WIKIPÉDIA

Semi-norme

En mathématiques, une **semi-norme** est une application d'un espace vectoriel dans l'ensemble des réels positifs. C'est « presque » une norme mais une propriété est manquante : la semi-norme d'un vecteur non nul peut être nulle.

En analyse fonctionnelle, cette situation est relativement courante. L'espace vectoriel est un espace de fonctions d'un espace mesuré à valeurs dans les réels ou complexes. La semi-norme correspond par exemple à l'intégrale de la valeur absolue ou du module de la fonction. Une fonction nulle sur l'espace sauf sur un ensemble négligeable est non nulle mais de semi-norme nulle.

La topologie induite par la semi-norme confère à l'espace une structure d'espace vectoriel topologique, non nécessairement séparé. En quotientant cet espace par un sous-espace bien choisi, on obtient un espace vectoriel normé. Dans la théorie de l'intégrale de Lebesgue, considérer de tels quotients amène à travailler non plus sur des fonctions, mais sur des classes de fonctions, équivalentes donc identifiées si elles ne diffèrent que sur un ensemble négligeable.

Sommaire

Définition et exemples

Définition

Dans cet article, *E* désigne un espace vectoriel sur un corps commutatif *K*. En général, *K* désigne le corps des réels ou des complexes, même si la théorie s'applique dans un contexte plus général.

Définition — Une application $\mathcal{N} : E \to \mathbb{R}_+$ est une semi-norme si elle est :

- absolument homogène : $\forall(\lambda, x) \in K \times E \quad \mathcal{N}(\lambda \cdot x) = |\lambda|\mathcal{N}(x)$;
- sous-additive : $\forall(x, y) \in E^2 \quad \mathcal{N}(x + y) \leq \mathcal{N}(x) + \mathcal{N}(y)$.

La semi-norme $\mathcal{N}$ est une norme si et seulement si elle vérifie la propriété supplémentaire suivante :

- séparation : $\forall x \in E \quad \mathcal{N}(x) = 0 \Rightarrow x = 0_E$.

Exemples

Deux configurations introduisent naturellement une semi-norme en analyse fonctionnelle :

1. Soient μ une mesure sur un espace mesurable Ω (par exemple : $\Omega = \mathbb{R}$ muni de la tribu borélienne et $\mu =$ la mesure de Lebesgue), et $p \geq 1$ un réel (le cas le plus simple est $p = 1$). L'ensemble des fonctions mesurables de Ω dans *K* dont le module à la puissance *p* est μ-intégrable est un espace vectoriel noté $\mathcal{L}^p$(Ω, μ). Il est naturellement muni de la semi-norme $\mathcal{N}_p$ définie par :
$$\forall f \in \mathcal{L}^p(\Omega, \mu) \quad \mathcal{N}_p(f) = \left[\int_\Omega |f|^p \mathrm{d}\mu\right]^{1/p}.$$
La propriété de séparation est absente : dès qu'une fonction est nulle sur le complémentaire d'un ensemble μ-négligeable, sa semi-norme est nulle.
2. Un deuxième exemple est un ingrédient dans la définition de la topologie faible. Soit φ un élément du dual *E** de *E*, c'est-à-dire une forme linéaire sur *E*. L'application p_φ définie de la manière suivante est une semi-norme :
$$\forall x \in E \quad p_\varphi(x) = |\varphi(x)|.$$
Cette semi-norme est nulle sur le noyau de φ (qui est un hyperplan si $\varphi \neq 0$).

Propriétés

Topologie

À l'instar de la norme, une semi-norme définit une topologie pour laquelle les boules ouvertes de centre un point *x* forment une base de voisinages de *x* : un ensemble *O* est ouvert si, pour chaque point *x* de *O*, il existe une boule ouverte non vide de centre *x* incluse dans *O*. Cette topologie est séparée si et seulement si la semi-norme vérifie la propriété de *séparation*, c'est-à-dire si la semi-norme est une norme.

Pour cette topologie, l'addition et la multiplication par un scalaire sont continues : on dit que l'espace vectoriel *E*, muni de cette topologie, est un espace vectoriel topologique. La semi-norme, elle aussi, est continue. Par ailleurs, les boules sont convexes.

Les démonstrations sont analogues à celles proposées dans l'article « Norme (mathématiques) ».

Noyau

Les vecteurs de semi-norme nulle jouent un rôle particulier, qui justifie la définition suivante :

Définition — L'ensemble des vecteurs de semi-norme nulle s'appelle le **noyau** de la semi-norme.

Le noyau possède des propriétés à la fois algébriques et topologiques :

Proposition — Le noyau d'une semi-norme est un sous-espace vectoriel fermé. Il est égal à l'adhérence du sous-espace nul.

