2.1　有理数加减法

2.1.1　有理数的加法法则与运算律

有理数的四则运算以及乘方运算学习难度极低，就是在小学学习的运算的基础上把非负有理数拓展到了有理数，必须认真对待，不然这都不会就丸辣！首先我们看加法运算有关内容

定理 1 (有理数的加法法则) *两个有理数相加，先确定符号，在确定符号后面的数：若两个加数符号一致，则取该符号并将二者绝对值相加；若两个加数符号相反，则取绝对值大的加数的符号并用较大的绝对值减去较小的绝对值；0 与任何数相加都等于该数。*

这是我们第二次正式接触“法则”这样一个概念，第一次是在有理数比较大小中的一种方法。“法则”通常指的是执行特定运算或解决特定类型问题的规则或指导原则，本章内容关于有理数的四则运算与乘方均有对应法则，要求每位同学必须烂熟于心，这样法则才能作为我们做题的行动指南。

加法法则让我们完成有理数的加法运算有了有效方法。要意识到，面对有理数加法，我们应该先确定和的符号，再确定符号后面的数值。首先要判断两个加数到底是符号一致还是符号相反，从而确定和的符号；接着确定数值，根据第一步来确定到底是用绝对值作和还是做差，这样就可以实现有理数的加法。

推论 1 *互为相反数的两个数相加和为 0。特别地，$a-b$ 与 $b-a$ 互为相反数。*

下面做几个题目来试试水：

例题 1 *完成计算：*

$5+(-3)=$（　　）　　$2+(-4)=$（　　）　　$(-2)+(-3)=$（　　）

有了有理数加法法则，我们就可以处理简单的有理数加法运算，但是对于涉及多个有理数的复杂加法运算，如果单纯使用有理数加法法则则会让过程十分繁琐，因此我们需要运算律帮助我们简化过程，而且两个加法运算律我们已经非常熟悉了！

命题 1 *加法运算律：*

加法交换律：两个数相加，交换加数的位置，和不变。
用字母表达：$a+b=b+a$

加法结合律：三个数相加，先把前两个数相加，或者先把后两个数相加，和不变。
用字母表达：$(a+b)+c=a+(b+c)$

必须明确的是，加法交换律并非只能用在两个数相加，加法结合律也并非只能用在三个数相加——二者的重点在于对（部分）纯加法运算的加数位置交换和括号位置移动的结论的提炼。

例题 2 完成计算：

$\frac{1}{3}+(-2)+\frac{2}{3}=$（ ） $(\frac{4}{5}+\frac{7}{9})+(-\frac{16}{9})+\frac{1}{5}=$（ ）

$\frac{3}{8}+6+(-\frac{3}{8})+(-\frac{5}{8})+(-6)=$（ ）

2.1.2 有理数的减法法则与符号讨论

有了有理数加法法则，有理数的减法就太容易了，因为减法的本质就是加法的逆运算：

定理 2 (有理数的减法法则) 减去一个数，等于加上这个数的相反数。可以表示为 $a-b=a+(-b)$.

从有理数减法法则我们可以看出，有理数减法的计算方法本质上就是将减法运算转换为加法运算，我们可以得到一个推论：

推论 2 0 减去任何数等于该数的相反数。

尽管减法法则看上去简单，但差的符号情况却很复杂——我们可以从分类讨论的思想对差的符号进行分析：

$$\begin{cases} a>0,b<0. \text{ 则} a-b=a+(-b)>0. \\ a>0,b>0. \text{ 则} a-b=a+(-b)\begin{cases} >0. & |a|>|b|. \\ =0. & |a|=|b|. \\ <0. & |a|<|b|. \end{cases} \\ a<0,b<0. \text{ 则} a-b=a+(-b)\begin{cases} >0. & |a|<|b|. \\ =0. & |a|=|b|. \\ <0. & |a|>|b|. \end{cases} \\ a<0,b>0. \text{ 则} a-b=a+(-b)<0. \end{cases}$$

