1.1 正数与负数

本节内容共有两个知识点，一个是认识负数，另一个是应用正负数去表达具有相反意义的量，接下来开始学习：

1.1.1 正数与负数

首先我们要了解为什么我们需要负数！我们认识数的过程是循序渐进的，首先我们认识的是正整数，起主要作用在于计数——也就是计算事物的数量；后来我们发现，我们无法用正整数去表达“无”的情况，因此我们加上数字0，并认为 0 和正整数共同构成自然数；再后来我们发现，我们无法去表达介于两个相邻自然数的数值，因此有了小数和分数。

现在我们发现，有时候我们需要表达比 0 更小的数，比如昨天气温为 5 度，今天气温相较昨天下降了 8 度，我们无法用大于 0 的数表达，此时就有了今天的主角——负数！

定义 1 *大于 0 的数称为正数，小于 0 的数称为负数. 如 $3, 1.8, 8\%, +5, 2\,\dfrac{1}{2}$ 均为正数，而 $-3, -2.7\%, -4.5$ 则均为负数.*

这样的定义深刻地揭示了正数和负数本质的区别——以 0 为界限，所以 **0 既不是正数也不是负数**！这里我们也初步认识到了 0 的两个意义：

命题 1 *0 可以表达两种意义：*

1、表示“没有”，如 0 个鸡蛋；

2、表示“界限”，如 0 摄氏度（这是一个客观存在的温度，并不是没有温度）

值得注意的是，在表达正数与负数时，正数的符号 $+$ 通常可以省略不写，而负数的符号 $-$ 则是不可省略以免造成混淆！那么是不是只要带有“+”的数就是正数、带有“-”的就是负数呢？我们看看负数的另一个定义：

定义 2 *在正数前面加上符号“-”的数称为负数.*

这里要特别注意这一点，比如 $-(-9)$ 就不是负数，这个后面我们会具体学习的，它其实是负数 -9 的相反数——9 (>0)！

例题 1 *在 $-12, -0.05, \dfrac{4}{7}, 20\%, 3, -1\dfrac{5}{6}, 1.8, 0, +3.14, -\dfrac{\pi}{2}$ 中，哪些是正数，哪些是负数.*

1.1.2 具有相反意义的量

关于具有相反意义的量，我们主要要解决两个问题：

1、了解具有相反意义的量是什么，有什么特点

2、学会使用正负数去表达具有相反意义的量

首先我们解决第一个问题：

定义 3 具有相反意义的量，应该有以下三层含义：具有相反意义；具有数量；属性相同.

我分别举出反例来帮助大家理解：

1、向北走 50 米与向北走 100 米是否为具有相反意义的量？

2、向北走和向南走是否为具有相反意义的量？

3、向北走 50 米和出售 5 千克苹果是否为具有相反意义的量？

相比现在大家应该已经理解了，那么同时大家也应该注意到具有相反意义的量的性质！什么是性质，性质就是当我们确定一个事物是某类特殊群体（比如这里的具有相反意义的量）时这个事物所具有的特点！

命题 2 三条具有相反意义的量的性质：

1、成对性：如果确定了一组具有相反意义的量，那么它必然为成对出现的！

2、同类性：这个跟“具有相反意义的量的三个含义”中的属性相同意思差不多。

3、不唯一性：这个很好理解，比如向北走 *50* 米不仅与向南走 *50* 米可以确定具有相反意义的量，还可以是向南走 *100* 米，多少米都行！

例题 2 下列选项中，是具有相反意义的量的是（　　）

A. 身高增加 $1cm$ 与体重减小 $1kg$. B. 海平面以上与海平面以下.

C. 向东 $5m$ 与向西 $8m$. 　　　　D. 存入 100 元与降价 10 元.

那么接下来就轮到第二个问题了，如何用正数与负数去表达具有相反意义的量呢？这里在实战中我们需要在题设中挖掘两个信息，一旦正确提取信息，题目就迎刃而解：

这两个信息就是（1）确定基准；（2）确定规定.

例题 3 据中国航天科技集团报道:2022 年 12 月 29 日 12 时 43 分, 长征三号乙运载火箭点火升空, 成功将试验十号 02 星送入预定轨道. 若运载火箭发射点火前 5 秒记为 -5 秒, 那么运载火箭发射点火后 18 秒记为（　　）.

