哈尔滨工业大学学报

1985年3月 JOURNAL OF HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY 第1期

# 旋转抛物面表面交线与圆的对应及在画法几何中的应用

制图教研室 李桂兰

## 摘 要

本文对旋转抛物面表面交线与圆的对应性质作了较详细地解析分析，从而得出了两种求旋转抛物面表面交线的作图方法，其中"圆柱面法"是以前画法几何学中所没有过的。它不仅对解决有关旋转抛物面交线的作图问题提供了很大的方便，同时还能解决一些用画法几何的一般作图法所不能解决的作图问题。

## 一、旋转抛物面表面交线与圆的对应原理

### 1. 旋转抛物面截交线在轴垂面上的投影是圆

为节省文字，以下统称"旋转抛物面"为"抛物面"。

由以下证明可知，抛物面被平面截切，其交线为二次平面曲线——椭圆。（当截平面垂直于旋转轴线时，交线为圆；当截平面平行于旋转轴线时，交线为抛物线——在非固有点封闭的椭圆）。

证明：适当选择坐标系，抛物面表面交线可设为：

$$\begin{cases} x^2+y^2=2Pz & (1) \\ ax+by+c=z & (2) \end{cases}$$

消去 $z$ 即可得到交线在 $xy$ 面上的投影。将（2）式中 $z$ 值代入（1），则得

$$x^2+y^2=2p(ax+by+c) \tag{3}$$

整理式（3）得

$$(x-pa)^2+(y-pb)^2=P^2a^2+p^2b^2+2pc \tag{4}$$

令 $pa=A$， $pb=B$， $p^2a^2+p^2b^2+2pc=C^2$ 代入（4）则得

$$(x-A)^2+(y-B)^2=C^2$$

此式是圆的标准方程，所以抛物面截交线在轴垂面上的投影是圆。

当平面平行于轴线时，交线在轴垂面上的投影是直线。

本文于1984年9月收到。

因为抛物面的截交线在轴垂面上的投影是圆（封闭二次曲线），所以交线本身不会是双曲线，只能是椭圆或是圆。如图1所示。（此图的截平面为正垂面时的投影图）。

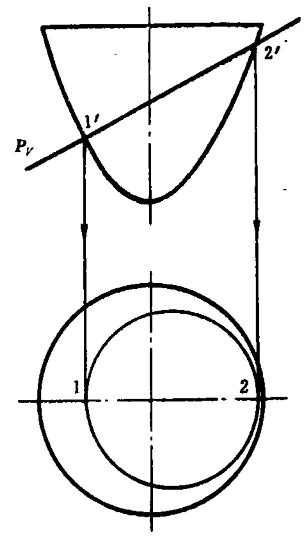



图 1

**2．抛物面与圆柱相交当二轴线平行时，其交线为平面曲线**

抛物面及圆柱面都是回转面，所以当二轴线重合时交线是圆。这里要证明的是当轴线不重合时，交线也为平面曲线。

证明：适当选择坐标系，使抛物面与圆柱面交线为：

$$\begin{cases} x^2+y^2=2pz & (1) \\ (x-a)^2+y^2-c^2=0 & (2) \end{cases}$$

在(1)(2)中消去 y 即得交线在 V 面的投影。