有了有理数加法法则和运算律的基础，了解了有理数减法运算的相关事项，我们只需一些简单的练习加以辅助即可：

例题 3 完成计算：

$(-3)-(-5)=$（ ） $(-1)-2=$（ ） $3-(-8)=$（ ）

其实吧，我觉得这个法则是真的只能作为指导思想，一开始不熟练时要严格遵守，但熟练以后，其实像这种运算一眼凭感觉就有答案了。

2.1.3　有理数的加减混合运算

那么对于复杂的加减混合运算，我们是否有对应的套路应对呢？答案是肯定的：

命题 2 进行加减混合运算的步骤为：

（1）运用减法法则，将加减混合运算转换为单纯的复杂加法运算；

（2）运用加法法则和加法运算律对复杂加法运算进行计算。

虽然看上去简单，但是这过程中有个不可避免的难点，就是在转换的过程中可能会产生括号和加号，那么我们需要学习如何去掉和式中的括号与加号，从而化简我们的式子：

命题 3 有理数的和式中，可以将全部正号和加数的括号省略不写。

这里我们拿一个例题来练习一下，放心我后面给大家准备了运算的超级大礼包，这里确实只是稍微练一下：

例题 4 完成计算：$\frac{3}{5}-(-\frac{7}{9})+\frac{7}{5}=$（　）　　$2.7+(-8.5)-(+3.4)-(-1.2)=$（　）

2.2　有理数乘除法

2.2.1　有理数的乘法法则及其推广

有理数的乘法法则和加法法则思路很像，都是先确定符号，再通过绝对值确定符号后面的数值，我们一起看看：

定理 3 (有理数的乘法法则) 两数相乘，同号得正，异号得负，并将二者绝对值相乘。任何数乘以 0 都为 0。

通过这个法则不难得出一些推论：

推论 3 任何数乘以 1 都为该数本身，任何数乘以 -1 都为该数的相反数。

那么我们先来做一个例题实战一下：

例题 5 完成计算：$(-3)\times(-4)=$（　）　$8\times(-2)=$（　）　$3\times(-5)=$（　）

有了乘法法则，我们可以将其从 2 维（两个因数相乘）推广到任意维（任意多个因数相乘），具体方法如下：

定理 4 (有理数的乘法法则推广) 几个非零的数相乘，积的符号由负因数的个数决定。若负因数个数为奇数，则积为负数；若负因数个数为偶数，则积为正数。确定符号后，几个因数绝对值相乘即可。

几个因数相乘，若其中含有 0，则积为 0。

2.2.2 乘法运算律

乘法运算律共有三个，分别是乘法交换律、乘法结合律和乘法分配律：

命题 4 乘法运算律：

1、乘法交换律：两个因数相乘，交换因数位置，积相等。$ab = ba$.

2、乘法结合律：三个因数相乘，先把前两个因数相乘，或者先把后两个因数相乘，积相等。$(ab)c = a(bc)$.

3、乘法分配律：一个数同两个数的和相乘，等于把这个数分别同这两个数相乘，再把积相加。**该运算律常可以逆用以快速解题。** $a(b + c) = ac + bc$.

需要注意乘法运算律和加法运算律类似的是，本质上运算律都不是只能死板的应用在其本身规定的个数的算式中的，比如交换律并不是只有两个数时才能交换，一定要灵活，只要算式是单纯的加法（乘法）就可以随意使用，若混合了减法（除法）就不行——因为减法（除法）是没有运算律的！

2.2.3 有理数的除法法则

在介绍除法法则之前，我们先引入一个概念：

定义 1 乘积为 1 的两个数互为倒数。

举个栗子，比如 5 与 $\dfrac{1}{5}$、3 与 $\dfrac{1}{3}$，这些都是互为倒数。这个定义之下我们有一些推论需要注意：

推论 4 关于倒数的推论：

1、1 与 -1 的倒数是其本身。

2、0 没有倒数。

这个概念是十分重要的，在后面会用的很多，所以我们有必要了解一下怎么求一个数的倒数：

命题 5 求倒数的方法总结：

1、对于非零整数 a，其倒数可直接写为 $\dfrac{1}{a}$。

2、对于分数 $\dfrac{n}{m}$ $(m, n \neq 0)$，其倒数可写为 $\dfrac{m}{n}$。

3、对于带分数或小数，可先化为分数再使用第二个方法求倒数。

为了帮助大家加深对倒数的认识，我们用类比的研究方法比较一下倒数与相反数：

根据他们的定义。和为 0 的两个数互为相反数，乘积为 1 的两个数互为倒数——很显然无论是相反数还是倒数都是具有成对性的，即不能单独存在；同时他们都具有唯一性，即每一个数只有唯一对应的相反数、倒数。

现在有了倒数，我们就可以自然地引入除法法则了——正如相反数对于减法法则的支撑那样。其实大家都知道这两套体系是非常相似的，归结到底是因为减法是加法的逆运算，除法是乘法的逆运算，所以我们定义除法也是与减法法则类似——将除法转换为乘法处理：

