# 一、数据结构和算法

# 二、线性表

## 1 线性表的定义和基本操作

### 1.1 线性表的定义

线性表是具有相同数据类型的n（n≥0）个数据元素的有限序列，其中n为表长，当n=0时线性表是一个空表。

若用L命名线性表，则其一般表示为 L=（$a_1,a_2,\cdots,a_i,a_{i+1},\cdots,a_n$）,式中$a_1$是唯一的“第一个”数据元素，又称表头元素；

$a_n$是唯一个个"最后一个"数据元素，又称表尾元素。

除第一个元素外，每个数据元素有且仅有一个直接前驱；除最后一个元素外，每个数据元素有且仅有一个直接后继。

### 1.2 线性表的特点

- 表中元素的个数有限。
- 表中元素的都具有逻辑上的顺序性，表中元素有其先后次序。
- 表中元素都是数据元素，每个元素都是单个元素。
- 表中元素的数据类型都相同，这意味着每个元素占有相同大小的存储空间。
- 表中元素具有抽象性，即仅讨论元素间的逻辑关系，而不考虑元素究竟表示什么内容。

### 1.3 线性表的抽象数据类型ADT

```
ADT List{
数据对象：D={ai|ai=ElemSet,i=1,2,..,n,n≥0}
数据关系：R={<ai-1,ai>|ai-1,ai∈D,i=2,...,n}
基本操作：
IniList(&L)
	操作结果：构造一个空的线性表L。
DestroyList(&L)
	初始条件：线性表L已存在
	操作结果：销毁线性表L
ClearList(&L)
	初始条件：线性表L已存在
	操作结果：将L重置为空表
ListEmpty(L)
	初始条件：线性表L已存在
	操作结果：若L为空表，则返回true，否则返回false
ListLength(L)
	初始条件：线性表L已存在
```

```
        操作结果：返回L中数据元素个数
GetElem(L,i,&e)
        初始条件：线性表L已存在，1≤i≤ListLength(L)
        操作结果：用e返回L中第i个数据元素的值
LocateElem(L,e,compare())
        初始条件：线性表L已存在
        操作结果：返回L中第一个值与e相同的数据元素在L中的位置。若这样的数据元素不存在，则返回值为0.
PriorElem(L,cur_e,&pre_e)
        初始条件：线性表L已存在
        操作结果：若cur-e是L的数据元素，且不是第一个，则用pre_e返回它的前驱，否则操作失败，pre_e
无定义
NextElem(L,cur_e,&next_e)
        初始条件：线性表L已存在
        操作结果：若cur_e是L的数据元素，且不是最后一个，则用next_e返回它的后继，否则操作失败，
next_e无定义
ListInsert(&L,i,e)
        初始条件：线性表已存在，1≤i≤ListLength(L)+1
        操作结果：在L中第i个位置之前插入新的数据元素e,L的长度加1
ListDelete(&L,i,&e)
        初始条件：  线性表存在且非空，1≤i≤ListLength(L)
        操作结果：删除L的第i个数据元素，并用e返回其值，L的长度减1
TravarseList(L)
        初始条件：线性表已存在
        操作结果：依次对线性表L进行遍历，在遍历过程中对L的每个结点访问一次
}ADT List
```

## 1.4 线性表基本操作

```
InitList(&L)：初始化表。构造一个空表L，分配内存空间。
DestroyList(&L)：销毁操作。销毁线性表，并释放线性表L所占用的内存空间。
ListInsert(&L,i,e)：插入操作。在表L中第i个位置上插入指定元素e。
ListDelete(&L,i,&e)：删除操作。删除表L中第i个位置的元素，并用e返回删除元素的值。
LocateElem(L,e)：按值查找操作。在表L中查找具有给定关键字值的元素。
GetElem(L,i)：按位查找操作。获取表L中第i个位置的元素的值。
Length(L)：求表长。返回线性表L的长度，即L中数据元素的个数。
PrintList(L)：输出操作。按前后顺序输出线性表L的所有元素的值。
Empty(L)：判空操作。若L为空表，则返回true，否则返回false。
```

# 2 顺序表

## 2.1 顺序表的定义

**顺序表的存储结构：**顺序存储，即逻辑上相邻的数据元素在物理上也相邻

**顺序表的特点：**

1. 随机存取，即可以在O(1)时间内找到第i个元素
2. 存储密度高，每个节点只存储数据元素
3. 拓展容量不方便（即便采用动态分配的方式实现，拓展长度的时间复杂度也比较高）
4. 插入、删除操作不方便，需要移动大量元素

**优点：**可随机存取，存储密度高

**缺点：**需要大片连续的空间，改变容量不方便

### 2.1.1 顺序表的实现方式

**顺序表有两种实现方式：**

1. 静态分配
   - 使用"静态数组"实现，大小一旦确定就无法改变
2. 动态分配
   - 使用"动态数组"实现
   - 顺序表满时，可以再用new关键字重新申请更大的内存空间来拓展顺序表的最大长度
   - 需要将数据元素复制到新的存储空间，并用delete关键字释放原来的空间

```
//静态分配的顺序表（大小一旦确定就无法改变）
#define MAXSIZE 10//线性表的最大长度
typedef struct{
    ElemType data[MAXSIZE];
    int length;
}SqList;
//动态分配的顺序表（使用动态数组实现）
#define INITSIZE 10//顺序表的初始长度
typedef struct{
    ElemType *data;//指示动态分配数组的指针
    int MaxSize;//顺序表的最大容量
    int length;//顺序表当前的长度
}SeqList;
```

### 2.1.2 初始化顺序表 InitList

#### 1) 静态分配顺序表

```
//初始化顺序表（固定长度，不设置默认值）
void InitList(SqList &L){
    L.length = 0;
}
//初始化顺序表（固定长度，设置默认值）
void InitList(SqList &L){
    for(int i = 0; i< L.MaxSize;i++){
        L.data[i] = 0;
    }
    L.length = 0;
}
```

#### 2) 动态分配顺序表的初始化

```
//初始化顺序表
void InitList(SeqList &L){
    L.data = new ElemType[INITSIZE];//申请初始空间
    if(!L.data)//如果申请失败，结束程序
        eixt(OVERFLOW);
    L.MaxSize = INITSIZE;
    L.length = 0;
}
```

#### 3) 动态分配长度顺序表增加表长

```
void IncreaseSjze(SeqList &L,int len){
    ElemType *p = L.data;
    L.data = new ElemType[L.MaxSize+len];//重新申请更大的空间
    for(int i = 0; i<L.lenth;i++){
        L.data[i] = p[i];//将数据复制到新的空间
    }
    L.MaxSize += len;//顺序表长度增加 len
    delete(p);//释放原来的内存空间
}
```

## 2.2 顺序表的插入和删除

### 2.2.1 顺序表的插入 ListInert

```
bool ListInsert(SeqList &L,int i,Elemtype e){
    if(i<i||i>L.length+1)//判断i的范围是否有效
        return false;
    if(L.length>=L.MaxSize)//如果内存空间不够，重新申请空间
        IncreaseSize(L,10);
    for(int j=L.length;j>=i;j--)//将第i个及之后的元素依次后移
        L.data[j] = L.data[j-1];
    L.data[i-1] = e;//在第i个位置出插入元素e
    L.length++;//顺序表长度加1
    return true;
}
```

**时间复杂度：**

最好情况：新元素插到表位，不需要移动元素，循环0次，最好时间复杂度=O(1)

最坏情况：新元素插到表头，移动n个元素，循环n次，最坏时间复杂度=O(n)

平均情况：插入每个位置的概率相等，为p=$\frac{1}{1+n}$，平均循环次数=$\frac{0+1+2+...+n}{1+n} = \frac{n}{2}$，平均时间复杂度=O(n)

### 2.2.2 顺序表的删除操作 ListDelete

```
bool ListDelete(SeqList &L,int i,Elemtype &e){
    if(i<1||i>L.length)//判断i的范围是否合格
        return false;
    e = L.data[i-1];//返回位置i元素
    for(int j = i;j<L.length;j++)//第i个及之后的元素以此前移
        L.data[j-1] = L.data[j];
    L.length--;//顺序表长度减1
    return true;
}
```

**时间复杂度：**

最好情况：删除表尾元素，不需要移动其他元素，循环0次，最好时间复杂度=O(1)

最坏情况：删除表头元素，移动后续n-1个元素，循环n-1次，最坏时间复杂度=O(n)

平均情况：删除每个元素的概率相等，为p=$\frac{1}{n}$，平均循环次数=$\frac{0+1+...+(n-1)}{n} = \frac{n-1}{2}$，平均时间复杂度=O(n)

## 2.3 顺序表的查找

### 2.3.1 按位查找(GetElem)

```
//获取表L中第i个位置的元素的值
//通过数组下标直接获取
ElemType getElem(SeqList L,int i){

    return L.data[i-1];
}
```

**时间复杂度**=O(1)

### 2.3.2 按值查找(LocateElem)

```
//在顺序表L中查找第一个元素值等于e的元素，并返回其位序
//从第一个元素一次往后检索（从头遍历）
int LocateElem(SeqList L,ElemType e){
    for(int i = 0;i<L.length;i++)
        if(L.data[i]==e)
            return i+1;//数组下标为i的元素值等于e，返回其位序i+1
    return 0;//退出循环，说明查找失败
}
```

**时间复杂度：**

最好情况：目标元素在表头，循环1次，最好时间复杂度=O(1)

最坏情况：目标元素在表尾，循环n次，最坏时间复杂度=O(n)

平均情况：目标元素出现的概率相同，为p=$\frac{1}{n}$，平均循环次数=$\frac{1+2+...+n}{n}=\frac{1+n}{2}$，平均时间复杂度=O(n)

## 2.4 顺序表基本操作全部实现

```
#define OK 1
#define ERROR 0
#define OVERFLOW -2
#define INITSIZE 10
typedef int Status;
typedef int ElemType;
//结构体
typedef struct {
    ElemType *data;
    int MaxSize;
    int length;
} SeqList;
//初始化顺序表
Status InitList(SeqList &L) {
    L.data = new ElemType[INITSIZE];
    if (!L.data)
        exit(OVERFLOW);
    L.MaxSize = INITSIZE;
    L.length = 0;
    return OK;
}
```

```
//销毁顺序表
Status DestroyList(SeqList &L) {
    delete (L.data);
    L.MaxSize = 0;
    L.length = 0;
    return OK;
}
//增加表长
Status IncreaseList(SeqList &L, int len) {
    int *p = L.data;
    L.data = new ElemType[L.MaxSize + len];
    if (!L.data)
        exit(OVERFLOW);
    for (int i = 0; i < L.length; i++)
        L.data[i] = p[i];
    L.MaxSize += len;
    return OK;
}
//判空
bool ListEmpty(SeqList L) {
    if (L.length == 0)
        return true;
    else
        return false;
}
//清空顺序表
Status ClearList(SeqList &L) {
    L.length = 0;
    return OK;
}
//按位插入
Status ListInsert(SeqList &L, int i, ElemType e) {
    if (i < 1 || i > L.length + 1)
        return ERROR;
    if (L.length == L.MaxSize)
        return ERROR;
    for (int j = L.length; j >= i; j--)
        L.data[j] = L.data[j - 1];
    L.data[i - 1] = e;
    L.length++;
    return OK;
}
//按位删除
Status ListDelete(SeqList &L, int i, ElemType &e) {
    if (i < 1 || i > L.length)
        return 0;
    e = L.data[i - 1];
    for (int j = i; j < L.length; j++)
        L.data[j - 1] = L.data[j];
    L.length--;
    return OK;
}
//按位查找
ElemType GetElem(SeqList L, int i) {
    if (i < 1 || i > L.length)
        exit(OVERFLOW);
    return L.data[i - 1];
}
```

```
//按值查找，返回其位序
int LocateElem(SeqList L, ElemType e) {
    for (int i = 0; i < L.length; i++)
        if (L.data[i] == e)
            return i;
    return 0;
}
```

# 2 单链表

## 2.1 单链表的定义

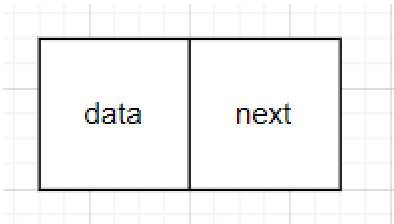
**单链表**：线性表的链式存储，它是指通过一组任意的存储单元来存储线性表中的数据元素。

**优点**：不要求大片连续空间，改变容量方便

**缺点**：不可随机存取，要耗费一定空间存放指针

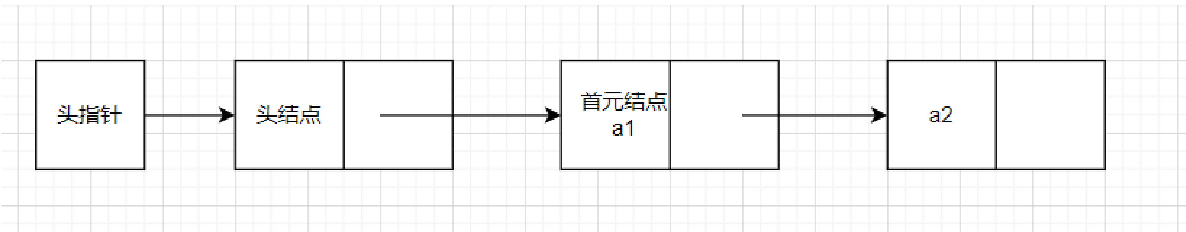
**结点**：

```
typedef struct LNode {
    ElemType data;//数据域,存放数据元素
    struct LNode *next;//指针域，指向下一个结点
} LNode, *LinkList;//LNode表示结点，LinkList表示链表
```




**定义辨析**：

1. 头指针：指向链表中第一个结点的指针
2. 头结点：在首元结点之前的一个结点，不存放数据，其指针域指向首元结点
3. 首元结点：链表中存储第一个数据元素的结点




### 2.1.1 不带头结点的单链表

**初始化单链表**：

```
//初始化单链表
bool InitList(LinkList &L) {
    L = nullptr;//表空，暂时没有任何结点，防止头指针的地址原来有脏数据
    return true;
}
```

**判断表空**：

```
//判断单链表是否为空
bool Empty(LinkList L) {
    if (!L)
        return true;
    else
        return false;
}
```

### 2.1.2 带头结点的单链表

```
//初始化单链表
bool InitList(LinkList &L) {
    L = new LNode;//申请头结点
    if (!L)//空间申请失败
        return false;
    L->next = nullptr;
    return true;
}
```

**判断表空：**

```
//判断单链表是否为空
bool Empty(LinkList L) {
    return (L->next == nullptr);
}
```

## 2.2单链表的插入

### 2.2.1 单链表的按位插入

**带头结点：**

```
//按位序插入
bool ListInsert(LinkList &L, int i, ElemType e) {
    if (i < 1)
        return false;
    LNode *p = L;//指向头结点，头结点是第0个结点
    int j = 0;//计数器,p指向的第几个结点
    while (p && j < i - 1) {//循环找到第i-1个结点或到表尾
        p = p->next;
        ++j;
    }
    if (!p)//p指针为空，也就是i值不合法，i>单链表长度
        return false;
    LNode *s = new LNode;
    s->data = e;
    s->next = p->next;
    p->next = s;//s插到p之后
    return true;
}
```