(1) － (2) 得 $2ax-a^2+c^2=2pz$

$$ax-pz=\frac{a^2-c^2}{2} \qquad (3)$$

设 $\frac{a^2-c^2}{2}=d$ 则上式可化为：

$$ax-pz=d$$

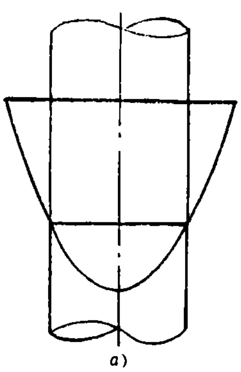
有

$$z=kx-b \qquad (4)$$

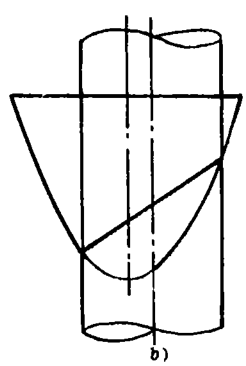
式(4)中 $k=\frac{a}{p}$，$b=\frac{d}{p}$。

此式为直线方程，因此交线是平面曲线。即然抛物面上交线是平面曲线，所以圆柱与抛物面相交当轴线平行时，交线是椭圆（性质1）这一结论是正确的。

图2中 a）是轴线重合时的投影图，b）是二轴线平行且轴平面平行于投影面时的投影图。



a)



b)

图 2

3. **轴线平行的抛物面与圆柱面相交，当改变圆柱直径时，其交线所在平面互相平行**

由性质2中的（3）式可知，抛物面与柱面轴线位置不变（即 $a$、$p$ 不变），改变圆柱半径 $c$ 时只能使 $d$ 值改变，所以两个交线的投影分别为：

$$z = kx - b_1$$

$$z = kx - b_2$$

显然此二式是平行的二直线（斜率相等）。

图3中是不同半径的同轴圆柱与抛物面交线的投影。

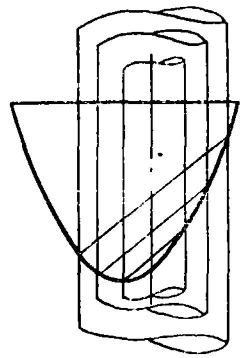


图 3

**推论**：若用一组平行平面截切抛物面，则截交线的椭圆中心连线为一条直线，而且该直线平行于抛物面轴线。（如图4所示，$\pi_1 /\!/ \pi_2 /\!/ \pi_3$），如果某一平面 $\pi_4$ 平行于该平面族且与抛物面相切于一点 $T$ 时，那么切点（$T$）也必在椭圆中心连线上。

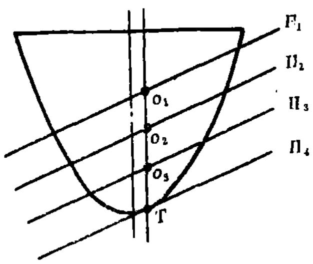



图 4

4. **轴线平行的二旋转抛物面相交其交线为平面曲线**

设二抛物面交线为：

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2p_1 z & (1) \\ (x-a)^2 + (y-b)^2 = 2p_2(z-c) & (2) \end{cases}$$

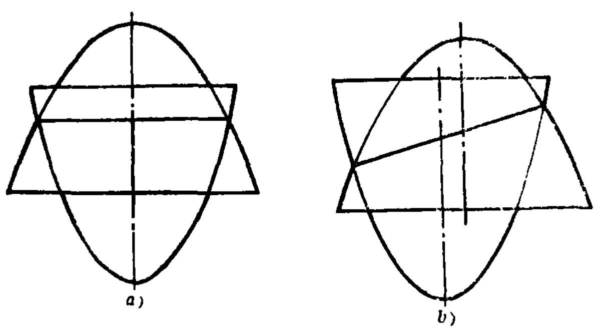
由（2）得 $$x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - 2by + b^2 = 2p_2 z - 2p_2 c \qquad (3)$$

