计算方法 第 1 章习题答案

1.1 已知 $\sqrt{2}=1.414213562373\cdots$, 分别写出准确到 $3\sim5$ 位小数的近似值, 指出它们的绝对误差界、相对误差界以及有效数字的位数.

解 ① 1.414 是 $\sqrt{2}$ 的一个近似值. 由于

$$|\sqrt{2}-1.414|=0.000213562373\cdots<0.0005=\frac{1}{2}\times10^{-3},$$

故近似值 1.414 准确到 3 位小数, 有 4 位有效数字, 而且

$$|\sqrt{2}-1.414|\leqslant\varepsilon=\frac{1}{2}\times10^{-3},\quad \frac{|\sqrt{2}-1.414|}{\sqrt{2}}\leqslant\varepsilon_r=\frac{1}{2}\times10^{-3}.$$

② 1.4142 是 $\sqrt{2}$ 的一个近似值. 由于

$$|\sqrt{2}-1.4142|=0.000013562373\cdots<0.00005=\frac{1}{2}\times10^{-4},$$

故近似值 1.4142 准确到 4 位小数, 有 5 位有效数字, 而且

$$|\sqrt{2}-1.4142|\leqslant\varepsilon=\frac{1}{2}\times10^{-4},\quad \frac{|\sqrt{2}-1.4142|}{\sqrt{2}}\leqslant\varepsilon_r=\frac{1}{2}\times10^{-4}.$$

③ 1.41421 是 $\sqrt{2}$ 的一个近似值. 由于

$$|\sqrt{2}-1.41421|=0.000003562373\cdots<0.000005=\frac{1}{2}\times10^{-5},$$

故近似值 1.41421 准确到 5 位小数, 有 6 位有效数字, 而且

$$|\sqrt{2}-1.41421|\leqslant\varepsilon=\frac{1}{2}\times10^{-5},\quad \frac{|\sqrt{2}-1.41421|}{\sqrt{2}}\leqslant\varepsilon_r=\frac{1}{2}\times10^{-5}.$$

1.6 设 $|x|\ll1$, 如何计算下列公式, 使得到的结果比较准确:

(1) $\dfrac{1}{1+2x}-\dfrac{1-x}{1+x}$; (2) $\dfrac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{x}}$;

(3) $\dfrac{1-\cos(2x)}{x}$; (4) $\ln\dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{|x|}$.

解 (1) 避免两个相近的数做减法, 可变换算式

$$\frac{1}{1+2x}-\frac{1-x}{1+x}=\frac{2x^2}{(1+2x)(1+x)}.$$

(2) 避免绝对值小的数做除数, 可变换算式

+ 避免相近的数做减法

$$\frac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{x}}=\frac{2x^2}{\sqrt{x}\big(\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}\big)}=\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}.$$

避免相近的数作减法

(3) ~~避免绝对值小的数做除数~~, 可变换算式

$$\frac{1-\cos(2x)}{x} = \frac{2\sin^2 x}{x}.$$

(4) 避免绝对值小的数做除数, 可变换算式

$$\ln\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{|x|} = \ln\frac{x^2}{|x|\big(1+\sqrt{1-x^2}\big)} = \ln\frac{|x|}{1+\sqrt{1-x^2}}.$$

1.8 化简或改写下列算式, 以减少运算次数:

(1) $(x-5)^4+9(x-5)^3+7(x-5)^2+6(x-5)+4$;

(2) $1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^3}{3!}+\cdots+\dfrac{x^n}{n!}$;

(3) $\dfrac{1}{1\times 3}+\dfrac{1}{2\times 4}+\dfrac{1}{3\times 5}+\cdots+\dfrac{1}{99\times 101}$.