定理 5 (有理数的除法法则 1) *除以一个不为 0 的数等于乘以这个数的倒数。*

但是除此之外，由于除法的特殊性，为了在某些特殊情况简化计算，我们补充一个法则：

定理 6 (有理数的除法法则 2) *两个数相除，同号得正，异号为负，并把绝对值相除。*

两个有理数的除法法则都是正确的，这表明对同一个除法使用法则进行计算的结果必然相同。同时这两个法则都揭示了一个结论：0 **除以任何一个不为** 0 **的数都为** 0。

两个除法法则既然都是正确的，那我们在实际计算的过程中应该怎么选择呢？**简而言之，若被除数能直接被除数除出结果，那就使用法则** 2**；如果被除数和除数存在分数，这个时候最好使用法则** 1——事实上绝大多数场景应该是法则 1 更多，下面我们来实践一下：

例题 6 完成计算：

$\frac{2}{3}\div(-\frac{5}{3})=$（　）　　$-\frac{1}{4}\div\frac{3}{7}=$（　）　　$-10\div 5=$（　）

2.2.4　有理数的混合运算

这个部分首先要讲讲单纯的乘除混合运算。乘除混合运算相对于加减混合运算要稍微灵活些，这是因为除法法则有两条导致的：

命题 6 乘除混合运算的步骤为：

（1）运用除法法则，将乘除混合运算转换为单纯的复杂乘法运算；

（2）运用乘法法则及其推广和乘法运算律对复杂乘法运算进行计算。

PS：若混合运算中的除法较简单（如能整除）则可依据除法法则 2 直接进行运算，此时不能使用运算律，应立刻按从左到右顺序完成运算。

可以看出乘除混合运算和加减混合运算非常相似，都是将逆运算的形式进行转换，从而使混合运算变成单纯的复杂运算，从而使用对应法则和运算律进行处理。之所以不强调运算顺序，是因为最终转换为单纯的复杂运算后可以使用交换律、结合律，此时不需要考虑运算顺序。

例题 7 完成计算：$(-1\,\frac{3}{4})\times 1\,\frac{3}{7}\times(-0.25)=$（　）

但是，若是加减乘除混合运算，那要考虑的就多了！

命题 7 对于加减乘除混合运算，需要考虑的是运算顺序和运算思路：

对于运算顺序，务必遵守：先括号，再乘除，最后加减！

对于运算思路，通过减法法则、除法法则将加减乘除混合运算转换为加法、乘法复杂混合运算，并应用法则与运算律进行计算。这里同样注意，若遇到适合使用除法法则 2 的情况，可以直接使用，但要注意此时应立刻按从左到右顺序完成计算，不能随意使用运算律。

例题 8 完成计算：

$-\frac{1}{2}\times(-8)+(-6)\div(-\frac{3}{2})=$（　）　　$-3-[-5+(1-0.2\times\frac{3}{5})\times(-2)]=$（　）

2.3　有理数乘方

2.3.1　有理数的乘方法则

在学习乘方法则之前，我们首先要认识一下乘方，因为有的同学对于这个运算并不是很熟悉。

定义 2 求多个相同的数的积的运算叫做乘方。

如果定义比较抽象，那么我来举个栗子：例如 n 个 a 相乘，其中 n 为正整数，a 为任意有理数。可以写作 $a\times a\times a\times\cdots\times a$，也可以写作乘方形式 a^n。

从这个定义可以看出，乘方和加减乘除一样，都属于“运算”，这个大家必须得意识到。那么现在我们要了解一下关于乘方运算的三个重点：

定义 3 我们称乘方的结果叫做幂，例如 n 个 a 相乘可以记作 a^n，此时 a^n 就是幂。同时当确定乘方运算 a^n 时，a 叫做底数，n 叫做指数。

那么如何计算乘方呢？我们一起来看看下面这个命题：

命题 8 计算一个有理数的乘方，应将乘方运算转换为乘法运算，并求积。

下面我们看一个例题来加深我们对乘方的理解：

例题 9 将下列各式写成幂的形式，指出指数与底数，并求幂的值：

（1）$(-2)\times(-2)\times(-2)$　（2）$\frac{3}{8}\times\frac{3}{8}\times\frac{3}{8}\times\frac{3}{8}\times\frac{3}{8}$

那么我们如何进行乘方运算呢，说白了就是将乘方运算转换为乘法运算，就可以求出幂！

接下来我们一起看看具体的有理数的乘方法则：

定理 7 对于 a^n，若 $a>0$ 则幂为正数，若 $a<0$ 且 n 为奇数则幂为负数而 $a<0$ 且 n 为偶数则幂为正数，并对 a 的绝对值求 n 次方。