将（1）代入（3）整理之

$$ax + by + (p_2 - p_1)z - \frac{a^2 + b^2 + 2p_2 c}{2} = 0 \qquad (4)$$

（4）式为平面曲线方程，根据性质1可知此交线在轴垂面上投影为圆。

若使二轴线处在与投影面平行的位置，则投影成一直线。如图5所示，其中 a)、c) 是轴线重合时的投影图，b)、d) 是轴线不重合时的投影。



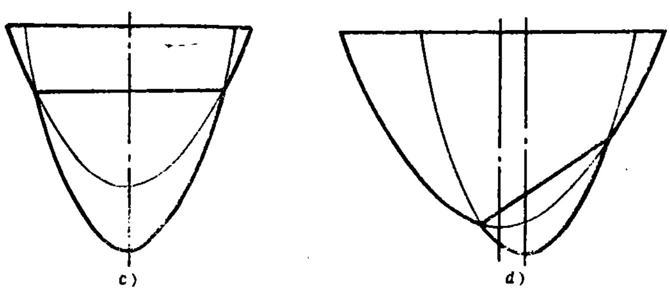



图 5

## 二、基本作图

1. 求截交线的椭圆心

1) 设截平面为正垂面，且交线成线影与抛物面轮廓线有两个交点时，则椭圆中心的正面投影为成线影的中点。

如图6所示，$1'2'$ 的中点 $0'$ 就是椭圆中心的投影。其中心0的水平投影显然在对称面上。

2) 截平面为正垂面，但交线成线影与抛物面轮廓只有一个交点时，我们可以应用交线性质3的推论作图求椭圆中心。如图7所示，其作图方法是：作平行于 $P_V$ 的平面 $T_V$，交抛物面于 $4'$、$5'$，取 $4'5'$ 中点 $0_1'$，过 $0_1'$ 作直线 $0_1'0'$ 交$1'2'$于$0'$，则 $0'$ 就是椭圆中心的投影。而水平投影圆的半径就是 $1'$ 到 $0_1'0'$ 的垂直距离 $r$。

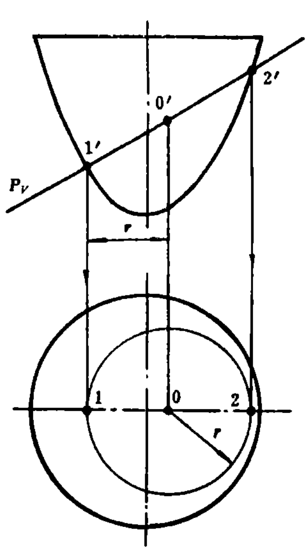



图 6

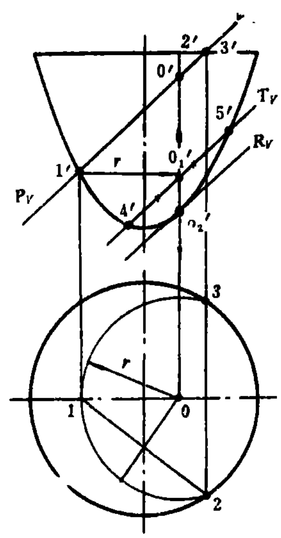



图 7

图7中椭圆心的水平投影也可由水平投影直接求出，因 1、2、3 三个点的投影可由 $1'$、$2'$、$3'$ 投影求出，而三点共圆（性质1）故可找到圆心的水平投影和投影圆的

半径，由水平投影 0 就可得到正面投影 0′ 了。

3） 当截平面为一般位置平面时，因交线的椭圆中心在对称面上，所以它必位于平面内与旋转轴相交的那条最大斜度线上，如图 8 所示，只要求出平面内过轴线的最大斜度线 $DE$ 与抛物面的穿点 Ⅰ、Ⅱ（Ⅱ不在图形范围内），则水平投影圆的直径和圆心位置（0）也就确定了。

