目录

一、背景

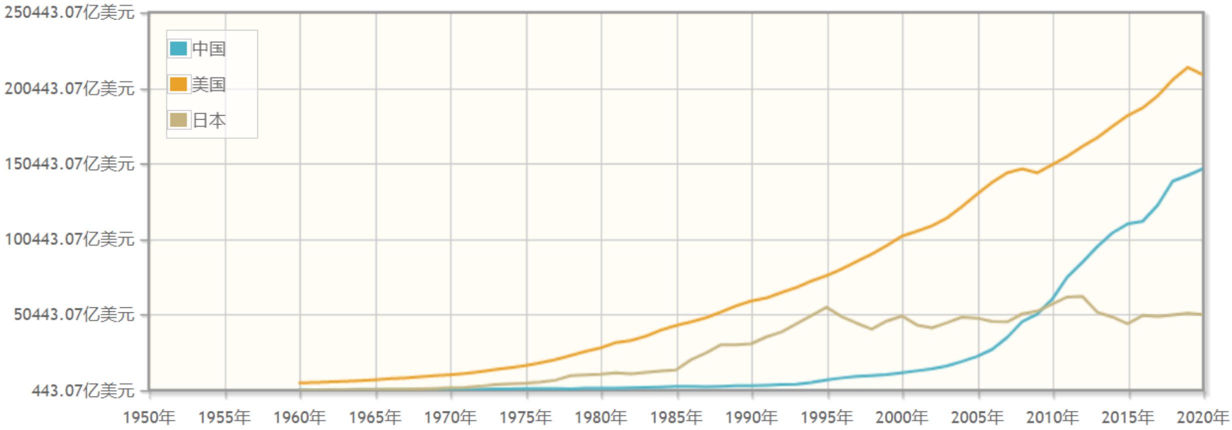


图1 中国、美国、日本历年GDP数据比较

一、背景

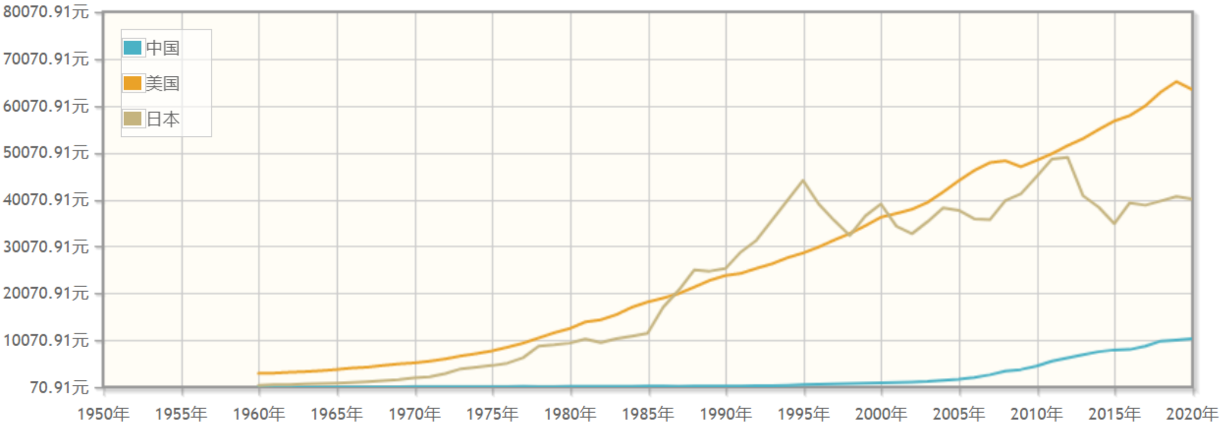


图2 中国、美国、日本历年人均GDP数据比较

一、背景

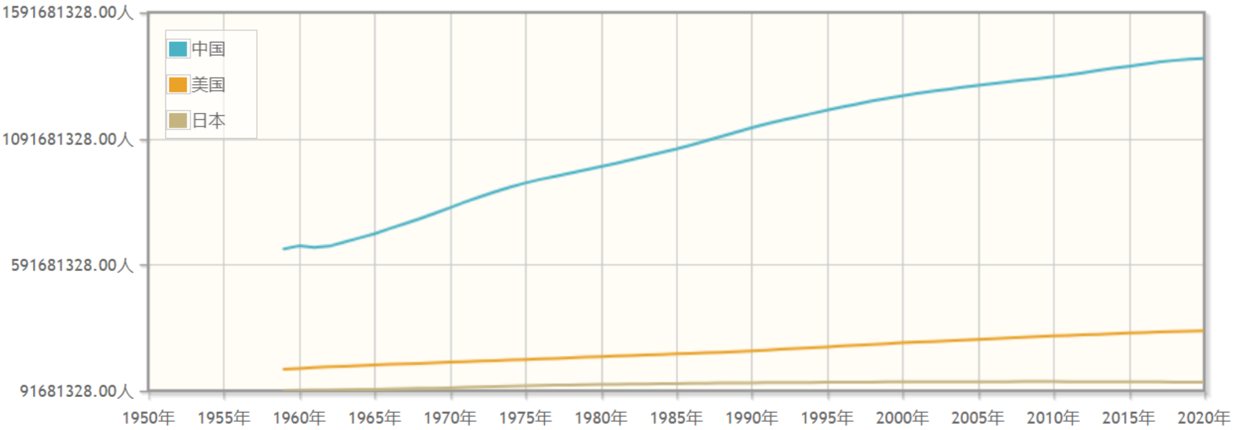


图3 中国、美国、日本历年人口总数统计比较

一、背景

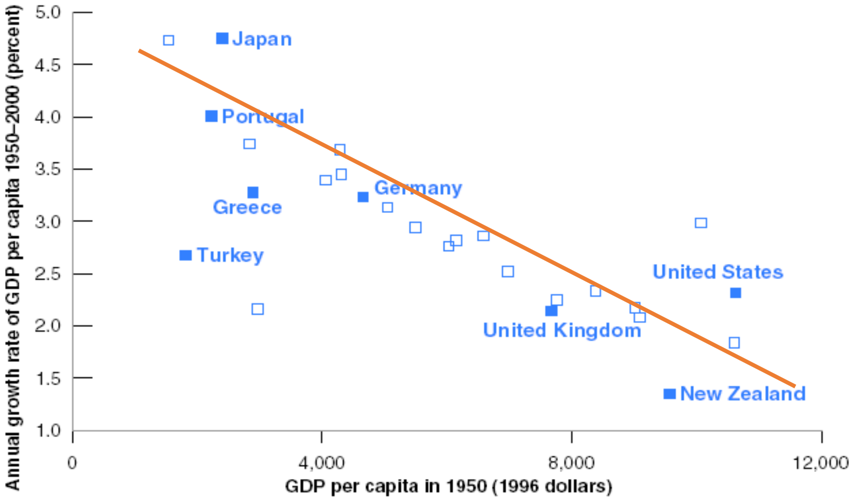

Annual growth rate of GDP per capita 1950–2000 (percent)
5.0
4.5
4.0
3.5
3.0
2.5
2.0
1.5
1.0
0
4,000
8,000
12,000
GDP per capita in 1950 (1996 dollars)
Japan
Portugal
Greece
Germany
Turkey
United States
United Kingdom
New Zealand

图4 收敛和趋同