特别地，0 的任意正整数次幂均为 0。

通过乘方法则，我们引入一个推论：

推论 5 0 的任意次方都为 0，1 的任意次方都为 1，-1 的奇数次方为 -1 而偶数次方为 1。

下面给一道例题来巩固一下：

例题 10 计算：$-5^2; (-\frac{2}{3})^4; (-1)^{2023}; (-1\ \frac{1}{3})^3$

下面我们一起来讨论一下 $a^n, (-a)^n, -a^n$ 三者的关系，这是我们第二次分类讨论思想在新课内容的精彩体现（第一次是对有理数减法结果正负的讨论）：

分类讨论	a^n	$(-a)^n$	$-a^n$
$a>0, n=2k+1$	正	负	负
$a>0, n=2k+2$	正	正	负
$a<0, n=2k+1$	负	正	正
$a<0, n=2k+2$	正	正	负

需要注意对 $-a^n$ 与 $(-a)^n$ 的区分，$-a^n$ 表达的是 a^n 的相反数，其底数为 a、指数为 n；而 $(-a)^n$ 表达的是 n 个 $-a$ 的乘积，其底数为 $(-a)$、指数为 n。

2.3.2 有理数综合混合运算

前面我们已经知道了加减混合运算、乘除混合运算的计算思路——将混合运算转换为单纯的加法、乘法运算，然后使用加法法则、乘法法则（及其推广）以及相应的运算律即可。那么我们这里主要是讨论

2.3.3 科学计数法

科学计数法本质上是一种特殊的计数方法，与我们常用的计数法不同点在于，它更擅长对较大数量级的数值进行计数，以便让观察者快速确定数量级。

定义 4 把一个**绝对值大于** 10 **的数**表示成 $a \times 10^n$ 的形式（其中 $1 \le |a| < 10$，n 为正整数）。

那么如何确定一个数的科学计数法表达呢？首先我们要清楚一个事实：

命题 9 对于一个小数 $0.a_1a_2a_3\ldots$，如果将其与 10 相乘，则积为小数点往右移动一位，即 $a_1.a_2a_3\ldots$——这个结论可以推广到任意个 10 的乘积，即若一个小数与 10^n（n 为任意正整数）相乘，积为该小数的小数点往右移动 n 为的结果。

对于一个小数除以 10^n（n 为任意正整数），效果类似，小数点往左移动 n 位。

这样的话，我们就有了表示科学计数法的能力，具体按照以下操作进行：

命题 10 要对一个数字进行科学计数法表示，只需两个步骤，分别是确定 a 和 n：

（1）将原数的小数点移动到从左到右第一个非零数字之后，这个移动后的数值就是 a。

（2）小数点移动了多少位，则 n 为多少。

下面我们给一个例题来练习一下：

例题 11 将下面数值表示为科学计数法：$678400; 23000; 562000; -36800$

2.3.4 近似数

近似数和准确数是非常重要的概念：

定义 5 与实际完全符合的数，称为准确数；接近准确数但不等于准确数的数，称为近似数。

为什么会出现近似数我已经在课上讲过了，这里讲义我就不具体说了，但要记住，在考试中题目只要没有说是近似数，那必然全都是准确数，如果要求你求近似数，你就按照这个部分求就是了。

要想求近似数，只有两个重要的知识点：精确度和近似方法。

定义 6 表达近似数与精确数的接近程度的量称为精确度。

精确度有两种表述方法：精确到位数（十分位、百分位等）和精确到小数点（0.1、0.01 等），两种表述方法对应等价（精确到十分位与精确到 0.1 等价，其他类似）。