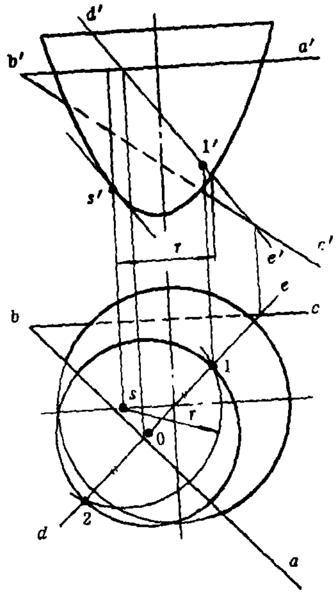


图 8

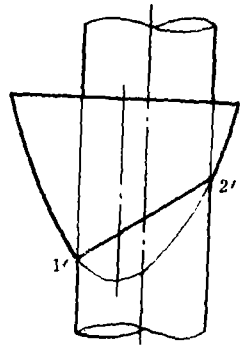


图 9

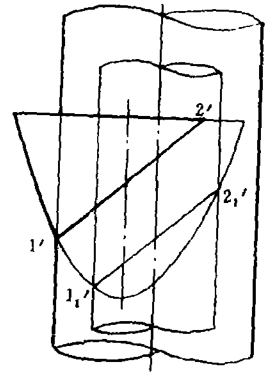


图 10

2. 求圆柱面与抛物面交线的投影。

当圆柱轴线与抛物面轴线平行且轴平面与投影面也平行时，交线投影是直线。

1） 当二面轮廓有两个交点时，则成线影可直接连出。（图 9）

2） 当二面轮廓线只有一个交点时，（如图10中的1′），我们可以应用交线性质 3 进行作图，找出交线投影方向。具体作法是，任作一同轴圆柱，使其与抛物面轮廓线有两个交点 $1_1′$、$2_1′$，然后过 1′ 作 $1′2′ /\!/ 1_1′2_1′$，则 1′2′ 即为交线投影。

## 三、垂直截面法求直线与抛物面穿点和抛物面与锥、柱的相贯线。

例 1. 求直线$AB$与抛物面穿点

如图 11 所示，过直线 $AB$ 作正垂面 $P$，得辅助交线水平投影圆 0（对应于1′2′），由此很容易地求出直线对抛物面的穿点的水平投影 $m$、$n$，因辅助面是正垂面，所以圆心 0 一定在对称面上。

例 2. 求抛物面与柱面交线

由图 12 中所给二曲面相对位置可知，该题既不能用水平面和正平面作辅助面，也不能用球面法求解，但它可以用正垂面作辅助面进行

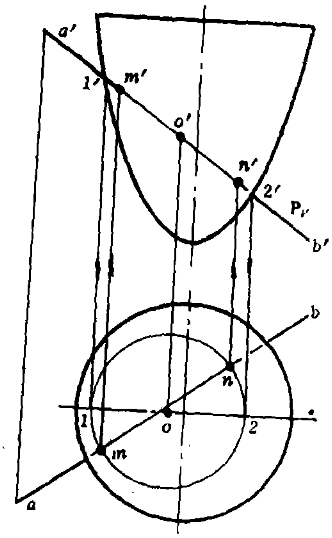


图 11

解题。根据性质1及柱面所处的位置，我们采用平行于柱面素线的正垂面作辅助面，因一系列辅助面是平行的，所以它们与抛物面的交线的水平投影是一系列的同心圆，而与柱面的交线是直线。

作图时，可先任作直线（垂直面的成线影）$a'b'$ 平行于柱的轴线，取 $a'b'$ 中点$0'$并找出其对应点 0，则0就是一系列辅助交线圆的中心，辅助圆半径由各成线影与轮廓线交点到 $00'$ 的垂直距离确定。