**时间复杂度：** O(n)

**不带头结点：**

```
//按位插入
bool ListInsert(LinkList &L, int i, ElemType e) {
    if (i < 1)
        return false;
    if (i == 1) {//插入第1个结点
        LNode *s = new LNode;
        s->data = e;
        s->next = nullptr;
        L = s;
        return true;
    }
    //插入第2个及之后的结点
    int j = 1;
    LNode *p = L;
    while (p && j < i - 1) {//i>n
        p = p->next;
        ++j;
    }
    if (!p)
        return false;
    LNode *s = new LNode;
    s->data = e;
    s->next = p->next;
    p->next = s;
    return true;
}
```

### 2.2.2 指定结点后插入结点

**方法：**

1. 判断给定结点p不为空
2. 创建新结点s，并将给定值e赋给结点s
3. s结点插入到结点p之后

```
//指定结点后插入结点
bool InsertNextNode(LNode *p, ElemType e) {
    if (p == nullptr)
        return false;
    LNode *s = new LNode;
    if (!s)
        return false;
    s->data = e;
    s->next = p->next;
    p->next = s;
    return true;
}
```

**时间复杂度：** O(1)

### 2.2.3 指定结点前插入结点

**方法：**

1. 判断给定结点p不为空
2. 创建新结点s，并将结点p的数据元素复制到结点s
3. 将结点s插入到结点p之后

4. 将要插入的元素e赋给结点p

```
//指定结点前插入结点
bool InsertPriorNode(LNode *p, ElemType e) {
    if (p == nullptr)
        return false;
    LNode *s = new LNode;
    if (!s)
        return false;
    s->data = p->data;
    s->next = p->next;
    p->data = e;
    p->next = s;
    return true;
}
```

**时间复杂度：** O(1)

## 2.3 单链表的删除

### 2.3.1 按位序删除

**带头结点：**

**方法：**

1. 扫描到第i-1个结点
2. 保存第i个结点
3. 删除第i个结点
4. 释放第i个结点内存空间

```
//按位序删除
bool ListDelete(LinkList &L, int i, ElemType &e) {
    if (i < 1)
        return false;
    LNode *p = L;//p指向头结点，也就是第0个结点
    int j = 0;//计数器，p指向第几个结点
    while (p && j < i - 1) {//扫描到第i-1个结点，或者扫描到表尾
        p = p->next;
        ++j;
    }
    if (!p)//i值不合格,i>表长，扫描全表不存在p
        return false;
    LNode *q = p->next;//保存要删除的结点
    e = q->data;//e存放要删除结点的元素值
    p->next = q->next;//删除结点
    delete (q);//释放删除结点的内存空间
    return true;
}
```

**时间复杂度：**

最好时间复杂度 = O(1)
最坏、平均时间复杂度 = O(n)

按位序删除操作，**带头结点和不带头结点的区别**就在于带头结点j=0，不带头结点时j=1。

### 2.3.2 指定结点的删除

```
//指定结点的删除(给定结点不为表尾结点的情况)
bool DeleteNode(LNode *p) {
    if (!p)
        return false;
    LNode *q = p->next;
    p->data = q->data;
    p->next = q->next;
    delete (q);
}
```

## 2.4 单链表的查找

### 2.4.1 按位查找

```
//按位查找，返回第i个结点
LNode *GetElem(LinkList L, int i) {
    if (i < 0)
        return nullptr;
    LNode *p = L;
    int j = 0;
    while (p && j < i) {
        p = p->next;
        ++j;
    }
    return p;
}
```

按位查找操作，**带头结点和不带头结点的区别**就在于带头结点j=0，不带头结点时j=1。

### 2.4.2 按值查找

**带头结点：**

```
//按值查找，在表中查找具有给定关键字值的元素
LNode *LocateElem(LinkList L, ElemType e) {
    LNode *p = L->next;//从首元结点开始查找
    while (p && p->data != e) {
        p = p->next;
    }
    return p;//如果找到了就返回结点指针，没找到就返回空指针
}
```

**时间复杂度=O(n)**

**不带头结点：**

```
//按值查找，在表中查找具有给定关键字值的元素
LNode *LocateElem(LinkList L, ElemType e) {
    LNode *p = L;
    while (p && p->data != e) {
        p = p->next;
    }
    return p;
}
```

## 2.5 求表长

```
//求表长
int Length(LinkList L) {
    int len = 0;
    LNode *p = L;
    while (p->next) {
        p = p->next;
        len++;
    }
    return len;
}
```

**时间复杂度=O(n)**

求表长操作，**带头结点和不带头结点的区别**就在于带头结点j=0，不带头结点时j=1。

## 2.6 单链表的建立

### 2.6.1 尾插法

**步骤：**

1. 初始化单链表
2. 保存表尾结点
3. while 循环插入结点

**1) 带头结点**

```
//尾插法建立单链表
LinkList list_tail_insert(LinkList &L) {
    ElemType x;
    L = new LNode;
    LNode *s, *r = L;//r为表尾结点
    cin >> x;//输入第一个结点的值
    while (x != 9999) {
        s = new LNode;
        s->data = x;
        r->next = s;
        r = s;//r移到新的表尾结点
        cin >> x;
    }
    r->next = nullptr;//表尾指针置空
    return L;
}
```

**2) 不带头结点**

```
LinkList list_tail_insert(LinkList &L) {
    ElemType x;
    cin >> x;
    L = new LNode;
    L->data = x;
    LNode *r, *s;
    r = L;//尾指针
    cin >> x;
    while (x != 9999) {
        s = new LNode;
        s->data = x;
        r->next = s;
        r = s;//指向表尾结点
        cin >> x;
    }
    r->next = nullptr;
    return L;
}
```

不带头结点的是我自己写的，带头结点和不到头结点的区别是：不带头结点需要先插入首元结点，在进行循环插入；而带头结点可以直接进行循环插入。

### 2.6.2 头插法

**1) 带头结点：**

```
//头插法
LinkList list_head_insert(LinkList &L) {
    ElemType x;
    L = new LNode;//建立头结点
    LNode *s;
    L->next = nullptr;//表尾指针置空
    cin >> x;
    while (x != 9999) {
        s = new LNode;
        s->data = x;
        s->next = L->next;//s插入到表头
        L->next = s;//头结点指向首元结点
        cin >> x;
    }
    return L;
}
```

**重要应用：链表的逆置**

**2) 不带头结点：**

```
//头插法
LinkList list_head_insert(LinkList &L) {
    ElemType x;
    LNode *s;
    L = nullptr;
    cin >> x;
    while (x != 9999) {
```

```
        s = new LNode;
        s->data = x;
        s->next = L;
        L = s;
        cin >> x;
    }
    return L;
}
```

## 2.7 单链表的逆置（头插法思想）

### 1) 带头结点

```
//逆置
void reverse(LinkList &L) {
    LNode *p, *q;
    p = L->next;
    L->next = nullptr;
    while (p) {
        q = p;
        p = p->next;
        q->next = L->next;
        L->next = q;
    }
}
```

### 2) 不带头结点

```
//逆置
void reverse(LinkList &L) {
    LNode *p, *q;
    p = L;
    L = nullptr;
    while (p) {
        q = p;
        p = p->next;
        q->next = L;
        L = q;
    }
}
```

## 2.8 全部操作的实现

### 1) 带头结点

```
typedef int ElemType;
//定义结点
typedef struct LNode {
    ElemType data;//数据域,存放数据元素
    struct LNode *next;//指针域，指向下一个结点
} LNode, *LinkList;//LNode表示结点，LinkList表示链表
//初始化单链表
bool InitList(LinkList &L) {
    L = new LNode;//申请头结点
    if (!L)//空间申请失败
```

```
        return false;
    L->next = nullptr;
    return true;
}
//判断表空
bool Empty(LinkList L) {
    return (L->next == nullptr);
}
//按位序插入
bool ListInsert(LinkList &L, int i, ElemType e) {
    if (i < 1)
        return false;
    LNode *p = L;//指向头结点，头结点是第0个结点
    int j = 0;//计数器,p指向的第几个结点
    while (p && j < i - 1) {//循环找到第i-1个结点或到表尾
        p = p->next;
        ++j;
    }
    if (!p)//p指针为空，也就是i值不合法，i>单链表长度
        return false;
    LNode *s = new LNode;
    s->data = e;
    s->next = p->next;
    p->next = s;//s插到p之后
    return true;
}
//指定结点后插入结点
bool InsertNextNode(LNode *p, ElemType e) {
    if (p == nullptr)
        return false;
    LNode *s = new LNode;
    if (!s)
        return false;
    s->data = e;
    s->next = p->next;
    p->next = s;
    return true;
}
//指定结点前插入结点
bool InsertPriorNode(LNode *p, ElemType e) {
    if (p == nullptr)
        return false;
    LNode *s = new LNode;
    if (!s)
        return false;
    s->data = p->data;
    s->next = p->next;
    p->data = e;
    p->next = s;
    return true;
}
//按位序删除
bool ListDelete(LinkList &L, int i, ElemType &e) {
    if (i < 1)
        return false;
    LNode *p = L;//p指向头结点，也就是第0个结点
    int j = 0;//计数器，p指向第几个结点
    while (p && j < i - 1) {//扫描到第i-1个结点，或者扫描到表尾
```

```
        p = p->next;
        ++j;
    }
    if (!p)//i值不合格,i>表长，扫描全表不存在p
        return false;
    LNode *q = p->next;//保存要删除的结点
    e = q->data;//e存放要删除结点的元素值
    p->next = q->next;//删除结点
    delete q;//释放删除结点的内存空间
    return true;
}
//指定节点的删除(给定结点不为最后结点的情况)
bool DeleteNode(LNode *p) {
    if (!p)
        return false;
    LNode *q = p->next;
    p->data = q->data;
    p->next = q->next;
    delete q;
    return true;
}
//按位查找，获取表中第i个位置的元素的值
bool GetElem(LinkList L, int i, ElemType &e) {
    if (i < 1)
        return false;
    LNode *p = L;
    int j = 0;
    while (p && j < i) {
        p = p->next;
        ++j;
    }
    if (!p)
        return false;
    e = p->data;
    return true;
}
//按位查找，返回第i个结点
LNode *GetElem(LinkList L, int i) {
    if (i < 0)
        return nullptr;
    LNode *p = L;
    int j = 0;
    while (p && j < i) {
        p = p->next;
        ++j;
    }
    return p;
}
//按值查找，在表中查找具有给定关键字值的元素
LNode *LocateElem(LinkList L, ElemType e) {
    LNode *p = L->next;//从首元结点开始查找
    while (p && p->data != e) {
        p = p->next;
    }
    return p;//如果找到了就返回结点指针，没找到就返回空指针
}
//求表长
int Length(LinkList L) {
```

```
    int len = 0;
    LNode *p = L;
    while (p->next) {
        p = p->next;
        len++;
    }
    return len;
}
//尾插法建立单链表
LinkList list_tail_insert(LinkList &L) {
    ElemType x;
    L = new LNode;
    LNode *s, *r = L;//r为表尾结点
    cin >> x;//输入第一个结点的值
    while (x != 9999) {
        s = new LNode;
        s->data = x;
        r->next = s;
        r = s;//r移到新的表尾结点
        cin >> x;
    }
    delete s;
    r->next = nullptr;//表尾指针置空
    return L;
}
//头插法
LinkList list_head_insert(LinkList &L) {
    ElemType x;
    L = new LNode;//建立头结点
    LNode *s;
    L->next = nullptr;//表尾指针置空
    cin >> x;
    while (x != 9999) {
        s = new LNode;
        s->data = x;
        s->next = L->next;//s插入到表头
        L->next = s;//头结点指向首元结点
        cin >> x;
    }
    return L;
}
//逆置
void reverse(LinkList &L) {
    LNode *p, *q;
    p = L->next;
    L->next = nullptr;
    while (p) {
        q = p;
        p = p->next;
        q->next = L->next;
        L->next = q;

    }
}
```

## 2) 不带头结点

```
typedef int ElemType;
//定义结点
typedef struct LNode {
    ElemType data;//数据域,存放数据元素
    struct LNode *next;//指针域，指向下一个结点
} LNode, *LinkList;//LNode表示结点，LinkList表示链表
//初始化链表
bool InitList(LinkList &L) {
    L = nullptr;//表空，暂时没有任何结点，防止头指针的地址原来有脏数据
    return true;
}
//判断表空（无头结点）
bool Empty(LinkList L) {
    if (!L)
        return true;
    else
        return false;
}
//按位插入
bool ListInsert(LinkList &L, int i, ElemType e) {
    if (i < 1)
        return false;
    if (i == 1) {//插入第1个结点
        LNode *s = new LNode;
        s->data = e;
        s->next = nullptr;
        L = s;
        return true;
    }
    //插入第2个及之后的结点
    int j = 1;
    LNode *p = L;
    while (p && j < i - 1) {//i>n
        p = p->next;
        ++j;
    }
    if (!p)
        return false;
    LNode *s = new LNode;
    s->data = e;
    s->next = p->next;
    p->next = s;
    return true;
}
//指定结点后插入结点
bool InsertNextNode(LNode *p, ElemType e) {
    if (!p)
        return false;
    LNode *s = new LNode;
    if (!s)
        return false;
    s->data = e;
    s->next = p->next;
    p->next = s;
    return true;
```

```
}
//指定结点前插入结点
bool InsertPriorNode(LNode *p, ElemType e) {
    if (!p)
        return false;
    LNode *s = new LNode;
    if (!s)
        return false;
    s->data = p->data;
    s->next = p->next;
    p->data = e;
    p->next = s;
    return true;

}
//按位序删除
bool ListDelete(LinkList &L, int i, ElemType &e) {
    if (i < 1)
        return false;
    LNode *p = L;//首元结点
    int j = 1;
    while (p && j < i - 1) {
        p = p->next;
        j++;
    }
    if (!p)
        return false;
    LNode *q = p->next;
    e = q->data;
    p->next = q->next;
    delete q;
    return true;
}
//指定节点的删除(给定结点不为最后结点的情况)
bool DeleteNode(LNode *p) {
    if (!p)
        return false;
    LNode *q = p->next;
    p->data = q->data;
    p->next = q->next;
    delete q;
    return true;

}
//按位查找，获取表中第i个位置的元素的值
bool GetElem(LinkList L, int i, ElemType &e) {
    if (i < 1)
        return false;
    int j = 1;
    LNode *p = L;
    while (p && j < i) {
        p = p->next;
        j++;
    }
    if (!p)
        return false;
    e = p->data;
    return true;
```

```
}
//按位查找，返回第i个结点
LNode *GetElem(LinkList L, int i) {
    if (i < 0)
        return nullptr;
    LNode *p = L;
    int j = 1;
    while (p && j < i) {
        p = p->next;
        j++;
    }
    return p;
}
//按值查找，在表中查找具有给定关键字值的元素
LNode *LocateElem(LinkList L, ElemType e) {
    LNode *p = L;
    while (p && p->data != e) {
        p = p->next;
    }
    return p;
}
//求表长
int Length(LinkList L) {
    LNode *p = L;
    int len = 1;
    while (!p->next) {
        p = p->next;
        len++;
    }
    return len;
}
//尾插法建立单链表
LinkList list_tail_insert(LinkList &L) {
    ElemType x;
    cin >> x;
    L = new LNode;
    L->data = x;
    LNode *r, *s;
    r = L;//尾指针
    cin >> x;
    while (x != 9999) {
        s = new LNode;
        s->data = x;
        r->next = s;
        r = s;//指向表尾结点
        cin >> x;
    }
    delete s;
    r->next = nullptr;
    return L;
}
//头插法
LinkList list_head_insert(LinkList &L) {
    ElemType x;
    LNode *s;
    L = nullptr;
    cin >> x;
    while (x != 9999) {
```

```
        s = new LNode;
        s->data = x;
        s->next = L;
        L = s;
        cin >> x;
    }
    return L;
}
//逆置
void reverse(LinkList &L) {
    LNode *p, *q;
    p = L;
    L = nullptr;
    while (p) {
        q = p;
        p = p->next;
        q->next = L;
        L = q;
    }
}
```

