Typora介绍+第一次作业讲解

一、Typora - Markdown编辑器

Markdown

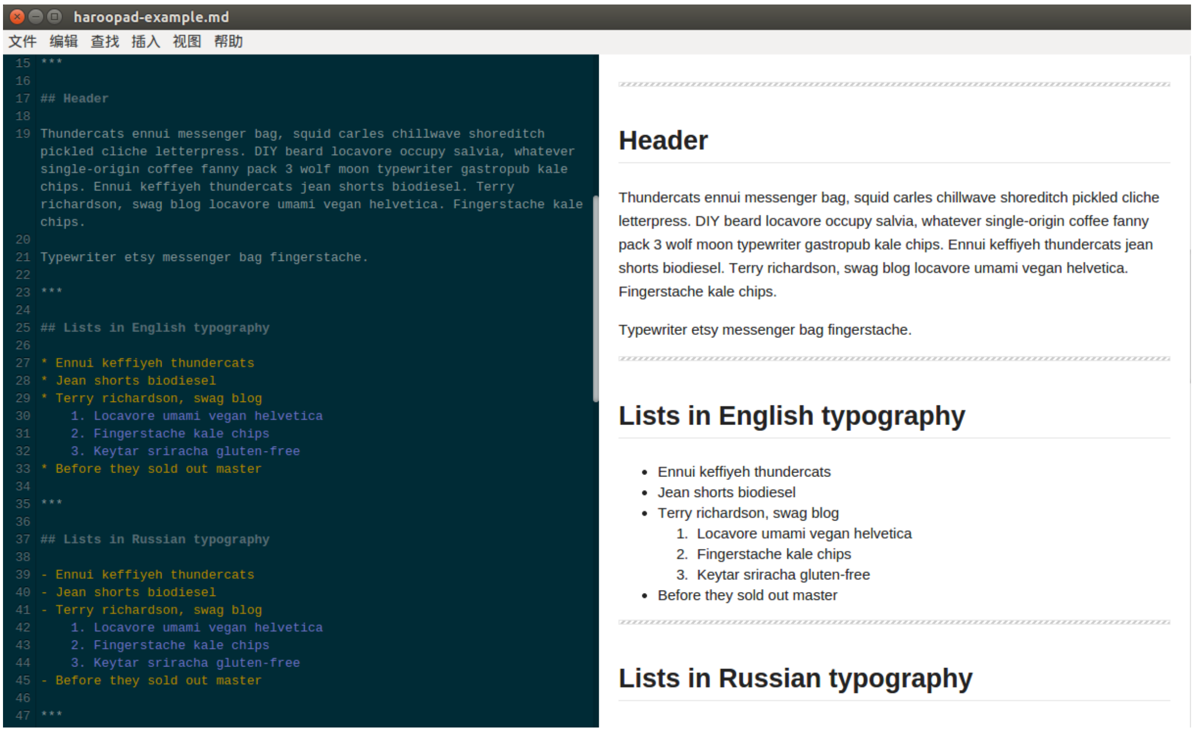
- 轻量级标记语言（标记很少，常用的也就十来个左右，非常轻量）
- 支持latex语法、代码高亮等（可以用来编写说明文档和技术博客等）
- 自动排版（简洁美观）
- 格式转换方便（可轻松将文本转换为html、pdf等）

按照Markdown编辑器的使用环境，可以将它们归纳为三类。

1. 平台集成工具：各大在线博客、社区平台自带的写作工具，比如CSDN、博客园、知乎、简书等。
2. 独立软件类：下载到自己机器上使用的独立产品，可以编辑本地文件，比如Typora、Mou、MarkdownPad等。
3. 插件类：可以在现有的主流编辑器上安装，使现有的编辑器有Markdown的功能，比如Atom、Sublime Text等。

Why Typora?

