

目录

- 一、背景
- 二、长期增长的源泉
- 三、Solow模型的假设
- 四、基本模型
- 五、技术进步
- 六、黄金率
- 七、模型的扩展

一、背景

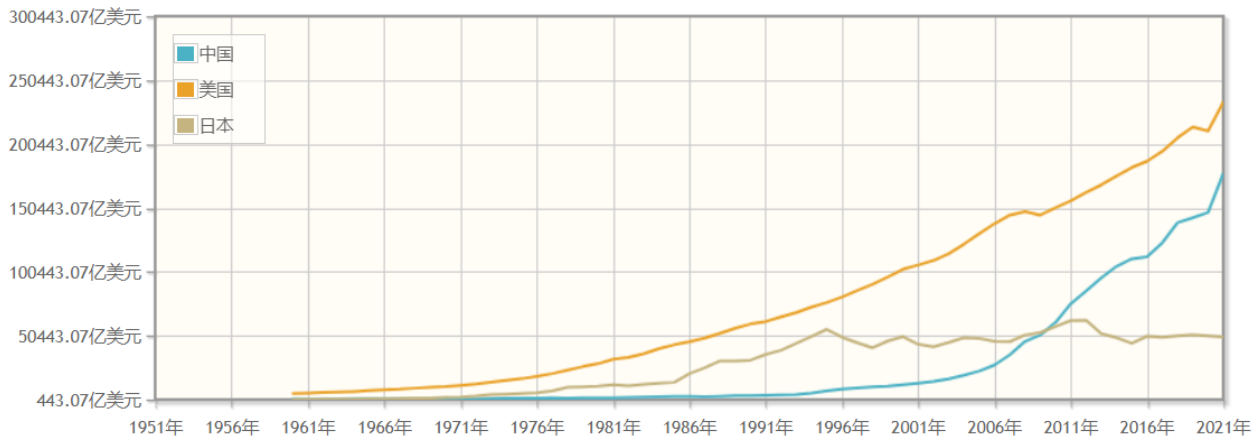


图1 中国、美国、日本历年GDP数据比较

一、背景

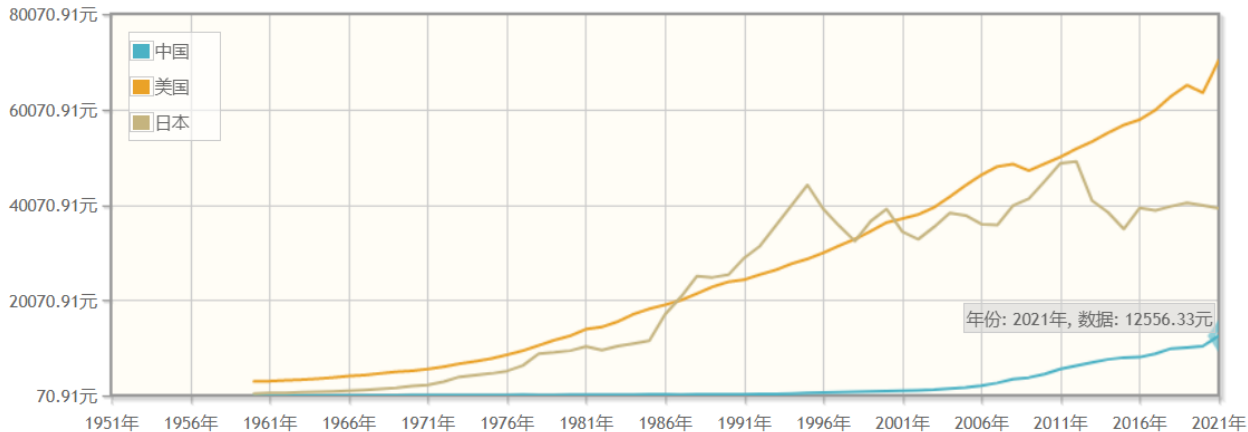


图2 中国、美国、日本历年人均GDP数据比较

一、背景

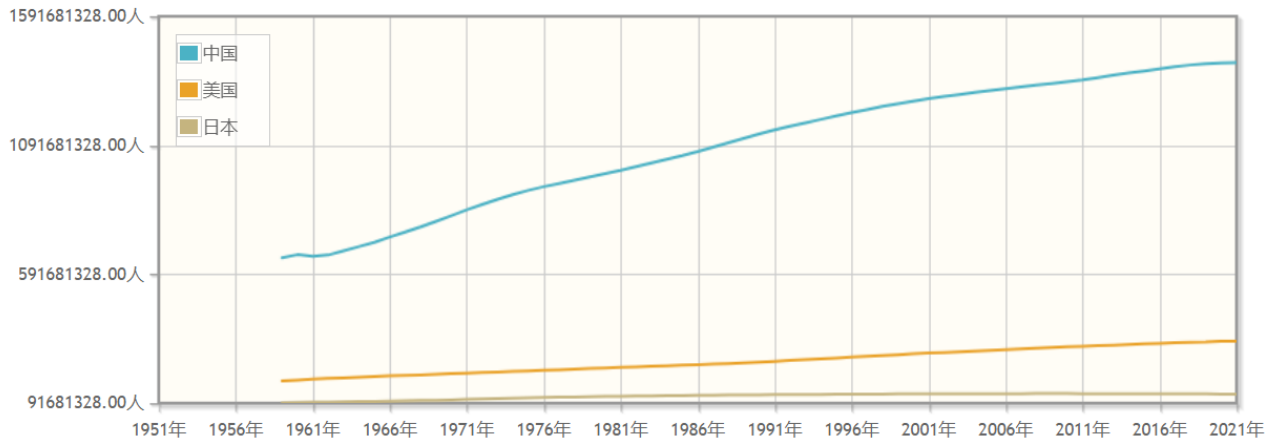


图3 中国、美国、日本历年人口总数统计比较

一、背景

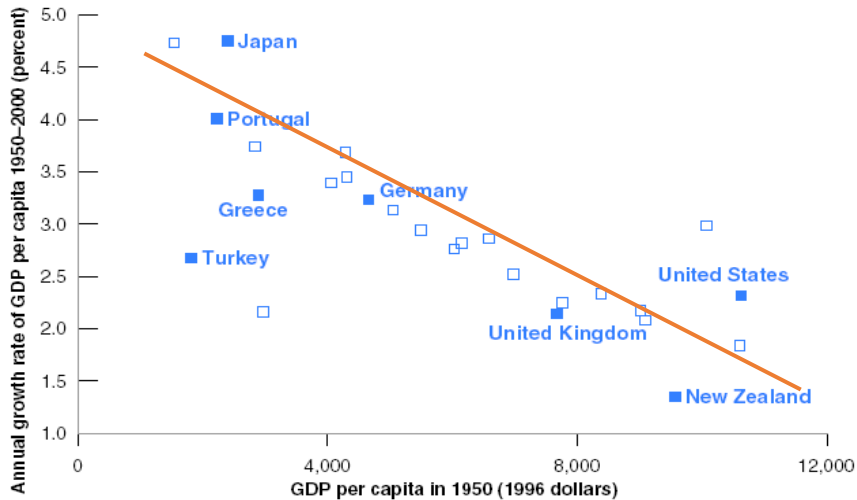


图4 收敛和趋同

一、背景

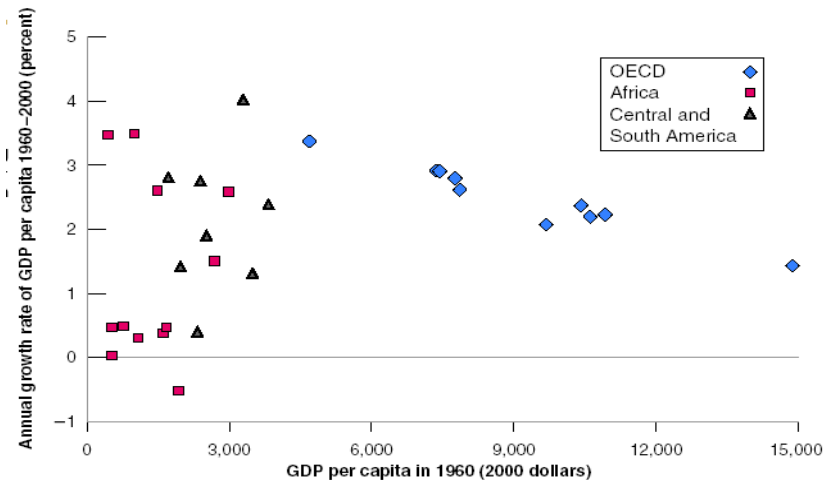


图5 增长和趋同不是历史的必然

二、长期增长的源泉

1. 长期经济增长：

总量经济增长率靠人口？人均经济增长率又靠什么？

2. 经济增长的差异：

为何在时间和空间上存在经济增长率的巨大差异？

三、Solow模型的假设

1. 生产函数 $Y_t = F(K_t, A_t L_t)$

- 哈罗德中性技术进步 (劳动扩展型)
- 规模报酬不变 $bY_t = F(bK_t, bA_t L_t)$
- 边际报酬递减

$$\checkmark \frac{\partial F(K_t, A_t L_t)}{\partial K_t} > 0 \quad \frac{\partial^2 F(K_t, A_t L_t)}{\partial K_t^2} < 0$$

$$\checkmark \frac{\partial F(K_t, A_t L_t)}{\partial L_t} > 0 \quad \frac{\partial^2 F(K_t, A_t L_t)}{\partial L_t^2} < 0$$

- 稻田条件 (Inada Conditions)

$$\checkmark \lim_{K \rightarrow 0} \frac{\partial F(K_t, A_t L_t)}{\partial K_t} = \infty, \quad \lim_{K \rightarrow \infty} \frac{\partial F(K_t, A_t L_t)}{\partial K_t} = 0$$

$$\checkmark \lim_{L \rightarrow 0} \frac{\partial F(K_t, A_t L_t)}{\partial L_t} = \infty, \quad \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{\partial F(K_t, A_t L_t)}{\partial L_t} = 0$$