例 3． 求抛物面与锥面的交线。

图 13 所示，该题同样用一般的水平辅助面等方法是不能求解的，但根据性质1我

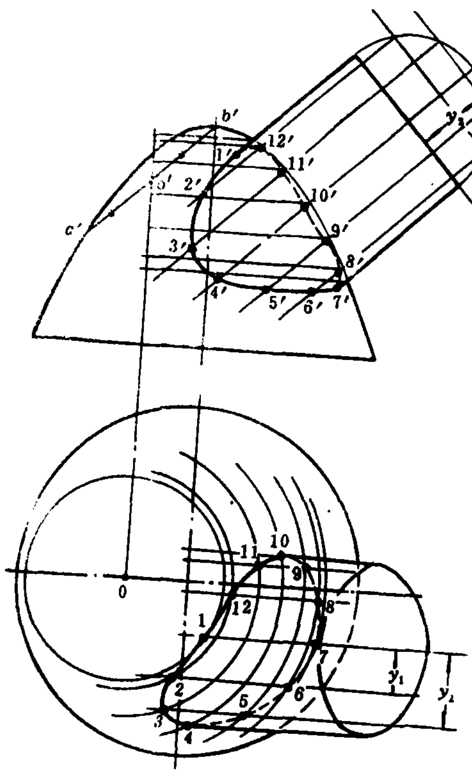


图 12

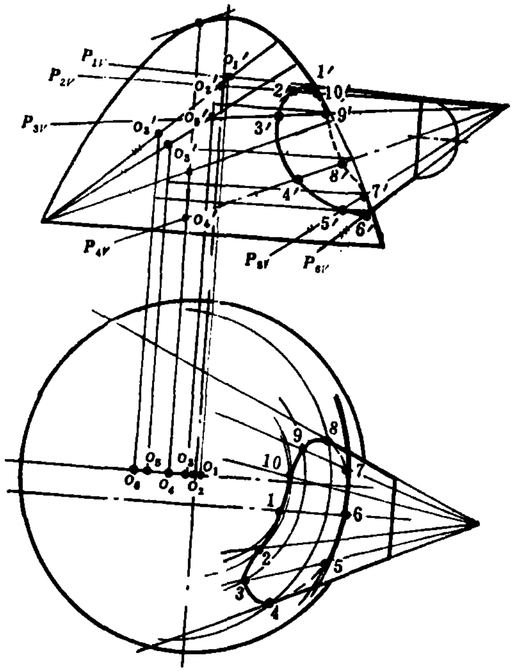


图 13

们采用过锥顶的正垂面法却很容易得到解答，不过此题与上题不同之处在于这些辅助圆的圆心不是重影点，（当然都在抛物面的对称面上），必须单独求出各辅助交线水平投影圆的圆心。

由上述三例，我们可总结出垂直截面法的作图条件是：二曲面中，一个是旋转抛物面，另一个则必须是直纹面，因辅助面是包含直纹面的素线作的。

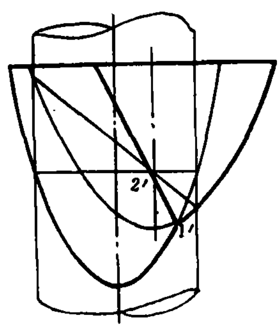


图 14

## 四、圆柱面法求旋转抛物面相贯线。

**例 4. 求二抛物面的相贯线**

图 14 中只给出了一个投影，由性质 4 可知当二抛物面轴线平行时、其交线在对称面上的投影为直线。而图中轮廓线只有一个交点1′，若再找出一个公有点就可以了，这时我们可以用性质 2，以二轴线中的任一轴线作一个圆柱面，则该辅助圆柱面与二回转抛物面交线投影皆为直线，由此可得公有点 2′，连 1′2′ 即得二抛物面的相贯线的投影。

例 5. 求抛物面与圆锥面的相贯线。

如图 15 所示，该题用水平截面或垂直截面法是可以完成作图的，但必须再给出水平投影，而在只给一个投影的情况下，则用圆柱面法就可以完成作图。

其作图方法如下：以锥面轴线为轴作一系列同轴圆柱，则圆柱面分别与抛物面和锥面相交，其投影都为直线，由此可求出二回转面的公有点。将一系列公有点连起来即得相贯线投影。

圆柱面法的应用是有条件的：轴线平行的二旋转面中，一个必须是抛物面，且二曲面的对称面平行于投影面，而辅助圆柱面的轴线必须是与抛物面相交的另一回转面的轴线。

因圆柱面是同轴的，所以它们与二曲面的交线的投影各自彼此平行。因此作图时只要作出一个圆柱面与抛物面有两个交点，找出交线投影方向后，再作其它圆柱面时，只要作一条素线就可以了。

图 16 是抛物面与球相交时，用柱面法求相贯线的实例。（当然此题用球面法也是可以解出的）用柱面法解该题更有优越性，因柱面法是作平行线完成作图的。该题在作柱面时，其最小圆柱半径要大于 1′ 到 00′ 的距离，最大半径不大于球面本身的半径。

