1990年3月 浙江丝绸工学院学报 Mar., 1990
第7卷第1期 J. OF ZHEJIANG SILK ENGINEERING COLLEGE Vol. 7 No.1

平面与椭球面、椭圆抛物面的交线

范正通 莫灿林

（机电系）

摘 要

本文在给出椭球面、椭圆抛物面结构参数的条件下，对确定平面与椭球面、椭圆抛物面的相交线结构参数进行论述，由此可探讨平面与二次曲面相交线结构参数的一般方法。

关键词：二次曲面 平面 结构参数

1 平面与椭球面相交

已知给定椭球面长半轴a、中半轴b、短半轴c，对平面在各种位置与椭球面相交的情况进行论述。在往后的作法中，作圆锥曲线的切线为方法1；作圆锥曲线与直线的交点为方法2[1]。

1.1 平面过椭球面的对称轴

1.1.1 分析 过椭球面对称轴的平面α与椭球面对称面的交线，为一对互相垂直的直线，该对直线即为平面α与椭球面交线椭圆的一对主直径。

1.1.2 作图 用方法2，作正垂面α与椭球面对称面(正平面)上椭圆相交点A、B，则线段AB和椭球面对称轴CD，为平面α与椭球面的交线椭圆的一对主直径。图解结果如图1所示。

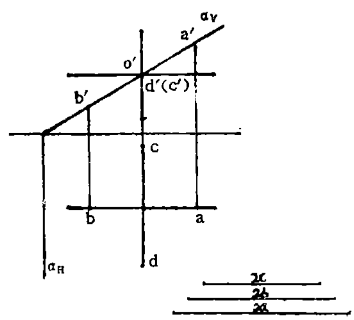

图1 过椭球面对称轴的平面与其相交线的图解

1.2 平面平行椭球面的对称面

1.2.1 分析

由一组平行平面截椭球面所得的截交线椭圆为一组相似椭圆，则与椭球面对称面平行的平面α截交椭球面，其交线椭圆M与对称面截椭球面的交线椭圆相似。因此，椭圆M的一对主直径中的一条，可从以长轴2a、短轴2c所决定的椭圆中作出。即图2所示的AB。然后根据相似椭圆的性质，求作出另一条直径CD。由此，椭圆M由一对主直径AB、CD完全确定。

1.2.2 作图

a）用方法2，作出水平面α与椭球面对称面(正平面)上椭圆的交点A、B；

b）根据位置相似椭圆的性质，作出平面α与椭球面对称面(侧平面)上椭圆的交点C、D，则AB和CD即为平面α与椭球面交线椭圆的一对主直径。图解结果如图3所示。

本文收到日期 1989—02—25

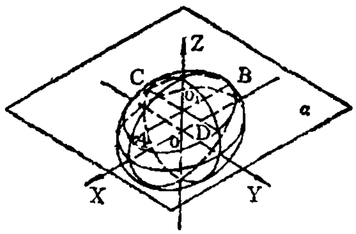

图 2　平行于椭球面对称面的平面与其相交线的图解分析

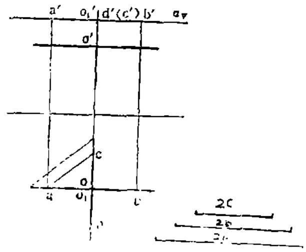

图 3　平行于椭球面对称面的平面与其相交线的图解

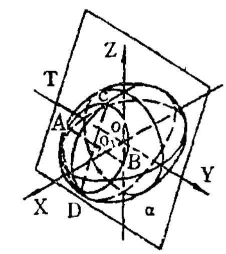

图 4　平行于椭球面对称轴的平面与其相交线的图解分析

1.3 平面平行椭球面的对称轴

1.3.1 分析　平行于椭球面对称轴T的平面α与椭球面相交，其交线椭圆M的一对主直径之一(AB)与对称轴T平行(图 4 所示)，另一主直径CD位于同对称轴T垂直的椭球面对称面上，因此，椭圆M由一对主直径AB和CD完全决定。图解结果如图 5 所示。