# 3 双向链表

## 3.1 结点


```
typedef struct DNode {
    ElemType data;
    struct DNode *prior;//前指针
    struct DNode *next;//后指针
} DNode, *DLinkList;
```

## 3.2 初始化

```
bool initList(DLinkList &L) {
    L = new DNode;//头结点
    if (!L)
        return false;
    L->prior = nullptr;//头结点prior指向空
    L->next = nullptr;
    return true;
}
```

## 3.3 判空

```
bool empty(DLinkList L) {
    if (!L->next)
        return false;
    else
        return true;
}
```

### 3.4 插入结点

```
//在p结点后插入s结点
bool insert_next_node(DNode *p, DNode *s) {
    if (!p || !s)
        return false;
    s->next = p->next;
    if (p->next)//如果p结点有后继节点
        p->next->prior = s;
    s->prior = p;
    p->next = s;
    return true;
}
```

### 3.5 删除结点

```
//删除结点p的后继节点
bool delete_next_node(DNode *p) {
    if (!p || !p->next)
        return false;
    DNode *q = p->next;
    p->next = q->next;
    if (q->next)
        q->next->prior = p;
    delete q;
    return true;
}
```

### 3.6 按位查找

```
//按位查找，返回第i个结点
DNode *get_elem(DLinkList &L, int i) {
    if (!L)
        return nullptr;
    int j = 1;
    DNode *p = L->next;
    while (p && j < i) {
        p = p->next;
        j++;
    }
    return p;
}
```

### 3.7 后插法

```
bool insert_tail_list(DLinkList &L) {
    if (!L)
        return false;
    L = new  DNode;
    L->prior= nullptr;
    ElemType x;
    DNode *p, *s;
    p = L;
    if (!p)
```

```
        return false;
    cin >> x;
    while (x != 9999) {
        s = new DNode;
        s->data = x;
        s->prior = p;
        p->next = s;
        p = s;
        cin >> x;
    }
    p->next = nullptr;
    return true;
}
```

### 3.8 遍历

#### 1） 后向遍历

```
//后向遍历打印双链表
void next_to_string(DLinkList L) {
    if (!L)
        exit(-1);
    cout << "打印双链表：";
    DNode *p = L->next;//首元结点
    while (p) {
        cout << p->data << " ";
        p = p->next;
    }
    cout << endl;
}
```

#### 2） 前向遍历

```
//前向遍历打印链表
void prior_to_string(DNode *p){//p为表中最后一个结点
    cout << "前项遍历链表：";
    while(p->prior){//p->prior为空表示当前p已经指向头指针
        cout << p->data << " ";
        p=p->prior;
    }
    cout << endl;
}
```

时间复杂度=O(n)

## 4 循环链表

### 4.1 循环单链表

**特点：**

1. 表尾指针的next指向头结点
2. 从一个节点出发，可以找到其他任何一个结点。

### 1）初始化

```
bool init_list(LinkList &L) {
    L = new LNode;
    if (!L)
        return false;
    L->next = L;
    return true;
}
```

### 2）判空

```
bool empty(LinkList L) {
    if (L->next == L)
        return true;
    else
        return false;
}
```

### 3）判断结点是否是表尾结点

```
bool is_tail(LinkList L, LNode *p) {
    if (p->next == L)
        return true;
    else
        return false;
}
```

## 4.2 循环双链表

**特点：**

1. 表头指针prior指向表尾结点
2. 表尾指针的next指向头结点

### 1）初始化

```
bool init_list(DLinkList &L) {
    L = new DNode;
    if (!L)
        return false;
    L->prior = L;
    L->next = L;
    return true;
}
```

### 2）判空

```
bool empty(DLinkList L) {
    if (L->next == L)
        return true;
    else
        return false;
}
```

### 3）判断结点是否为表尾结点

```
bool is_tail(DLinkList L, DNode *p) {
    if (p->next == L)
        return true;
    else
        return false;
}
```

### 4）插入

```
//结点p后插入元素值为e的结点
bool insert_next_node(DNode *p, ElemType e) {
    if (!p)
        return false;
    DNode *s = new DNode;
    s->data = e;
    s->next = p->next;
    if (p->next)
        p->next->prior = s;
    s->prior = p;
    p->next = s;
    return true;
}
```

### 5）删除

```
//删除结点p后的结点
bool delete_next_node(DNode *p) {
    if (!p || !p->next)
        return false;
    DNode *q = p->next;
    p->next = q->next;
    if (q->next)
        q->next->prior = p;
    delete q;
    return true;
}
```

### 6）获取结点

```
//获取第i个结点
DNode *get_elem(DLinkList L, int i) {
    if (i < 1 || !L)
        return nullptr;
    DNode *p = L->next;
    int j = 1;
    while (p != L && j < i) {
        p = p->next;
        j++;
    }
    if (p == L)
        return nullptr;
    return p;
}
```

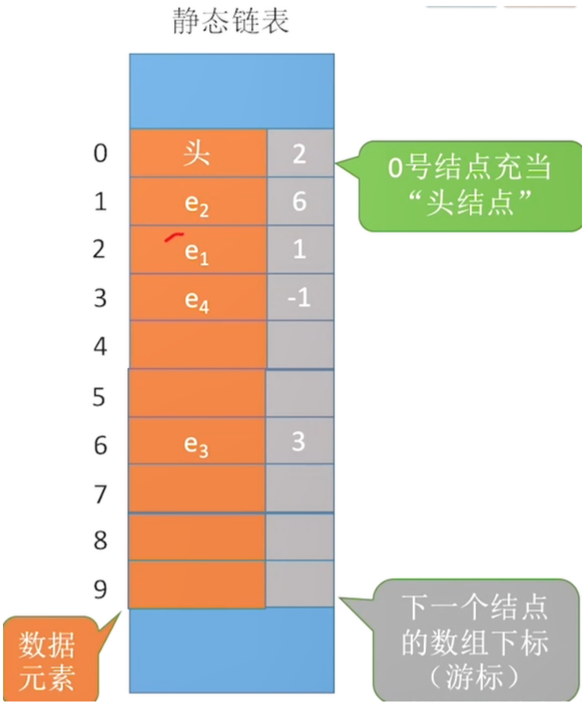
# 5 静态链表（不一定考）

**特点：**分配一整片连续的内存空间，各个结点集中安置

**优点：**增删操作不需要大量移动元素

**缺点：**不能随机存取，只能从头结点开始依次往后查找；容量固定不可变

**使用场景：**1）不支持指针的低级语言；2）数据元素数量固定不变的场景(如操作系统的文件分配表FAT)




**结点：**

```
struct Node{
    ElemType data;
    int next;//游标，充当指针，指向下一个元素的数组下标
};
struct Node node[MAX_SIZE];//初始化
//或者
typedef struct{
    ElemType data;
    int next;
}SLinkList[MAX_SIZE];
SLinkList sLinkList;//初始化
```

## 1）查找

从头结点出发挨个往后遍历

时间复杂度=O(n)

### 2）插入位序为i的结点

1. 找到一个空的结点，存入数据
2. 从头结点出发找到位序为i-1的结点
3. 修改新结点的next
4. 修改i-1号结点的next

### 3）删除某个结点

1. 从头结点出发找到前驱结点
2. 修改前驱节点的游标
3. 被删除结点next设置为-2(设置为-2只是为了表示next为空)

## 6 顺序表和链表的对比

### 1）逻辑结构

都属于线性表，都是线性结构

### 2）存储结构

**顺序表**：采用顺序存储，逻辑上相邻的元素，对应的物理存储位置也相邻

1. 优点：支持随机存取，存储密度高
2. 缺点：大片连续空间分配不方便，改变容量不方便，会出现空间闲置或溢出的现象

**链表**：采用链式存储，逻辑上相邻的元素，物理存储位置不一定相邻

1. 优点：理想的小空间分配方便，改变容量方便，不会出现空间闲置或溢出现象
2. 缺点：不可随机存取，存储密度低

### 3）基本操作

**创建操作**：

- 顺序表
  - 静态分配，需要与分配一大块连续的内存空间，会造成浪费或溢出，容量不可改变。
  - 也可采用动态分配，容量可以改变，但是需要移动大量的元素，时间代价高
- 链表：动态分配，只需要先申请一个头结点，容量可改变

**销毁操作**：

- 顺序表：系统自动回收内存空间
- 链表：需要手动申请和释放内存

**插入、删除操作**：

- 顺序表：
  - 插入/删除元素需要将后续元素都后移/前移
  - 时间复杂度O(n)，时间开销主要来自移动元素
- 链表：
  - 插入/删除元素只需要修改指针即可
  - 时间复杂度O(n)，时间开销主要来自查找目标元素

**查找操作**：

- 顺序表：

  - 按位查找：O(1)
  - 按值查找：O(n)，若表内有序可采用折半查找，时间复杂度O($\log_2 n$)
- 链表：
  - 按位查找：O(n)
  - 按值查找：O(n)

### 4）顺序表和链表的选择

| | 顺序表 | 链表 |
| --- | --- | --- |
| 弹性（可扩容） | × | √ |
| 增、删 | × | √ |
| 查 | √ | × |

# 7 线性表的应用

## 7.1 线性表的合并

**步骤：**

1. 分别获取LA表长m、LB表长n
2. 遍历LB表，如果表中元素不在A中，插入到LA表后

```
//顺序表为例
void merge_list(SeqList &s1,SeqList &s2){
    int m=Length(s1);
    int n=Length(s2);
    for (int i = 0; i < n; i++) {
        ElemType x = s2.GetElem(s2,i+1);
        if(!LocateElem(s1,x))
            ListInsert(s1,++m,x);
    }
}
```

**时间复杂度=O(m*n)**，顺序表和链表都是。

## 7.2 有序表的合并

### 1）有序顺序表的合并

```
void merge_list_seq(SeqList LA, SeqList LB, SeqList &LC) {
    if ((LA.length + LB.length) > LC.MaxSize)
        LC.IncreaseList(LA.length + LB.length - LC.length);//扩展LC的容量
    int a = 0, b = 0, c = 0;
    while (a < LA.length && b < LB.length) {//遍历LA和LB
        if (LA.data[a] <= LB.data[b])//两两相比，把小的那个元素插入到LC表
            LC.data[c++] = LA.data[a++];
        else
            LC.data[c++] = LB.data[b++];
    }
    while (a < LA.length)//如果LA表还有剩余元素，插入到LC表中
        LC.data[c++] = LA.data[a++];
    while (b < LB.length)//如果LB表还有剩余元素，插入到LC表中
```

```
        LC.data[c++] = LB.data[b++];
    LC.length = c;
}
```

# 三、栈、队列、数组

# 1 栈

## 1.1 栈的定义和特点

### 1.1 .1栈的基本概念

**定义**：栈是只允许在一端进行插入或删除操作的线性表

**术语**：

1. 栈顶：表尾，允许插入和删除的一端
2. 栈底：表头，不允许插入和删除的一端
3. 空栈：不含元素的空表。

**特点**：后进先出（Last In First Out，LIFO）

### 1.1.2 栈的抽象数据类型定义

```
ADT Stack {
    数据对象：D = {ai|ai∈ElemSet, i=1,2,3,...,n,n≥0}// ElemSet 表示元素的集合
    数据关系：R1={<ai-1,ai>|ai-1,ai∈D, i=2,...,n}// ai-1为前驱，ai为后继
            约定 an 端为栈顶，a1 端为栈底
    基本操作：
        InitStack（&S）初始化操作
            操作结果：构造一个空栈 S
        DestroyStack（&S）销毁栈操作
            初始条件：栈S已存在
            操作结果：栈S被销毁
        ClearStack（&S）栈指控操作
            初始条件：栈S已存在
            操作结果：将S清为空栈
        StackEmpty（S）判定栈是否为空栈
            初始条件：栈S已存在
            操作结果：若栈S为空栈，则返回true,若栈S为非空，则返回false
        StackLength（S）求栈的长度
            初始条件：栈S已存在
            操作结果：返回栈S的元素个数，即栈的长度
        GetTop（S）取栈顶元素
            初始条件：栈S已存在且非空
            操作结果：返回S的栈顶元素，不修改栈顶指针
        Push（&S，e）入栈操作
            初始条件：栈S已存在
            操作结果：插入元素e为新的栈顶元素
        Pop（&S，&e）出栈操作
            初始条件：栈S存在且非空
            操作结果：删除栈S的栈顶元素，并用e返回其值
        StackTraverse(S)
            初始条件：栈S已存在且非空
            操作结果：从栈底到栈顶依次对S的每个数据元素进行访问
}ADT Stack
```

### 1.1.3 基本操作

```
InitStack(&S)：初始化栈。构造一个空栈S，分配内存空间。
DestroyStack(&L)：销毁栈。销毁并释放栈S所占用的内存空间。
Push(&S,x)：进栈。若栈S未满，则将x加入使之成为新的栈顶。
Pop(&S,&x)：出栈。若栈S非空，则弹出栈顶元素，并用x返回。
GetTop(S,&x)：读栈顶元素。若栈S非空，则用x返回栈顶元素。
StackEmpty(S)：判空操作。若S为空栈，则返回true，否则返回false。
```

### 1.1.4 卡特兰数

n个不同元素进栈，出栈元素不同排列的个数$\frac{1}{n+1}\mathbb{C}_{2n}^{n}$

## 1.2 栈的顺序存储的实现

### 1.2.1 顺序栈的定义

顺序栈：利用顺序存储结构实现的栈，用静态数组实现，需要记录栈顶指针

```
#define MAX_SIZE 10
typedef int ElemType;
typedef struct{
    ElemType data[MAX_SIZE];
    int top;
}SqStack;
```

### 1.2.2 顺序栈的基本操作的实现

```
#define MAX_SIZE 10
typedef int ElemType;
typedef struct {
    ElemType data[MAX_SIZE];
    int top;
} SqStack;
//初始化栈
void InitStack(SqStack &S) {
    S.top = 0;
}
//判空
bool Empty(SqStack S) {
    if (S.top == 0)
        return true;
    else
        return false;
}
//入栈
bool Push(SqStack &S, ElemType x) {
    if (S.top == MAX_SIZE)//栈满
        return false;
    S.data[S.top++] = x;//新元素入栈
    return true;
}
//出栈
bool Pop(SqStack &S, ElemType &x) {
```

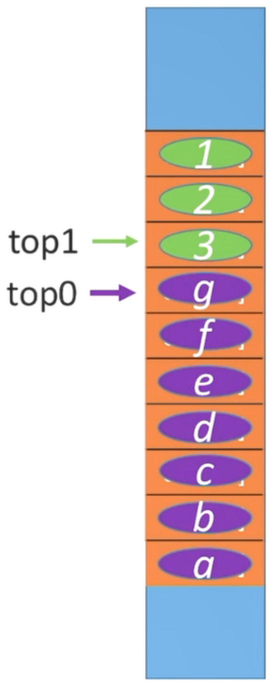
```
    if (S.top == 0)//栈空
        return false;
    x = S.data[--S.top];
    return true;
}
//读栈顶
bool GetTop(SqStack S, ElemType &x) {
    if (S.top == 0)
        return false;
    x = S.data[S.top-1];
    return true;
}
```