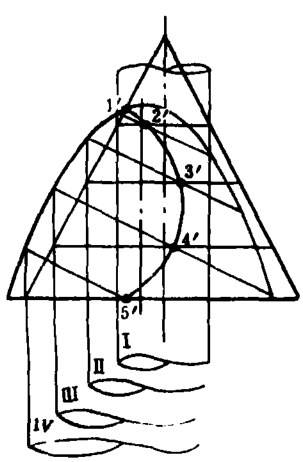



图 15

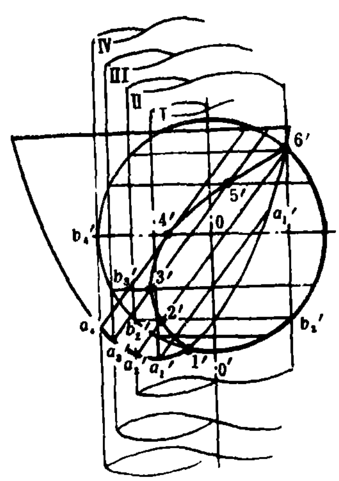



图 16

## 五、应用旋转抛物面交线性质简化作图举例

例 6、求一般位置平面 $ABCD$ 与抛物面交线。

如图 17 所示，该题用水平截面法可以作出交线的投影。但根据截交线性质作图则更为迅速、准确。图 17 中先是用垂直截面法求出平面内过轴线的最大斜度线 $EF$ 与抛物面的穿点 $K$、$L$（$K$ 在图形形外）。找出 $K$、$L$ 水平投影 $k$、$l$ 的中点 0，则以 0 为圆心，$ol$ 为半径画圆，就是交线的水平投影，而正面投影只要根据已知投影在平面上取点就可以了。

例 7、求平面体与抛物面的交线。

如图 18 所示，此问题若不考虑交线性质，作起图来是较烦锁的。而应用性质 1 作图就简单多了。这时，只要求出一个棱面上过轴线的最大斜度线上点 1 和 $1_1$ 就可以了。由 $11_1$ 可知该面交线投影圆的半径（$0_11$）。具体作法如下：