一、背景

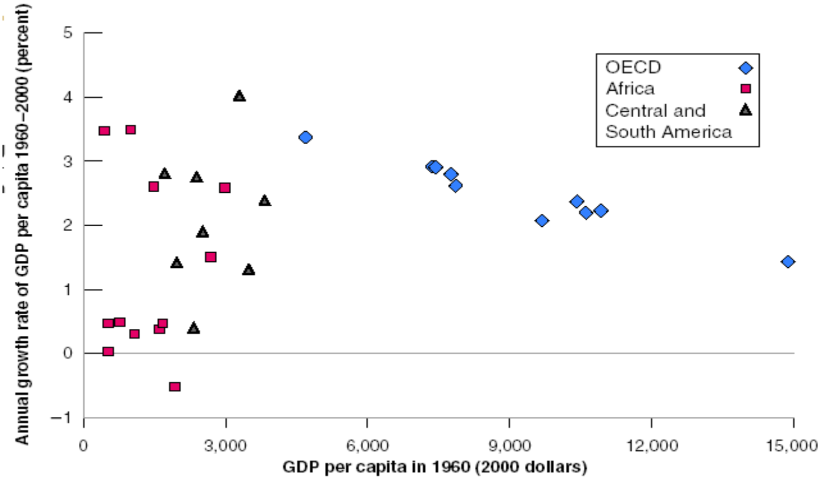


图5 增长和趋同不是历史的必然

二、长期增长的源泉

1. 长期经济增长：

总量经济增长率靠人口？人均经济增长率又靠什么？

2. 经济增长的差异：

为何在时间和空间上存在大幅增长率的差异？

三、Solow模型的假设

1. 生产函数 $Y_t = F(K_t, A_t L_t)$

- 哈罗德中性技术进步(劳动扩展型)
- 规模报酬不变 $bY_t = F(bK_t, bA_t L_t)$
- 边际报酬递减

$$\checkmark \frac{\partial F(K_t, A_t L_t)}{\partial K_t} > 0 \quad \frac{\partial^2 F(K_t, A_t L_t)}{\partial K_t^2} < 0$$

$$\checkmark \frac{\partial F(K_t, A_t L_t)}{\partial L_t} > 0 \quad \frac{\partial^2 F(K_t, A_t L_t)}{\partial L_t^2} < 0$$