- 即时预览


haroopad-example.md
文件 编辑 查找 插入 视图 帮助
***
Header
Thundercats ennui messenger bag, squid carles chillwave shoreditch pickled cliche letterpress. DIY beard locavore occupy salvia, whatever single-origin coffee fanny pack 3 wolf moon typewriter gastropub kale chips. Ennui keffiyeh thundercats jean shorts biodiesel. Terry richardson, swag blog locavore umami vegan helvetica. Fingerstache kale chips.
Typewriter etsy messenger bag fingerstache.
***
Lists in English typography
* Ennui keffiyeh thundercats
* Jean shorts biodiesel
* Terry richardson, swag blog
1. Locavore umami vegan helvetica
2. Fingerstache kale chips
3. Keytar sriracha gluten-free
* Before they sold out master
***
Lists in Russian typography
- Ennui keffiyeh thundercats
- Jean shorts biodiesel
- Terry richardson, swag blog
1. Locavore umami vegan helvetica
2. Fingerstache kale chips
3. Keytar sriracha gluten-free
- Before they sold out master
***
Header
Thundercats ennui messenger bag, squid carles chillwave shoreditch pickled cliche letterpress. DIY beard locavore occupy salvia, whatever single-origin coffee fanny pack 3 wolf moon typewriter gastropub kale chips. Ennui keffiyeh thundercats jean shorts biodiesel. Terry richardson, swag blog locavore umami vegan helvetica. Fingerstache kale chips.
Typewriter etsy messenger bag fingerstache.
Lists in English typography
Ennui keffiyeh thundercats
Jean shorts biodiesel
Terry richardson, swag blog
1. Locavore umami vegan helvetica
2. Fingerstache kale chips
3. Keytar sriracha gluten-free
Before they sold out master
Lists in Russian typography

2021.09.28 Typora介绍+作业讲解.md - Typora

文件(F) 编辑(E) 段落(P) 格式(O) 视图(V) 主题(T) 帮助(H)

Typora的使用

下载

https://www.typora.io/

Linux / Windows / mac OS

使用

- **生成标题**

  1、标记语言

  格式：井号+空格+字符

  # 这是一级标题　#这是一级标题

  ## 这是二级标题　##这是二级标题

  ### 这是三级标题　###这是三级标题

  #### 这是四级标题　####这是四级标题

  2、快捷键

  ctrl+1 这是一级标题

  ctrl+2 这是二级标题

  ctrl+3 这是三级标题

  ctrl+4 这是四级标题

3099 词

- 大纲面板
- 公式编辑块、代码块
- 各种主题

Typora的使用

下载

https://www.typora.io/

Linux / Windows / mac OS

使用

- **生成标题**

  1、标记语言

  格式：井号+空格+字符

  # 这是一级标题

  ## 这是二级标题

  ### 这是三级标题

  2、快捷键

  # ctrl+1 这是一级标题

  ## ctrl+2 这是二级标题

  ### ctrl+3 这是三级标题

- **行内公式**

这是一个行内公式$ax+by=z$

$ax+by=z$

这是一个行内公式$ax+by=z$

- **行间公式**

```
格式：$$+回车
```

公式 ✓

```
$$
P(\theta|x)=\frac{P(x|\theta)P(\theta)}{\int P(x|\theta)P(\theta)d\theta}
$$
```

$$P(\theta|x)=\frac{P(x|\theta)P(\theta)}{\int P(x|\theta)P(\theta)d\theta}$$

- **列表**
  - 无序列表
    -
    -

    ```
    格式：{*/-}{空格}{字符}
    ```

  - 有序列表
    1.
    2.

    ```
    格式：{数字}{.}{空格}
    ```

- **插入代码块**

```
格式：
{`}{`}{`}{语言（python、java、C......）}
```

```python
def compute(a, b):
    x = 1
    y = 2
    print(a * x + b * y)
```

```java
public class Helloworld {
    public static void main (String[] args) {
        System.out.print("Hello World!")
    }
}
```

- **插入图片**

- **插入表格**

学号	姓名	性别	年龄
001	张三	男	20
002	李四	男	21
003	王五	男	22

```
格式：|列名|列名|列名|列名|+回车
```

- **其他常用标记语言**

```
输入 **文本** 可以实现加粗
输入 ==文本==可以实现高亮
输入 <center>文本</center>可以使文本居中
输入 <sup>文本</sup>将实现上标
输入 ---\***在按回车可以绘制一条水平线
输入 :emoji:可以添加emoji表情，输入不同符号可以显示不同的emoji表清
```

- **常用快捷方式**

```
加粗：ctrl + B
查找和替换：ctrl + H
插入或创建链接：Ctrl + K
公式块：Ctrl + Shift + M
引用：Ctrl + Shift + Q
选中某句话：Ctrl + L
选中某个单词：Ctrl + D
选中所有：Ctrl + A
选中相同格式的文字：Ctrl + E
返回Typora顶部：Ctrl + Home
返回Typora底部：Ctrl + End
下划线：Ctrl + U
字体倾斜：Ctrl + I
搜索：Ctrl + F
```

二、第一次作业讲解

1. **考虑掷硬币试验。分别使用参数为$(a,b)=(1,1)$和$(a,b)=(10,5)$的贝塔分布作为先验，用程序分别画出出现下列正面向上的计数结果时，硬币向上的概率参数的后验分布：**