创、增、删、查 时间复杂度为O(1)

## 1.3 共享栈

### 1.3.1 共享栈的定义

共享栈：两个栈共享一片内存空间




### 1.3.2 共享栈的实现

```
#define MAX_SIZE 10
typedef int ElemType;
typedef struct {
    ElemType data[MAX_SIZE];
    int top0;
    int top1;
} ShareStack;
//初始化
void InitStacki(ShareStack &S) {
    S.top0 == -1;
    S.top1 == MAX_SIZE;
}
//判空
bool Empty(ShareStack S) {
```

```
    if (S.top0 == -1 && S.top1 == MAX_SIZE)
        return true;
    else
        return false;
}
//判断栈满
S.top0+1==S.top1;
```

## 1.3 栈的链式存储的实现

### 1.3.1 链式栈的实现

```
typedef int ElemType;
typedef struct StackNode {
    ElemType data;
    struct StackNode *next;
} StackNode, *LinkStack;
//初始化
void InitStack(LinkStack &S) {
    S = nullptr;
}
//入栈
bool Push(LinkStack &S, ElemType x) {
    StackNode *s = new StackNode;
    s->data = x;
    s->next = S;
    S = s;
}
//出栈
bool Pop(LinkStack &S, ElemType &e) {
    if (!S)
        return false;
    e = S->data;
    StackNode *p = S;
    S = S->next;
    delete p;
    return true;
}
//取栈顶元素
bool GetTop(LinkStack S, ElemType &e) {
    if (!S)
        return false;
    e = S->data;
    return true;
}
```

### 1.3.2 汉诺塔问题的递归算法

**算法步骤:**

1. 如果n=1，则直接将编号为1的圆盘从A移到C，递归结束
2. 否则:
    - 递归，将A上编号为1至n-1的圆盘移动到B，C做辅助塔
    - 直接将编号为n的圆盘从A移到C
    - 递归，将B上编号为1至n-1的圆盘移动到C，A做辅助塔

```
void move(LinkStack &from, LinkStack &to) {
    ElemType data;
    Pop(from, data);
    Push(to, data);
}
void hanoi(int n, LinkStack &A, LinkStack &B, LinkStack &C) {
    if (n == 1)
        move(A, C);
    else {
        hanoi(n - 1, A, C, B);
        move(A, C);
        hanoi(n - 1, B, A, C);
    }
}
```

**时间复杂度=O($2^n$)**

**空间复杂度=O(n)**

# 2 队列

## 2.1 队列的定义和特点

### 2.1.1 队列的概念

**定义：** 队列是只允许在一端进行插入，在另一端进行删除的线性表。

**特点：** 先进先出 (First In First Out，FIFO)

**术语：**

- 队头：允许删除的一端，又称队首。
- 队尾：允许插入的一端。
- 空队列：不含任何元素的空表。

### 2.1.2 队列的抽象数据类型定义

```
ADT Queue{
    数据对象：D = {ai|ai∈ElemSet, i=1,2,3,...,n,n≥0}
    数据关系：R1={<ai-1,ai>|ai-1,ai∈D, i=2,...,n}
            约定 a1 端为队列头，an端为队列尾
    基本操作：
        InitQueue(&Q)
            操作结果：构造一个空队列Q
        DestroyQueue(&Q)
            初始条件：队列Q已存在
            操作结果：队列Q被销毁，不再存在
        ClearQueue(&Q)
            初始条件：队列Q已存在
            操作结果：将Q清为空队列
        QueueEmpty(Q)
            初始条件：队列Q已存在
            操作结果：若Q为空队列，则返回true，否则返回false
        GetHead(Q)
            初始条件：Q为非空队列
            操作结果：返回Q的队头元素
        EnQueue(&Q,e)
```

```
            初始条件：队列Q已存在
            操作结果：插入元素e为Q的新的队尾元素
        DeQueue(&Q,&e)
            初始条件：Q为非空队列
            操作结果：删除Q的队头元素，并用e返回其值
        QueueTraverse(&Q)
            初始条件：Q已存在且非空
            操作结果：从队头到队尾，依次对Q的每个数据元素访问
}ADT Queue
```

### 2.1.3 基本操作

```
InitQueue(&Q)：初始化队列，构造一个空队列Q。
DestroyQueue(&Q)：销毁队列。销毁并释放队列Q所占用的内存空间。
EnQueue(&Q,x)：入队，若Q未满，将x加入，使之成为新的队尾。
DeQueue(&Q,&x)：出队，若Q非空，删除队头元素，并用x返回。
GetHead(Q,&x)：度队头元素，若队列Q非空，则将队头元素赋值给x。
QueueEmpty(Q)：判断队空，若队列Q为空返回true，否则返回false。
```

## 2.2 队列的顺序实现

### 2.2.1 循环队列

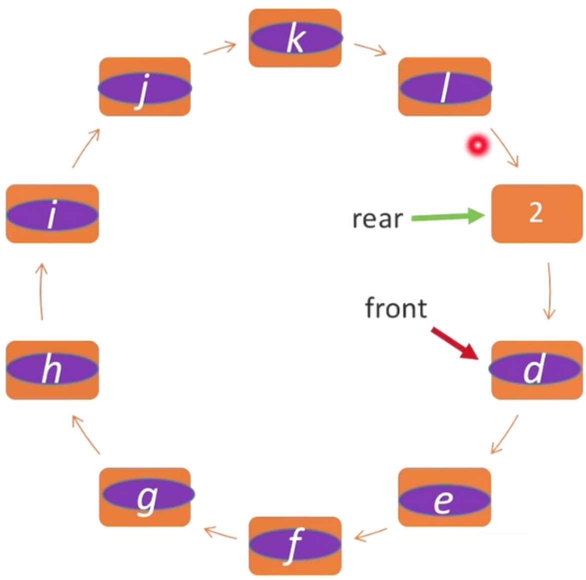
```
#define MAX_SIZE 10//队列初始容量
typedef int ElemType;
//队列的顺序存储结构
typedef struct {
    ElemType *data;
    int front;//队头指针
    int rear;//队尾指针
} SqQueue;
//初始化
bool InitQueue(SqQueue &Q) {
    Q.data = new ElemType[MAX_SIZE];
    if (!Q.data)
        return false;
    Q.front = Q.rear = 0;
    return true;
}
//判空
bool QueueEmpty(SqQueue Q) {
    if (Q.front == Q.rear)//队空条件
        return true;
    else
        return false;
}
//入队
bool EnQueue(SqQueue &Q, ElemType e) {
    if ((Q.rear + 1) % MAX_SIZE == Q.front)//队满
        return false;
    Q.data[Q.rear] = e;//添加数据
    Q.rear = (Q.rear + 1) % MAX_SIZE;//循环队列，队尾指针+1
    return true;
}
//出队
bool DeQueue(SqQueue &Q, ElemType &e) {
```

```
    if (Q.front == Q.rear)//队空
        return false;
    e = Q.data[Q.front];//保存队头元素
    Q.front = (Q.front + 1) % MAX_SIZE;//队头指针加1
    return true;
}
//取队头元素
bool GetHead(SqQueue Q, ElemType &e) {
    if (Q.front == Q.rear)
        return false;
    e = Q.data[Q.front];
    return true;
}
//求循环队列长度
int Length(SqQueue Q) {
    return (Q.rear - Q.front + MAX_SIZE) % MAX_SIZE;
}
```

### 2.2.2 判断队满\队空的三种方式

**第一种方式：**上述循环队列操作中的方式

- 队满：(Q.rear + 1) % MAX_SIZE == Q.front
- 队空：Q.front == Q.rear




**注意：**这种方式下，数组空间中会有一个位置的浪费。

**第二种方式：**

如果想要不浪费这一个空间，需要在结构体中添加一个size属性，用来记录队列的长度，在进行入队出队操作的时候size++或者size--，判断队满size==MAXSIZE

```
//队列的顺序存储结构
typedef struct {
    ElemType *data;
    int front;//队头指针
    int rear;//队尾指针
    int size;
} SqQueue;
//初始化
bool InitQueue(SqQueue &Q) {
```

```
    Q.data = new ElemType[MAX_SIZE];
    if (!Q.data)
        return false;
    Q.front = Q.rear = 0;
    Q.size = 0;
    return true;
}
```

- 队满：Q.size == MAX_SIZE
- 队空：Q.size == 0

**第三种方式：**

结构体中添加一个tag属性，用来记录最近一次的插入或者删除操作。删除操作完成时设置tag=0，插入操作完成时设置tag=1。只有删除操作，才可能导致队空；只有插入操作，才可能导致队满。

```
#define MAX_SIZE 10//队列初始容量
typedef int ElemType;
typedef struct {
    ElemType *data;
    int front;//队头指针
    int rear;//队尾指针
    int tag;//入队操作后设为1，出队操作后设为0
} SqQueue;

//初始化
bool InitQueue(SqQueue &Q) {
    Q.data = new ElemType[MAX_SIZE];
    if (!Q.data)
        return false;
    Q.front = Q.rear = 0;
    Q.tag = 0;
    return true;
}
```

- 队空：Q.rear == Q.front && Q.tag == 0
- 队满：Q.rear == Q.front && Q.tag == 1

## 2.3 队列的链式实现

### 2.3.1 带头结点（方便操作）

```
typedef int ElemType;
typedef struct LinkNode {
    ElemType data;
    struct LinkNode *next;
} LinkNode;
typedef struct {
    LinkNode *front;
    LinkNode *rear;
} LinkQueue;
//初始化
void InitQueue(LinkQueue &Q) {
    Q.front = Q.rear = new LinkNode;//头结点
    Q.front->next = nullptr;//头结点的指针域置空
}
```

```cpp
//判空
bool Empty(LinkQueue Q) {
    if (Q.front == Q.rear)
        return true;
    else
        return false;
}
//入队
bool EnQueue(LinkQueue &Q, ElemType e) {
    LinkNode *s = new LinkNode;
    s->data = e;
    s->next = nullptr;
    Q.rear->next = s;
    Q.rear = s;
    return true;
}
//出队
bool DeQueue(LinkQueue &Q, ElemType &e) {
    if (Q.rear == Q.front)
        return false;
    LinkNode *p = Q.front->next;
    e = p->data;
    Q.front->next = p->next;
    if (Q.rear == p)
        Q.rear = Q.front;
    delete p;
    return true;
}
//取队头元素
bool GetHead(LinkQueue Q, ElemType &e) {
    if (Q.rear == Q.front)
        return false;
    e = Q.front->next->data;
    return true;
}
//获取队列长度
int Length(LinkQueue Q) {
    if (Q.front == Q.rear)
        return 0;
    int len = 0;
    LinkNode *p = Q.front;
    while (p->next) {
        p = p->next;
        len++;
    }
    return len;
}
//遍历
bool traverse(LinkQueue Q) {
    if (Q.rear == Q.front)
        return false;
    std::cout << "打印链式队列：";
    LinkNode *p = Q.front->next;
    while (p) {
        std::cout << p->data << "\t";
        p = p->next;
    }
    std::cout << std::endl;
```

```
    return true;
}
```

### 2.3.2 不带头结点

```
typedef int ElemType;
typedef struct LinkNode {
    ElemType data;
    struct LinkNode *next;
} LinkNode;
typedef struct {
    LinkNode *front;
    LinkNode *rear;
} LinkQueue;
//初始化
void InitQueue(LinkQueue &Q) {
    Q.front = nullptr;
    Q.rear = nullptr;
}
//判空
bool Empty(LinkQueue &Q) {
    if (Q.front == nullptr)
        return true;
    else
        return false;
}
//入队
bool EnQueue(LinkQueue &Q, ElemType e) {
    LinkNode *s = new LinkNode;
    s->data = e;
    s->next = nullptr;
    if (Q.front == nullptr) {//在队列中插入第一个结点
        Q.front = s;
        Q.rear = s;
    } else {
        Q.rear->next = s;//新结点插入到Q.rear之后
        Q.rear = s;//修改Q.rear
    }
    return true;
}
//出队
bool DeQueue(LinkQueue &Q, ElemType &e) {
    if (Q.front == nullptr)
        return false;
    LinkNode *p = Q.front;
    e = p->data;
    Q.front = p->next;
    if (p == Q.rear) {//如果删除的p是最后一个结点
        Q.rear = nullptr;
        Q.front = nullptr;
    }
    delete p;
    return true;
}
//获取队列长度
int Length(LinkQueue Q) {
    if (Q.front == nullptr)
```

```
        return 0;
    int len = 0;
    LinkNode *p = Q.front;
    while (p) {
        p = p->next;
        len++;
    }
    return len;
}
//遍历
bool traverse(LinkQueue Q) {
    if (Q.front == nullptr)
        return false;
    LinkNode *p = Q.front;
    while (p) {
        std::cout << p->data << "\t";
        p = p->next;
    }
    std::cout << std::endl;
    return true;
}
```

### 2.4 双端队列

**分类：**

- 双端队列：只允许从两端插入、两端删除的线性表。
- 输入受限的双端队列：只允许从一端输入，两端删除的线性表
- 输出受限的双端队列：只允许从两端插入，一端删除的线性表

**考点：**判断输出序列合法性

**PS：**在栈中合法的输出序列，在双端队列中必定合法

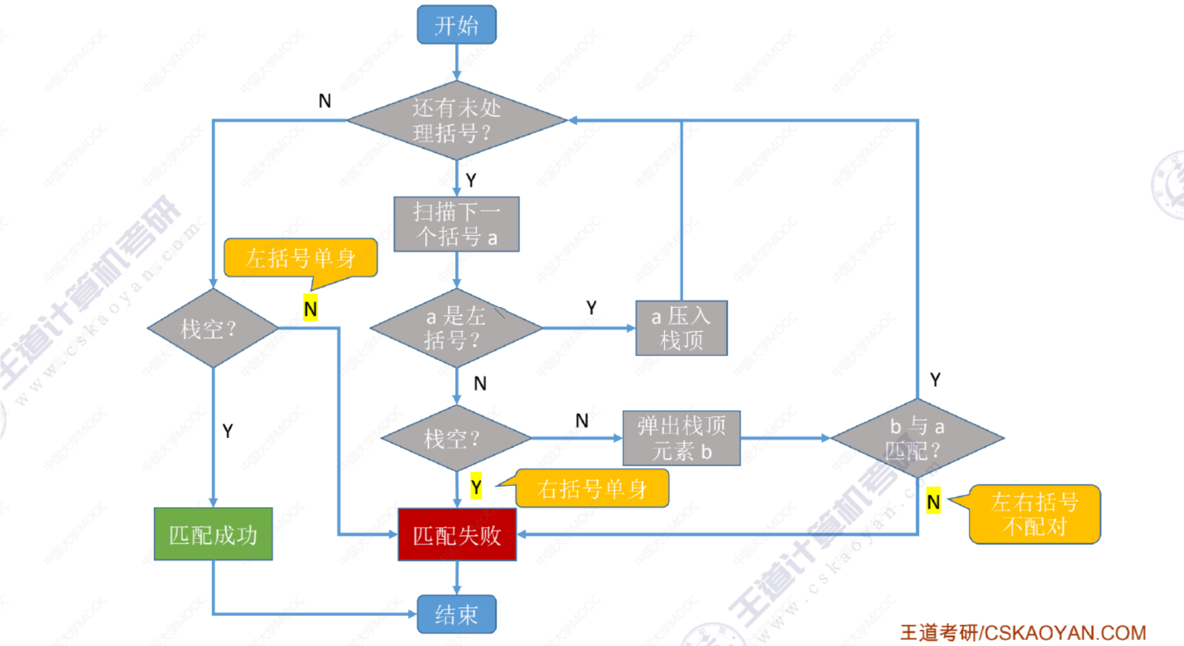
## 3 栈的应用

### 3.1 括号匹配

**实现思路：**依次扫描所有字符，遇到左括号入栈，遇到有括号则弹出栈顶元素检查是否匹配

**匹配失败情况：**

1. 右括号和左括号不匹配
2. 右括号消耗完，左括号还有剩余（左括号单身）
3. 左括号消耗完，还有有括号（右括号单身）




**代码实现：**

```
bool bracket(char str[], int length) {
    LinkStack S;
    InitStack(S);
    for (int i = 0; i < length; i++) {
        if (str[i] == '(' || str[i] == '[' || str[i] == '{') {
            Push(S, str[i]);//扫描到左括号，出栈
        } else {
            if (Empty(S))//匹配到右括号，且当前栈空
                return false;//匹配失败
            char topElem;
            Pop(S, topElem);//在栈顶元素出栈
            if (str[i] == ')' && topElem != '(')
                return false;
            if (str[i] == ']' && topElem != '[')
                return false;
            if (str[i] == '}' && topElem != '{')
                return false;
        }
    }
    return Empty(S);
}
```