- 稻田条件（Inada Conditions）

$$\checkmark \lim_{K \to 0} \frac{\partial F(K_t, A_t L_t)}{\partial K_t} = \infty, \quad \lim_{K \to \infty} \frac{\partial F(K_t, A_t L_t)}{\partial K_t} = 0$$

$$\checkmark \lim_{L \to 0} \frac{\partial F(K_t, A_t L_t)}{\partial L_t} = \infty, \quad \lim_{L \to \infty} \frac{\partial F(K_t, A_t L_t)}{\partial L_t} = 0$$

三、Solow模型的假设

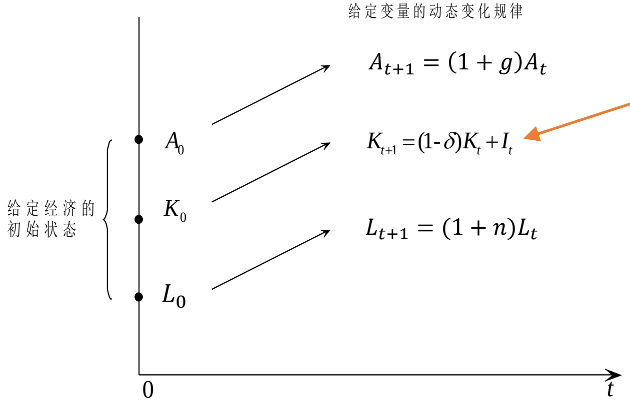
2. 劳动和技术知识为外生变量，固定增长率
   - $L_t = L_0(1+n)^t$ n为常数
   - $A_t = A_0(1+g)^t$ g为常数

3. 储蓄率固定，s=常数

4. 封闭经济，国内总储蓄=国内总投资

5. 无政府

四、基本模型：总量形式



Solow模型的总量形式

$$I_t = S_t = sF(K_t, A_tL_t)$$

$$\boxed{t=0:\quad K_0,\ A_0,\ L_0}$$

$$\Downarrow K_1$$

$$\boxed{t=1:\quad K_1,\ A_1,\ L_1}$$

$$\Downarrow K_2$$

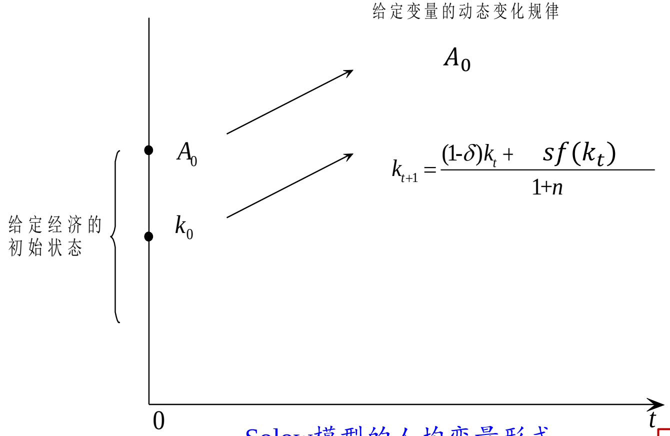
K_2， K_3， K_4，。。。

四、基本模型：总量形式

1. 基本的Solow模型：
   - $K_{t+1} = (1-\delta)K_t + sF(K_t, A_tL_t)$
   - $A_t = (1+g)A_{t-1}$
   - $L_t = (1+n)L_{t-1}$
2. 问题：产出如何随时间变化？
   - $Y_t = F(K_t, A_tL_t)$
   - 内生变量：Y_t、K_t，其中，K_t为关键的内生变量
   - 外生参数：g、n、s、δ(资本折旧率)
3. 动态分析：平衡增长路径是否存在？
   - 平衡增长路径：所有变量的增长率都是常数。
   - 比较静态分析：均衡是否存在？

四、基本模型：人均形式

假设$A_t = A_0 = 1$，即没有技术进步（$g=0$）



Solow模型的人均变量形式

为什么研究人均变量形式？

人均变量更能反映出富裕的程度和福利水平。

定义人均变量：

$$y_t \equiv \frac{Y_t}{L_t},\quad k_t \equiv \frac{K_t}{L_t},\quad c_t \equiv \frac{C_t}{L_t}$$

一般化的生产函数：$y_t = f(k_t)$

$$y_t = \frac{Y_t}{L_t} = \frac{F(K_t, L_t)}{L_t} = F\left(\frac{K_t}{L_t}, \frac{L_t}{L_t}\right) = F(k_t, 1) \equiv f(k_t)$$