三、Solow模型的假设

2. 劳动和技术知识为外生变量，固定增长率

➤ $L_t = L_0(1+n)^t$ n 为常数

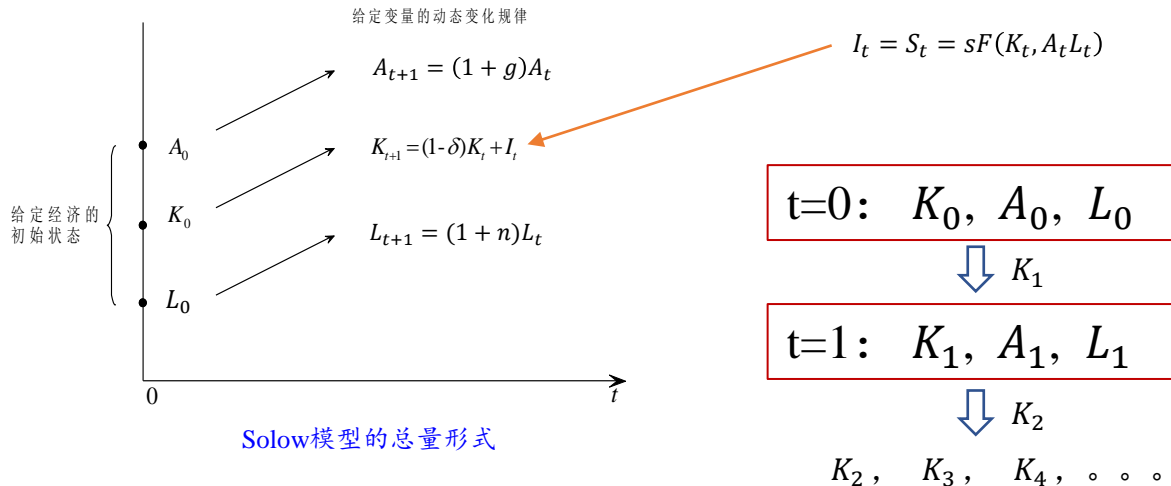
➤ $A_t = A_0(1+g)^t$ g 为常数

3. 储蓄率固定， s =常数

4. 封闭经济，国内总储蓄=国内总投资

5. 无政府

四、基本模型：总量形式



四、基本模型：总量形式

1. 基本的Solow模型：

- $K_{t+1} = (1 - \delta)K_t + sF(K_t, A_tL_t)$
- $A_t = (1 + g)A_{t-1}$
- $L_t = (1 + n)L_{t-1}$

2. 问题：产出如何随时间变化？

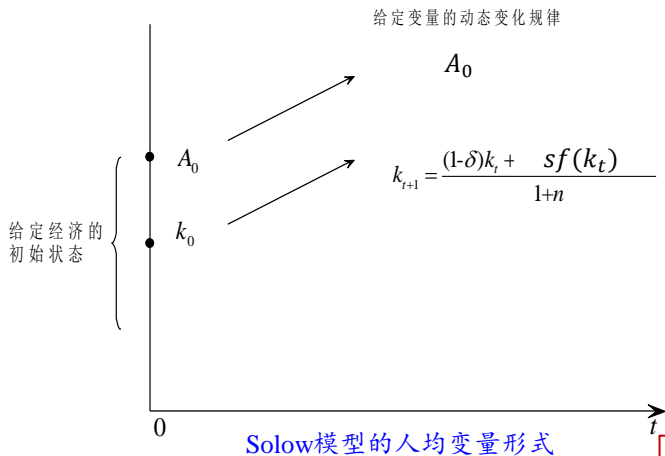
- $Y_t = F(K_t, A_tL_t)$
- 内生变量： Y_t 、 K_t ，其中， K_t 为关键的内生变量
- 外生参数： g 、 n 、 s 、 δ (资本折旧率)

3. 动态分析：平衡增长路径是否存在？

- 平衡增长路径：所有变量的增长率都是常数。
- 比较静态分析：均衡是否存在？

四、基本模型：人均形式

假设 $A_t = A_0 = 1$ ，即没有技术进步 ($g = 0$)



为什么研究人均变量形式？
人均变量更能反映出富裕的程度和福利水平。

定义人均变量：

$$y_t \equiv \frac{Y_t}{L_t}, \quad k_t \equiv \frac{K_t}{L_t}, \quad c_t \equiv \frac{C_t}{L_t}$$

一般化的生产函数： $y_t = f(k_t)$

$$y_t = \frac{Y_t}{L_t} = \frac{F(K_t, L_t)}{L_t} = F\left(\frac{K_t}{L_t}, \frac{L_t}{L_t}\right) = F(k_t, 1) \equiv f(k_t)$$