## 3.2 表达式求值

**三种算术表达式：**

1. 中缀表达式：运算符在两个操作数中间，例：a+b-c*d
2. 后缀表达式（逆波兰表达式）：运算符在两个操作数后面，例：ab+cd*-
3. 前缀表达式（波兰表达式）：运算符在两个操作数前面，例：-+ad*cd

**表达式的三种成分：**操作数、运算符、界限符(括号)

### 3.2.1 中缀表达式转后缀表达式

**1）手算方法：**

1. 确定中缀表达式中各个运算符的运算顺序
2. 选择下一个运算符，按照[左操作数 右操作数 运算符]的方式组合成一个新的操作数
3. 如果还有运算符没被处理，就继续步骤2

**注：**由于运算顺序不唯一，因此对应的后缀表达式也不唯一

**例：**A+B*(C-D)-E/F

转后缀表达式：ABCD-*+EF/-（计算机应该得到的结果）

ABCD-*EF/-+

**注：**要保证手算和机算结果相同（为了确保算法的"正确性"），应采用"左优先"原则

> **"左优先"原则：**只要左边的运算符能先计算，就优先算左边的

**例：**A+B-C*D/E+F ==> AB+CD*F/-F+

**2）机算方法：**

1. 初始化一个栈，用于保存暂时还不能确定运算顺序的运算符
2. 从左到右处理各个元素，直到末尾。可能遇到三种情况：
   1. 遇到操作数。直接加入后缀表达式。
   2. 遇到界限符。遇到'('直接入栈；遇到')'则依次弹出栈内运算符并加入后缀表达式，知道弹出'('为止。注意：'('不加入后缀表达式。
   3. 遇到运算符。依次弹出栈内优先级高于或等于当前运算符的所有运算符，并加入后缀表达式，若碰到'('或栈空则停止。之后再把当前运算符入栈。
3. 按上述方法处理完所有字符后，将栈中剩余运算符依次弹出，并加入后缀表达式

### 3.2.2 后缀表达式的计算

**后缀表达式的手算方法：**

从左往右扫描，每遇到一个运算符，就让运算符前面最近的两个操作数执行对应运算，合为一个操作数

**用栈实现后缀表达式的计算：**

1. 从左到右扫描下一个元素，直到处理完所有元素
2. 若扫描到操作数则压入栈，并返回步骤1；否则执行步骤3
3. 若扫描到运算符，则弹出两个栈顶元素，执行相应运算，运算结果压入栈顶，回到步骤1

   > 注意：先出栈的是右操作数

### 3.2.3 中缀表达式转前缀表达式

**手算方法：**

1. 确定中缀表达式中各个运算符的运算顺序
2. 选择下一个运算符，按照[运算符 左操作数 右操作数]的方式组合成一个新的操作数
3. 如果还有运算符没被处理，就继续步骤2

**"右优先"原则：**只要右边的运算符能先计算，就优先算右边的

**注：**一个中缀表达式可以对应多个后缀、前缀表达式

### 3.2.4 前缀表达式的计算

**用栈实现前缀表达式的计算：**

1. 从右往左扫描下一个元素，知道处理完所有元素
2. 若扫描到操作数则压入栈，并回到步骤1；否则执行步骤3
3. 若扫描到运算符，则弹出两个栈顶元素， 执行相应运算，运算结果压入栈顶，回到步骤1

> 注意：先出栈的是左操作数

### 3.2.5 中缀表达式的计算

**用栈实现中缀表达式的计算：**

1. 初始化两个栈，操作数栈和运算符栈
2. 若扫描到操作数，压入操作数栈
3. 若扫描到运算符或界限符，则按照“中缀转后缀”相同逻辑压入运算符栈（期间也会弹出运算符，每当弹出一个运算符时，就需要再弹出两个操作数栈的栈顶元素并执行相应的运算，运算结果在压回操作数栈）

## 3.3 递归中的应用

### 3.2.1 递归

**递归调用**其实就是**特殊的函数调用**，只不过它**调用的函数是其本身**而已。

**函数调用的特点：**最后被调用的函数最先执行结束（LIFO）

函数调用时需要用一个栈存储：

1. 调用返回地址
2. 实参
3. 局部变量

**递归算法的两部分：**

1. 递归表达式（递归体）
2. 边界条件（递归出口）

> **缺点：**递归层数太多会导致栈溢出。
>
> **缺点：**可能包含很多重复计算。

### 3.3.2 阶乘

```
int factorial(int n) {
    if (n == 0 || n == 1)
        return 1;
    else
        return n * factorial(n - 1);
}
```

### 3.3.3 斐波那契数列

```
int fib(int n) {
    if (n == 0)
        return 0;
    else if (n == 1)
        return 1;
    else
        return fib(n - 1) + fib(n - 2);
}
```

### 3.3.4 利用栈将递归转换为非递归的方法

**利用栈消除递归的步骤：**

1. 设置一个工作栈存放递归工作记录（包括实参、返回地址、及局部变量等）
2. 进入非递归调用入口（即被调用程序开始处）将调用程序传来的实在参数和返回地址入栈（递归程序不可以作为主程序，因而可认为初始是被某个调用程序调用）。
3. 进入递归调用入口：当不满足递归结束条件时，逐层递归，将实参、返回地址及局部变量入栈，这一过程可用循环语句来实现——模拟递归分解的过程。
4. 递归结束条件满足，将到达递归出口的给定常数作为当前的函数值。
5. 返回处理：在栈不空的情况下，反复退出栈顶记录，根据记录中的返回地址进行题意规定的操作，即逐层计算当前函数值，直至占空为止——模拟递归求值过程。

### 3.3.5 用栈实现的非递归阶乘

```
int non_recursion_factorial_1(int n) {
    stack<int> stack;//新建一个栈，存储每层递归的计算结果
    int result = 1;
    if (n == 0 || n == 1)//边界条件
        return 1;
    while (n != 1 && n != 0)//while循环，将每层的计算结果入栈
        stack.push(n--);
    while (!stack.empty()) {//栈非空，逐层计算函数值，依次退栈，直到栈空
        result = result * stack.top();
        stack.pop();
    }
    return result;
}
```

## 4 队列的应用

树的遍历、图的广度优先遍历

1. 
    4. 

# 四、串

## 1 串的定义

## 1.1 串的定义

**定义**：串(string)是由0个或多个字符组成的有限序列。一般记为 $S='a1a2\cdots an'(n\geq 0)$

其中S是串名，单引号中的内容是串的值；$a_i$可以是字母、数字或其他字符；串中字符的数目n称为串的长度。n=0时的串称为空串（用 ∅ 表示）。

**子串**：串中任意个连续的字符组成的子序列。（任意的意思是可以为0）

**主串**：包含子串的串相应的称为主串。

**字符在主串中的位置**：字符在串中的序号。

**子串在主串中的位置**：子串的第一个字符在主串中的位置。

**两个串相等**：当且仅当两个串的值相等。

**空格串**：由一个或多个空格组成的串"　"称为空格串。

> 注意：空格串不是空串。

## 1.2串的特点

字符串一般简称为串。串是一种特殊的线性表，数据元素之间呈线性关系，其特殊性体现在数据元素是一个字符，也就是说，串是一种内容受限的线性表。

## 1.3 串的抽象数据类型

```
ADT String{
    数据对象：D={ai|ai∈CharacterSet,i=1,2,···,n,n≥0}
    数据关系：R1={<ai-1,ai>|ai-1,ai∈D,i=1,2,···,n}
    基本操作：
        StrAssign(%T,chars)//赋值操作
            初始条件：chars是字符串常量
            操作结果：生成一个其值等于chars的串T
        StrCopy(&T,S)//复制
            初始条件：串S存在
            操作结果：有串S复制得串T
        StrEmpty(S)//判空
            初始条件：串S存在
            操作结果：若S为空串，则返回true，否则返回false
        StrCompare(S,T)//比较
            初始条件：串S和T存在
            操作结果：若S>T,则返回值>0;若S=T,则返回值=0,若S<T,则返回值<0
        StrLength(S)//求串长
            初始条件：串S存在
            操作结果：返回串的元素个数，称为串的长度
        ClearString(&S)//清空串
            初始条件：串S存在
            操作结果：将S清为空串
        Concat($T,S1,S2)//串联接
            初始条件：串S1和串S2存在
            操作结果：用T返回由S1和S2连接而成的新串
        SubString(&Sub,S,pos,len)//获取子串
            初始条件：串S存在,1≤pos≤StrLength(S)且0≤len≤StrLength(S)-pos+1
            操作结果：用Sub返回串S的第pos个字符起长度为len的子串
        Index(S,T)//定位子串
            初始条件：串S和T存在，T是非空串
```

```
        操作结果：若主串S中存在和串T值相同的子串，则返回它在主串S中第一次出现的位置;否则函数值为0
    Replace(&S,T,V)//替换子串
        初始条件：串S,T,V存在,T是非空串
        操作结果：用V替换主串S中出现的所有与T相等的不重叠的字串
    StrInsert(&S,pos,T)//插入子串
        初始条件：串S和T存在，1≤pos≤StrLength(S)+1
        操作结果：在串S的第pos个字符之前插入串T
    StrDelete(&S,pos,len)//删除子串
        初始条件：串S存在，1≤pos≤StrLength(S)-len+1
        操作结果：从串S中删除第pos个字符起长度为len的子串
    DestroyString(&S)//销毁串
        初始条件：串S存在
        操作结果：串S被销毁
}
```

**字符串比较：**

1. 两个串逐字符对比，先出现较大字符那个串就大
2. 长串的前缀与短串相同时，长的那个大

### 1.4 字符集

1. ASCII字符集——英文字符——八个比特位表示
2. UniCode字符集——中英文

基于相同的字符集可以有多个不同的编码方式，比如:UTF-8、UTF-16等。

采用不同的编码方式，每个字符所占的空间不同，考研默认每个字符1B即可。

# 2 串的实现

## 2.1 串的顺序存储

**串的定长顺序存储结构：**

```
#define MAXLEN 255//串的最大长度
typedef struct{
    char ch[MAXLEN];
    int length;
}SString;
```

**串的堆式顺序存储结构：**

```
typedef struct{
    char *ch;//动态数组（堆分配存储）
    int length;
}HString;
```

**不同的实现方式：（选择方法4）**


## 2.2 串的链式存储

**结构1：**

```
typedef struct StringNode{
    char ch;
    struct StringNode *next;
}StringNode,*String;
```

**缺点：** 存储密度低，每个字符1B，每个指针4B

**结构2：（提高存储密度）**

```
#define CHUNKSIZE 80//由用户定义的块大小
typedef struct Chunk{
    char ch[CHUNKSIZE];
    struct Chunk *next;
}Chunk;
typedef struct{
    Chunk *head,*tail;//串的头、尾指针
    int length;//串的当前长度
}LString;
```

> 注：如果某个结点的数组存不满，可以用特殊字符填充。

## 2.3 基本操作的实现

### 2.3.1 求子串 SubString(&Sub,S,pos,len)

```
bool SubString(SString &Sub,SString S,int pos,int len){
    if((pos+len-1)>S.length)
        return false;
    for(int i=pos;i<pos+len;i++)
        Sub.ch[i-pos+1]=S.ch[i];
    Sub.length=len;
    return true;
}
```

### 2.3.2 比较 StrCompare(S,T)

```
//比较操作。若S>T,则返回值>0;若S=T,则返回值=0,若S<T,则返回值<0
int StrCompare(SString S,SString T){
    for(int i=1;i<=S.length&&i<T.length;i++){
        if(S.ch[i]!=T.ch[i])
            return S.ch[i]-T.ch[i];
    }
    return S.length-T.length;//扫描过的所有字符都相同，则长度大的串更大
}
```

### 2.3.3 定位 Index(S,T)

```
//定位子串。若主串S中存在和串T值相同的子串，则返回它在主串S中第一次出现的位置;否则函数值为0
int Index(SString S,SString T){
    int i=1;
    SString Sub;
    while(i<S.length-T.length+1){
        SubString(Sub,S,i,T.length);
        if(StrCompare(Sub,T)!=0)
            ++i;
        else
            return i;//返回子串在主串中的位置
    }
    return 0;//没有相同子串
}
```

# 3 串的模式匹配算法

子串的**定位操作**通常称为串的**模式匹配**或**串匹配。**

模式匹配中有两个字符串S和T，S称为**主串**，也称为**正文串**；T为**子串**，也称为**模式。**

## 3.1 BF(Brute-Force)算法

BF算法为暴力算法，又称为朴素模式匹配算法。

**算法步骤：**

1. 分别利用计数指针i和j指示主串S和模式T中当前正待比较的字符位置，i初值为pos，j初值为1.
2. 如果两个串均未比较到串尾，即i和j均分别小于等于S和T的长度时，则循环执行以下操作：
   1. S.ch[i]和T.ch[j]比较，若相等，则i和j分别指示串中下一个位置，继续比较后续字符。
   2. 若不相等，指针后退重新开始匹配，从主串的下一个字符(i=i-j+2)起再重新和模式的第一个字符(j=1)比较。

3. 如果j>T.length，说明模式T中的每个字符依次和主串S中的一个连续的字符序列相等，则匹配成功，返回模式T中的第一个字符相等的字符在主串S中的序号(i-T.length)；否则称匹配不成功，返回0.

```
//指定主串查找的起始位置
int Index_BF(SString S,SString T,int pos){
    int i=pos,j=1;
    while(i<S.length&&j<T.length){
        if(S.ch[i]==T.ch[j]){
            i++;
            j++;
        }
        else{
            i=i-j+2;
            j=1;
        }
    }
    if(j>T.length)
        retuen i-T.length;
    else
        return 0;
}
```

**从头开始扫描：**

```
int Index_BF(SString S,SString T){
    int i=1,j=1;
    while(i<S.length&&j<T.length){
        if(S.ch[i]==T.ch[j]){
            ++i;
            ++j;
        }
        else{
            i=i-j+2;
            j=1;
        }
    }
    if(j>T.length)
        retuen i-T.length;
    else
        return 0;
}
```

