,3,4$ )的, 因此推断得到 $|\alpha\rangle$ 态的上界就是 $p = 1$ 直线。那么接下来只需要分析 $|\alpha\rangle$ 态的下界。

三比特任意态在振幅阻尼通道中的退相干下界是特殊量子态 $|\Omega\rangle$ <sup>[20]</sup>,

$$|\Omega\rangle = \cos\theta|111\rangle + \frac{\sin\theta}{\sqrt{2}}(|010\rangle + |001\rangle) \quad (4.1)$$

为方便比较, 将 $|\Omega\rangle$ 态与 $|\alpha_i\rangle$ 态( $i = 1,2,4$ )的下边界画在同一张图中;  $|\alpha_3\rangle$ 态的下界为 $p = 1$ , 因此不再放入比较。

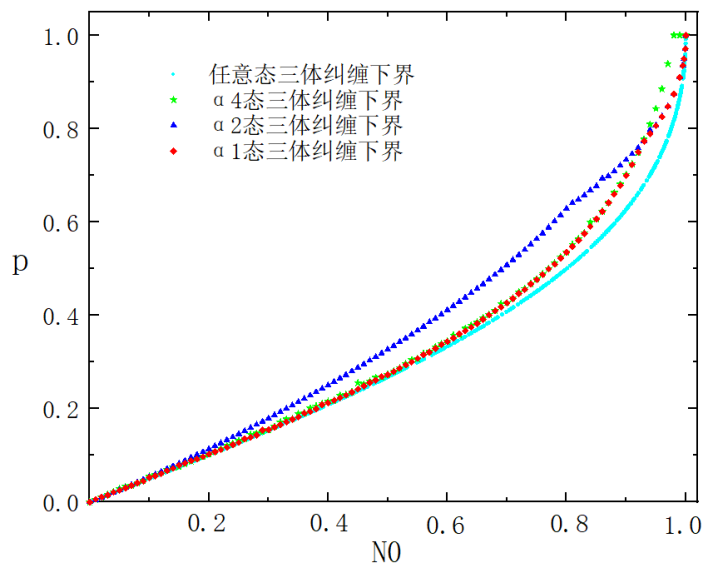


图 4.1  $|\alpha_i\rangle$ 态( $i = 1,2,4$ )三体纠缠的下边界与任意态三体纠缠下界 $|\Omega\rangle$ 态的对比图。图中天蓝色圆点、绿色五角星、蓝色三角、红色菱形块

分别代表任意态、 $|\alpha_4\rangle$ 、 $|\alpha_2\rangle$ 、 $|\alpha_1\rangle$ 态三体纠缠下界。

经初步观察，判断出 $|\alpha_1\rangle$ 态的下界在四类量子态中是最低下界。为了更直观地判断出四类量子态的最低下界，我们计算了 $|\alpha_i\rangle$ 态( $i = 1,2,4$ )的下边界 $p_1$ 与任意态下界 $|\Omega\rangle$ 态 $p_2$ 的差值，其计算公式为