那么如何确定一个近似数的精确度是多少呢？我们一起来看下面这个命题：

命题 11 一个数最右边的数的位数就是近似数精确度。（请注意，0 也算数，不可忽略）

特别地，如果一个数用科学计数法表示，请注意 a 的最右边的数的位置，再将其还原为普通计数法后该数所处位数即为精确度。

那么确定了精确度如何求近似数呢，主要有三种方法：

命题 12 求近似数的三种方法：（过于简单，只列举不细说）

（1）四舍五入法：这是默认方法，只要题目没说用其他方法，就用它！

（2）去尾法：常用于情景特殊的实际问题。

（3）进一法：常用于情景特殊的实际问题。

下面看一道例题：

例题 12 求解下面两道近似数相关题目：

（1）确定下列近似数精确度：$0.25; \quad 0.250; \quad 2.50 \times 10^3$。

（2）求近似数：0.24587 保留到十分位、百分位、0.1、0.01。

2.4 课外知识补充

2.4.1 为什么减法除法没有运算律

我们都知道加法和乘法均有交换律和结合律，那么为什么减法和除法没有交换律和结合律呢？

减法和除法都没有交换律和结合律，是因为它们的运算结果依赖于数字的顺序。对于交换律为什么不能适用于减法和除法，我只需要一个结论就可以说明：

命题 13 两个已知的结论：

（1）我们在学习加法法则时候知道：$a-b$ 与 $b-a$ 互为相反数，这是由于 $(a-b)+(b-a)=0$。

（2）我们在学习倒数时候知道：$\frac{a}{b}$ 与 $\frac{b}{a}$ 互为倒数，这是由于 $\frac{a}{b}\times\frac{b}{a}=1$

很显然，$a-b\neq b-a, a\times b\neq b\times a$——所以减法和除法没有交换律！那么结合律呢？我们一起看一个小学已经学习过且仍适用于有理数的结论：

命题 14 对于括号前的减法和乘法，去括号时需要改变括号内符号：

（1）$a-(b+c)=a-b-c, a-(b-c)=a-b+c$

（2）$a\div(b\times c)=a\div b\div c, a\div(b\div c)=a\div b\times c$

相比看到这样的命题，大家自然就知道为什么减法和除法不能使用结合律了！那么什么时候减法和除法有“交换律”呢？大家请看：

命题 15“减法交换律”与“除法交换律”：

（1）$a-b-c=a-c-b$

（2）$a\div b\div c=a\div c\div b$

我就不细说为什么这个可以了，瞪眼看就好。很显然，如果不涉及括号，被减数（被除数）位置不变，先减（除以）哪个并不是很重要！

2.4.2 绝对值的几何性质推广

我们都知道绝对值本质是距离，一个数 a 的绝对值 $|a|$ 即数 a 在数轴上的点到原点的距离，那么我们可以大胆猜测一下：这里的 $|a|$ 有没有可能意思是 $|a-0|$，我不禁要思考：

如果 $|a-0|$ 表示的是 a 到 0 的距离，那么假如我们有两个数 a, b，$|a-b|$ 会不会表示的是数 a 到数 b 的距离呢？大家可以自行尝试。

命题 16 我们可以发现：两个数差的绝对值的几何性质可以用数轴来理解。设有两个数 a 和 b，它们在数轴上的位置分别为点 A 和点 B。两个数差的绝对值 $|a-b|$ 表示点 A 到点 B 的距离。

那么我们稍微推广一下：

命题 17 对于任意三个数 a, b, c，有 $|a-b|+|b-c| \geq |a-c|$。

这个结论表明，若想从 A 到 C，通过点 B 的路径不可能比直接从 A 到 C 的距离更短，大家想到了什么？三角形两边之和大于第三边！也可以从这个几何角度对这个结论进行证明。

这个结论还可以进一步推广到数学系专业课《数学分析》中的一个不等式:

定理 8 (三角不等式) 对于任意的三个数 a, b, c, 均有 $|a \pm b| \leq |a|+|b|, |a|-|b| \leq |a \pm b|$。

由于目前对数的认识停留在有理数，对于三角不等式我们就不讨论数的范围了（事实上适用范围极广，至少在复数域是成立的）。

优秀学生选学：这个不等式证明非常简单，我们对 $|a \pm b|$ 和 $|a|+|b|$ 分别平方可以得到：

$$|a \pm b|^2 = (a \pm b)^2 = a^2 + b^2 \pm 2ab.$$

$$(|a|+|b|)^2 = |a|^2 + |b|^2 + 2|a||b| = a^2 + b^2 + 2|ab|.$$

显然可以得到，$|a+b|^2 \leq (|a|+|b|)^2$，又 $|a+b| \geq 0$ 且 $|a|+|b| \geq 0$，故有：

$$|a+b| \leq |a|+|b|.$$

证毕。同理可证 $|a|-|b| \leq |a \pm b|$。

如果聪明的你真的能看懂这个证明，请你回答这个问题：这两个不等式什么时候取等？这个结论还可以进一步推广到更高的状态：

定理 9 (三角不等式的推广) 对于任意的三个数 a, b, c,均有 $||a|-|b|| \leq |a \pm b| \leq ||a|+|b||$。

大练习：有理数的综合混合运算

$-3+\frac{1}{2}=$　　$-1+(-\frac{5}{8})=$　　$-\frac{1}{5}+\frac{3}{10}=$　　$-\frac{1}{3}+(-\frac{1}{6})=$