**时间复杂度**：主串长度为n，模式长度为m，最坏时间复杂度O(nm)

## 3.2 KMP 算法

### 3.2.1 KMP算法原理

Knuth-Morris-Pratt 字符串查找算法。

**前缀**：除最后一个字符外，字符串的的所有头部子串。（所有头部子串的集合）

**后缀**：除第一个字符外，字符串的所有尾部子串。（所有尾部子串的集合）

**部分匹配值**：字符串的前缀和后缀的最长相等前后缀长度。（前缀和后缀交集中最长的那个的长度）

KMP算法需要根据模式串T，计算出next数组，next数组中存放的是每个长度的部分匹配值，KMP算法利用next数对模式串组进行回溯，但是主串不回溯。

KMP算法，**最坏时间复杂度：O(m+n)**，求next数组时间复杂度O(m)，模式匹配最坏时间复杂度O(n)。

**代码实现：**

```
int Index_KMP(HString S, HString T) {
    int i = 1, j = 1;
    int next[T.length + 1];
    get_next(T, next);
    while (i <= S.length && j <= T.length) {
        if (j == 0 || S.ch[i] == T.ch[j]) {
            ++i;
            ++j;
        } else {
            j = next[j];
        }
    }
    if (j > T.length)
        return i - T.length;
    else
        return 0;
}
```

### 3.2.2 next数组

#### 1）手算

先填写：next[1]=0,next[2]=1

后续：在不匹配的位置前上画一条线，模式串一步一步后退，知道分界线之前能"**对上**"，或模式串完全退到分界线后，也就是不匹配的位置。此时j指向哪儿，next数组值就是多少。

#### 2）实现

```
void get_next(HString T, int next[]) {
    if (T.length == 0)
        exit(-2);
    int i = 1, j = 0;
    next[1] = 0;
    while (i < T.length) {
        if (j == 0 || T.ch[i] == T.ch[j]) {
            ++i;
            ++j;
            next[i] = j;
        } else {
            j = next[j];
        }
    }
}
```

### 3.2.3 nextval数组代码实现

```
void get_next_val(HString T, int nextval[]) {
    if (T.length < 0)
        return;
    int i = 1, j = 0;
    nextval[1] = 0;
    while (i <= T.length) {
        if (j == 0 || T.ch[i] == T.ch[j]) {
            ++i;
            ++j;
            if (T.ch[i] != T.ch[j])
                nextval[i] = j;
            else
                nextval[i] = nextval[j];
        } else {
            j = nextval[j];
        }
    }
}
```

# 五、数组

## 5.1 数组的定义

**数组：**数组是由类型相同的数据元素组成的有序集合，每个元素称为数组元素。

## 5.2 数组的存储结构

### 5.2.1 一维数组

```
ElemType arr[10];
```

内存：各数组元素大小相同，且物理上连续存放。已知起始地址，数组各元素的物理位置可以直接计算出来。

| arr[0] | arr[1] | arr[2] | arr[3] | arr[4] | arr[5] | arr[6] | arr[7] | arr[8] | arr[9] |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|

起始地址LOC=arr[0]地址，则a[i]存放地址=LOC+i*sizeof(ElemType);

注：除非特别说明，下表默认从0开始。

```
例： int arr[10]={0,1,2,3,4,5,6,7,8,9};
    int *p = arr;// *p = 0;
    int *q=arr+3;// *q = 4;
```

### 5.2.2 二维数组

```
ElemType arr[2][3]={0,1,2,3,4,5};//两行三列的二维数组
```

逻辑视角：

| | | |
|---|---|---|
| **arr[0][0]** | **arr[0][1]** | **arr[0][2]** |
| **arr[1][0]** | **arr[1][1]** | **arr[1][2]** |

内存：（行优先存储）

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| **arr[0][0]** | **arr[0][1]** | **arr[0][2]** | **arr[1][0]** | **arr[1][1]** | **arr[1][2]** |

M行N列二维数组arr[M][N]

arr[i][j]的存储地址=LOC+(i*N+j)*sizeof(ElemType);

```
int arr[2][3]={0,1,2,3,4,5};
int i=j=1;
int *p=&arr[0][0]+i*N+j;// *p=4
```

内存：（列优先存储）

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| **arr[0][0]** | **arr[1][0]** | **arr[0][1]** | **arr[1][1]** | **arr[0][2]** | **arr[1][2]** |

M行N列二维数组arr[M][N]

arr[i][j]的存储地址=LOC+(j*M+i)*sizeof(ElemType);

```
int arr[2][3]={0,1,2,3,4,5};
int i=j=1;
int *p=&arr[0][0]+j*M+i;//*p=4
```

## 5.3 特殊矩阵的压缩存储

**普通矩阵：**

可用二维数组存储。

> **注：**矩阵的下表从1开始，数组的下标从0开始

**特殊矩阵：**

> 下列压缩策略中计算矩阵到数组的映射函数，可能需要用到等差数列的求和公式
>
> $Sn = n*a1 + \frac{n*(n-1)}{2}*d$ 或者 $Sn = \frac{n*(a1+an)}{2}$

### 5.3.1 对称矩阵

若n阶方阵中任意一个元素$a_{i,j}$，都有$a_{i,j}=a_{j,i}$，责成该局真伪对称矩阵。

普通存储：n*n二维数组。

压缩存储策略：

- 只存储主对角线+下三角区(i>j)
  - 按行优先原则将各元素存入一维数组中。

    | | | | | | | |
    |---|---|---|---|---|---|---|
    | $a_{1,1}$ | $a_{2,1}$ | $a_{2,2}$ | $a_{3,1}$ | …… | $a_{n,n-1}$ | $a_{n,n}$ |

  - **数组大小**为：1+2+3+……+n=$\frac{n*(n+1)}{2}$

- **使用方法：**构造一个映射函数，通过矩阵下标计算出数组下标。

  $a_{i,j}$ ---> arr[k]

  按照行优先原则，$a_{i,j}$是第1+2+3+⋯+(i-1)+j = $\frac{i*(i-1)}{2}+j$个元素

  $k=\frac{i*(i-1)}{2}+j-1$

- 主对角线+上三角区(i<j)

  方法和上面类似。

## 5.3.2 三角矩阵

- 下三角矩阵：除了主对角线和下三角区，其余元素均为常量c。
  - 压缩存储策略：按行优先原则将下三角矩阵存入一维数组，并在最后一个位置存储常量c。
  - | $a_{1,1}$ | $a_{2,1}$ | $a_{2,2}$ | $a_{3,1}$ | …… | $a_{n,n-1}$ | $a_{n,n}$ | c |
    |---|---|---|---|---|---|---|---|
  - **数组大小：**$1+2+3+\cdots+n+1=\frac{n*(n+1)}{2}+1$
  - **使用方法：**构造映射函数
- 上三角矩阵：与上面类似

## 5.3.3 三对角矩阵

**三对角矩阵：**又称为带状矩阵，当$|i-j|>1$时，有$a_{i,j}$=0$(1\leq i,j<n)$

- **压缩策略：**按行优先原则（或列优先原则），只存储带状部分
- **数组大小：**$2+3*(n-2)+2=3*n-2$
- 已知矩阵元素下标，计算$a_{i,j}$在数组中的位置，数组下标从0开始

  前$i-1$行共有$3*(i-1)-1$个元素

  $a_{i,j}$是第i行第$j-i+2$个元素

  $a_{i,j}$是第$2*i+j-2$个元素

  $k=2*i+j-3$

- 已知数组下标k，计算矩阵元素下标$a_{i,j}$

  明显可知$3*(i-1)-1<k+1\leq 3*i-1$

  $i\geq\frac{k+2}{3}$ 可以理解为“刚好”大于等于

  向上取整$i=\lceil\frac{k+2}{3}\rceil$，$j=k-2*i+3$

## 5.3.4 稀疏矩阵

**稀疏矩阵:**非零元素个数远远小于矩阵元素的个数

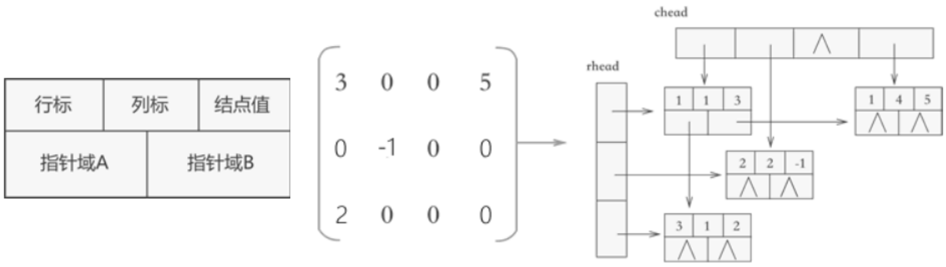
**压缩策略：**

- 顺序存储——三元组<行，列，值>

```
struct node{
    int i;
    int j;
    int value;
};
struct node arr[n];
```

- 这种方式是访问稀疏矩阵只能顺序存取，失去了随机存取的特性
- 十字链表法——链式存储

```
//结点
typedef struct OLNode{
    int i,j;//行标和列标
    int data;//数据
    struct OLNode *right,*down;//右指针和下指针
}OLNode,*OLink;
//十字链表结构体
typedef struct{
    LONode *rhead,*chead;//行和列链表头指针
    int m,n,count;//行数、列数、非零元素个数
}
```




## 5.4 矩阵考点易错点

1. 矩阵的压缩存储需要的数组大小
2. 由矩阵元素的行标和列标<i,j>推导出对应的数组下标k（数列求和）
3. 由数组下标k，推导出<i,j>
    1. 如何处理不等式中的“刚好大于等于/小于等于”
    2. 向上取整/向下取整
4. 易错点：
    1. 存储上三角？下三角
    2. 行优先存储？列优先存储？
    3. 矩阵下标从0？1？开始
    4. 数组下标从0？1？开始

# 六、树

## 6.1 树的定义及相关概念

### 6.1.1 定义

**树**：树是$n(n \geq 0)$个结点的有限集。

**空树**：结点数为0的数，即$n = 0$;

**非空树应满足**：

1. 有且仅有一个称之为根的节点。
2. 除根节点以外的其余结点可分为$m(m > 0)$个互不相交的有限集$T_1$，$T_2$，…，$T_m$，其中每一个集合本身又是一棵树，并且称为根的子树。

> 除了根结点外，每个结点有且仅有一个前驱。

### 6.1.2 树的基本术语

**结点**：树中的一个独立单元。包含一个数据元素及若干指向其子树的分支。

**结点的度**：结点拥有的子树称为结点的度。

**结点的高度**：从下往上数。

**树的度**：树的度是树内各结点度的最大值。

**树的深度**：树中结点的最大层次称为树的深度或高度。

**叶子**：度为0的结点称为叶子或终端结点。

**非终端节点**：度不为0的结点称为非终端结点或分支结点。除根结点外，非终端结点也称为内部结点。

**双亲和孩子**：结点的子树称为该结点的孩子，相应的该结点称为孩子的双亲。

**兄弟**：同一个双亲的孩子之间互称兄弟。

**祖先**：从根到该结点所经历分支上的所有结点。

**子孙**：以某结点为根的子树中的任一结点都称为该结点的子孙。

**层次**：结点的层次从根开始定义起，根为第一层，根的孩子为第二层。树中任意结点的层次等于其双亲结点的层次加1。

**堂兄弟**：双亲在同一层的，不互为兄弟的结点互为堂兄弟。

**有序树和无序树**：如果将树中结点的的各子树看成从左至右是有次序的(即不能互换)，则称该树为有序树，否则成为无序树。有序树中最左边的的子树的根称为第一个孩子，最右边的称为最后一个孩子。

**森林**：$m(m \geq 0)$棵互不相交的树的集合。对树中的每个结点而言，其子树的集合即为森林。

**结点之间的路径**：只能从上往下

**路径长度**：经过了几条边

### 6.1.3 树和森林的关系

$RF = < root, r_i > |i = 1, 2, 4, m, m > 0$

### 6.1.4 常考性质

1. 结点数=分支数+1
2. 分支数=树的总度数
3. 分支数=树中各结点的度数和
4. 度为m的树，和m叉树的区别

| 度为m的树 | m叉树 |
| --- | --- |
| 任意结点的度 ≤ m (最多m个孩子) | 任意结点的度 ≤ m (最多m个孩子) |
| 至少有一个结点的度 = m (有m个孩子) | 允许所有结点的度都 < m |
| 一定是非空树，至少有m+1个结点 | 可以是空树 |

5. 度为m的树第i层至多有$m^{(i-1)}$个结点$(i \geq 1)$
6. 高度为h的m叉树至多有$\frac{m^h-1}{m-1}$个结点
7. 高度为h的m叉树至少有 $h + m - 1$ 个结点

8. 具有n个结点的m叉树的最小高度为$log_m(n(m-1)+1)$

## 6.2 二叉树

### 6.2.1 二叉树的定义

**二叉树：** 是$n(n \geq 0)$个结点所构成的集合。空树n=0；非空树应满足：

1. 有且仅有一个根结点。
2. 除根结点外，其余结点分为两个互不相交的子集$T_1$和$T_2$，分别称为T的左子树和右子树，且$T_1$和$T_2$本身又是二叉树。

**二叉树与树的区别：**

1. 二叉树每个结点最多只有两棵子树。
2. 二叉树的子树有左右之分，不能颠倒。

### 6.2.2 两种特殊的二叉树

**满二叉树：** 深度为k且含有$2^k-1$个结点的二叉树。

**特点：**

1. 每一层上的结点数都是最大结点数。
2. 只有最后一层有叶子结点。
3. 不存在度为$1$的结点。
4. 按层序从$1$开始编号，结点i的做孩子为$2i$，有孩子为$2i+1$；结点i的父节点为$\lfloor \frac{i}{2} \rfloor$

**完全二叉树：** 深度为k的，有$n$个结点的二叉树，当且仅当其每一个结点都与深度为$k$的满二叉树中编号为$1$至$n$的结点一一对应时，称之为完全二叉树。

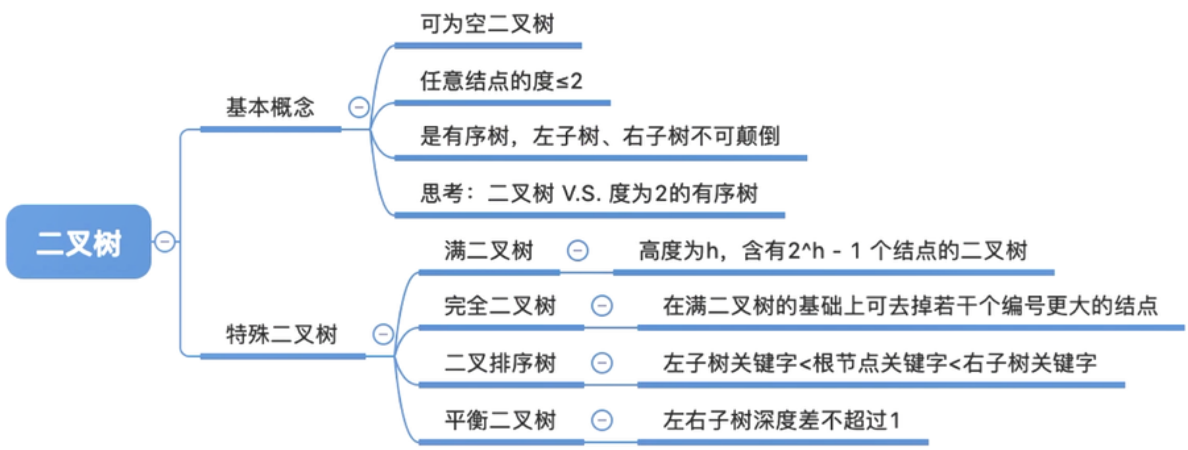
**特点：**

1. 叶子结点只可能在层次最大的两层上出现。
2. 对任意结点，若其右分支下的子孙的最大层次为l，则其左分支下的子孙最大层次必为$l$或$l+1$。
3. 最多只有一个度为$1$的结点。
4. 按层序从$1$开始编号，结点$i$的做孩子为$2i$，有孩子为$2i+1$；结点i的父节点为$\lfloor \frac{i}{2} \rfloor$