$$\text{差值} = p_1 - p_2 \quad (4.2)$$

画出 $|\alpha_i\rangle$ 态( $i = 1,2,4$ )的差值随 $N_0$ 变化的图像。

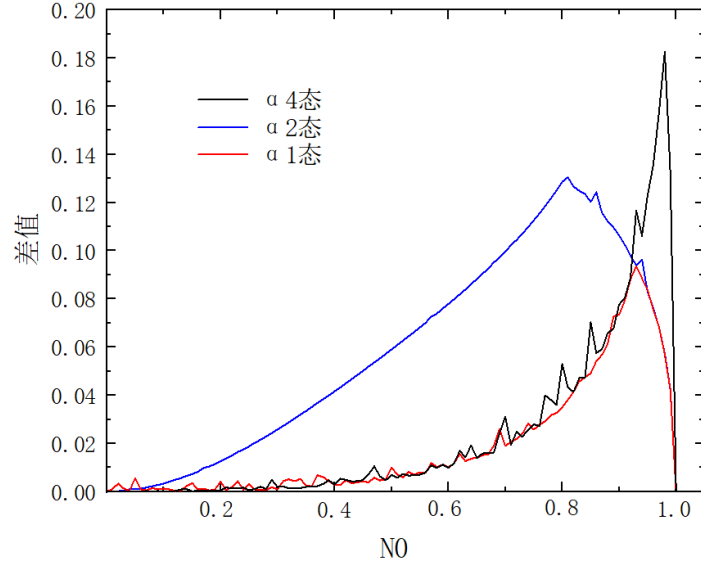


图 4.2  $|\alpha_i\rangle$ 态( $i = 1,2,4$ )三体纠缠下界的差值随 $N_0$ 变化。图中黑色、蓝色、红色线分别代表 $|\alpha_i\rangle$ 、 $|\alpha_i\rangle$ 、 $|\alpha_i\rangle$ 态三体纠缠下界差值。

结合图 4.1 与图 4.2， $|\alpha_i\rangle$ 态( $i = 1,2,3,4$ )中最低的下边界为 $|\alpha_1\rangle$ 态下边界。因此，

$$|\alpha_1\rangle\text{态下边界} \geq |\alpha\rangle\text{态下边界} \geq |\Omega\rangle\text{态} \quad (4.3)$$

## 第二节 随机态的遍历

既然无法利用数值模拟法模拟出 $|\alpha\rangle$ 态下界，那么便用对 $|\alpha\rangle$ 态的系数取遍历的方法，尝试找到随机态的分布规律，得到 $|\alpha\rangle$ 态的下界。为了缩小 $|\alpha\rangle$ 态系数的未知量，仿照 3.3.2 节的方法，对 $|\alpha\rangle$ 态系数进行坐标变换。将(3.2)式中的系数由笛卡尔坐标系变换至超球坐标系，

$$\begin{aligned} c_1 &= \cos\theta_1 \\ c_2 &= \sin\theta_1 \cos\theta_2 \\ c_3 &= \sin\theta_1 \sin\theta_2 \sin\theta_3 \end{aligned}$$

$$c_4 = \sin\theta_1 \sin\theta_2 \sin\theta_3 \quad (4.4)$$

设  $x = \cos^2\theta_1$ ,  $y = \cos^2\theta_2$ ,  $z = \cos^2\theta_3$ , 则 (4.4) 式整理为

$$\begin{aligned} c_1 &= \sqrt{x} \\ c_2 &= \sqrt{(1-x)y} \\ c_3 &= \sqrt{(1-x)(1-y)z} \\ c_4 &= \sqrt{(1-x)(1-y)(1-z)} \end{aligned} \quad (4.5)$$

接下来分别固定  $x$ 、 $y$ 、 $z$  值, 对另两个参数取遍历画出随机态, 并观察图像, 判断是否有一定的规律。最终发现, 当固定  $z$  的取值时, 随机态的分布与下边界有相关的规律。

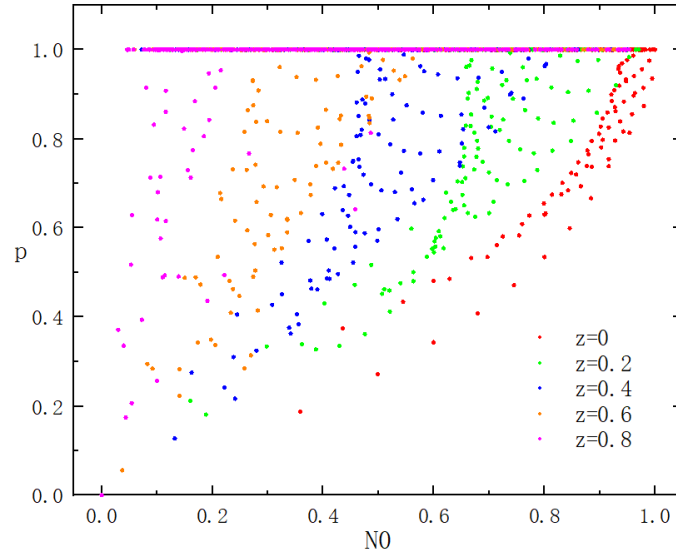


图 4.3 固定  $z$  的取值随机态分布

很明显, 随着  $z$  值的减小, 随机态整体右移。  $z$  值越小, 随机态分布越靠右, 因此初步推断  $|\alpha_1\rangle$  态的下界就是  $|\alpha\rangle$  态的下界。