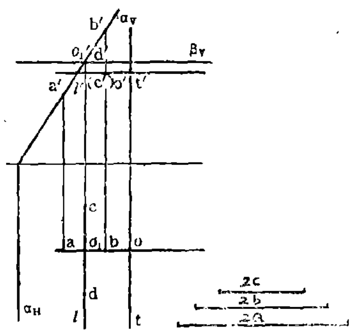

图 5　平行于椭球面对称轴的平面与其相交线的图解

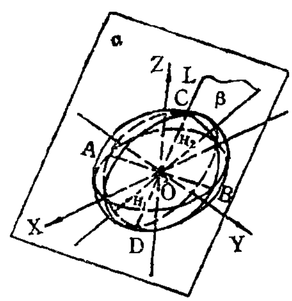

图 6　过椭球面中心的平面与其相交线的图解分析

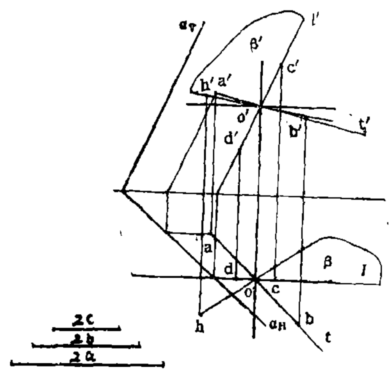

图 7　过椭球面中心的平面与其相交线的图解

1.4 平面过椭球面中心

1.4.1 分析　作出与椭球面相切且与给定平面α平行的切平面γ，得切点H，则OH为给定平面α的共轭直线(图 6)，此直线与平面α上的任一直线关于椭球面共轭。如果在平面上任取一条过椭球面中心点O的直线L，然后按上述方法作出平面OH×L（平面β）关于椭球面的共轭直线T。因为直线L为两共轭直径面(平面α和β)的公有线，所以直线L与T为一对关于椭球面的共轭直线，直线T在平面α上，由此，平面α与椭球面的交线椭圆M就由一对共轭直线T和L，分别与椭球面相交的一对共轭直径AB和CD所决定。图解结果如图 7 所示。

1.5 平面在一般位置与椭球面相交

1.5.1 分析　若作与椭球面相切，且与截平面α平行的切平面β，切点为H_1、H_2，则直线OH_1为平面α的共轭直线。OH_1交平面α于点O_1，O_1为平面α与椭球面交线椭圆M的中心(图 8)。求作出点H_2、O_1、H_1的第四调和共轭点P，及点P关于由直径H_1H_2与对称轴OZ所构成的平面交椭球面的交线椭圆M_1的极线AB，该极线可由点P向椭圆M_1作切线，两切

点即为A和B。在椭圆M_1上，作平行于AB弦的直径EF，直线H_1H_2为平面α的共轭直线，EF与平面α平行，所以平面$H_1H_2\times EF$的共轭直线GI亦与平面α平行。两平行平面α及$H_1H_2\times EF$与椭球面的交线椭圆位置相似[2]。又因为直线GI为平面$H_1H_2\times EF$的共轭直线(其中点G、I在椭球面上)，所以EF和GI为一对共轭直径。GI是这样确定：作出与椭球面相切且平行于平面$H_1H_2\times EF$的切平面，切点即为G和I，最后根据位置相似椭圆的性质，求椭圆M与直径AB共轭的另一条直径CD。由此，平面α与椭球面的交线椭圆M即由一对共轭直径AB和CD所确定。

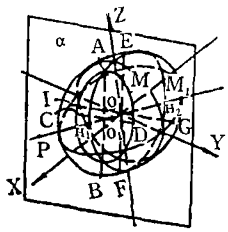

图8　平面与椭球面在一般位置相交的交线图解分析

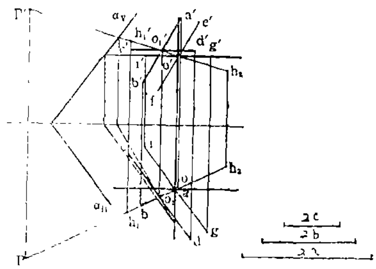

图9　平面与椭球面在一般位置相交的交线图解

1.5.2 作图

a）作出与椭球面相切，且与平面α平行的切平面，切点为H_1、H_2；

b）作出直线H_1H_2与平面α的交点O_1，在直线H_1H_2上求作出H_2、O_1、H_1的第四调和共轭点P；

c）作出点P关于由直径H_1H_2、对称轴OZ所组成平面(铅垂面)，交椭球面的交线椭圆M_1的极线AB，用方法2先求出椭圆M_1的结构参数(图中未画出)，并作平行于弦AB的直线EF；

d）作出平面$H_1H_2\times EF$(铅垂面)关于椭球面的共轭直径GI，作出与椭球面相切，且平行于平面$H_1H_2\times EF$的切平面，切点为G、I，线段GI为水平线；

e）根据位置相似椭圆的性质，作出椭圆M共轭于直径AB的另一条直径CD，所以，椭圆M由一对共轭直径AB和CD确定。图解结果如图9所示。

2　平面与椭圆抛物面相交

在给定椭圆抛物面两对称面上抛物线的准线I_1、I_2，焦点F_1、F_2的条件下，对平面在各种位置与椭圆抛物面相交的情况进行论述。

2.1　平面通过椭圆抛物面对称轴

2.1.1　分析　过椭圆抛物面对称轴的一切平面与该曲面相交，其交线均为抛物线。抛物线可在已知对称轴、顶点和抛物线上任一点的条件下完全确定。因此，对该问题而言，给定平面α和椭圆抛物面的交线——抛物线M，其顶点和对称轴均为已知，只要求作出抛物线M上任一点后，即可确定抛物线的结构参数：焦点和准线。