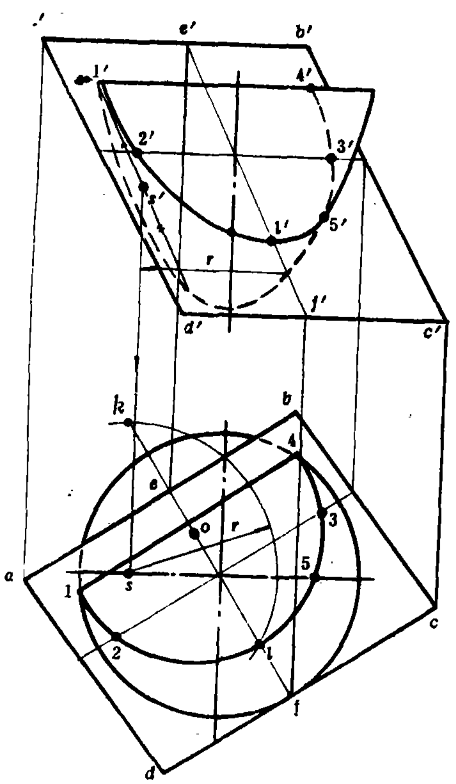



图 17

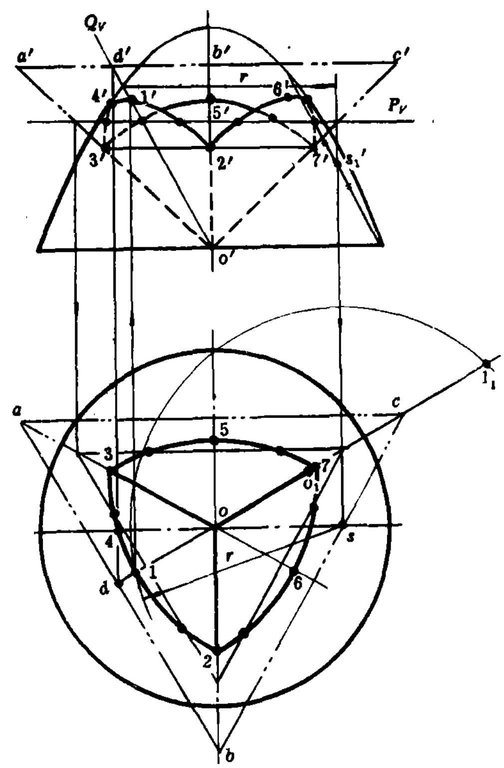



图 18

包含任一棱面 $ABO$ 上最大斜度线 $OD$ 作垂直截平面 $Q$，求出 $S_1'$ 及 $S$，以 $S$ 为圆心，$r$ 为半径画弧交 $od$ 于 $1, 1_1$，则 $11_1$ 中点 $O_1$ 就是 $ABO$ 面上交线水平投影圆的圆心。以 $O_1$ 为圆心，$O_11$ 为半径画弧，则此弧就是 $ABO$ 面交线的水平投影。其余两个面上的投影与前者同。所以作出 $\overset{\frown}{213}$ 后，另二弧可直接作出。水平投影求出后，其正面投影可以根据需要在棱面上取点作出。

例 8、求二旋转抛物面交线的投影。

由图 19 可知，交线的水平投影已知道两个点了（1，2），若再用水平辅助面法再求出一个交点 3 就可以完成水平投影的作图。因三点共圆，而且圆心又必在二回转面的公共对称面上，所以作任一段弦$\overline{23}$（或$\overline{13}$）的中垂线就可以求出圆心 0，那么以 0 为圆心，01（02，03）为半径画弧$\overset{\frown}{12}$就是交线的水平投影。求正面投影时，可根据需要，求出各点的投影，其一般位置点可在其中任一面上取点求出。

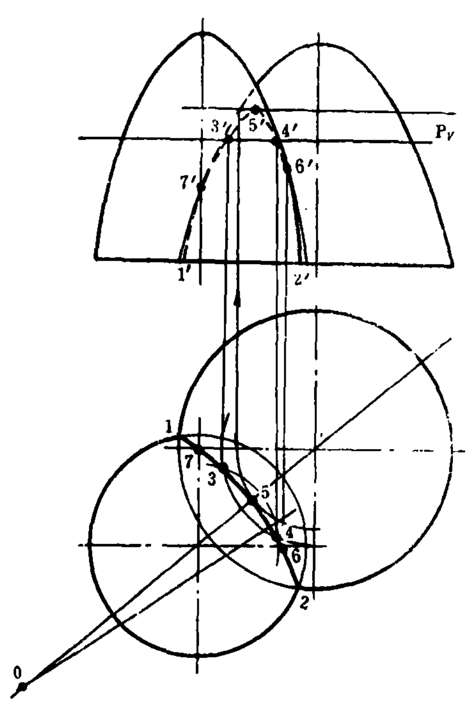



图 19

以上分析结论及作图方法有不当之处请批评指正。

本文在写作过程中得到赵松元副教授的指导和帮助，数学教研室唐余勇老师也提出了很多宝贵意见，在此一并表示深深谢意。

## 参 考 文 献

〔1〕朱鼎勋，《空间解析几何》，上海科技出版社，  1981.7。

# The Homologue for the Intersecting Curve of the Surface of Paraboloid of Revolution with a Circle and Its Applications in Descriptive Geometry

*Li Guilan*

**Abstract**

This paper presents two graphic methods of determining the intersecting curve of paraboloid of revolution,after minute analysis of the character of homologue for the intersecting cur e of the surface of paraboloid of revolution with a circle. One of which is the "Cylinder Method" that is presented for the first time in descriptive geometry. This new method not only is convenient to solve the graphy of intersecting curve of paraboloid of revolution, but also can solve some graphic problems which can not be solved by common graphic method of descriptive geometry.