   (1) 投掷0次，0次正面向上

   (2) 投掷1次，1次正面向上

   (3) 投掷2次，2次正面向上

   (4) 投掷3次，2次正面向上

   (5) 投掷8次，4次正面向上

   (6) 投掷15次，6次正面向上

   (7) 投掷50次，24次正面向上

   (8) 投掷500次，263次正面向上

- 在掷硬币试验中，将参数θ的先验分布设定为$Beta$分布

$$p(\theta)=Beta(\theta|a,b)=\frac{1}{B(a,b)}x^{a-1}(1-x)^{b-1} \tag{1}$$

- 似然函数为二项分布

$$p(x|\theta)=C_n^x\theta^x(1-\theta)^{n-x} \tag{2}$$

- 通过贝叶斯公式推导得到

$$p(\theta|x)=\frac{p(x|\theta)p(\theta)}{p(x)}=Beta(\theta|a+x,b+n-x) \tag{3}$$

- 先验分布参数为$(1,1)$时，需依次画出$Beta(\theta|1,1)$、$Beta(\theta|1+1,1+1-1)$、$Beta(\theta|1+2,1+2-2)$、$Beta(\theta|1+2,1+3-2)$、$Beta(\theta|1+4,1+8-4)$、$Beta(\theta|1+6,1+15-6)$、$Beta(\theta|1+24,1+50-24)$、$Beta(\theta|1+263,1+500-263)$
- 先验分布参数为$(10,5)$时，需依次画出$Beta(\theta|10,5)$、$Beta(\theta|10+1,5+1-1)$、$Beta(\theta|10+2,5+2-2)$、$Beta(\theta|10+2,5+3-2)$、$Beta(\theta|10+4,5+8-4)$、$Beta(\theta|10+6,5+15-6)$、$Beta(\theta|10+24,5+50-24)$、$Beta(\theta|10+263,5+500-263)$