2.1.2　作图

a）过焦点F_2作垂直于椭圆抛物面对称轴Z的平面β(图10中未画出)。用方法2，作出平面β与椭圆抛物面的交线椭圆的一对主直径AB和CD；

b）用方法2，求作出由一对主直径AB、CD决定的椭圆与平面α的交点E；

c）用方法2，作出抛物线M分别在水平投影面和正平投影面的结构参数：准线I_3、焦点F_3和准线I_4、焦点F_4，则抛物线M由其两面投影图决定。图解结果如图10所示。

2.2　平面平行椭圆抛物面对称面

2.2.1　分析　平行于椭圆抛物面对称面的平面与其相交，交线抛物线M与对称面上的抛物线全等[3]，只要求作出M的顶点，然后把对称面上的抛物线平移到给定平面α上，即可作出M的结构参数：准线I_3、焦点F_3。图解结果如图11所示。

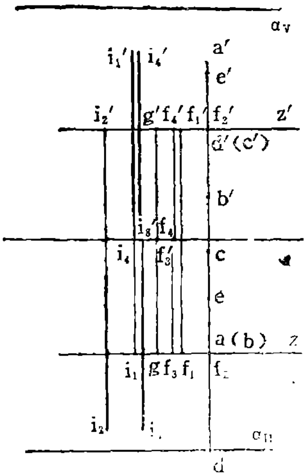

图10　过椭圆抛物面对称轴的平面与其相交线的图解

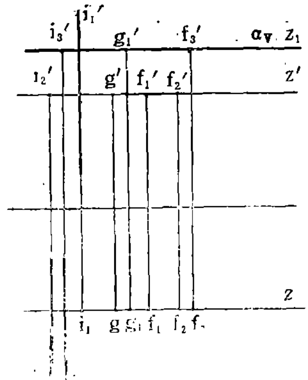

图11　平行于椭圆抛物面对称面的平面与其相交线的图解

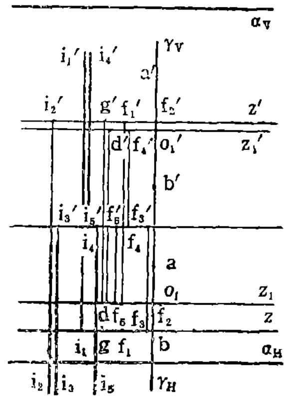

图12　平行于椭圆抛物面对称轴的平面与其相交线的图解

2.3　平面平行椭圆抛物面对称轴

2.3.1　分析　平行于椭圆抛物面对称轴Z的平面α与其相交，交线为抛物线M，它的对称轴Z_1与椭圆抛物面的对称轴Z平行，作对称轴Z_1的两个对称点A、B，过线段AB的中点O_1作与椭圆抛物面对称轴Z平行的抛物线M的对称轴Z_1。由Z和Z_1所决定的平面β与椭圆抛物面相交得抛物线M_1，其结构参数：准线I_3，焦点F_3，及对称轴Z_1与抛物线M_1的交点D。最后作出由交点D、对称轴Z_1、对称点A所确定的抛物线M两面投影的结构参数：准线I_4、焦点F_4和准线I_5、焦点F_5。图解结果如图12所示。

2.4　平面垂直椭圆抛物面对称面

2.4.1　分析　垂直于椭圆抛物面对称面的平面α（α不与曲面对称面平行）与该曲面相交，交线为椭圆M。其主直径之一在垂直于平面α的对称面上，另一主直径与平面α垂直的对称面垂直，这样，应用方法2就可将椭圆M的一对主直径求出。

2.4.2　作图

a）用方法2，求作平面α与椭圆抛物面对称面（正平面）的交线，且与对称面上抛物线的交点A、B；

b）过线段AB的中点O_1作水平面β，用方法2，求作平面β与椭圆抛物面的交线——抛物线Q的顶点G_1，把椭圆抛物面对称面（水平面）上的抛物线平移到水平面β上，作出抛物线Q的结构参数：准线I_3、焦点F_3；

c）用方法2，求作平面α与抛物线Q的交点C、D，则线段AB、CD为平面α与椭圆抛物面的交线——椭圆的一对主直径。图解结果如图13所示。

2.5 平面通过椭圆抛物面顶点

2.5.1 分析 过椭圆抛物面顶点G，且不通过对称轴Z的平面α与曲面相交，交线为椭圆M，该椭圆最长的直径为过顶点G的GA，GA在平面α关于曲面的共轭直线Z_1与对称轴Z所形成的平面上，直线Z_1与平面α的交点O为椭圆M的中心。过O在平面α上垂直线段AB的直径BC为椭圆M的短轴，则椭圆M由一对主直径GA、BC完全确定。