### 第三节 验证 $|\alpha_1\rangle$ 态下界

目前已经猜测出  $|\alpha\rangle$  态的下界即为  $|\alpha_1\rangle$  态下界, 下一步需要验证此猜想, 得到最终结论。我们选择了利用两种方法模拟随机态, 观察随机态中是否有比  $|\alpha_1\rangle$  态下界更低的态。

#### 3.1 遍历法取随机量子态



首先采用遍历的方法取随机态。对 $x \in [0,1]$ 间隔 0.05 取 21 个值，即 $x = 0, 0.05, 0.1, 0.15, \dots, 0.95, 1$ 。用同样的数值间隔对 $y, z$ 也进行取值，同样各得到 21 个值。利用 (4.5) 式将 $(x, y, z)$ 转化为 $(c_1, c_2, c_3, c_4)$ 以模拟 $21^3 = 9261$ 个量子态。

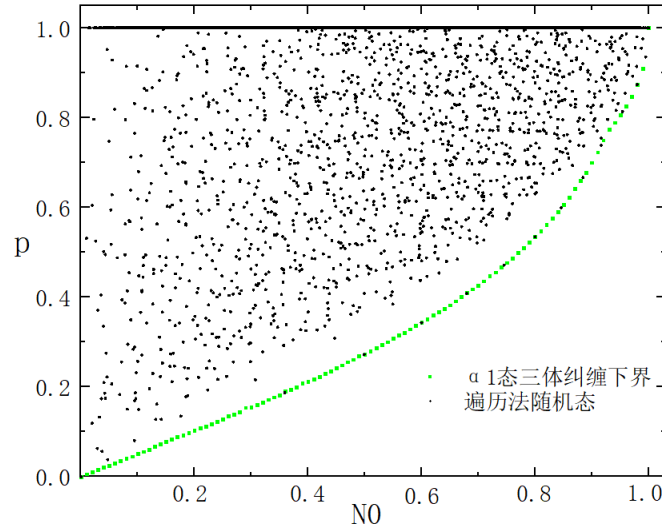


图 4.4 遍历法取量子态模拟三体纠缠

从图 4.4 中可以看到， $|\alpha\rangle$ 态中所有遍历到的量子态皆在 $|\alpha_1\rangle$ 态上下界之内，没有黑点超出 $|\alpha_1\rangle$ 态下界范围。