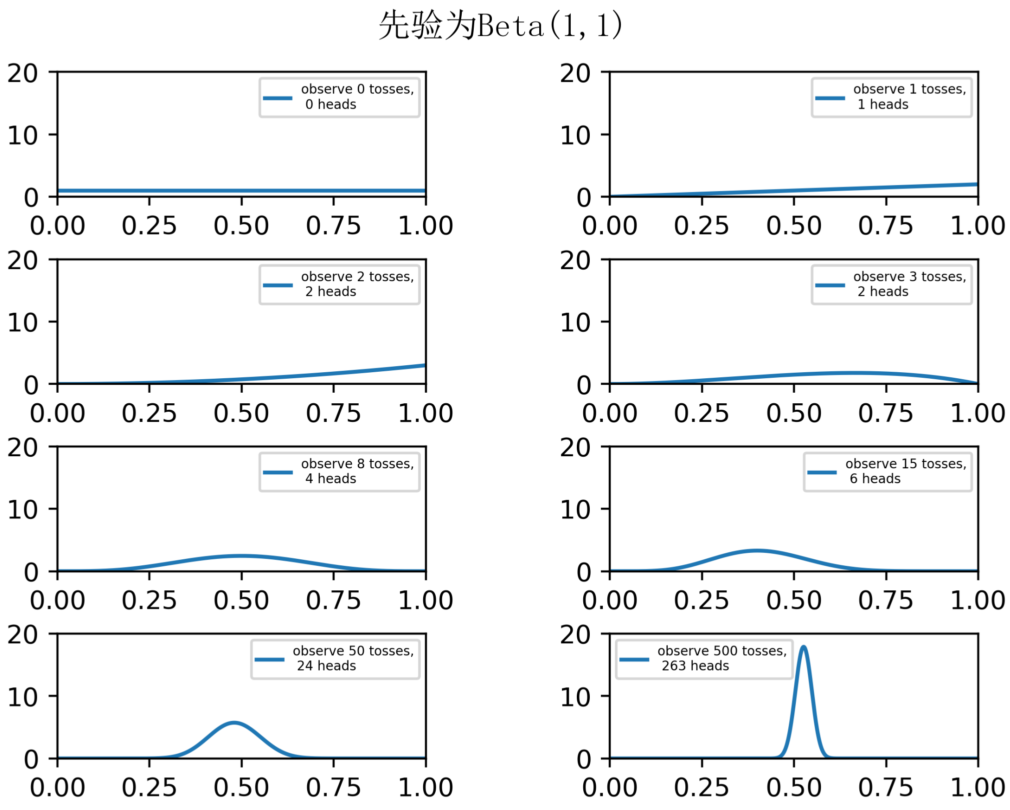
核心代码如下：

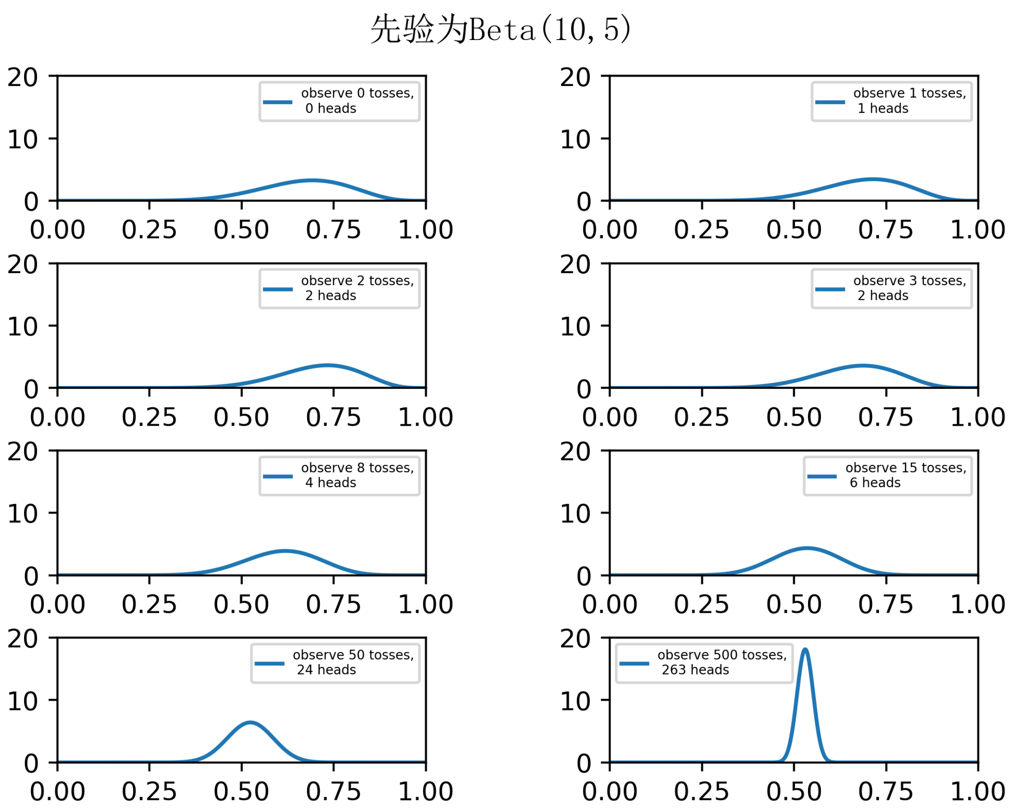
```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.stats import beta

def betaDist(a, b):
    x = np.linspace(0, 1, 1002)[1:-1]  # 创建一系列x值
    y = beta(a,b).pdf(x)#使用 scipy.stats 中的 beta 类产生贝塔分布的概率密度函数
    return x,y

x,y = betaDist(1,1)
plt.plot(x,y)
plt.show()
```

结果：





2. **分别证明：**

（1）多项分布的共轭先验是狄利克雷分布，参数为$\theta_1, ..., \theta_k$**，观测值为**$x_1, ..., x_k$**。**

> **多项分布**是二项分布的推广扩展，在n次独立试验中只输出k种结果中的一个，且每种结果都有一个确定的概率θ。多项分布给出了在多种输出状态的情况下，关于成功次数的各种组合的概率。举个例子，投掷n次骰子，这个骰子共有6种结果输出（k=6），且1点出现的概率为θ_1，2点出现的概率为θ_2，...，在n次试验中，骰子1点出现x_1次，2点出现x_2次...。这个结果组合出现的概率为$C_n^{x_1}C_{n-x_1}^{x_2}\ldots C_{n-x_1\cdots-x_5}^{x_6}{\theta_1}^{x_1}{\theta_2}^{x_2}\ldots{\theta_6}^{x_6}=\frac{n!}{x_1!\ldots x_6!}\theta_1^{x_1}\ldots\theta_6^{x_6}$

> **狄利克雷分布**是$Beta$分布在多项情况下的推广，概率密度函数如下：
>
> $$p\left(\theta_1,\ldots,\theta_k|\alpha_1,\ldots,\alpha_k\right)=\frac{\Gamma\left(\sum_{i=1}^k\alpha_i\right)}{\prod_{i=1}^k\Gamma\left(\alpha_i\right)}\prod_{i=1}^k\theta_i^{\alpha_i-1}$$
>
> $Beta$分布的概率密度函数$p(\theta)=\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\theta^{\alpha-1}(1-\theta)^{\beta-1}$