$\frac{3}{4}+\frac{1}{4}=$　　$\frac{2}{3}+(-\frac{1}{6})=$　　$-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=$　　$-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=$

$-\frac{1}{2}+(-\frac{1}{4})=$　　$-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=$　　$-\frac{1}{3}+(-\frac{2}{3})=$　　$\frac{1}{4}+(-\frac{1}{8})=$

$\frac{5}{6}+(-\frac{1}{3})=$　　$\frac{1}{2}+(-\frac{1}{2})=$　　$\frac{3}{4}+\frac{3}{4}=$　　$\frac{2}{5}+(-\frac{3}{5})=$

$-\frac{1}{3}+(-\frac{1}{6})=$　　$\frac{1}{2}+(-\frac{1}{4})=$　　$\frac{1}{4}+(-\frac{1}{2})=$　　$-\frac{1}{3}+(-\frac{1}{3})=$

$5-\frac{1}{4}=$　　$-\frac{1}{2}-\frac{3}{4}=$　　$-\frac{7}{10}-\frac{1}{2}=$　　$\frac{1}{4}-(-\frac{1}{8})=$

$\frac{1}{6}-\frac{2}{3}=$　　$\frac{1}{2}-(-\frac{1}{2})=$　　$\frac{3}{4}-(-\frac{3}{4})=$　　$\frac{2}{5}-(+\frac{3}{5})=$

$\frac{1}{3}-(-\frac{1}{6})=$　　$\frac{1}{2}-(-\frac{1}{4})=$　　$-\frac{1}{4}-(-\frac{1}{2})=$　　$\frac{1}{2}-(-\frac{1}{2})=$

$\frac{3}{4}-(-\frac{3}{4})=$　　$-\frac{2}{5}-(+\frac{3}{5})=$　　$\frac{1}{3}-(-\frac{1}{6})=$　　$\frac{1}{2}-(-\frac{1}{4})=$

$\frac{1}{4}-(-\frac{1}{2})=$　　$\frac{1}{3}-(-\frac{1}{3})=$　　$\frac{1}{2}-(-\frac{1}{2})=$　　$\frac{3}{4}-(-\frac{1}{4})=$

$2\times\frac{3}{4}=$　　$-\frac{1}{3}\times(-6)=$　　$-\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}=$　　$-\frac{2}{5}\times(-\frac{5}{2})=$

$-\frac{3}{4}\times\frac{4}{7}=$　　$\frac{3}{5}\times\frac{5}{6}=$　　$-\frac{1}{4}\times\frac{4}{9}=$　　$-\frac{2}{3}\times(-\frac{1}{2})=$

$\frac{1}{2}\times(-\frac{2}{5})=$　　$-\frac{2}{3}\times\frac{3}{2}=$　　$-\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}=$　　$\frac{1}{2}\times(-\frac{5}{9})=$

$\frac{1}{4}\times(-\frac{4}{9})=$　　$-\frac{1}{2}\times(-\frac{1}{2})=$　　$\frac{1}{2}\times\frac{2}{1}=$　　$-\frac{2}{3}\times\frac{3}{2}=$

$\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}=$　　$\frac{1}{2}\times(-\frac{1}{2})=$　　$-\frac{1}{4}\times(-\frac{4}{7})=$　　$-\frac{1}{2}\times(-\frac{1}{2})=$

$\frac{1}{2}\div(-\frac{1}{4})=$　$-\frac{2}{3}\div\frac{1}{3}=$　$-\frac{3}{4}\div(-\frac{3}{2})=$　$\frac{1}{4}\div\frac{1}{2}=$

$\frac{5}{6}\div\frac{5}{3}=$　$\frac{1}{2}\div\frac{7}{2}=$　$\frac{3}{4}\div\frac{11}{4}=$　$\frac{2}{5}\div\frac{2}{5}=$

$\frac{1}{3}\div\frac{1}{6}=$　$\frac{1}{2}\div\frac{1}{4}=$　$\frac{1}{2}\div(-\frac{1}{2})=$　$\frac{3}{4}\div(-\frac{3}{4})=$

$\frac{2}{5}\div(-\frac{3}{5})=$　$\frac{1}{3}\div(-\frac{1}{6})=$　$\frac{1}{2}\div(-\frac{1}{4})=$　$\frac{1}{4}\div(-\frac{1}{2})=$