这个例题的基准是“火箭发射点火的时刻”，规定是“火箭发射点火前 5 秒记为 -5 秒”，所以就能确定答案啦。值得注意的是，每一次变化的环境都需要重新确定基准和规定。一旦确定基准和规定，环境不变则可以一直使用确定好的基准和规定；但若环境变化，则需要重新审视题设，比如下面这道题。

例题 4 十一黄金周期间，某风景区在 10 月 1 日的游客人数为 7 万人, 接下来的六天中, 每天的游客人数变化如下表 (正数表示比前一天多的人数, 负数表示比前一天少的人数).

日期	10.2	10.3	10.4	10.5	10.6	10.7
人数变化（万/人）	+0.6	+0.2	+0.1	-0.2	-0.8	-1.6

请问：10 月 3 日的游客人数为（　　）万人；10 月 1 日至 7 日, 游客人数最多的是 10 月（　　）日, 达到万人；游客人数最少的是 10 月（　　）日，为（　　）万人；这七天该风景区的游客总人数约为（　　）万人 (结果精确到万位).

1.2　有理数及其大小比较

本节内容共有五个知识点，围绕有理数展开，我们依次介绍：

1.2.1　有理数

在前面我们已经学过了整数和分数，老教材中有理数的定义就是通过二者实现的：

定义 4 *整数和分数统称为有理数.*

那么我们可以把这个定义变得更加简洁一些，我们都知道：整数可以写成分数形式——比如 3 可以写成 $\dfrac{3}{1}$ 等，那么我就可以这样说：

定义 5 *形如 $\dfrac{p}{q}$ $(p,q\in Z\text{且}q\neq 0)$ 的数称为有理数.*

无论这两个定义的哪一种，都无法直接判定小数是否为有理数，因此**小数是否能化为分数形式**是我们非常需要考虑的问题！

命题 3 *小数分为有限小数、无限循环小数和无限不循环小数，其中有限小数和无限循环小数一定能化为分数，无限不循环小数不能化为分数形式！所以有限小数和无限循环小数都是有理数，无限不循环小数不是有理数！*

所以通过定义 5 和命题 3 就可以达到做题中判定有理数的效果。值得一提的是，在考试中为了能实现快速识别数的类型，我们可以从两个角度对有理数的分类。

按有理数的定义分类：

$$\text{有理数}\begin{cases}\text{整数}\begin{cases}\text{正整数}\\\text{负整数}\\0\end{cases}\\\text{分数,}\begin{cases}\text{正分数}\\\text{负分数}\end{cases}\end{cases}$$

按有理数的符号分类：

$$\text{有理数}\begin{cases}\text{正有理数}\begin{cases}\text{正整数}\\\text{正分数}\end{cases}\\0\\\text{负有理数}\begin{cases}\text{负整数}\\\text{负分数}\end{cases}\end{cases}$$

1.2.2 数轴

这一部分很简单，数轴只要搞清楚两个要点就行了：（1）数轴的定义以及如何画数轴；（2）有理数与数轴关系.

我们首先说第一点：

定义 6 *规定了原点、正方向和单位长度的直线叫数轴.*

通过这样一个定义，我们可以知道数轴有三个元素，分别是：原点、正方向、单位长度，另外需要注意数轴是直线，因此其长度是无限的。

那么如何画数轴呢？

命题 4 *画数轴只需三步：*

（1）画直线，取原点；

（2）确定正方向；

（3）选取单位长度并标数；

了解完了数轴的定义以及如何画数轴，就该想到：数轴上既然有那么多数字，那么这些数字的集合与有理数是什么关系呢？

命题 5 *数轴上有无数点，不同的点表示不同的数。任何有理数都可以在数轴上用唯一点表示，但数轴上的点并不都表示有理数.*

看到了吗，**有理数和数轴上的数比较而言，前者被后者包含**——这个结论必须牢记！当然有了数轴，大家就要开始接触**分类讨论**的思想了！你们在小学可能很少见过一题多解的情况，但在初中，多个答案的情况非常常见，就是因为我们使用了分类讨论的数学思想！