根据贝叶斯公式，有

$$p\left(\theta_1,\ldots,\theta_k|x_1,\ldots,x_k\right)=\frac{p\left(x_1,\ldots,x_k|\theta_1,\ldots,\theta_k\right)p\left(\theta_1,\ldots,\theta_k\right)}{\int p\left(x_1,\ldots,x_k|\theta_1,\ldots,\theta_k\right)p\left(\theta_1,\ldots,\theta_k\right)d\theta_1,\ldots,\theta_k}$$

观测值$x_1,\ldots,x_k$关于参数$\theta_1,\ldots,\theta_k$的似然函数：

$$\begin{aligned}p\left(x_1,\ldots,x_k|\theta_1,\ldots\theta_k\right)&=\frac{n!}{x_1!\ldots x_k!}\theta_1^{x_1}\ldots\theta_k^{x_k}\\&=\frac{\Gamma\left(n+1\right)}{\prod_{i=1}^k\Gamma(x_i+1)}\prod_{i=1}^k\theta_i^{x_i}\end{aligned}$$

参数$\theta_1,\ldots,\theta_k$的先验：

$$p\left(\theta_1,\ldots,\theta_k\right)=\frac{\Gamma\left(\sum_{i=1}^k\alpha_i\right)}{\prod_{i=1}^k\Gamma\left(\alpha_i\right)}\prod_{i=1}^k\theta_i^{\alpha_i-1}$$

计算归一化因子$p(x_1,\ldots,x_k)$：

$$\begin{aligned}p(x_1,\ldots,x_k)&=\int p(x_1,\ldots,x_k|\theta_1,\ldots,\theta_k)p(\theta_1,\ldots,\theta_k)d\theta\\&=\frac{\Gamma(n+1)\Gamma(\sum_{i=1}^k\alpha_i)}{\prod_{i=1}^k\Gamma(x_i+1)\Gamma(\alpha_i)}\int\prod_{i=1}^k\theta_i^{\alpha_i+x_i-1}d\theta\\&=\frac{\Gamma(n+1)\Gamma(\sum_{i=1}^k\alpha_i)\prod_{i=1}^k\Gamma(\alpha_i+x_i)}{\Gamma(\sum_{i=1}^k(\alpha_i+x_i))\prod_{i=1}^k\Gamma(x_i+1)\Gamma(\alpha_i)}\int\frac{\Gamma\left(\sum_{i=1}^k\left(\alpha_i+x_i\right)\right)}{\prod_{i=1}^k\Gamma\left(\alpha_i+x_i\right)}\prod_{i=1}^k\theta_i^{\alpha_i+x_i-1}d\theta\\&=\frac{\Gamma(n+1)\Gamma(\sum_{i=1}^k\alpha_i)\prod_{i=1}^k\Gamma(\alpha_i+x_i)}{\Gamma(\sum_{i=1}^k(\alpha_i+x_i))\prod_{i=1}^k\Gamma(x_i+1)\Gamma(\alpha_i)}\end{aligned}$$

代入贝叶斯公式计算：

$$\begin{aligned}p\left(\theta_1,\ldots,\theta_k|x_1,\ldots,x_k\right)&=\frac{p(x_1,\ldots,x_k|\theta_1,\ldots,\theta_k)p(\theta_1,\ldots,\theta_k)}{p(x_1,\ldots,x_k)}\\&=\frac{\Gamma\left(\sum_{i=1}^k\left(\alpha_i+x_i\right)\right)}{\prod_{i=1}^k\Gamma\left(\alpha_i+x_i\right)}\prod_{i=1}^k\theta_i^{\alpha_i+x_i-1}\\&=Dirichlet\left(\theta_1,\ldots,\theta_k|\alpha_1+x_1,\ldots,\alpha_k+x_k\right)\end{aligned}$$

（2）泊松分布的共轭先验是$Gamma$分布，参数为λ，观测值为x。

> **泊松分布**的随机变量表示某事件在单位时间内随机独立出现的次数
>
> $$P(X=k)=\frac{\lambda^k}{k!}\exp\left(-\lambda\right)，\lambda>0，k=0,1,2,...$$

> **指数分布**的随机变量表示独立随机事件发生的时间间隔，即要等到一个随机事件发生，需要经历多久时间
>
> $$p\left(x\right)=\begin{cases}\lambda\exp\left(-\lambda x\right)，x\geqslant0\\ 0，x<0\end{cases}$$