### 3.2 随机法取随机量子态

采用随机系数的方法对量子态进行随机取态。对 $|\alpha\rangle$ 态的四个系数在 $[-1,1]$ 内取随机值，模拟了 10000 个随机量子态。

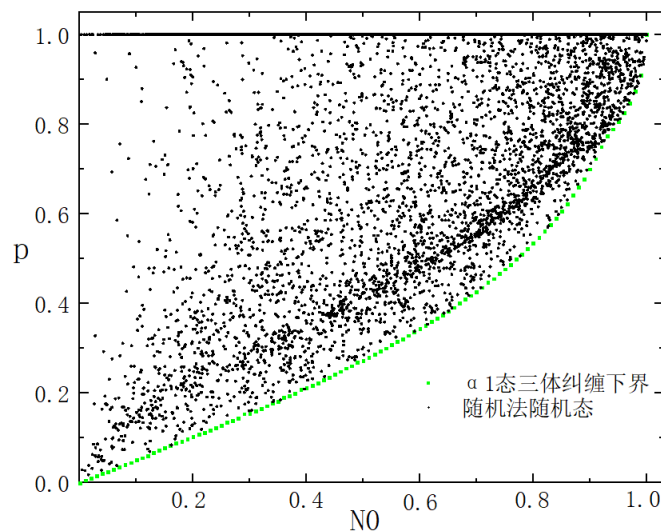


图 4.5 随机法取量子态模拟三体纠缠

图 4.5 中所有的点皆在 $|\alpha_1\rangle$ 态下界之上，没有超过 $|\alpha_1\rangle$ 态范围。综合图 4.3、图 4.4、图 4.5， $|\alpha_1\rangle$ 态下界就是 $|\alpha\rangle$ 态的下界。至此，我们得到了振幅阻尼通道下，三比特系统最普适的轮换对称态 $|\alpha\rangle$ 态的三体纠缠上下边界。

#### 第四节 二体纠缠的退相干性质

仿照对 $|\alpha\rangle$ 态三体纠缠的研究方法，我们继续研究 $|\alpha\rangle$ 态二体纠缠的上下边界。由第三章 3.3 节，二体纠缠的下界皆为 $p = 0$ ，这是 $GHZ - like$ 量子态的特性。因此我们只对 $|\alpha\rangle$ 态二体纠缠上界进行研究。

对图 3.4 的 $|\alpha_i\rangle$ 态( $i = 1,2,3,4$ )上界进行比较，将四类态的上界画在同一坐标系下。

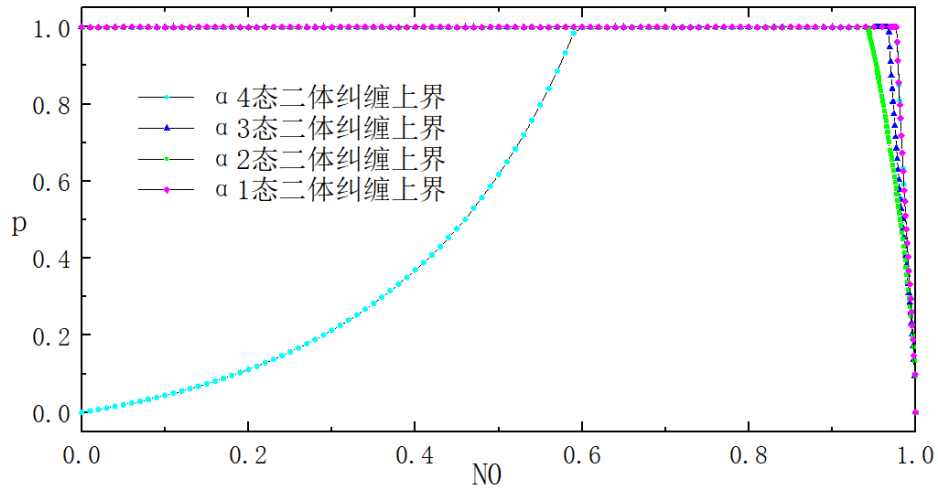


图 4.6  $|\alpha_i\rangle$ 态( $i = 1,2,3,4$ )二体纠缠的上边界，天蓝色圆点线、蓝色三角线、绿色方块线、洋红色菱形线分别代表 $|\alpha_4\rangle$ 、 $|\alpha_3\rangle$ 、 $|\alpha_2\rangle$ 、 $|\alpha_1\rangle$ 态二体纠缠的上边界

显然 $|\alpha_1\rangle$ 态的二体纠缠上界是最高的，可以初步猜测二体纠缠 $|\alpha_1\rangle$ 态的上界即为 $|\alpha\rangle$ 态上界。