例题 5 *数轴上乌龟所在位置距离原点 2 个单位长度，小白兔所在位置距原点 3 个单位长度，则乌龟和小白兔距离（　　）个单位长度.*

1.2.3 相反数

相反数主要有两个知识点，一个是你要知道相反数的定义与性质，然后就是涉及多重符号的化简，下面我们一一解析。

定义 7 *只有符号不同的两个数叫做互为相反数。*

大家注意“只有”二字，也就是说-5 与 5、-3 与 3 是互为相反数，而-5 与 3 虽然符号相反仍不能认为是护卫相反数。

推论 1 *一般地，a 与-a 互为相反数，这里 a 表示任意一个数。特别地，0 的相反数为 0。*

需要注意的是，相反数有重要的几何意义！

命题 6 在数轴上位于原点两侧且到原点的距离相等的两个点所表示的数互为相反数。

那么当我们知道两个数互为相反数时，我们可以获得怎样的性质呢？

命题 7 任何一个数只能有一个相反数。正数的相反数为负数，负数的相反数为正数，*0* 是唯一一个相反数即为本身的数。

那么如何求一个数的相反数呢？我们看下面这个命题：

命题 8 求数或代数式的相反数的方法：

（*1*）若求一个数的相反数，直接改变这个数的符号即可；

（*2*）若求字母或式子的相反数，直接在字母或式子前面加上负号即可；

那么在求相反数的时候就很容易出现问题，就是遇到多重符号的情况，我们必须有统一的方法实现对多重符号情况的化简，多重符号化简的依据是相反数的定义。

命题 9 若一个数前面有几个正负号，化简时，先省略所有的正号（*+*），然后由负号（-）的个数来确定化简结果的符号——若负号个数为偶数则结果为正，若负号个数为奇数则结果为负。

例题 6 化简下列数：$(1) - (-2)$; $(2) + [-(-2)]$; $(3) - [+(-2)]$;

1.2.4 绝对值

定义 8 一般地，数轴上表示数 a 的点与原点的距离叫做数 a 的绝对值，记作 $|a|$。

绝对值的定义非常好理解，当然，我们需要了解绝对值的性质以达到对绝对值的深化理解：

命题 10 绝对值的性质如下：

（1）若 $a > 0$，则 $|a| = a$.

（2）若 $a = 0$，则 $a = 0$.

（3）若 $a < 0$，则 $|a| = -a$.

有了这样一个性质以后，我们可以快速求解一个数的绝对值，为了提高我们求解的效率，需要了解下列推论：

推论 2 推论如下，请在理解的基础上适度记忆：

（1）在数轴上，表示一个数的点离原点越近，则这个数绝对值越小，反之越大。

（2）绝对值是本身的数是非负数，绝对值是其相反数的数是非正数，绝对值为 0 的数为 0.

（3）绝对值是某个正数的数有两个且互为相反数；若两数互为相反数，则二者绝对值相等。

绝对值的出现，搭配数轴可以出很多分类讨论的题目，必须小心谨慎！

例题 7 若 $|a| = |-3|$，则 $a =$（　　）

特别是与数轴、相反数结合，一定要注意分类讨论！

1.2.5 有理数的大小比较

这个部分真没什么好说的，有理数的大小比较方法有两种，接下来我一一介绍：

（1）基于数轴：将所有待比较大小的数全部放在数轴上，然后从左到右用 $<$ 连接即可，这种方法很直观好理解，但是很麻烦；

（2）基于法则：法则 1：正数大于 0 大于负数；法则 2：两负数比较大小，绝对值越大则自身越小。

例题 8 比较下列数大小：$-3\dfrac{4}{5}$ 与 $-3\dfrac{3}{4}$；$|-\dfrac{2}{3}|$ 与 $|\dfrac{3}{4}|$；

1.3 课外知识补充

1.3.1 关于无限循环小数转换为分数

在数学中，循环小数是一种特别的小数形式，其中某一部分数字会无限重复。将循环小数转换成分数形式是一个常见的数学技巧。本专题将介绍如何将循环小数化为分数，并分为两种主要情形进行讨论：