> $Gamma$**分布**的随机变量表示要等到α个随机事件都发生，需要经历多久时间
>
> 对$Gamma$函数做个变形，可以得到如下式子：
>
> $\varGamma(\alpha)=\int_0^{+\infty}\exp\left(-t\right)t^{\alpha-1}dt\quad\boxed{\rightarrow}\quad\int_0^{+\infty}\frac{t^{\alpha-1}\exp(-t)}{\varGamma(\alpha)}dt=1$
>
> 做一个变换$t=\beta x$，$\int_0^{+\infty}\frac{\beta^\alpha x^{\alpha-1}\exp(-\beta x)}{\varGamma(\alpha)}d(x)=1$
>
> 取等式左边积分中的函数作为概率密度函数，得到$Gamma$分布的一般形式：
>
> $$Gamma(x,\alpha,\beta)=\frac{\beta^\alpha x^{\alpha-1}\exp\left(-\beta x\right)}{\varGamma(\alpha)}$$
>
> 且α=1时，上式就变成了指数分布，指数分布是$Gamma$分布的特殊形式。

根据贝叶斯公式，有：

$$p\left(\lambda|x\right)=\frac{p\left(x|\lambda\right)p\left(\lambda\right)}{\int p\left(x|\lambda\right)p\left(\lambda\right)d\lambda}$$

观测值x关于参数λ的似然函数：

$$p\left(x|\lambda\right)=\frac{\lambda^x}{x!}\exp\left(-\lambda\right)$$

参数λ的先验：

$$p\left(\lambda\right)=Gamma\left(\lambda|\alpha,\beta\right)=\frac{\beta^\alpha\lambda^{\alpha-1}\exp\left(-\beta\lambda\right)}{\varGamma\left(\alpha\right)}$$

计算$p(x|\lambda)p(\lambda)$：

$$p\left(x|\lambda\right)p\left(\lambda\right)=\frac{\beta^\alpha}{\varGamma\left(x+1\right)\varGamma\left(\alpha\right)}\lambda^{\alpha+x-1}\exp\left(-\left(\beta+1\right)\lambda\right)$$

计算归一化因子$p(x)$：

$$\begin{aligned}p(x)&=\int_0^{+\infty}p(x|\lambda)p(\lambda)d\lambda\\&=\frac{\beta^\alpha}{\varGamma\left(x+1\right)\varGamma\left(\alpha\right)}\int_0^{+\infty}\lambda^{\alpha+x-1}\exp\left(-\left(\beta+1\right)\lambda\right)d\lambda\\&=\frac{\beta^\alpha\varGamma\left(\alpha+x\right)}{\varGamma\left(x+1\right)\varGamma\left(\alpha\right)\left(\beta+1\right)^{\alpha+x}}\int_0^{+\infty}\frac{\left(\beta+1\right)^{\alpha+x}\lambda^{\alpha+x-1}\exp\left(-\left(\beta+1\right)\lambda\right)}{\varGamma\left(\alpha+x\right)}d\lambda\\&=\frac{\beta^\alpha\varGamma\left(\alpha+x\right)}{\varGamma\left(x+1\right)\varGamma\left(\alpha\right)\left(\beta+1\right)^{\alpha+x}}\end{aligned}$$

代入贝叶斯公式：

$$
\begin{aligned}
p\left(\lambda|x\right) &= \frac{p(x|\lambda)p(\lambda)}{p(x)} \\
&= \frac{\left(\beta+1\right)^{\alpha+x}\lambda^{\alpha+x-1}\exp\left(-\left(\beta+1\right)\lambda\right)}{\mathit{\Gamma}\left(\alpha+x\right)} \\
&= Gamma\left(\lambda|\alpha+x,\beta+1\right)
\end{aligned}
$$

（3）指数分布的共轭先验是$Gamma$分布，参数为θ，观测值为x。

根据贝叶斯公式，有：

$$
p\left(\theta|x\right) = \frac{p\left(x|\theta\right)p\left(\theta\right)}{\int p\left(x|\theta\right)p\left(\theta\right)d\theta}
$$

观测值x关于参数θ的似然函数：

$$
p\left(x|\theta\right) = \theta\exp\left(-\theta x\right), x > 0
$$

参数θ的先验：

$$
p\left(\theta\right) = Gamma\left(\theta|\alpha,\beta\right) = \frac{\beta^{\alpha}\theta^{\alpha-1}\exp\left(-\beta\theta\right)}{\mathit{\Gamma}\left(\alpha\right)}
$$

计算$p(x|\theta)p(\theta)$：

$$
p\left(x|\theta\right)p\left(\theta\right) = \frac{\beta^{\alpha}}{\mathit{\Gamma}\left(\alpha\right)}\theta^{\alpha}\exp\left(-\left(\beta+x\right)\theta\right)
$$