四、基本模型：稳态

稳态（或称均衡点，Steady State）： $k_{t+1}=k_t=k^*$， $y_{t+1}=y_t=y^*$

关于稳态的三个特征：存在性、唯一性、稳定性

稳态： k^* 由 $k^*(n+\delta)=sf(k^*)$决定

$$\Rightarrow \qquad \frac{f(k^*)}{k^*}=\frac{(n+\delta)}{s}$$

$$y^*=f(k^*)$$
$$c^*=(1-s)f(k^*)$$

k^* 存在且唯一？

- $\frac{f(k)}{k}\in(0,+\infty) \quad \Leftarrow \quad \lim\limits_{k\to 0} f'(k)=+\infty,\ \lim\limits_{k\to+\infty} f'(k)=0$
- $\frac{f(k)}{k}$ 连续且单调递减：

$$\left[\frac{f(k)}{k}\right]'<0$$

四、基本模型：稳态

假设：$y_t = k_t^{\theta}$

稳态：k^* 由 $k^*(n+\delta) = sf(k^*)$决定

$$\Rightarrow \quad \frac{(k^*)^{\theta}}{k^*} = \frac{(n+\delta)}{s}$$

$$\Rightarrow \quad k^* = \left[\frac{(n+\delta)}{s}\right]^{\frac{1}{(\theta-1)}}$$

$$y^* = f(k^*)$$
$$c^* = (1-s)f(k^*)$$

Remark:

- 只要参数n, δ, s, θ取值相同，所有国家人均财富和收入将会收敛到相同水平
- 提升储蓄率s只能提升稳态的人均财富水平，但不能使得人均财富持续增长
- 这种和初始状态无关都能收敛到相同稳态的现象理论上称为“绝对收敛”

四、基本模型：比较静态分析

微分法：对 $k^*(n+\delta)=sf(k^*)$决进行全微分

$$\Rightarrow (n+\delta)dk^* + k^*(dn+d\delta)$$

$$= sf'(k^*)dk^* + f'(k^*)ds$$

（如果考虑人口增长率n对稳态的影响，则$d\delta = ds = 0$）

$$\Rightarrow \quad \frac{dk^*}{dn} = \frac{-k^*}{(n+\delta)-sf'(k^*)}$$

$$\boxed{\begin{aligned} dy^* &= f'(k^*)dk^* \\ dc^* &= d[(1-s)f(k^*)] \end{aligned}}$$

Remark：

- $\dfrac{dk^*}{ds}=?$ $\qquad \dfrac{dk^*}{d\delta}=?$

四、基本模型：其他部门

企业行为：$\Pi_t = F(K_t, L_t) - r_t K_t - w_t L_t$

FOC $\Rightarrow$ 工资：$w_t = \dfrac{\partial F(K_t, L_t)}{\partial L_t}$

利率：$r_t = \dfrac{\partial F(K_t, L_t)}{\partial K_t}$

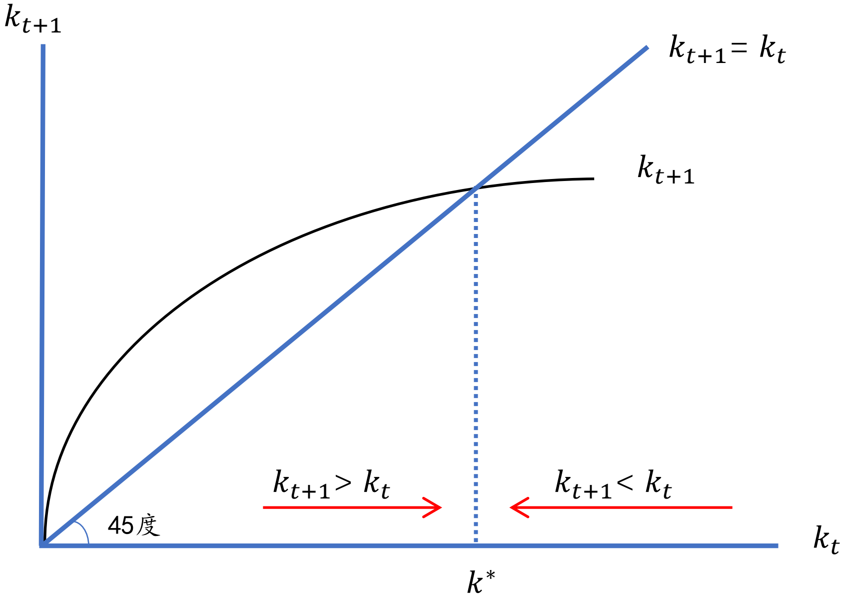
人均形式：$\max\ L_t\{f(k_t) - r_t k_t - w_t\}$

$$\Rightarrow \quad r_t = f'(k_t) \quad , \quad w_t = f(k_t) - f'(k_t)k_t$$

假设：$y_t = k_t^{\theta}$

- 求解工资和利率的变化路径
- 求解稳态下的工资和利率
- 各种参数n, δ, s, θ对稳态工资和利率的影响

四、基本模型：相位图分析



四、基本模型：相位图分析

k_t的动态变化方程?