1. 小数部分只有循环节；
2. 小数部分先是固定数字再循环节。

情形一：小数部分只有循环节

命题 11 假设我们有一个纯循环小数 $x = 0.\overline{d_1d_2\ldots d_n}$，其中 $d_1d_2\ldots d_n$ 是循环节。则有：

$$x = \frac{d_1d_2\ldots d_n}{10^n - 1}.$$

证明如下：依题意，设 $x = 0.\overline{d_1d_2\ldots d_n}$，等式两边同时乘以 10^n，易得：

$$10^n x = d_1d_2\ldots d_n.\overline{d_1d_2\ldots d_n}$$

等式两边同时减去 $x = 0.\overline{d_1d_2\ldots d_n}$，则有：

$$(10^n - 1)x = d_1d_2\ldots d_n$$

等式两边同时除以 $(10^n - 1)$，即证：

$$x = \frac{d_1d_2\ldots d_n}{10^n - 1}$$

情形二：小数部分先是固定数字再循环节

命题 12 假设我们有一个混循环小数 $x = 0.a_1a_2\ldots a_m\overline{d_1d_2\ldots d_n}$，其中 $a_1a_2\ldots a_m$ 是非循环部分，$d_1d_2\ldots d_n$ 是循环节。则有：

$$x = \frac{a_1a_2\ldots a_md_1d_2\ldots d_n - a_1a_2\ldots a_m}{10^{m+n} - 10^m}.$$

证明如下：依题意，设 $x = 0.a_1a_2\dots a_m\overline{d_1d_2\dots d_n}$ 等式两边同时乘以 10^{m+n}，易得：

$$10^{m+n}x = a_1a_2\dots a_md_1d_2\dots d_n.\overline{d_1d_2\dots d_n}.$$

类似地，等式两边同时乘以 10^m，故而有：

$$10^m x = a_1a_2\dots a_m.a_{m+1}a_{m+2}\dots a_{m+n}\overline{d_1d_2\dots d_n}.$$

两式做差，即可消除循环部分，有：

$$(10^{m+n} - 10^m)x = a_1a_2\dots a_md_1d_2\dots d_n - a_1a_2\dots a_m.$$

等式两边同时除以 $10^{m+n} - 10^m$，故有：

$$x = \frac{a_1a_2\dots a_md_1d_2\dots d_n - a_1a_2\dots a_m}{10^{m+n} - 10^m}.$$

这个结论看上去复杂，实际使用的时候一点都不复杂，我不细说了，请自行尝试！

例题 9 设 $x = 0.\overline{12}, y = 0.12\overline{34}$，请将 x, y 转换为分数。

以上就是将循环小数化为分数的基本方法。通过这种方法，我们可以方便地将任何循环小数转换为其对应的分数形式。

1.4　宏观总结

如果让我概括七年级上册第一章的内容，我只能说：非常简单——只要进入了初中学习状态，学习本章内容信手拈来。

我们学习了正数与负数，在这一节内容中，我们进一步拓宽了我们对数的认识，负数的出现让我们在小学学习的基础上有了对小于 0 的情况进行数学表达的能力，所以请务必搞清楚负数的两个定义以有效帮助我们更好的使用。

那么既然学习了负数就要使用，正数与负数有一个很直接的应用，便是用于表达具有相反意义的量——那么首先要掌握的就是具有相反意义的量的三条含义与三条性质，这样也就对具有相反意义的量这一概念有了更为直观的认识；接着就是用正负数表达具有相反意义的量，这是一类重要题型，只要两个重要东西，那就是基准和规定，需要注意的是每个独立环境有且仅有一组基准、规定，但若环境变化则需重新确定。

学习了正数与负数，就要进入到有理数及其大小比较的相关学习了，这个部分共有五个课时，虽然内容多，却非常简单。第一课时就揭示了有理数的两个定义，帮助大家快速识别有理数，我特意补充了关于什么样的小数能转换为分数的命题，这样对于有理数的判断不应该有任何问题。

接着就到相反数了，相反数的定义与几何意义是理解相反数的关键，在理解的基础上务必要掌握求有理数相反数的方法——在这个过程中可能会涉及到多重符号的化简。对相反数的掌握应该非常扎实，其实无非就是符号的改变；有了相反数，我们就可以放心学习绝对值的有关内容。

学习绝对值，首先要知道绝对值的本质是距离，是数所表示的点在数轴上到远点的距离！然而这个定义本身其实并不太好用于做题，我们重点学习绝对值的性质，讨论数在不同情况下的绝对值取值，这是非常重要的。

最后是关于有理数大小的比较，这个实在太简单了，两种方法都可以解决问题：一个是数轴法——通过几何方法把数值放在数轴上，这种方法好处是直观、不容易错，缺点是太麻烦；另一个方法是使用法则——两条法则分别已经在相关部分表示出来！这个方法优点是快速，缺点是如果基础不扎实可能会算错。

本章内容学习起来，非常容易。