计算归一化因子$p(x)$：

$$
\begin{aligned}
p(x) &= \int p\left(x|\theta\right)p\left(\theta\right)d\theta \\
&= \frac{\beta^{\alpha}}{\mathit{\Gamma}\left(\alpha\right)}\int_{0}^{+\infty}\theta^{\alpha}\exp\left(-\left(\beta+x\right)\theta\right)d\theta \\
&= \frac{\beta^{\alpha}\mathit{\Gamma}\left(\alpha+1\right)}{\mathit{\Gamma}\left(\alpha\right)\left(\beta+x\right)^{\alpha+1}}\int_{0}^{+\infty}\frac{\left(\beta+x\right)^{\alpha+1}\theta^{\alpha}\exp\left(-\left(\beta+x\right)\theta\right)}{\mathit{\Gamma}\left(\alpha+1\right)}d\theta \\
&= \frac{\beta^{\alpha}\mathit{\Gamma}\left(\alpha+1\right)}{\mathit{\Gamma}\left(\alpha\right)\left(\beta+x\right)^{\alpha+1}}
\end{aligned}
$$

代入贝叶斯公式：

$$
\begin{aligned}
p\left(\theta|x\right) &= \frac{p(x|\theta)p(\theta)}{p(x)} \\
&= \frac{\left(\beta+x\right)^{\alpha+1}\theta^{\alpha}\exp\left(-\left(\beta+x\right)\theta\right)}{\mathit{\Gamma}\left(\alpha+1\right)} \\
&= Gamma\left(\theta|\alpha+1,\beta+x\right)
\end{aligned}
$$

（4）方差已知的正态分布的共轭先验是正态分布，参数为均值μ，观测值为x。

根据贝叶斯公式，有：

$$
p\left(\mu|x\right) = \frac{p\left(x|\mu\right)p\left(\mu\right)}{\int p\left(x|\mu\right)p\left(\mu\right)d\mu}
$$

观测值x关于参数μ的似然函数：

$$
p\left(x|\mu\right) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{\left(x-\mu\right)^{2}}{2\sigma^{2}}\right)
$$

参数$\mu \sim N(u,v^2)$，先验为：

$$p\left(\mu\right)=\frac{1}{v\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{\left(\mu-u\right)^2}{2v^2}\right)$$

计算$p(x|\mu)p(\mu)$：

$$p\left(x|\mu\right)p\left(\mu\right)=\frac{1}{2\pi v\sigma}\exp\left(-\frac{\left(x-\mu\right)^2}{2\sigma^2}-\frac{\left(\mu-u\right)^2}{2v^2}\right)$$

计算归一化因子$p(x)$：

$$\begin{aligned}
p(x)&=\int p(x|\mu)p(\mu)d\mu\\
&=\frac{1}{2\pi v\sigma}\int\exp\left(-\frac{\left(x-\mu\right)^2}{2\sigma^2}-\frac{\left(\mu-u\right)^2}{2v^2}\right)d\mu\\
&=\frac{1}{2\pi v\sigma}\int\exp\left(-\frac{\left(v^2+\sigma^2\right)\mu^2-\left(2xv^2+2u\sigma^2\right)\mu+v^2x^2+u^2\sigma^2}{2\sigma^2v^2}\right)d\mu\\
&=\frac{\exp\left(\frac{v^2x^2+u^2\sigma^2}{2\sigma^2v^2}\right)}{2\pi v\sigma\exp\left(\frac{(\frac{xv^2+u\sigma^2}{\sigma^2+v^2})^2}{\frac{2\sigma^2v^2}{v^2+\sigma^2}}\right)}\int\exp\left(-\frac{(\mu-\frac{xv^2+u\sigma^2}{\sigma^2+v^2})^2}{\frac{2\sigma^2v^2}{v^2+\sigma^2}}\right)d\mu\\
&=\frac{\exp\left(\frac{v^2x^2+u^2\sigma^2}{2\sigma^2v^2}\right)\sqrt{\frac{\sigma^2v^2}{v^2+\sigma^2}}\sqrt{2\pi}}{2\pi v\sigma\exp\left(\frac{(\frac{xv^2+u\sigma^2}{\sigma^2+v^2})^2}{\frac{2\sigma^2v^2}{v^2+\sigma^2}}\right)}\int\frac{1}{\sqrt{\frac{\sigma^2v^2}{v^2+\sigma^2}}\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{(\mu-\frac{xv^2+u\sigma^2}{\sigma^2+v^2})^2}{\frac{2\sigma^2v^2}{v^2+\sigma^2}}\right)d\mu\\
&=\frac{\exp\left(\frac{v^2x^2+u^2\sigma^2}{2\sigma^2v^2}\right)\sqrt{\frac{\sigma^2v^2}{v^2+\sigma^2}}\sqrt{2\pi}}{2\pi v\sigma\exp\left(\frac{(\frac{xv^2+u\sigma^2}{\sigma^2+v^2})^2}{\frac{2\sigma^2v^2}{v^2+\sigma^2}}\right)}
\end{aligned}$$