再次采用随机法，对 $|\alpha\rangle$ 态的四个系数在 $[-1,1]$ 内取随机值，模拟了 10000 个随机量子态的二体纠缠。

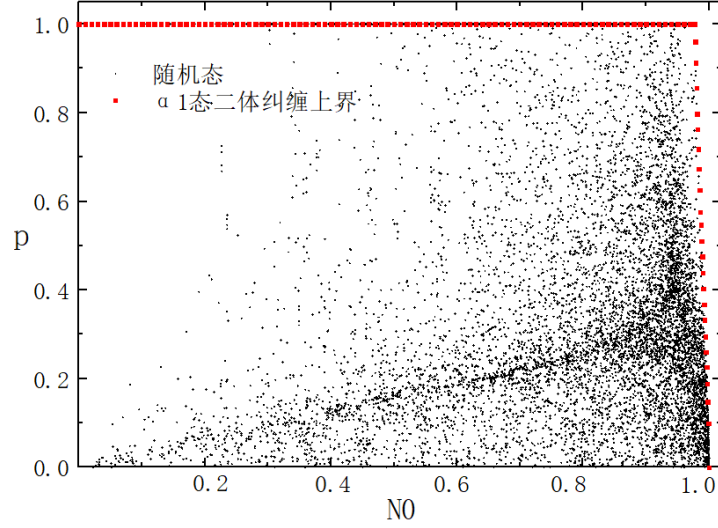


图 4.7 随机法取量子态模拟二体纠缠

可以看到，图 4.7 中没有点超出 $|\alpha_1\rangle$ 态上界。综合图 4.6 与图 4.7， $|\alpha_1\rangle$ 态的二体纠缠上界即为 $|\alpha\rangle$ 态二体纠缠上界。至此，三比特轮换对称态 $|\alpha\rangle$ 态在振幅阻尼通道下的二体纠缠上下界皆已得到。

### 第五节 轮换对称态的纠缠相图

在第三节与第四节中，分析得到 $|\alpha_1\rangle$ 态三体纠缠、二体纠缠的上下界皆为 $|\alpha\rangle$ 态的上下界。因此可以画出 $|\alpha\rangle$ 态纠缠的相图。

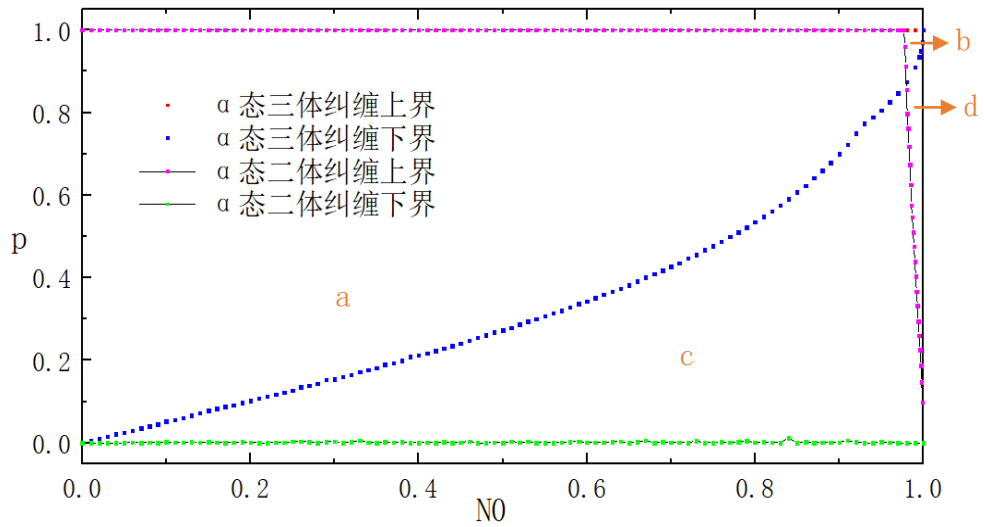


图 4.8  $|\alpha\rangle$ 态纠缠的相图。其中，红色方块、蓝色方块是 $|\alpha\rangle$ 态三体纠缠的上下界；洋红色方块线、绿色方块线是 $|\alpha\rangle$ 态二体纠缠的上下界。