$\frac{1}{3}\div(-\frac{1}{3})=$　$\frac{1}{2}\div(-\frac{1}{2})=$　$\frac{3}{4}\div(-\frac{3}{4})=$　$\frac{2}{5}\div(-\frac{3}{5})=$

$-3+\frac{1}{2}+2+(-\frac{1}{4})=$　$-\frac{1}{2}+1-\frac{3}{4}+(-\frac{1}{8})=$　$-\frac{3}{5}+(-2)-\frac{1}{2}+\frac{1}{10}=$

$1-\frac{1}{3}+(-\frac{1}{6})-2=$　$-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}-1+\frac{3}{4}=$　$2-\frac{3}{4}-(-\frac{1}{2})+\frac{1}{8}=$

$-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+1-(-\frac{3}{8})=$　$-\frac{2}{3}+1-\frac{1}{6}+(-\frac{1}{3})=$　$-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}-1+\frac{3}{8}=$

$(-3)\times\frac{2}{3}\div(-\frac{3}{4})=$　$\frac{1}{2}\times(-\frac{3}{5})\div(-\frac{3}{4})=$　$(-\frac{3}{5})\times\frac{3}{2}\div(-\frac{1}{2})=$

$\frac{4}{5}\div(-\frac{1}{3})\times\frac{1}{6}=$　$(-\frac{1}{4})\div\frac{1}{2}\times(-\frac{7}{8})=$　$\frac{3}{7}\div(-\frac{3}{4})\times(-\frac{1}{2})=$

$(-\frac{1}{2})\times\frac{1}{4}\div(-\frac{2}{5})=$　$(-\frac{2}{3})\times(-\frac{7}{8})\div(-\frac{1}{6})=$　$(-\frac{1}{4})\times\frac{1}{2}\div(-\frac{7}{5})=$

$(-2)+\frac{1}{2}\times(-\frac{1}{4})=$　$\frac{1}{2}-(-1)\div(-\frac{3}{4})=$　$(-\frac{3}{5})\times(2)+(-\frac{1}{2})=$

$(-\frac{4}{9})\div(-\frac{1}{3})+\frac{1}{6}=$　$(-\frac{1}{4})\div(\frac{1}{2})-(-1)=$　$(-2)\div(-\frac{3}{4})\times(-\frac{1}{2})=$

$(-\frac{1}{2})\times(\frac{1}{4})-(-\frac{1}{6})=$　$(-\frac{2}{3})\times(\frac{3}{2})\div(-\frac{1}{6})=$　$(-\frac{1}{4})\times(\frac{1}{2})+(-1)=$

$2\div(-\frac{3}{4})\times(-\frac{1}{2})=$　$(1-\frac{1}{2})\times(-2)+\frac{1}{4}=$　$(-\frac{1}{2}+\frac{1}{4})\times(-2)=$

$(\frac{1}{2}-\frac{1}{4})\times(-2)=$　$(-2)\times(-\frac{1}{2}+\frac{1}{4})=$　$(-\frac{1}{2}+\frac{1}{4})\div(-\frac{1}{3})=$