**二叉排序树：** 一棵二叉树或是空二叉树，或是具有以下性质的二叉树：

1. 左子树上所有结点的关键字均小于根结点的关键字。
2. 右子树上所有结点的关键字均大于根结点的关键字。
3. 左子树和右子树又各是一棵二叉排序树。

**平衡二叉树：** 树上任一结点的左子树和右子树的深度只差不超过1.



### 6.2.3 二叉树的性质（重要）

**性质1：** 在二叉树的第$i$层上至多有$2^{(i-1)}$个结点$(i \geq 1)$

**性质2：** 深度为$k$的二叉树至多有$2^k-1$个结点$(k \geq 1)$

**性质3：** 对任何一棵二叉树，如果其终端结点数为$n_0$，度为2的结点数为$n_2$，则$n_0=n_2+1$

**性质4：** 具有$n$个结点的完全二叉树的深度为$\lfloor log_2 n \rfloor+1$或$$

**性质5：** 如果对一棵有$n$个结点的完全二叉树(其深度为$\lfloor log_2 n \rfloor+1$)的结点按层序排号(从第1层到第$\lfloor log_2 n \rfloor+1$层，每层从左到右)，则对任一结点$i(1 \leq i \leq n)$，有

1. $i=1$，则结点$i$是二叉树的根，无双亲；如果$i>1$，则其双亲$PARENT(i)$是结点$\lfloor \frac{i}{2} \rfloor$。
2. $2i>n$，则结点$i$无左孩子(结点i为叶子结点)；否则其左孩子$LCHILD(i)$是结点$2i$。
3. $2i+1>n$，则结点$i$无右孩子；否则其右孩子$RCHILD(i)$是结点$2i+1$。

**完全二叉树考点1：**

- 若完全二叉树有$2k$个结点，则必有$n_1=1,n_0=k,n_2=k-1$
- 若完全二茶树有$2k-1$个结点，则必有$n_1=0,n_0=k,n_2=k-1$

### 6.2.4 二叉树的存储结构

1. 顺序存储结构

```
#define MAX_SIZE 100
typedef int ElemType;
struct TreeNode{
    ElemType value;//结点中数据元素
    bool isEmpty;//结点是否为空
}
TreeNode tree[MAX_SIZE];//从上到下，从左到右编号
```

   二叉树的顺序存储中，一定要把二叉树的结点编号与完全二叉树对应起来。

   - i的左孩子——2i
   - i的右孩子——2i+1
   - i的父节点——$\lfloor \frac{i}{2} \rfloor$

   **最坏情况：** 高度为h且只有h个结点的单支树，也至少需要$2^h-1$个存储单元。

   **结论：** 二叉树的顺序存储结构只适合存储完全二叉树。

2. 链式存储结构

```
typedef int ElemType;
typedef struct BiTNode {
    ElemType data;//数据域
    struct BiTNode *lchild, *rchild;//左、右孩子指针
} BiTNode, *BiTree;
```

> $n$个结点的二叉链表共有$n+1$个空链域
>
> 注意：链式存储很容易找到某个结点的孩子结点，但是要想找到该结点的父结点就只能从根结点开始遍历了

为了使链表也可以简单的找到结点的父结点，只需要在结构体中添加一个指向父结点的指针就行了，例如：

```c
//三叉链表
typedef struct BiTNode {
    ElemType data;
    struct BiTNode *lchild, *rchild;
    struct BiTNode *parent;//指向父结点的指针
} BiTNode, *BiTree;
```

> 注意：三叉链表在考试中不常考

## 6.3 二叉树的遍历

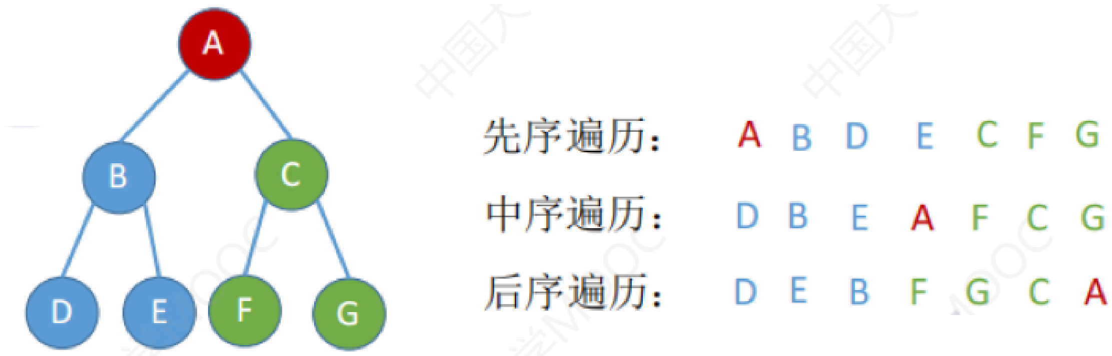
**遍历**：遍历就是按照某种次序访问一边所有结点。

**层次遍历**：基于树的层次特性确定的访问次序。

以下三种算法的时间复杂度都为O(n)，因为每个结点都只访问一次。

最坏条件下，即二叉树为有n个结点且深度为n的单支树，空间复杂度为O(n)。

- 先序遍历
  - **访问规则**：根左右(NLR)
  - ```c
    void PreOrder(BiTree T){
        if(T!=NULL){
            visit(T);
            preOrder(T->lchild);
            preOrder(T->rchild)
        }
    }
    ```
- 中序遍历
  - **访问规则**：左根右(LNR)
  - ```c
    void InOrder(BiTree T){
        if(T!=NULL){
            InOrder(T->lchild);
            visit(T);
            InOrder(T->rchild);
        }
    }
    ```
- 后序遍历
  - **访问规则**：左右根(LRN)
  - ```c
    void PostOrder(BiTree T){
        if(T!=NULL){
            PostOrder(T->lchild);
            PostOrder(T->rchild);
            visit(T);
        }
    }
    ```
    ```




## 6.3.2 应用：求树的深度

```
int treeDepth(BiTree T){
    if(T==NULL)
        return 0;
    else{
        int l=treeDepth(T->lchild);
        int r=treeDepth(T->rchild);
    }
    return l>r?l+1:r+1;
}
```

## 6.3.3 二叉树的层序遍历

**算法思想：**

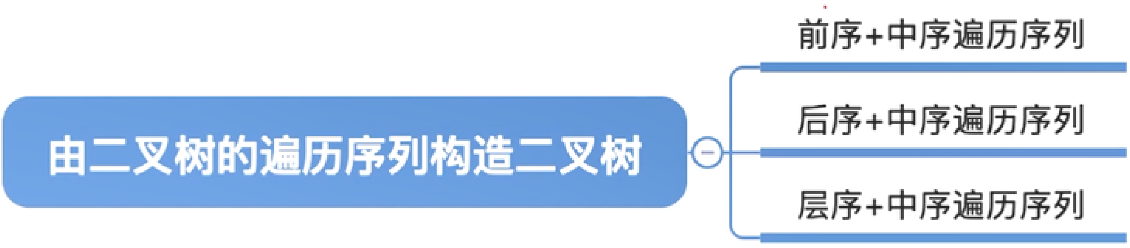
1. 初始化一个辅助队列。
2. 根结点入队。
3. 若队列非空，则队头结点出队，访问该结点，并将其左、右孩子依次插入队尾(如果有的话)。
4. 重复③直至队列为空。

**代码：**

```
void LevelOrder(BiTree T){
    LinkQueue Q;//初始化辅助队列
    InitQueue(Q);
    BiTree p;
    EnQueue(Q,T);
    while(!isEmpty(Q)){
        DeQueue(Q,p);
        visit(p);
        if(p->lchild!=NULL)
            EnQueue(Q,p->lchild);
        if(p->rchild!=NULL)
            EnQueue(Q,p->rchild);
    }
}
```

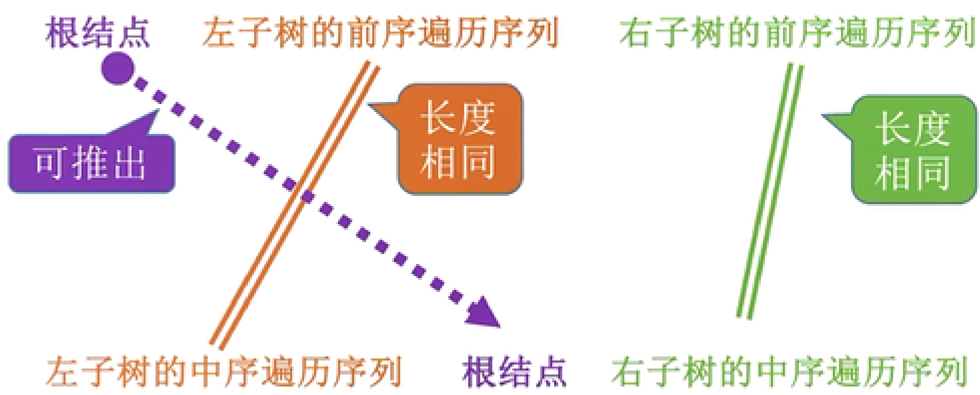
## 6.3.4 由遍历序列构建二叉树

> 一个遍历序列可能对应多种二叉树形态。
>
> **结论：**若只给出一棵二叉树的 前/中/后 序遍历序列的一种，不能唯一确定一棵二叉树。

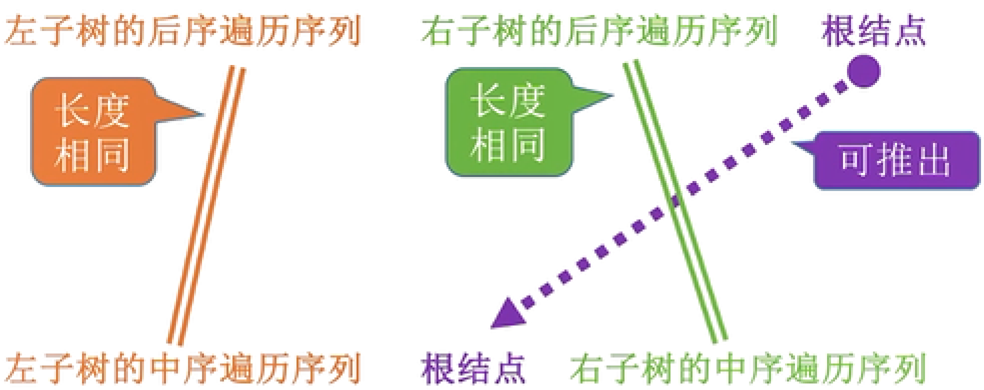



> 给出二叉树的两种遍历序列，可以唯一确定一棵二叉树。

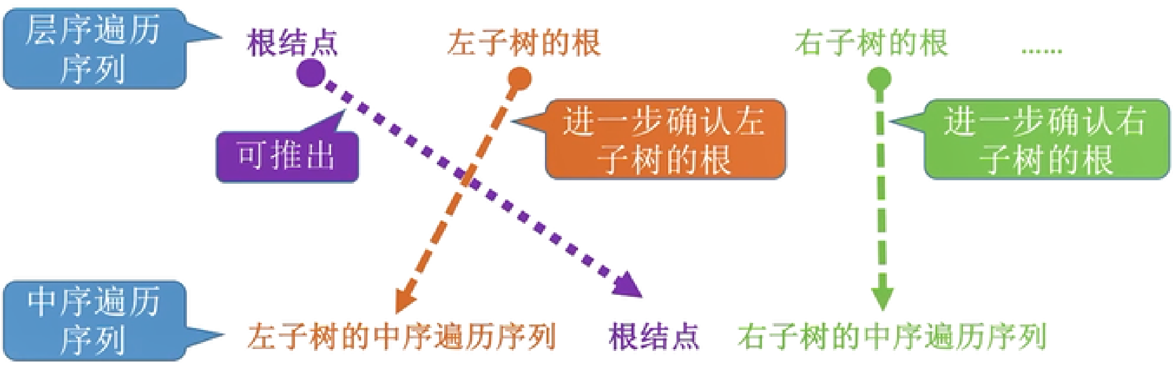
- 前序 + 中序 遍历序列




- 后序 + 中序 遍历序列




- 层序 + 中序 遍历序列

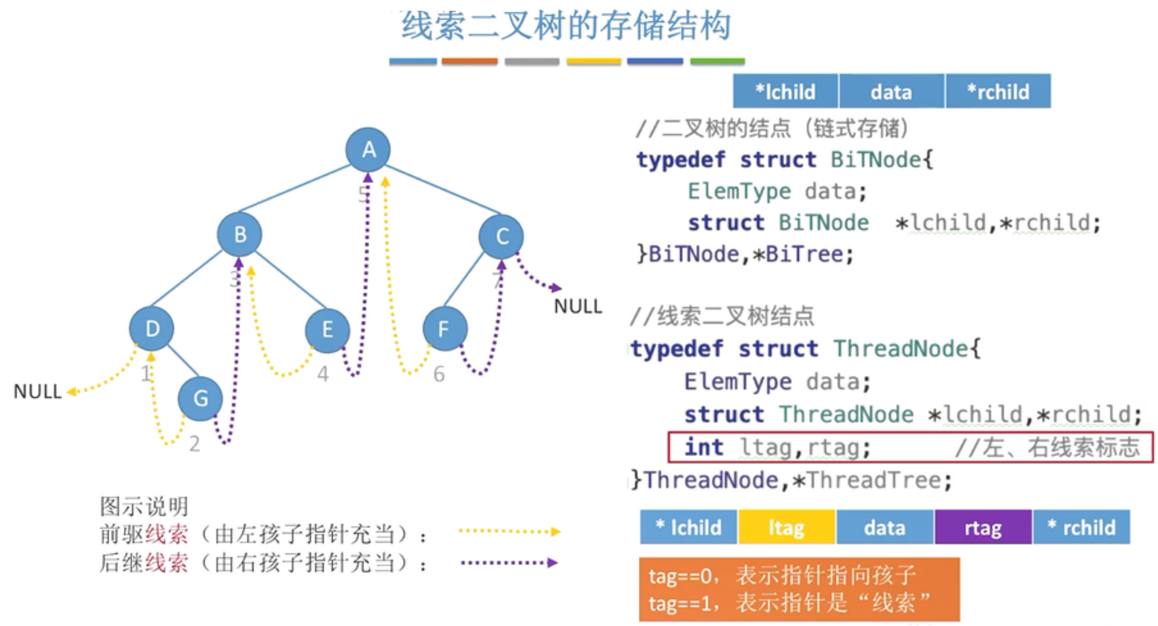


> **重点**：找到树的根结点，并根据中序序列划分左、右子树，再找到左右子树根结点。

> **结论**：前序、后序、层序序列的两两组合无法唯一确定一棵二叉树。

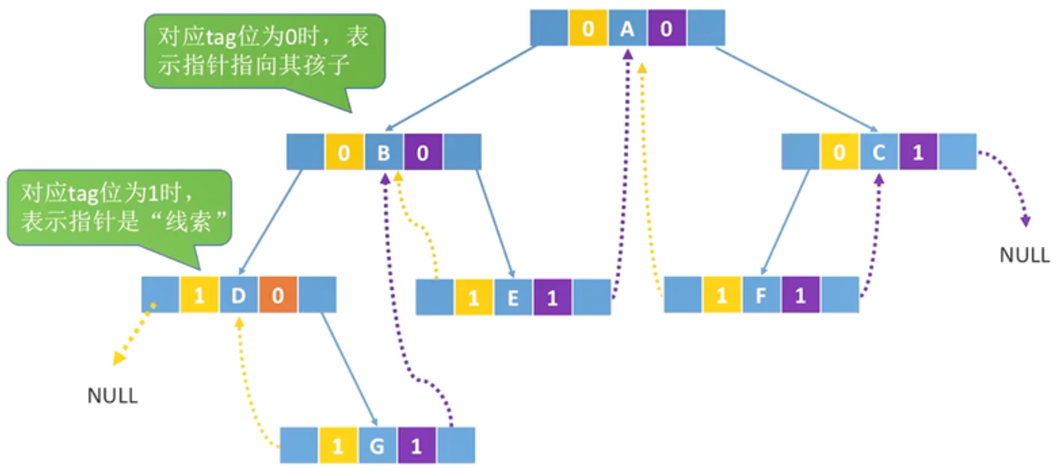
# 6.4 线索二叉树（需要会手画）

## 6.4.1 线索二叉树的概念

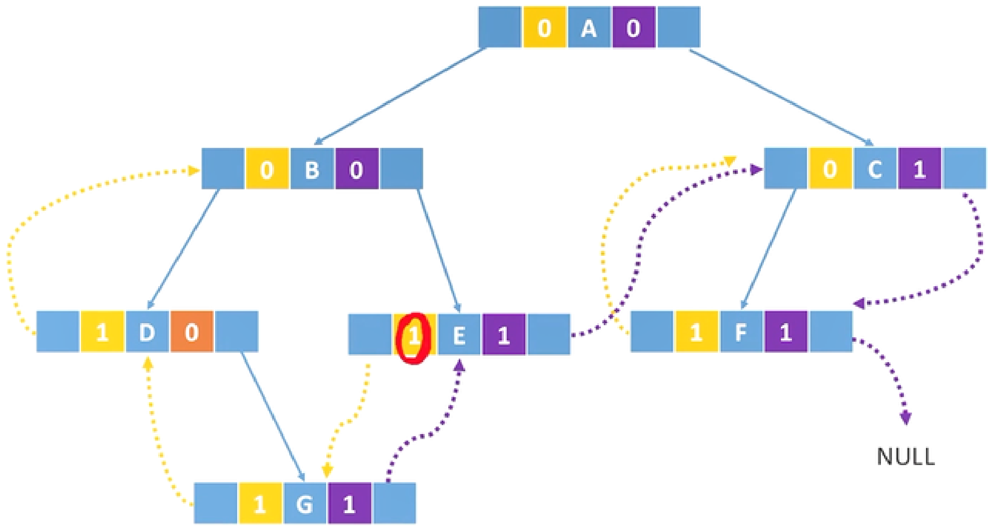



> 线索二叉树又可以称为**线索链表**。

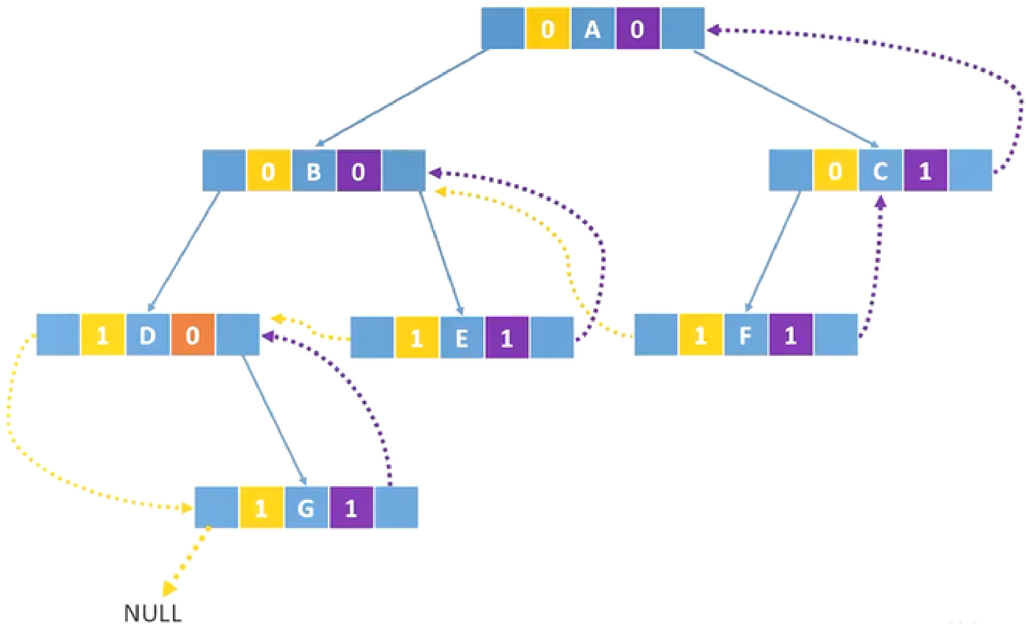
- 中序线索二叉树




- 先序线索二叉树




- 后序线索二叉树




## 6.3.2 二叉树的线索化

- 中序线索化