如图所示， $|\alpha\rangle$ 态的鲁棒图被分割成了四个区域，每个区域都代表了不同的纠缠含义。这就是 $|\alpha\rangle$ 态的相图。下面将详细说明各区域的不同含义。

区域 a: 三体纠缠与二体纠缠皆可能存在;

区域 b: 三体纠缠可能存在, 二体纠缠一定不存在;

区域 c: 三体纠缠一定存在, 二体纠缠可能存在;

区域 d: 三体纠缠一定存在, 二体纠缠一定不存在。

其中, 不同区域的大小相差很大, 明显看出区域 b 与区域 d 相对较小。由第三章 3.3 节, 二体纠缠上界之上的区域, 即  $N_0 > 0.977$  时区域较小。

显而易见,  $|\alpha\rangle$  态的纠缠相图与  $|\alpha_1\rangle$  态纠缠相图完全相同, 在振幅阻尼通道中  $|\alpha_1\rangle$  态可以很好的代表  $|\alpha\rangle$  态。但注意, 这并不能说明二者的退相干性质相同——因为二者的随机态退相干性质相差很大, 仅仅是纠缠的上下边界相同。

## 结论

本文主要研究了三比特轮换对称态在振幅阻尼通道中的纠缠结构演化情况，得到了一些有意义的结论。

对于三比特量子系统，其纠缠大小与鲁棒值不是一一对应的，系统的鲁棒性非完全取决于纠缠<sup>[24]</sup>。利用数值模拟法，我们分析了四类特殊的轮换对称态 $|\alpha_i\rangle$ 态( $i = 1,2,3,4$ )的纠缠属性。发现某类量子态无论初始纠缠强弱，其三体纠缠的鲁棒性皆很强( $p = 1$ )。在分析二体纠缠后，得到了在振幅阻尼通道中的纠缠属性相图：只要知道了某量子态的初始纠缠 $N_0$ ，便能根据振幅阻尼通道的噪声强度 $p$ 得知该量子态的纠缠情况；换句话说，我们可以通过控制振幅阻尼通道的噪声强度，来控制该量子系统的纠缠属性，这些在研究退相干过程中是非常有意义的。

另外，通过分析我们最终得到了最普适的三比特轮换对称态 $|\alpha\rangle$ 态在振幅阻尼通道中的纠缠相图。 $|\alpha\rangle$ 态作为三比特量子系统中最一般的轮换对称态，得到其纠缠相图有着诸多意义。可以看出，轮换对称态的三体纠缠上下边界都很接近任意态的边界（图 4.1），这是违反直觉的。轮换对称态作为任意量子态中的特殊态，与任意态相比是很小的一部分。但其三体纠缠的鲁棒图范围很大，上界与任意态上界重合，下界 $p$ 值与任意态下界 $p$ 值相差不超过 0.1（图 4.2）。这些都对我们进一步认知轮换对称态有很大的帮助。另外，在其他退相干通道中，轮换对称态也有诸如此类的性质吗？这些都值得进一步探索。

## 致谢

春秋四载，美好、充实的本科生活一晃而过。在论文完成之际，回首过去的时光，感慨颇多。在这里，我要感谢所有见证了我求学路上的老师、同学、亲友，感谢你们对我的帮助与关怀。

感谢我的父母，感谢我的家人，你们是我这四年来最强的后盾，也是在这条路上给予我最多信念的人。

感谢我的指导导师赵宝奎老师，赵老师在这期间对我悉心指导，不仅时常督促我，更是在我坚持不住的时候给了我信念，为我指引科研路上前进的方向，让我有坚持下来的勇气。除此之外，赵老师还在生活中给予了我许多关心。在这里由衷地感谢赵老师。

感谢与我同组的王焱、杨沐春同学，以及 18 级的忻宇同学，没有与你们的沟通、交流，我难以有如今论文的完成度；没有与你们思想碰撞的火花，难以产生今天这场熊熊的大火。

感谢我的室友们，大学四年，我们离开家庭，来到这里一起生活，你们都是我四年中最美好的回忆。特别是李立同学，你的开心乐观深深影响了我，让我更加积极地去面对学习带来的压力。