代入贝叶斯公式：

$$\begin{aligned}
p\left(\mu|x\right)&=\frac{p(x|\mu)p(\mu)}{p(x)}\\
&=\frac{1}{\sqrt{\frac{\sigma^2v^2}{v^2+\sigma^2}}\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{\left(\mu-\frac{xv^2+u\sigma^2}{\sigma^2+v^2}\right)^2}{\frac{2\sigma^2v^2}{v^2+\sigma^2}}\right)
\end{aligned}$$

则$p(\mu|x)$服从正态分布$N\left(\frac{xv^2+u\sigma^2}{\sigma^2+v^2},\frac{\sigma^2v^2}{v^2+\sigma^2}\right)$。

（5）均值已知的正态分布的共轭先验是逆$Gamma$分布，参数为方差σ^2，观测值为x。

> 逆$Gamma$分布
>
> $$IG\left(x|\alpha,\beta\right)=\frac{\beta^\alpha x^{-\alpha-1}\exp\left(-\frac{\beta}{x}\right)}{\Gamma\left(\alpha\right)}$$
>
> 逆$Gamma$分布与$Gamma$分布之间的关系：
>
> 若随机变量$X\sim Gamma(\alpha,\beta)$，则$\frac{1}{X}\sim IG(\alpha,\beta)$

根据贝叶斯公式，有：

$$p\left(\sigma^2|x\right)=\frac{p\left(x|\sigma^2\right)p\left(\sigma^2\right)}{\int p\left(x|\sigma^2\right)p\left(\sigma^2\right)d\sigma^2}$$

观测值x关于参数σ^2的似然函数：

$$p\left(x|\sigma^2\right)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

参数σ^2的先验：

$$p\left(\sigma^2\right)=IG\left(\sigma^2|\alpha,\beta\right)=\frac{\beta^\alpha\left(\sigma^2\right)^{-\alpha-1}\exp\left(-\frac{\beta}{\sigma^2}\right)}{\Gamma\left(\alpha\right)}$$

计算$p\left(x|\sigma^2\right)p\left(\sigma^2\right)$：

$$p\left(x|\sigma^2\right)p\left(\sigma^2\right)=\frac{\beta^\alpha}{\sqrt{2\pi}\Gamma\left(\alpha\right)}\left(\sigma^2\right)^{-\alpha-\frac{3}{2}}\exp\left(-\frac{(x-\mu)^2+2\beta}{2\sigma^2}\right)$$

计算归一化因子$p(x)$：

$$\begin{aligned}p(x)&=\int p(x|\sigma^2)p(\sigma^2)d\sigma^2\\&=\frac{\beta^\alpha}{\sqrt{2\pi}\Gamma\left(\alpha\right)}\int\left(\sigma^2\right)^{-\alpha-\frac{3}{2}}\exp\left(-\frac{(x-\mu)^2+2\beta}{2\sigma^2}\right)d\sigma^2\\&=\frac{\beta^\alpha\Gamma(\frac{1}{2}+\alpha)}{\sqrt{2\pi}\Gamma\left(\alpha\right)\left(\frac{(x-\mu)^2}{2}+\beta\right)^{\frac{1}{2}+\alpha}}\int\frac{\left(\frac{(x-\mu)^2}{2}+\beta\right)^{\frac{1}{2}+\alpha}\left(\sigma^2\right)^{-\alpha-\frac{3}{2}}\exp\left(-\frac{(x-\mu)^2+2\beta}{2\sigma^2}\right)}{\Gamma(\frac{1}{2}+\alpha)}d\sigma^2\\&=\frac{\beta^\alpha\Gamma(\frac{1}{2}+\alpha)}{\sqrt{2\pi}\Gamma\left(\alpha\right)\left(\frac{(x-\mu)^2}{2}+\beta\right)^{\frac{1}{2}+\alpha}}\end{aligned}$$

代入贝叶斯公式：

$$\begin{aligned}p\left(\sigma^2|x\right)&=\frac{p(x|\sigma^2)p(\sigma^2)}{p(x)}\\&=\frac{\left(\frac{(x-\mu)^2}{2}+\beta\right)^{\frac{1}{2}+\alpha}\left(\sigma^2\right)^{-\alpha-\frac{3}{2}}\exp\left(-\frac{(x-\mu)^2+2\beta}{2\sigma^2}\right)}{\Gamma(\frac{1}{2}+\alpha)}\end{aligned}$$

则$p\left(\sigma^2|x\right)$服从逆$Gamma$分布$IG\left(\sigma^2|\frac{1}{2}+\alpha,\frac{(x-\mu)^2}{2}+\beta\right)$。