四、基本模型：稳态

稳态（或称均衡点，Steady State）： $k_{t+1} = k_t = k^*$, $y_{t+1} = y_t = y^*$

关于稳态的三个特征：存在性、唯一性、稳定性

稳态： k^* 由 $k^*(n + \delta) = sf(k^*)$ 决定

$$\Rightarrow \frac{f(k^*)}{k^*} = \frac{(n+\delta)}{s}$$

$$\begin{aligned} y^* &= f(k^*) \\ c^* &= (1-s)f(k^*) \end{aligned}$$

k^* 存在且唯一？

- $\frac{f(k)}{k} \in (0, +\infty) \Leftrightarrow \lim_{k \rightarrow 0} f'(k) = +\infty, \lim_{k \rightarrow +\infty} f'(k) = 0$
- $\frac{f(k)}{k}$ 连续且单调递减：

$$\left[\frac{f(k)}{k} \right]' < 0$$

四、基本模型：稳态

假设： $y_t = k_t^\theta$

稳态： k^* 由 $k^*(n + \delta) = sf(k^*)$ 决定

$$\Rightarrow \frac{(k^*)^\theta}{k^*} = \frac{(n+\delta)}{s}$$

$$\Rightarrow k^* = \left[\frac{(n+\delta)}{s} \right]^{\frac{1}{(\theta-1)}}$$

$$\begin{aligned} y^* &= f(k^*) \\ c^* &= (1-s)f(k^*) \end{aligned}$$

Remark:

- ▶ 只要参数 n, δ, s, θ 取值相同，所有国家人均财富和收入将会收敛到相同水平
- ▶ 提升储蓄率 s 只能提升稳态的人均财富水平，但不能使得人均财富持续增长
- ▶ 这种和初始状态无关都能收敛到相同稳态的现象，理论上称为“绝对收敛”

四、基本模型：比较静态分析

微分法：对 $k^*(n + \delta) = sf(k^*)$ 进行全微分

$$\begin{aligned} \Rightarrow (n + \delta)dk^* + k^*(dn + d\delta) \\ = sf'(k^*)dk^* + f(k^*)ds \end{aligned}$$

(如果考虑人口增长率 n 对稳态的影响, 则 $d\delta = ds = 0$)

$$\Rightarrow \frac{dk^*}{dn} = \frac{-k^*}{(n+\delta)-sf'(k^*)}$$

Remark:

$$\blacktriangleright \frac{dk^*}{ds} = ? \qquad \frac{dk^*}{d\delta} = ?$$

$$\begin{aligned} dy^* &= f'(k^*)dk^* \\ dc^* &= d[(1-s)f(k^*)] \end{aligned}$$

四、基本模型：其他部门

企业行为： $\Pi_t = F(K_t, L_t) - r_t K_t - w_t L_t$

FOC \Rightarrow 工资： $w_t = \frac{\partial F(K_t, L_t)}{\partial L_t}$

利率： $r_t = \frac{\partial F(K_t, L_t)}{\partial K_t}$

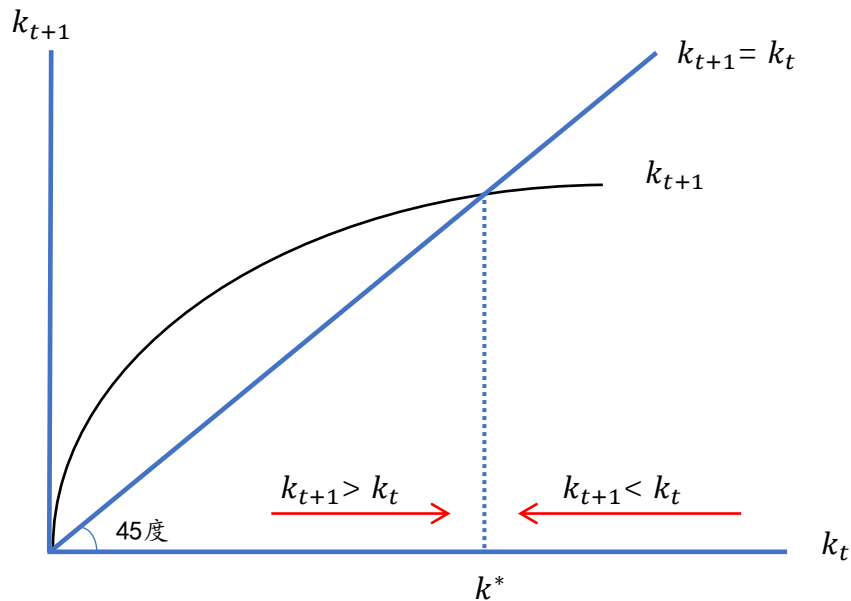
人均形式： $\max L_t \{f(k_t) - r_t k_t - w_t\}$

$$\Rightarrow r_t = f'(k_t) \quad , \quad w_t = f(k_t) - f'(k_t)k_t$$

假设： $y_t = k_t^\theta$

- 求解工资和利率的变化路径
- 求解稳态下的工资和利率
- 各种参数 n, δ, s, θ 对稳态工资和利率的影响

四、基本模型：相位图分析



四、基本模型：相位图分析

k_t 的动态变化方程？

- $k_{t+1} = \left[\frac{1-\delta}{(1+n)} \right] k_t + \left[\frac{s}{(1+n)} \right] f(k_t)$
- k_{t+1} 为 k_t 的函数，变化特征
 - ✓ $\frac{\partial k_{t+1}}{\partial k_t} = \frac{1-\delta}{(1+n)} + \frac{s}{(1+n)} f'(k_t) > 0$
 - ✓ $\frac{\partial^2 k_{t+1}}{\partial k_t^2} = \frac{s}{(1+n)} f''(k_t) < 0$
- 依据生产函数 $y_t = f(k_t)$ 的稻田条件，可知
 - ✓ $\lim_{k \rightarrow 0} \frac{\partial k_{t+1}}{\partial k_t} = \infty, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\partial k_{t+1}}{\partial k_t} = \frac{1-\delta}{(1+n)} < 1$