En effet, un vecteur *x* est adhérent à $\{0\}$ (le singleton réduit au vecteur nul) si et seulement si toute boule ouverte de centre *x* et de rayon $r > 0$ contient ce vecteur nul, ce qui se traduit par : la semi-norme de *x* est inférieure à tout $r > 0$, ou encore : *x* appartient au noyau. Ceci prouve que le noyau est bien l'adhérence du sous-espace nul. C'est donc un sous-espace vectoriel fermé (comme l'est l'adhérence de tout sous-espace vectoriel dans un espace vectoriel topologique).

Convexité

Si le corps de base est ℝ, toute semi-norme est une application sous-linéaire donc convexe.

Cône des semi-normes

La somme de deux semi-normes est une semi-norme. Il en est de même pour le produit d'une semi-norme par un réel positif. Autrement dit :

> L'ensemble des semi-normes sur un espace *E* est un cône convexe pointé de l'espace des applications de *E* dans ℝ.

Norme et espace quotient

Soit *H* le sous-espace des vecteurs de semi-norme nulle de *E*. D'après l'inégalité triangulaire, la semi-norme est constante sur chaque classe de l'espace vectoriel quotient *E/H*. On peut donc équiper ce quotient d'une *norme* induite en posant :

Définition — Si *H* est le noyau d'une semi-norme $\mathcal{N}$ sur *E*, la norme induite $\mathcal{N}_{E/H}$ sur le quotient *E/H* est définie par :

$$\forall x \in E \quad \mathcal{N}_{E/H}(\bar{x}) = \mathcal{N}(x).$$

Comme il est plus pratique de travailler sur un espace séparé, cette technique de quotient est largement utilisée, par exemple en analyse fonctionnelle. Reprenons l'exemple 1 ci-dessus. Le noyau de la semi-norme $\mathcal{N}_p$ est le sous-espace des fonctions sur Ω nulles μ-presque partout. Le quotient de $\mathcal{L}^p(\Omega,\mu)$ par ce noyau est l'espace vectoriel normé ($L^p(\Omega,\mu)$, $\|\ \|_p$).

Topologie définie par une famille de semi-normes

Famille filtrante de semi-normes

Une famille $(p_i)_{i\in I}$ de semi-normes sur E est dite filtrante si toute sous-famille *finie* $(p_j)_{j\in J}$ est majorée par l'une des semi-normes p_i .

Par exemple, la famille de semi-normes $(p_\varphi)_{\varphi\in E^*}$ définie dans l'exemple 2 ci-dessus n'est *pas* filtrante.

Cependant, pour toute famille $(p_i)_{i\in I}$ de semi-normes sur E, la famille suivante de semi-normes est filtrante :

> $(p_J)_{J \text{ fini } \subset I}$, où p_J est la semi-norme $x \mapsto \max_{j\in J} p_j(x)$.

Topologie associée

Soit $(p_i)_{i\in I}$ une famille *filtrante* de semi-normes (on peut toujours se ramener au cas filtrant, par la procédure ci-dessus). Alors, les ensembles suivants forment une famille de bases de voisinages définissant une topologie sur E, qui fait de E un espace vectoriel topologique (un tel espace est appelé un espace localement convexe) :

On prend, comme base de voisinages de chaque vecteur x, la famille, indexée par $i \in I$ et $R > 0$, des ensembles (appelés « *p*-boules ») :

$$\beta(x,i,R) := \{y \in E \mid p_i(y-x) < R\}.$$

Autrement dit : les voisinages de x sont les ensembles contenant au moins une « *p*-boule » de centre x.

Démonstration

Vérifions que les 5 axiomes des voisinages sont bien satisfaits :

1. Si V est un voisinage de x et $W \supset V$ alors W est un voisinage de x : par définition.
2. L'intersection de deux voisinages de x est un voisinage de x : si $\beta(x,i_1,R_1) \subset V$ et $\beta(x,i_2,R_2) \subset W$, comme la famille de semi-normes est filtrante, il existe une semi-norme p_i de la famille majorant p_{i_1} et p_{i_2}. Alors $\beta(x,i,\min(R_1,R_2)) \subset V \cap W$.
3. E est un voisinage de x : immédiat.
4. Tout voisinage de x contient x : $x \in \beta(x,i,R)$.
5. Pour tout voisinage V de x, il existe un voisinage W de x tel que V est un voisinage de chaque point de W : soit $y \in W := \beta(x,i,R) \subset V$, il existe $\alpha > 0$ tel que $p_i(y-x) + \alpha < R$ et alors $\forall z \in E \quad p_i(z-y) < \alpha \Rightarrow p(z-x) \leq p(y-x) + p(z-y) < p(y-x) + \alpha < R$. Ceci qui montre que $\beta(y,i,\alpha) \subset \beta(x,i,R) \subset V$, qui est donc un voisinage de y.

La topologie que nous venons de définir est compatible avec la structure d'espace vectoriel : même démonstration que pour la topologie associée à une norme.

Article connexe

Jauge d'un convexe