```
//全局变量，指向当前访问结点的前驱
ThreadNode *pre = NULL;
//访问结点并修改线索
void visit(ThreadNode *node) {
    //左子树为空，建立前驱线索
    if (node->lchild == NULL) {
        node->lchild = pre;
        node->ltag = 1;
    }
    //建立前驱结点的后继线索
    if (pre != NULL && pre->rchild == NULL) {
        pre->rchild = node;
        pre->rtag = 1;
    }
    pre = node;
}
```

```
//中序遍历二叉树，一边遍历一边线索化
void InThread(ThreadTree T) {
    if (T != NULL) {
        InThread(T->lchild);
        visit(T);
        InThread(T->rchild);
    }
}
//中序线索化二叉树
void CreateInThread(ThreadTree T) {
    pre = NULL;
    if (T != NULL) {
        InThread(T);
        if (pre->rchild == NULL)
            pre->rtag = 1;
    }
}
```

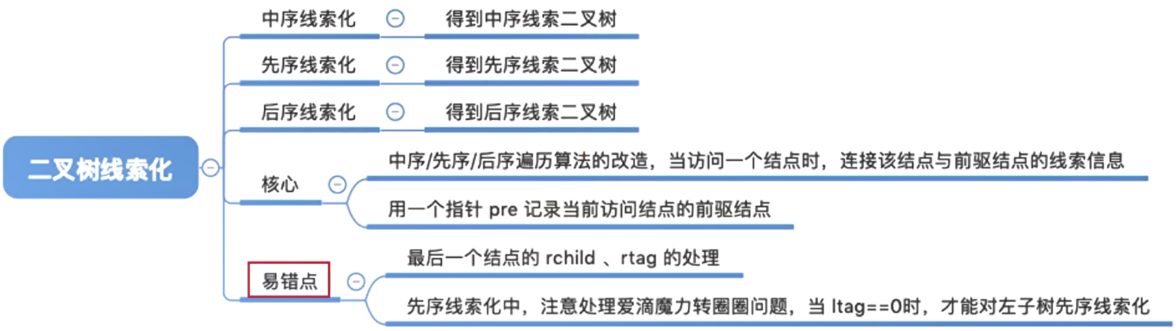
- 先序线索化

```
//先序遍历二叉树，一边遍历一边线索化
void PreThread(ThreadTree T) {
    if (T != NULL) {
        visit(T);
        if (T->ltag == 0)//lchild不是前驱线索
            PreThread(T->lchild);
        PreThread(T->rchild);
    }
}
//先序线索化二叉树
void CreatePreThread(ThreadTree T) {
    pre = NULL;
    if (T != NULL) {
        PreThread(T);
        if (pre->rchild == NULL)
            pre->rtag = 1;
    }
}
```

- 后序线索化

```
//后序遍历二叉树，一边遍历一边线索化
void PostThread(ThreadTree T) {
    if (T != NULL) {
        PostThread(T->lchild);
        PostThread(T->rchild);
        visit(T);
    }
}
//后序线索化二叉树
void CreatePostThread(ThreadTree T) {
    pre = NULL;
    if (T != NULL) {
        PostThread(T);
        if (pre->rchild == NULL)
            pre->rtag = 1;
```

```
    }
}
```




## 6.3.3 线索二叉树找前驱/后继

- 中序线索二叉树找中序后继
    - 算法

    ```
    1.若p->rtag==1,则next=p->rchild;
    2.若p->rtag==0,则中序遍历p的右子树,找到p的右子树中最左下结点
    ```

    - 代码

    ```
    //找到以p为根的子树中，第一个被中序遍历的结点
    ThreadNode *FirstNode(ThreadNode *p) {
        //循环找到最左下结点(不一定是叶子结点)
        while (p->ltag == 0)
            p = p->lchild;
        return p;
    }
    //在中序线索二叉树中找到结点p的后继节点
    ThreadNode *NextNode(ThreadNode *p) {
        //右子树中最左下结点
        if (p->rtag == 0)
            return FirstNode(p->rchild);
        else
            return p->rchild;//rtag==1直接返回后继线索
    }
    //对中序线索二叉树进行中序遍历(利用线索实现非递归算法)
    void InOrder(ThreadTree T) {
        for (ThreadNode *p = FirstNode(T); p != NULL; p = NextNode(p))
            visit(p);
    }
    ```

- 中序线索二叉树找中序前驱
    - 算法

    ```
    1.若p->ltag==1,则pre=p-lchild
    2.若p->ltag==0,则中序遍历p的左子树,找到p的左子树中最右下结点
    ```

    - 代码

    ```
    //找到以p为根的子树中，最后一个被中序遍历的结点
    ```

```
ThreadNode *LastNode(ThreadNode *p) {
    //循环找到最右下结点(不一定是叶子结点)
    while (p->ltag == 0)
        p = p->lchild;
    return p;
}
//在中序线索二叉树中找到结点p的前驱节点
ThreadNode *PreNode(ThreadNode *p) {
    //左子树中最右下结点
    if (p->ltag == 0)
        return LastNode(p->lchild);
    else
        return p->lchild;
}
//对线索二叉树进行逆向中序遍历
void RevInOrder(ThreadTree T) {
    for (ThreadNode *p = LastNode(T); p != NULL; p = PreNode(p))
        visit(p);
}
```

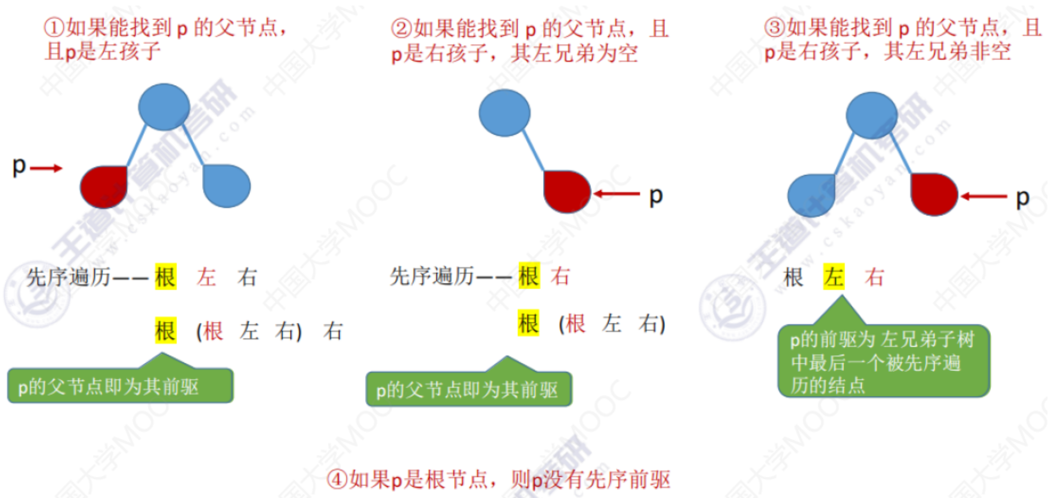
- 先序线索二叉树找先序后继
    - 算法

```
1.若p->rtag==1,则next=p->rchild
2.若p->rtag==0,则p必有右孩子
    若p有左孩子，则先序后继为左孩子
    若p没有左孩子，则先序后继为右孩子
```

    - 代码
- 先序线索二叉树找先序前驱
    - 算法

```
1.若p->ltag==1,则next=p->lchild
2.若p->ltag==0,则p必有左孩子
    在先序遍历中,左右子树中的结点只能是根的后继,不可能是前驱
    所以无法找到前驱，除非从头开始遍历找
```

    - 采用三叉链表可以逆向找到前驱

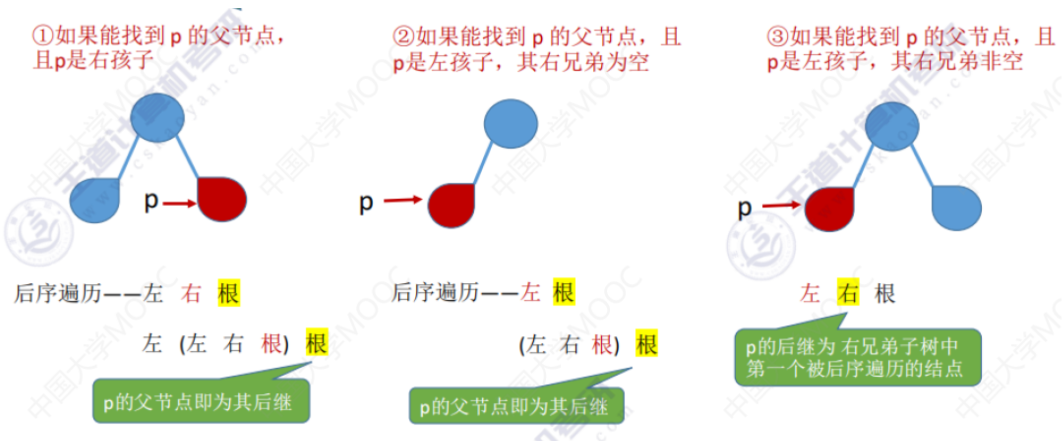



- 后序线索二叉树找后序后继

- 算法

```
1.若p->rtag==1,则next=p->rchild
2.若p->rtag==0,则p必有右孩子
    后序遍历中，左右子树中的根结点只可能是根的前驱，不可能是后继
    找不到后序后继，除非再从头遍历
```

- 三叉链表可以找到父结点




- 后序线索二叉树找后序前驱
  - 算法

```
1.若p->ltag==1,则next=p->lchild
2.若p->ltag==0,则p必有左孩子.若p->ltag==1,则next=p->lchild
2.若p->ltag==0,则p必有左孩子
    假设p有右孩子，则后续前驱为右孩子
    假设没有右孩子，则后序前驱为左孩子
```