解 (1)

$$\begin{aligned}&(x-5)^4+9(x-5)^3+7(x-5)^2+6(x-5)+4\\ =&\Bigg(\Big(\big((x-5)+9\big)(x-5)+7\Big)(x-5)+6\Bigg)(x-5)+4;\end{aligned}$$

(2)

$$1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!} = \Big(\cdots\big((\frac{x}{n}+1)\frac{x}{n-1}+1\big)\frac{x}{n-2}+1\big)\cdots\Big)x+1;$$

(4) 由于对任意的正整数$n\geqslant 1$ 都有 $\frac{1}{n\times(n+2)}=\frac{1}{2}\big(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\big)$, 因此

$$\begin{aligned}&\frac{1}{1\times 3}+\frac{1}{2\times 4}+\frac{1}{3\times 5}+\cdots+\frac{1}{99\times 101}\\ =&\frac{1}{2}\Bigg(\big(1-\frac{1}{3}\big)+\big(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\big)+\big(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\big)+\cdots+\big(\frac{1}{98}-\frac{1}{100}\big)+\big(\frac{1}{99}-\frac{1}{101}\big)\Bigg)\\ =&\frac{1}{2}\Bigg(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{100}-\frac{1}{101}\Bigg).\end{aligned}$$

1.10 已知积分 $I_k=\int_0^1\frac{x^k}{x+6}\mathrm{dx}$ 具有如下递推关系:

$$I_k=\int_0^1\frac{x+6-6}{x+6}x^{k-1}\mathrm{dx}=\int_0^1 \mathrm{x^{k-1}dx-6I_{k-1}}=\frac{1}{\mathrm{k}}-\mathrm{6I_{k-1}}.$$

取 4 位小数，用以下两种递推方法计算积分 $I_0, I_1, \cdots, I_7$ 的近似值.

算法 1　令 $I_0=0.1542\approx\ln\frac{7}{6}$, 计算

$$I_k=\frac{1}{k}-6I_{k-1},\ \ k=1,2,\cdots,7.$$

算法 2　令 $I_{11}=0$, 计算

$$I_{k-1}=\frac{1-kI_k}{6k},\ \ k=11,10,\cdots,1.$$

哪种算法计算准确, 原因为何?

解 对于算法 1, 给定 I_0 的近似值 $\widetilde{I}_0$. 若只考虑这一步产生的误差, 假设以后各步计算无误差. 记 $\widetilde{I}_k$ 是 I_k 的近似值, 则

$$\begin{aligned}I_k&=\frac{1}{k}-6I_{k-1},\quad k=1,2,\cdots,7,\\ \widetilde{I}_k&=\frac{1}{k}-6\widetilde{I}_{k-1},\quad k=1,2,\cdots,7,\end{aligned}$$

以上两式相减得到

$$|I_k-\widetilde{I}_k|=6|I_{k-1}-\widetilde{I}_{k-1}|=6^k|I_0-\widetilde{I}_0|,\ \ k=1,2,\cdots,7.$$

由此递推可得

$$|I_7-\widetilde{I}_7|=6^7|I_0-\widetilde{I}_0|=29936|I_0-\widetilde{I}_0|.$$

这说明计算 I_7 产生的误差是初始 I_0 误差的 29936 倍. 对任意的正整数 $k\geqslant 1$, 计算 I_k 产生的误差是初始 I_0 误差的 6^k 倍, 随着 k 的增大, 误差无限增大, 因此算法 1 是数值不稳定的.

对于算法 2, 类似地可得

$$|I_{k-1}-\widetilde{I}_{k-1}|=\frac{1}{6}|I_k-\widetilde{I}_k|,\ \ k=11,10,\cdots,1,$$

由此递推可得

$$|I_0-\widetilde{I}_0|=\frac{1}{6^{11}}|I_{11}-\widetilde{I}_{11}|=\frac{1}{362797056}|I_{11}-\widetilde{I}_{11}|.$$

这说明计算 I_0 产生的误差是初始 I_{11} 误差的 362797056 分之一, 因此算法 2 是数值稳定的.

表 1: 两种积分算法的数值计算结果比较

	I_0	I_1	I_2	I_3	I_4	I_5
算法 1	0.1542	0.0748	0.0512	0.0261	0.0934	-0.3604
算法 2	0.1542	0.0751	0.0494	0.0368	0.0293	0.0243
	I_6	I_7	I_8	I_9	I_{10}	I_{11}
算法 1	2.3291	-13.8317	83.1152	-498.5801	2991.5806	-17949.3927
算法 2	0.0208	0.0181	0.0162	0.0141	0.0152	0.0000