最后，再次真诚感谢所有帮助过我的老师、同学与亲友！

## 参考文献

- [1] 郭光灿 . 量子信息引论[M]. 北京: 北京大学出版社, 2000.
- [2] Yu T , Eberly J H . Quantum open system theory: bipartite aspects[J]. Phys. Rev. Lett., 2006, 97(14):140403.
- [3] Einstein A , Podolsky B , Rosen N . Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete?[J]. Phys. Rev., 1935, 47(10):696-702.
- [4] Werner R F . Quantum states with Einstein-Podolsky-Rosen correlations admitting a hidden-variable model[J]. Phys. Rev. A, 2016, 40(8):4277-4998.
- [5] Greenberger D M , Horne M A , Shimony A , et al . Bell's theorem without inequalities[J]. American Journal of Phys., 1998, 58(12):1131-1143.
- [6] Dür W , Vidal G , Cirac J I . Three qubits can be entangled in two inequivalent ways[J]. Phys. Rev. A, 2012, 62(6):062314.
- [7] Coffman V , Kundu J , Wootters W K . Distributed entanglement[J]. Phys. Rev. A, 2000, 61.
- [8] Peres A . Separability criterion for density matrices[J]. Phys. Rev. Lett., 1996, 77(8):1413-1415.
- [9] Horodecki M , Horodecki P , Horodecki R . Separability of mixed states: necessary and sufficient conditions[J]. Phys. Lett. A, 1996, 223.
- [10] Vedral V , Plenio M B , Rippin M A , et al . Quantifying entanglement[J]. Phys. Rev. Lett., 1997, 78(12):2275-2279.
- [11] Życzkowski K . Volume of the set of separable states II[J]. Phys. Rev. A, 1999, 60(5).
- [12] Vidal G , Werner R F . Computable measure of entanglement[J]. Phys. Rev. A, 2002, 65(3).
- [13] Wootters W K . Entanglement of formation of an arbitrary state of two qubits[J]. Foundations of Phys. Lett., 1997, 14(10):199-212.
- [14] Borrás A , Majtey A P , Plastino A R , et al . Robustness of highly entangled multi-qubit states under decoherence[J]. Phys. Rev.

A, 2008, 79(2):022108.

[15] Choi M . Completely positive linear maps on complex matrices[J]. Linear Algebra and its Applications, 1975, 10(3):285–290.

[16] Kraus K . States, effects, and operations fundamental notions of quantum theory[M]. Berlin: Springer Berlin Heidelberg, 1983.

[17] 曾谨言 . 量子力学 卷II (第五版) [M]. 北京: 科学出版社, 2014.

[18] Simon C , Kempe J , et al . Robustness of multiparty entanglement[J]. Phys. Rev. A, 2002.

[19] Nielsen M A , Chuang I L . Quantum computation and quantum information[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2000.

[20] Li H M , Zhao B K . Most robust and fragile states with the same entanglement properties[J]. Annalen der Physik, 2018, 530(10).

[21] Bennett C H , Brassard G , Crépeau C , et al . Teleporting an unknown quantum state via dual classical and Einstein-Podolsky-Rosen channels[J]. Phys. Rev. Lett., 1993, 70(13):1895–1899.

[22] Deng F G , Long G L , Liu X S . Two-step quantum direct communication protocol using the Einstein-Podolsky-Rosen pair block[J]. Phys. Rev. A, 2003, 68(4):113–114.

[23] Zhang W , Ding D S , Sheng Y B , et al . Quantum secure direct communication with quantum memory[J]. Phys. Rev. Lett., 2017, 118(22):220501.

[24] Zhao B K , Deng F G . Residual effect on the robustness of multiqubit entanglement[J]. Phys. Rev. A, 2010, 82(1).

[25] 闫啸坤 . 三比特系统退极化过程纠缠结构的变化[D]. 长春: 吉林大学, 2020.