- $k_{t+1}=\left[\frac{1-\delta}{(1+n)}\right]k_t+\left[\frac{s}{(1+n)}\right]f(k_t)$
- k_{t+1}为k_t的函数，变化特征
  - ✓ $\frac{\partial k_{t+1}}{\partial k_t}=\frac{1-\delta}{(1+n)}+\frac{s}{(1+n)}f'(k_t)>0$
  - ✓ $\frac{\partial^2 k_{t+1}}{\partial k_t^2}=\frac{s}{(1+n)}f''(k_t)<0$
- 依据生产函数$y_t=f(k_t)$的稻田条件，可知
  - ✓ $\lim\limits_{k\to 0}\frac{\partial k_{t+1}}{\partial k_t}=\infty$，$\lim\limits_{k\to\infty}\frac{\partial k_{t+1}}{\partial k_t}=\frac{1-\delta}{(1+n)}<1$

k_t如何从偏离稳态收敛到问题?

- $k_t<k^*$：$k_{t+1}>k_t$
- $k_t>k^*$：$k_{t+1}<k_t$

⬅ $\boxed{\frac{f(k)}{k}\text{连续且单调递减}}$

四、基本模型：平衡增长路径

定义平衡增长路径（Balanced Growth Path）：（总量或者人均）资本和产出的增长率都是常数的增长率路径

在稳态下，人均变量 $\frac{k_{t+1}}{k_t} = 1$，而总量变量$\frac{K_{t+1}}{K_t} = (1 + n)$

$$\boxed{Y_t = K_t^{\theta} L_t^{1-\theta}}$$

Remark :

- 在稳态下，总量以人口增长率n增长，而人均变量不增长

五、技术进步：总量形式

1. 基本的Solow模型：
   - $K_{t+1} = (1-\delta)K_t + sF(K_t, A_tL_t)$
   - $A_t = (1+g)A_{t-1}$
   - $L_t = (1+n)L_{t-1}$

2. 问题：产出如何随时间变化？
   - $Y_t = F(K_t, A_tL_t)$
   - 内生变量：Y_t、K_t，其中，K_t为关键的内生变量
   - 外生参数：g、n、s、δ(资本折旧率)

3. 动态分析：平衡增长路径是否存在？
   - 平衡增长路径：所有变量的增长率都是常数。
   - 比较静态分析：均衡是否存在？

五、技术进步：单位效率劳动

为了研究经济的动态变化特征，构建单位效率资本的增长率

假设A_0，且存在技术进步（$g \neq 0$）

一般化的生产函数：$\hat{y}_t = f(\hat{k}_t)$

$$\hat{y}_t = \frac{Y_t}{A_t L_t} = \frac{F(K_t, A_t L_t)}{A_t L_t} = F\left(\frac{K_t}{A_t L_t}, \frac{A_t L_t}{A_t L_t}\right) = F(\hat{k}_t, 1) \equiv f(\hat{k}_t)$$

$\hat{k}_t$的动态变化方程？

定义单位效率劳动的变量：

$\hat{y}_t \equiv \frac{Y_t}{A_t L_t}$，$\hat{k}_t \equiv \frac{K_t}{A_t L_t}$，$\hat{c}_t \equiv \frac{C_t}{A_t L_t}$

- $$\hat{k}_{t+1} = \left[\frac{1-\delta}{(1+n)(1+g)}\right]\hat{k}_t + \left[\frac{s}{(1+n)(1+g)}\right] f(\hat{k}_t)$$
- $\hat{k}_{t+1}$为$\hat{k}_t$的函数，变化特征
  - ✓ $\frac{\partial \hat{k}_{t+1}}{\partial \hat{k}_t} = \frac{1-\delta}{(1+n)(1+g)} + \frac{s}{(1+n)(1+g)} f'(\hat{k}_t) > 0$
  - ✓ $\frac{\partial^2 \hat{k}_{t+1}}{\partial \hat{k}_t^2} = \frac{s}{(1+n)(1+g)} f''(\hat{k}_t) < 0$
- 依据生产函数$\hat{y}_t = f(\hat{k}_t)$的稻田条件，可知
  - ✓ $\lim_{k \to 0} \frac{\partial \hat{k}_{t+1}}{\partial \hat{k}_t} = \infty$，$\lim_{k \to \infty} \frac{\partial \hat{k}_{t+1}}{\partial \hat{k}_t} = \frac{1-\delta}{(1+n)(1+g)} < 1$

五、技术进步：稳态

稳态（或称均衡点，Steady State）：$\hat{k}_{t+1}=\hat{k}_t=\hat{k}^*$，$\hat{y}_{t+1}=\hat{y}_t=\hat{y}^*$