k_t 如何从偏离稳态收敛到稳态？

- $k_t < k^*: k_{t+1} > k_t$
- $k_t > k^*: k_{t+1} < k_t$



$\frac{f(k)}{k}$ 连续且单调递减

四、基本模型：平衡增长路径

定义平衡增长路径（Balanced Growth Path）：（总量或者人均）
资本和产出的增长率都是常数的增长率路径

在稳态下，人均变量 $\frac{k_{t+1}}{k_t} = 1$ ，而总量变量 $\frac{K_{t+1}}{K_t} = (1 + n)$

$$Y_t = K_t^\theta L_t^{1-\theta}$$

Remark :

- 在稳态下，总量以人口增长率 n 增长，而人均变量不增长

五、技术进步：总量形式

1. 基本的Solow模型：

- $K_{t+1} = (1 - \delta)K_t + sF(K_t, A_t L_t)$
- $A_t = (1 + g)A_{t-1}$
- $L_t = (1 + n)L_{t-1}$

2. 问题：产出如何随时间变化？

- $Y_t = F(K_t, A_t L_t)$
- 内生变量： Y_t 、 K_t ，其中， K_t 为关键的内生变量
- 外生参数： g 、 n 、 s 、 δ (资本折旧率)

3. 动态分析：平衡增长路径是否存在？

- 平衡增长路径：所有变量的增长率都是常数。
- 比较静态分析：均衡是否存在？

五、技术进步：单位效率劳动

为了研究经济的动态变化特征，构建单位效率资本的增长率
假设 A_0 ，且存在技术进步（ $g \neq 0$ ）

一般化的生产函数： $\hat{y}_t = f(\hat{k}_t)$

$$\hat{y}_t = \frac{Y_t}{A_t L_t} = \frac{F(K_t, A_t L_t)}{A_t L_t} = F\left(\frac{K_t}{A_t L_t}, \frac{A_t L_t}{A_t L_t}\right) = F(\hat{k}_t, 1) \equiv f(\hat{k}_t)$$

\hat{k}_t 的动态变化方程？

定义单位效率劳动的变量：

$$\hat{y}_t \equiv \frac{Y_t}{A_t L_t}, \quad \hat{k}_t \equiv \frac{K_t}{A_t L_t}, \quad \hat{c}_t \equiv \frac{C_t}{A_t L_t}$$

$$\hat{k}_{t+1} = \left[\frac{1-\delta}{(1+n)(1+g)} \right] \hat{k}_t + \left[\frac{s}{(1+n)(1+g)} \right] f(\hat{k}_t)$$

➤ \hat{k}_{t+1} 为 \hat{k}_t 的函数，变化特征

$$\checkmark \quad \frac{\partial \hat{k}_{t+1}}{\partial \hat{k}_t} = \frac{1-\delta}{(1+n)(1+g)} + \frac{s}{(1+n)(1+g)} f'(\hat{k}_t) > 0$$

$$\checkmark \quad \frac{\partial^2 \hat{k}_{t+1}}{\partial \hat{k}_t^2} = \frac{s}{(1+n)(1+g)} f''(\hat{k}_t) < 0$$

➤ 依据生产函数 $\hat{y}_t = f(\hat{k}_t)$ 的稻田条件，可知

$$\checkmark \quad \lim_{k \rightarrow 0} \frac{\partial \hat{k}_{t+1}}{\partial \hat{k}_t} = \infty, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\partial \hat{k}_{t+1}}{\partial \hat{k}_t} = \frac{1-\delta}{(1+n)(1+g)} < 1$$

五、技术进步：稳态

稳态（或称均衡点，Steady State）： $\hat{k}_{t+1} = \hat{k}_t = \hat{k}^*$, $\hat{y}_{t+1} = \hat{y}_t = \hat{y}^*$

关于稳态的三个特征：存在性、唯一性、稳定性

稳态： \hat{k}^* 由 $\hat{k}^*(n + g + ng + \delta) = sf(\hat{k}^*)$ 决定

$$\Rightarrow \frac{f(\hat{k}^*)}{\hat{k}^*} = \frac{(n+g+ng+\delta)}{s}$$

$$\begin{aligned}\hat{y}^* &= f(\hat{k}^*) \\ \hat{c}^* &= (1-s)f(\hat{k}^*)\end{aligned}$$

k^* 存在且唯一？

- $\frac{f(\hat{k}^*)}{\hat{k}^*} \in (0, +\infty) \Leftrightarrow \lim_{\hat{k} \rightarrow 0} f'(\hat{k}) = +\infty, \lim_{\hat{k} \rightarrow +\infty} f'(\hat{k}) = 0$
- $\frac{f(\hat{k})}{\hat{k}}$ 连续且单调递减：

$$\left[\frac{f(\hat{k})}{\hat{k}} \right]' < 0$$

五、技术进步：稳态

$$\text{假设: } \hat{y}_t = (\hat{k}_t)^\theta$$

稳态: \hat{k}^* 由 $\hat{k}^*(n + g + ng + \delta) = sf(\hat{k}^*)$ 决定

$$\Rightarrow \frac{(\hat{k}^*)^\theta}{\hat{k}^*} = \frac{(n+g+ng+\delta)}{s}$$

$$\Rightarrow \hat{k}^* = \left[\frac{(n+g+ng+\delta)}{s} \right]^{\frac{1}{\theta-1}}$$

$$\begin{aligned} \hat{y}^* &= f(\hat{k}^*) \\ \hat{c}^* &= (1-s)f(\hat{k}^*) \end{aligned}$$