2.5.2 作图

a）作与椭圆抛物面相切且平行于平面α的切平面β，切点为H；

b）过H作与椭圆抛物面对称轴Z平行的直线Z_1，Z_1交平面α于点O，则O为平面α与椭圆抛物面的交线椭圆M的中心；

c）连接点G、O，得直线T，在T上取GO＝CA，则点A在椭圆抛物面上，线段GA为椭圆M的长径；

d）过点O，在平面α上作直线L垂直线段GA，并过L作一正垂面Q，Q面垂直椭圆抛物面的对称面（正平面）；

e）求作平面Q与椭圆抛物面交线椭圆M_1的结构参数，它由一对主直径EK、RS决定，其中EK为正平线，RS为正垂线；

f）用方法2，求作直线L与椭圆M_1的交点B、C，则GA、BC为椭圆M的一对主直径。图解结果如图14所示。

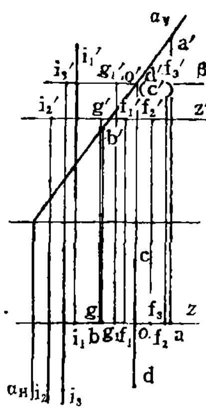

图13 垂直于椭圆抛物面对称面的平面与其相交线的图解

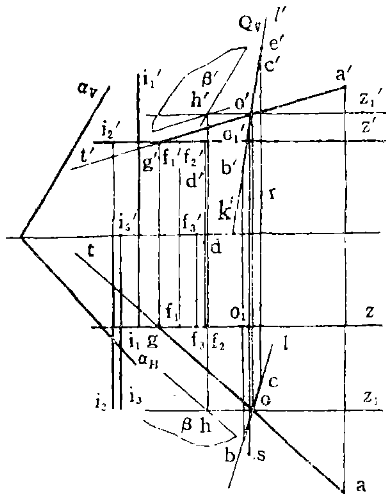

图14 过椭圆抛物面顶点的平面与其相交线的图解

2.6 平面与椭圆抛物面在一般位置相交

2.6.1 分析 由一组平行平面截椭圆抛物面，其截交线必为一组位置相似的曲线，在所有的平行平面中，必有一个平面过曲面的顶点G。从上一个问题的分析中得知，过曲面顶点的平面（平面不与曲面对称轴重合）与曲面相交，其交线为椭圆M。该椭圆M的主直径之一，在平面关于曲面的共轭直线与曲面对称轴Z所组成的平面γ上（即在平面α与平面γ的交线

上)，且过顶点G。另一主直径与上一直线垂直，那么，对于其它不过曲面顶点的一些平行平面与曲面相交，其交线椭圆与椭圆M相似。由于该问题所给定的平面α为一般位置的平面，因此，在求作平面α与椭圆抛物面的相交线——椭圆的长径AB时，只要在平面α的共轭直线Z_1与曲面对称轴Z所组成的平面γ上，用方法2求出平面α同平面γ的交线与平面γ上抛物线的交点A、B，则长径AB由此作出。因此，椭圆M由一对主直径AB、CD所决定。图解结果如图15所示。

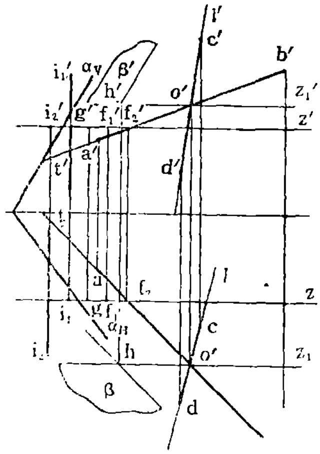

图15　平面与椭圆抛物面在一般位置相交的交线图解

参 考 文 献

1　莫灿林．圆锥曲线的切线及与直线的交点．浙江丝绸工学院学报，1988；5(2)：67

2　方德植，陈奕培．射影几何．上海：高等教育出版社，1984：171

3　莫灿林．二次曲面的切平面．浙江丝绸工学院学报，1989；6(1)

Construction of the Curve That a Plane Intersects an Ellipsoid or Elliptic-paraboloid

Fan Zhengtong & Mo Canlin

(Electronic & Mechanical Engin. Dept.)

Abstract

With given structure parameters of an ellipsoid or elliptic-paraboloid, the determination of the parameters of an intersection curve that a plane cuts the ellipsoid or elliptic-paraboloid is discussed, thereby the general method of finding the structure parameters of the curve that a plane intersects a quadric surface can be obtained.

Key words: Quadric Surface; Plane; Sructure Parameter