关于稳态的三个特征：存在性、唯一性、稳定性

稳态：$\hat{k}^*$由$\hat{k}^*(n+g+ng+\delta)=sf(\hat{k}^*)$决定

$$\Rightarrow \qquad \frac{f(\hat{k}^*)}{\hat{k}^*}=\frac{(n+g+ng+\delta)}{s}$$

$$\hat{y}^*=f(\hat{k}^*)$$
$$\hat{c}^*=(1-s)f(\hat{k}^*)$$

k^* 存在且唯一？

- $\frac{f(\hat{k}^*)}{\hat{k}^*}\in(0,+\infty) \quad \Leftarrow \quad \lim_{\hat{k}\to 0} f'(\hat{k})=+\infty,\ \lim_{\hat{k}\to+\infty} f'(\hat{k})=0$
- $\frac{f(\hat{k})}{\hat{k}}$连续且单调递减：

$$\left[\frac{f(\hat{k})}{\hat{k}}\right]'<0$$

五、技术进步：稳态

假设：$\hat{y}_t = \left(\hat{k}_t\right)^{\theta}$

稳态：$\hat{k}^*$由$\hat{k}^*(n+g+ng+\delta) = sf\left(\hat{k}^*\right)$决定

$$\Rightarrow \quad \frac{\left(\hat{k}^*\right)^{\theta}}{\hat{k}^*} = \frac{(n+g+ng+\delta)}{s}$$

$$\Rightarrow \quad \hat{k}^* = \left[\frac{(n+g+ng+\delta)}{s}\right]^{\frac{1}{(\theta-1)}}$$

$$\hat{y}^* = f\left(\hat{k}^*\right)$$
$$\hat{c}^* = (1-s)f\left(\hat{k}^*\right)$$

Remark：

- 只要参数n, g, δ, s, θ取值相同，所有国家的单位有效劳动财富和收入将会收敛到相同水平
- 提升储蓄率s只能提升稳态的单位有效财富水平，但不能使得单位有效财富持续增长

五、技术进步：比较静态分析

微分法：对$\hat{k}^*(n+g+ng+\delta)=sf(\hat{k}^*)$决进行全微分

$$\Rightarrow (n+g+ng+\delta)d\hat{k}^*+\hat{k}^*(dn+dg+ndg+gdn+d\delta)$$

$$=sf'(\hat{k}^*)d\hat{k}^*+f'(\hat{k}^*)ds$$

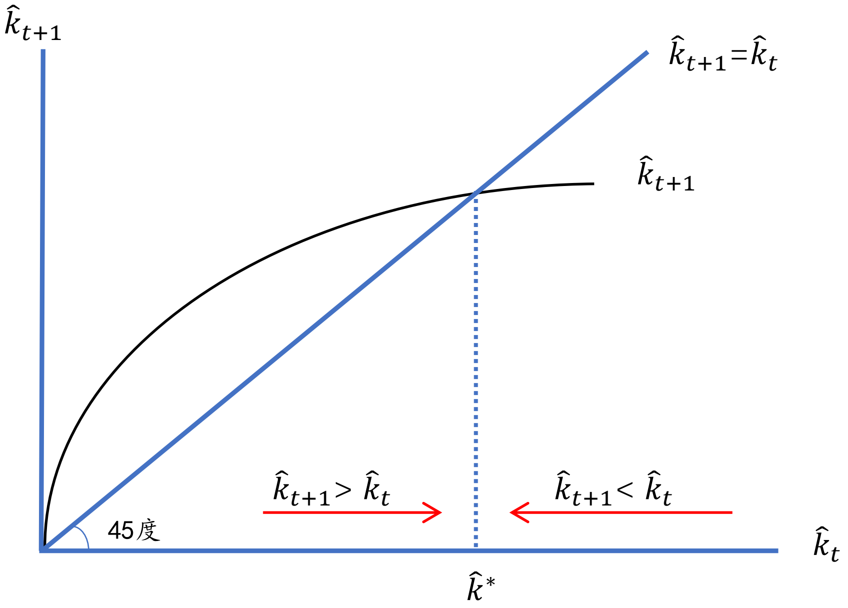
（如果考虑人口增长率n对稳态的影响，则$dg=d\delta=ds=0$）

$$\Rightarrow \qquad \frac{d\hat{k}^*}{dn}=\frac{-\hat{k}^*}{(n+g+ng+\delta)-sf'(\hat{k}^*)}$$

Remark：

- $\frac{d\hat{k}^*}{ds}=?$ $\qquad$ $\frac{d\hat{k}^*}{d\delta}=?$

五、技术进步：相位图分析


$\hat{k}_{t+1}$
$\hat{k}_{t+1}=\hat{k}_t$
$\hat{k}_{t+1}$
$\hat{k}_{t+1}>\hat{k}_t$
$\hat{k}_{t+1}<\hat{k}_t$
45度
$\hat{k}_t$
$\hat{k}^*$