Remark:

- 只要参数 n, g, δ, s, θ 取值相同, 所有国家的单位有效劳动财富和收入将会收敛到相同水平
- 提升储蓄率 s 只能提升稳态的单位有效财富水平, 但不能使得单位有效财富持续增长

五、技术进步：比较静态分析

微分法：对 $\hat{k}^*(n + g + ng + \delta) = sf(\hat{k}^*)$ 进行全微分

$$\begin{aligned} \Rightarrow (n + g + ng + \delta)d\hat{k}^* + \hat{k}^*(dn + dg + ndg + gdn + d\delta) \\ = sf'(\hat{k}^*)d\hat{k}^* + f(\hat{k}^*)ds \end{aligned}$$

(如果考虑人口增长率 n 对稳态的影响, 则 $dg = d\delta = ds = 0$)

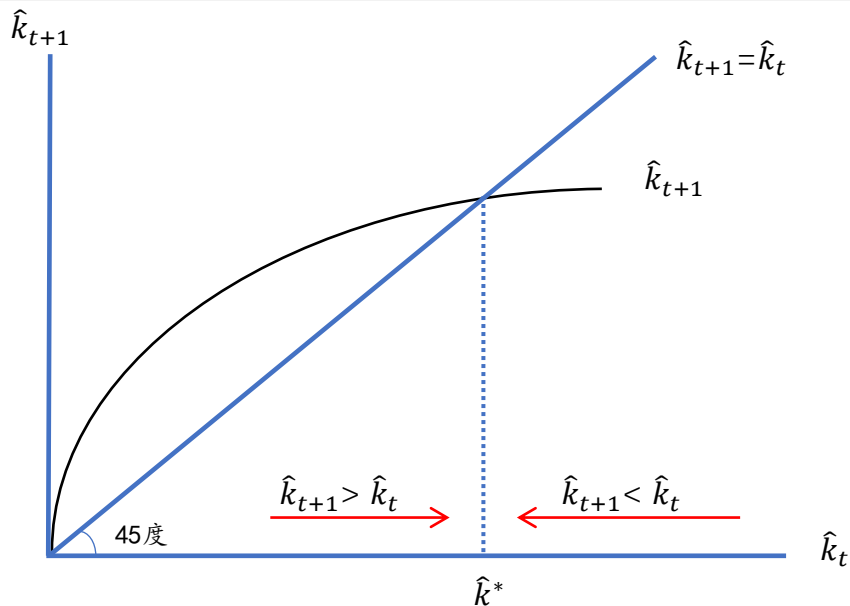
$$\Rightarrow \frac{d\hat{k}^*}{dn} = \frac{-(1+g)\hat{k}^*}{(n+g+ng+\delta)-sf'(\hat{k}^*)}$$

Remark:

$$\triangleright \frac{d\hat{k}^*}{ds} = ?$$

$$\frac{d\hat{k}^*}{d\delta} = ?$$

五、技术进步：相位图分析



五、技术进步：相位图分析

\hat{k}_t 的动态变化方程？

$$\hat{k}_{t+1} = \left[\frac{1-\delta}{(1+n)(1+g)} \right] \hat{k}_t + \left[\frac{s}{(1+n)(1+g)} \right] f(\hat{k}_t)$$

➤ \hat{k}_{t+1} 为 \hat{k}_t 的函数，变化特征

$$\checkmark \quad \frac{\partial \hat{k}_{t+1}}{\partial \hat{k}_t} = \frac{1-\delta}{(1+n)(1+g)} + \frac{s}{(1+n)(1+g)} f'(\hat{k}_t) > 0$$

$$\checkmark \quad \frac{\partial^2 \hat{k}_{t+1}}{\partial \hat{k}_t^2} = \frac{s}{(1+n)(1+g)} f''(\hat{k}_t) < 0$$

➤ 依据生产函数 $\hat{y}_t = f(\hat{k}_t)$ 的稻田条件，可知

$$\checkmark \quad \lim_{k \rightarrow 0} \frac{\partial \hat{k}_{t+1}}{\partial \hat{k}_t} = \infty, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\partial \hat{k}_{t+1}}{\partial \hat{k}_t} = \frac{1-\delta}{(1+n)(1+g)} < 1$$

\hat{k}_t 如何从偏离稳态收敛到稳态？

$$\checkmark \quad \hat{k}_t < \hat{k}^*: \hat{k}_{t+1} > \hat{k}_t$$

$$\checkmark \quad \hat{k}_t > \hat{k}^*: \hat{k}_{t+1} < \hat{k}_t$$



$\frac{f(\hat{k})}{\hat{k}}$ 连续且单调递减

五、技术进步：平衡增长路径

定义平衡增长路径（Balanced Growth Path）：（总量或者人均）

资本和产出的增长率都是常数的增长路径。

在稳态下，单位有效劳动变量 $\frac{\hat{k}_{t+1}}{\hat{k}_t} = 1$

$$Y_t = K_t^\theta (A_t L_t)^{1-\theta}$$

而人均变量 $\frac{k_{t+1}}{k_t} = (1+g)$ ，总量变量 $\frac{K_{t+1}}{K_t} = (1+g)(1+n)$

Remark:

- 在稳态下，总量以人口增长率 $n + g + ng$ 增长，人均变量的增长率为 g ，而单位有效劳动变量不变
- 技术进步是人均财富持续增长的唯一原因，而且技术进步越快，人均财富增长越快

平衡增长路径总结：基本模型 vs 技术进步

技术进步

单位效率劳动的资本	$\hat{k} = K/AL$	
单位效率劳动的产出	$\hat{y} = Y/AL$	0
单位效率劳动的消费	$\hat{c} = \hat{y} - s\hat{y}$	

人均资本	$k = A\hat{k}$	
人均产出	$y = A\hat{y}$	g
人均消费	$c = A\hat{c}$	

总资本	$K = AL\hat{k}$	
总产出	$Y = AL\hat{y}$	$n + g + ng$
总消费	$C = AL\hat{c}$	

基本模型

人均资本	$k = K/L$	
人均产出	$y = Y/L$	0
人均消费	$c = y - sy$	

总资本	$K = Lk$	
总产出	$Y = Ly$	n
总消费	$C = Lc$	

六、黄金率：定义

定义黄金率（Golden Rule）：最大化稳态时的人均消费

$$\max: \{c = f(k) - sf(k)\}$$

$$\Rightarrow \max: \{c = f(k) - (n + \delta)k\}$$

$$\text{FOC} \Rightarrow f'(k_g) = (n + \delta)$$

假设： $f(k) = k^\theta$ ，则

$$\begin{aligned} \text{➤ } k_g &= \left[\frac{(n+\delta)}{\theta} \right]^{\frac{1}{\theta-1}} \\ \text{➤ } s_g &= \frac{(n+\delta)k_g}{f(k_g)} = \theta \end{aligned}$$

六、黄金率：定义

引入技术进步：

$$\max: \{\hat{c} = f(\hat{k}) - sf(\hat{k})\}$$

$$\Rightarrow \max: \{\hat{c} = f(\hat{k}) - (n + g + ng + \delta)\hat{k}\}$$

$$\text{FOC} \Rightarrow f'(\hat{k}_g) = (n + g + ng + \delta)$$

假设： $f(\hat{k}) = (\hat{k})^\theta$ ，则

$$\triangleright \hat{k}_g = \left[\frac{(n+g+ng+\delta)}{\theta} \right]^{\frac{1}{\theta-1}}$$

$$\triangleright \hat{s}_g = \frac{(n+g+ng+\delta)\hat{k}_g}{f(\hat{k}_g)} = \theta$$

六、黄金率：动态调整路径

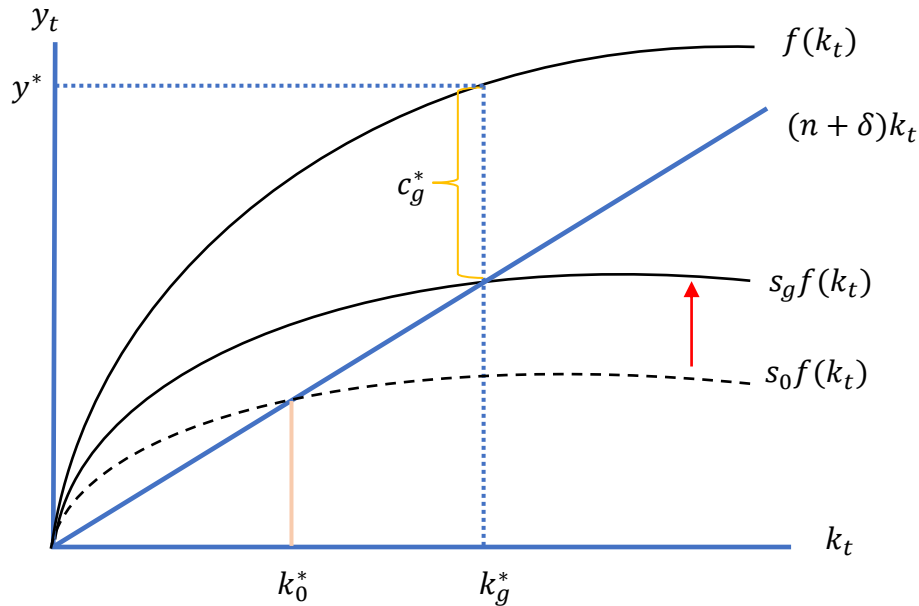
如何一个国家的平衡增长路径低于或高于黄金储蓄率 s_g ，我们该怎么办？（先不考虑技术进步）