$(1+\frac{1}{2})\times(-2)=$

$(-2+\frac{1}{2})\times(-\frac{1}{4})=$

$(\frac{1}{2}-\frac{1}{4})\times(-2)=$

$(-2+\frac{1}{2})\times(-\frac{1}{4})=$

$(1+\frac{1}{2})\times(-2)=$

$(-\frac{1}{2}+1)\times(-\frac{3}{4})=$

$(-\frac{1}{4}+\frac{1}{2})\div(-1)+\frac{3}{4}=$

$(-2\times\frac{1}{3})+(-\frac{1}{2})=$

$(-\frac{1}{2}-\frac{1}{4})\div(\frac{1}{2})=$

$(-2)^2+\frac{1}{2}\times(-\frac{1}{4})+3=$

$(\frac{1}{2})^2-(-1)\div(-\frac{3}{4})-2=$

$(-\frac{3}{5})^2\times(2)+(-\frac{1}{2})+1=$

$1^2\div(-\frac{1}{3})+(\frac{1}{6})-2=$

$(-\frac{1}{4})^2\div(\frac{1}{2})-(-1)+2=$

$2^2\div(-\frac{3}{4})\times(-\frac{1}{2})+1=$

$(-\frac{1}{2})^2\times(\frac{1}{4})-(-1)+2=$

$(-\frac{2}{3})^2\times(1)\div(-\frac{1}{6})+2=$

$(-\frac{1}{4})^2\times(\frac{1}{2})+(-1)+2=$

$2^2\div(-\frac{3}{4})\times(-\frac{1}{2})+1=$

$(1-\frac{1}{2})^2\times(-2)+\frac{1}{4}+1=$

$(-\frac{1}{2}+\frac{1}{4})^2\times(-2)+1+(-2)=$

$(\frac{1}{2}-\frac{1}{4})^2\times(-2)+2-(-1)=$

$(-2)^2\times(\frac{1}{2}+\frac{1}{4})+(-1)+2=$

$(-\frac{1}{2}+\frac{1}{4})^2\div(-2)+2-(-1)=$

$(1+\frac{1}{2})^2\times(-2)+(-2)+1=$

$(-2+\frac{1}{2})^2\times(-\frac{1}{4})+1=$

$(\frac{1}{2}-\frac{1}{4})^2\times(-2)+(-2)+1=$

$(-2+\frac{1}{2})^2\times(-\frac{1}{4})+1-(-2)=$

$(1+\frac{1}{2})^2\times(-2)+2+(-1)=$

$(-2)^2+\frac{1}{2}\times(-\frac{1}{4})+3\times\frac{1}{3}+(-2)=$

$(\frac{1}{2})^2-(-1)\div(-\frac{3}{4})-2+(-1)\times2=$

$(-\frac{3}{5})^2\times(2)+(-\frac{1}{2})+1+\frac{1}{2}\div(-1)=$

$1^2\div(-\frac{1}{3})+(\frac{1}{6})-2+1+(-2)=$

$(-\frac{1}{4})^2\div(\frac{1}{2})-(-1)+2-1+(-1)=$

$2^2\div(-\frac{3}{4})\times(-\frac{1}{2})+(-1)\times2=$

【参考答案：每一面从左到右、从上到下】

01~80（单纯的加、减、乘、除法运算）：

$-\frac{5}{2}$	$-\frac{13}{8}$	$\frac{1}{10}$	$-\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{4}$	$-\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{4}$
-1	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{2}{3}$
$\frac{19}{4}$	$-\frac{5}{4}$	$-\frac{6}{5}$	$\frac{3}{8}$	$-\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$
$\frac{1}{4}$	1	$\frac{3}{2}$	-1	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{2}{3}$	1	1
$\frac{3}{2}$	2	$-\frac{1}{3}$	1	$-\frac{3}{7}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{5}$	-1
$-\frac{1}{3}$	$-\frac{5}{18}$	$-\frac{1}{9}$	$\frac{1}{4}$	1	-1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{7}$	$\frac{1}{4}$
-2	-2	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{3}{11}$	1	2	2
-1	-1	$-\frac{2}{3}$	-2	-2	$-\frac{1}{2}$	-1	-1	-1	$-\frac{2}{3}$

81~98（加减、乘除混合运算）：

$-\frac{3}{4}$	$-\frac{3}{8}$	-3	$-\frac{3}{2}$	0	$\frac{15}{8}$	$\frac{9}{8}$	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{8}{3}$;
$\frac{8}{3}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{9}{5}$	$-\frac{2}{5}$	$\frac{7}{16}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{5}{16}$	$-\frac{7}{2}$	$\frac{5}{56}$

99~122（四则混合运算）：

$-\frac{17}{8}$	$-\frac{5}{6}$	$-\frac{17}{10}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{4}{3}$	$\frac{1}{24}$	6	$-\frac{9}{8}$
$\frac{4}{3}$	$-\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	-3	$\frac{3}{8}$	$-\frac{1}{2}$
$\frac{3}{8}$	-3	$-\frac{3}{8}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{7}{6}$	$-\frac{3}{2}$			

123~148 （噩梦五合一混合运算）：

$\frac{55}{8}$	$-\frac{37}{12}$	$\frac{61}{50}$	$-\frac{29}{6}$	$\frac{25}{8}$	$\frac{11}{3}$	$\frac{49}{16}$	$-\frac{2}{3}$
$\frac{33}{32}$	$\frac{11}{3}$	$\frac{3}{4}$	$-\frac{9}{8}$	$\frac{23}{8}$	4	$2\ \frac{31}{32}$	$-\frac{11}{2}$
$\frac{16}{7}$	$-\frac{9}{8}$	$2\ \frac{7}{16}$	$-\frac{7}{2}$	$2\ \frac{7}{8}$	$-5\ \frac{1}{12}$	$\frac{18}{25}$	$-5\ \frac{5}{6}$
$\frac{9}{8}$	$\frac{2}{3}$						