五、技术进步：相位图分析

$\hat{k}_t$的动态变化方程？

- $\hat{k}_{t+1}=\left[\frac{1-\delta}{(1+n)(1+g)}\right]\hat{k}_t+\left[\frac{s}{(1+n)(1+g)}\right]f(\hat{k}_t)$
- $\hat{k}_{t+1}$为$\hat{k}_t$的函数，变化特征
  - ✓ $\frac{\partial\hat{k}_{t+1}}{\partial\hat{k}_t}=\frac{1-\delta}{(1+n)(1+g)}+\frac{s}{(1+n)(1+g)}f'(\hat{k}_t)>0$
  - ✓ $\frac{\partial^2\hat{k}_{t+1}}{\partial\hat{k}_t^2}=\frac{s}{(1+n)(1+g)}f''(\hat{k}_t)<0$
- 依据生产函数$\hat{y}_t=f(\hat{k}_t)$的稻田条件，可知
  - ✓ $\lim\limits_{k\to 0}\frac{\partial\hat{k}_{t+1}}{\partial\hat{k}_t}=\infty$, $\lim\limits_{k\to\infty}\frac{\partial\hat{k}_{t+1}}{\partial\hat{k}_t}=\frac{1-\delta}{(1+n)(1+g)}<1$

$\hat{k}_t$如何从偏离稳态收敛到问题？

- $\hat{k}_t<\hat{k}^*$： $\hat{k}_{t+1}>\hat{k}_t$
- $\hat{k}_t>\hat{k}^*$： $\hat{k}_{t+1}<\hat{k}_t$

$\frac{f(\hat{k})}{\hat{k}}$连续且单调递减

五、技术进步：平衡增长路径

定义平衡增长路径（Balanced Growth Path）：（总量或者人均）资本和产出的增长率都是常数的增长路径。

$$Y_t = K_t^{\theta}(A_t L_t)^{1-\theta}$$

在稳态下，单位有效劳动变量$\frac{\hat{k}_{t+1}}{\hat{k}_t} = 1$

而人均变量 $\frac{k_{t+1}}{k_t} = (1+g)$，总量变量$\frac{K_{t+1}}{K_t} = (1+g)(1+n)$

Remark：

- 在稳态下，总量以人口增长率$n+g+ng$增长，人均变量的增长率为g，而单位有效劳动变量不变
- 技术进步是人均财富持续增长的唯一原因，而且技术进步越快，人均财富增长越快

平衡增长路径总结：基本模型 vs 技术进步

技术进步

单位效率劳动的资本 单位效率劳动的产出 单位效率劳动的消费	$\hat{k}=K/AL$ $\hat{y}=Y/AL$ $\hat{c}=\hat{y}-s\hat{y}$	0
人均资本 人均产出 人均消费	$k=A\hat{k}$ $y=A\hat{y}$ $c=A\hat{c}$	g
总资本 总产出 总消费	$K=AL\hat{k}$ $Y=AL\hat{y}$ $C=AL\hat{c}$	$n+g+ng$

基本模型

人均资本 人均产出 人均消费	$k=K/L$ $y=Y/L$ $c=y-sy$	0
总资本 总产出 总消费	$K=Lk$ $Y=Ly$ $C=Lc$	n

六、黄金率：定义

定义黄金率（Golden Rule）： 最大化稳态时的人均消费

$$\max:\{c=f(k)-sf(k)\}$$

$$\Rightarrow \max:\{c=f(k)-(n+\delta)k\}$$

$$\text{FOC} \Rightarrow f'(k_g)=(n+\delta)$$

假设：$f(k)=k^{\theta}$，则

- $k_g=\left[\frac{(n+\delta)}{\theta}\right]^{\frac{1}{\theta-1}}$
- $s_g=\frac{(n+\delta)k_g}{f(k_g)}=\theta$

六、黄金率：定义

引入技术进步：

$$\max:\{\hat{c}=f(\hat{k})-sf(\hat{k})\}$$

$$\Rightarrow\ \max:\{\hat{c}=f(\hat{k})-(n+\delta)\hat{k}\}$$

$$\text{FOC}\ \Rightarrow f'(\hat{k}_g)=(n+g+ng+\delta)$$

假设：$f(\hat{k})=(\hat{k})^{\theta}$，则

- $\hat{k}_g=\left[\frac{(n+g+ng+\delta)}{\theta}\right]^{\frac{1}{\theta-1}}$
- $\hat{s}_g=\frac{(n+g+ng+\delta)\hat{k}_g}{f(\hat{k}_g)}=\theta$