- 现实中 s 大于 s_g 时，政府政策应该如何？
- 现实中 s 低于 s_g 时，政府政策应该如何？
- 实施政策后，经济如何动态调整？

在稳态下，储蓄率越高，则资本存量越大。

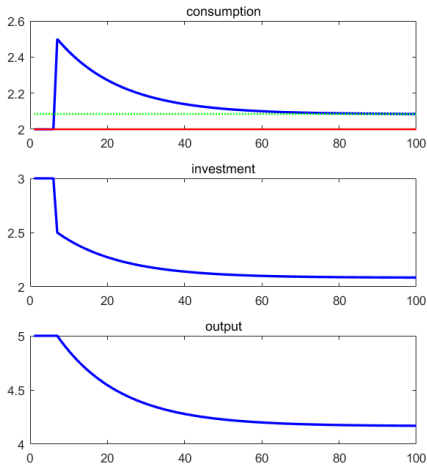
- 现实中 s 大于 s_g 时，意味着 k 大于 k_g
- 现实中 s 低于 s_g 时，意味着 k 小于 k_g

六、黄金率：动态调整路径

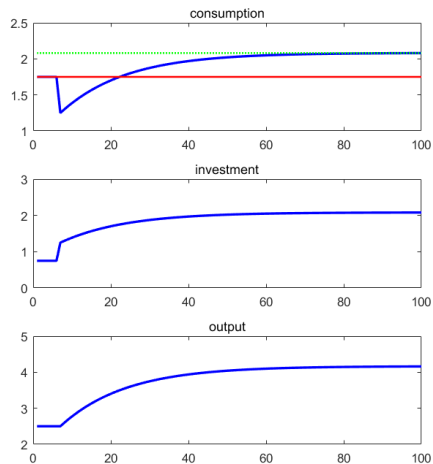


六、黄金率：动态调整路径

从资本大于黄金规则稳定状态出发



从资本小于黄金规则稳定状态出发



solve by “solow.mod”

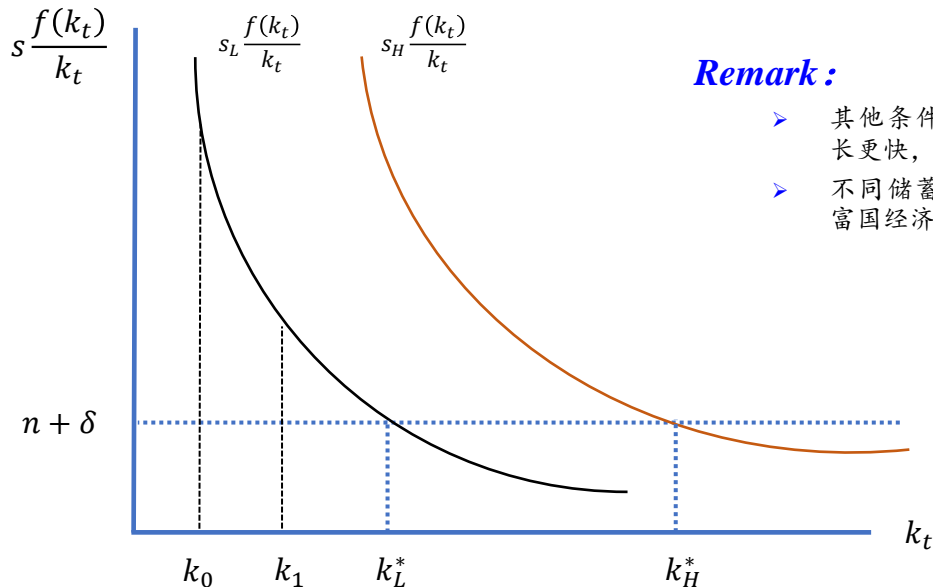
习题：技术进步下的动态调整路径

引入技术进步，假设： $f(\hat{k}) = (\hat{k})^\theta$ ，则

$$\begin{aligned} \text{➤ } \hat{k}_g &= \left[\frac{(n+g+ng+\delta)}{\theta} \right]^{\frac{1}{\theta-1}} \\ \text{➤ } \hat{s}_g &= \frac{(n+g+ng+\delta)\hat{k}_g}{f(\hat{k}_g)} = \theta \end{aligned}$$

如果此时 $\hat{s}_0 < \hat{s}_g$ ，则 \hat{k}_0 如何动态调整至 \hat{k}_g ？

七、模型的扩展：绝对收敛 vs 相对收敛



Remark:

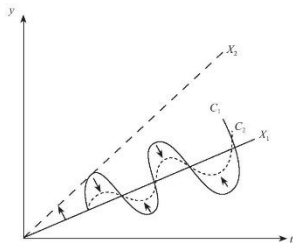
- 其他条件不变，穷国经济增长更快，最终各国收敛。
- 不同储蓄率，不同均衡点，富国经济增长有可能更快。

七、模型的扩展：随机冲击Solow模型

在标准的Solow模型中加入随机冲击，假设：技术是个随机变量

假设：技术是个随机变量 $A_t = Ae^{\varepsilon_t}$ ，其中 ε_t 服从均值为0的正态分布。
因此， A_t 服从以下形势的对数正态分布： $\ln A_t = \ln A + \varepsilon_t$

$$k_{t+1} = \frac{(1 - \delta)k_t + s(k_t)^\theta (Ae^{\varepsilon_t})^{1-\theta}}{1 + n}$$



To Be Continued!