六、黄金率：动态调整路径

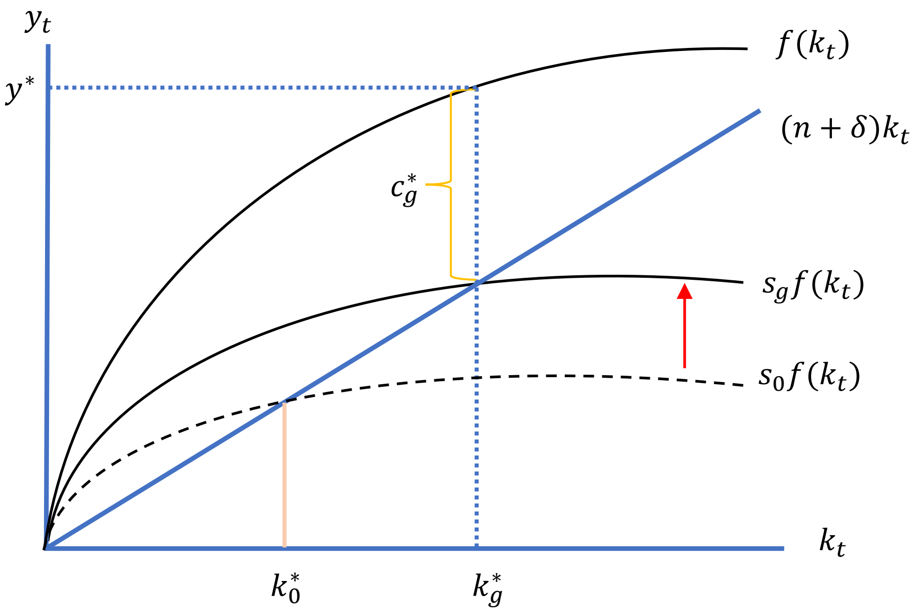
如何一个国家的平衡增长路径低于或高于黄金储蓄率s_g，我们该怎么办?（先不考虑技术进步）

- 现实中s大于s_g时，政府政策应该如何？
- 现实中s低于s_g时，政府政策应该如何？
- 实施政策后，经济如何动态调整？

在稳态下，储蓄率越高，则资本存量越大。

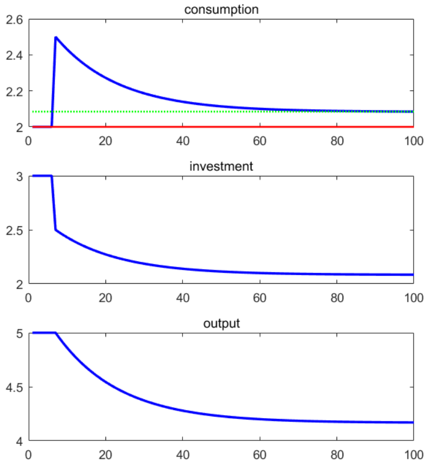
- 现实中s大于s_g时，意味着k大于k_g
- 现实中s低于s_g时，意味着k小于k_g

六、黄金率：动态调整路径

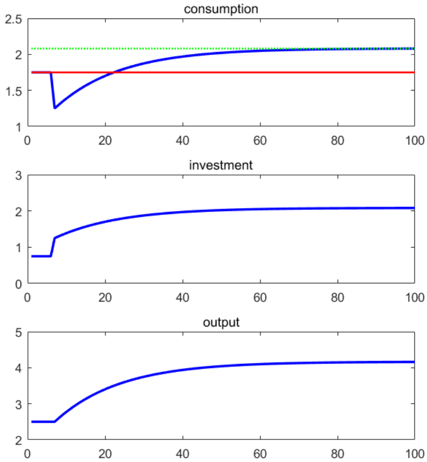


六、黄金率：动态调整路径

从资本大于黄金规则稳定状态出发



从资本小于黄金规则稳定状态出发



习题：技术进步下的动态调整路径

引入技术进步，假设：$f(\hat{k}) = (\hat{k})^{\theta}$，则

- $\hat{k}_g = \left[\frac{(n+g+ng+\delta)}{\theta}\right]^{\frac{1}{\theta-1}}$
- $\hat{s}_g = \frac{(n+g+ng+\delta)\hat{k}_g}{f(\hat{k}_g)} = \theta$

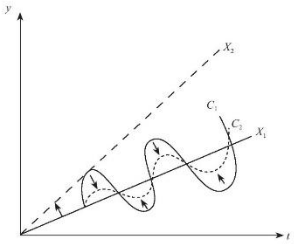
如果此时$\hat{s}_0 < \hat{s}_g$，则$\hat{k}_0$如何动态调整$\hat{k}_g$？

七、模型的扩展：随机冲击Solow模型

在标准的Solow模型中加入随机冲击，假设：技术是个随机变量

假设：技术是个随机变量$A_t = Ae^{\varepsilon_t}$，其中ε_t服从均值为0的正态分布。
因此，A_t服从以下形势的对数正态分布：$lnA_t = lnA + \varepsilon_t$

$$k_{t+1} = \frac{(1-\delta)k_t + s(k_t)^{\theta}(Ae^{\varepsilon_t})^{1-\theta}}{1+n}$$



To Be Continued!