Convergence, Intégration, Probabilités

Séance 3 - Tribus et mesures

Cas particulier des espaces de probabilité

CentraleSupélec

Cursus ingénieur

24 septembre 2019

Amphis CIP 3 et 4

- Ioane MUNI TOKE
  Laboratoire MICS
  Bâtiment Bouygues, Bureau sc.113
  `ioane.muni-toke@centralesupelec.fr`

- Chaire de Finance Quantitative (Equipe FiQuant)
  - Probabilités appliquées, modélisation stochastique.
  - Statistiques appliquées et applications aux données financières haute-fréquence.
  - Microstructure des marchés financiers et carnets d'ordres.

- Dans le cursus CentraleSupelec:
  - 1A ST4 MDS Données et Statistiques en Finance
  - 2A ST7 MDS Modélisation des risques financiers
  - 3A Modélisation mathématique et Mathématiques Financières ($\approx$)

Des questions ?

- `daskit.com/cip19-20` puis section “Amphi 3”

Programme

Introduction

Tribu et mesurabilité

- Tribu
- Fonctions mesurables
- Fonctions étagées

Mesure sur une tribu

Espace de probabilité

- Evénements, probabilités
- (Rappels : Probabilités conditionnelles, indépendance)
- Cas Ω fini ou dénombrable

Programme

Introduction

Tribu et mesurabilité

Tribu

Fonctions mesurables

Fonctions étagées

Mesure sur une tribu

Espace de probabilité

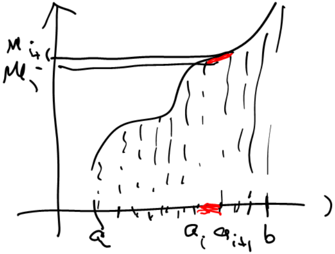
Evénements, probabilités

(Rappels : Probabilités conditionnelles, indépendance)

Cas Ω fini ou dénombrable

Un peu d'histoire

" Pour définir l'intégrale d'une fonction continue croissante $y(x), (a < x < b)$, on divise l'intervalle (a, b) en intervalles partiels et l'on fait la somme des quantités obtenues en multipliant la longueur de chaque intervalle partiel par l'une des valeurs de y quand x est dans cet intervalle. Si x est dans l'intervalle (a_i, a_{i+1}), y varie entre certaines limites m_i et m_{i+1}, et réciproquement si y est entre m_i et m_{i+1}, x est entre a_i et a_{i+1}.



De sorte qu'au lieu de se donner la division de la variation de x, c'est-à-dire les nombres a_i, on aurait pu se donner la division de la variation de y, c'est-à-dire les nombres m_i. De là deux manières de généraliser la notion d'intégrale. On sait que la première (se donner les a_i) conduit à la définition donnée par Riemann et aux définitions des intégrales par excès et par défaut données par M.Darboux. Voyons la seconde. "

Henri Lebesgue, Sur une généralisation de l'intégrale définie, Comptes-rendus de l'Académie des Sciences de Paris, Vol.132, 1901.

- Pour définir l'objet "intégrale de la fonction f sur l'ensemble E", on découpe $f(E)$ selon les valeurs prises par f et on "mesure" les ensembles de la forme $\{x \in E : f(x) = y\}$. $= f^{-1}(\{y\})$

  $\{x \in E : f(x) \in]u_i, u_{i+1}]\} = f^{-1}$

- Etapes préalables nécessaires:
  - définir une *mesure* sur un ensemble ;
  - identifier les ensembles que nous allons mesurer.

- D'où le cheminement des séances à venir :

  Tribu $\Rightarrow$ **Mesure** $\Rightarrow$ **Intégrale**

  + fonctions

Rappel : Topologie et continuité d'une fonction

Définition 3.1 (Topologie – Rappel séances précédentes)

Une collection $\mathcal{T}$ de parties de E est une **topologie** *si :*

(O1) $\emptyset \in \mathcal{T}$ et $E \in \mathcal{T}$.

(O2) *Si* $A, B \in \mathcal{T}$, *alors* $A \cap B \in \mathcal{T}$.

(O3) *Pour toute famille* $(A_i)_{i \in \mathcal{I}}$ *dans* $\mathcal{T}$, $\bigcup_{i \in \mathcal{I}} A_i \in \mathcal{T}$.

Les éléments de $\mathcal{T}$ sont appelés ouverts de $\mathcal{T}$.

Définition 3.2 (Continuité d'une fonction – Rappel séances précédentes)

Une fonction $f : E \to F$ est continue si et seulement si l'image réciproque par f de tout ouvert de F est un ouvert de E, i.e.

$$\forall V \in \mathcal{T}_F,\ f^{-1}(V) \in \mathcal{T}_E.$$

Programme

Introduction

Tribu et mesurabilité
- Tribu
- Fonctions mesurables
- Fonctions étagées

Mesure sur une tribu

Espace de probabilité
- Evénements, probabilités
- (Rappels : Probabilités conditionnelles, indépendance)
- Cas Ω fini ou dénombrable

Programme

Introduction

Tribu et mesurabilité
- Tribu
- Fonctions mesurables
- Fonctions étagées

Mesure sur une tribu

Espace de probabilité
- Evénements, probabilités
- (Rappels : Probabilités conditionnelles, indépendance)
- Cas Ω fini ou dénombrable

Tribu – Définition et premiers exemples

Définition 3.3 (Tribu)

Une tribu $\mathcal{T}$ sur un ensemble Ω est une collection non vide de parties de Ω qui vérifie :

(T1) $\emptyset \in \mathcal{T}$.

(T2) *Stabilité par passage au complémentaire : si $A \in \mathcal{T}$ alors $\Omega \setminus A \in \mathcal{T}$.*

(T3) *Stabilité par unions dénombrables : si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille d'éléments de $\mathcal{T}$, alors on a $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{T}$.*

$\rightarrow \{\emptyset, \Omega\}$ tribu grossière

$\rightarrow \mathcal{P}(\Omega)$ tribu triviale / discrète

$\rightarrow A \subset \Omega : \{\emptyset, A, \Omega \setminus A, \Omega\}$ tribu

Tribu – Propriétés élémentaires I

Proposition 3.4 (Propriétés d'une tribu)

Soit $\mathcal{T}$ une tribu sur un ensemble Ω. Alors :

(a) $\Omega \in \mathcal{T}$;

(b) $\mathcal{T}$ *est stable par intersection dénombrable : si* $\forall n \in \mathbb{N}, A_n \in \mathcal{T}$, *alors* $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{T}$;

(c) $\mathcal{T}$ *est stable par réunion et intersection finie ;*

(d) $\mathcal{T}$ *est stable par différence : si* $A \in \mathcal{T}$ *et* $B \in \mathcal{T}$, *alors* $A \setminus B \in \mathcal{T}$;

(a) $\Omega = \Omega \setminus \emptyset$

(b) $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \Omega \setminus \overbrace{\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Omega \setminus \underbrace{A_n}_{\in\mathcal{T}}\Big)}^{\in\mathcal{T}} \in \mathcal{T}$

(c) $(A_n)_{n=0..N}$ $\quad B_n = \begin{cases} A_n & \text{si } n = 0 \dots N \\ \emptyset & \text{si } n \geq N+1 \end{cases}$

Tribu – Propriétés élémentaires II

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcap_{k\geq n} A_k$$

$$A \Delta B$$

Espaces mesurables

Définition 3.5 (Espace mesurable)

Le couple $(\Omega, \mathcal{T})$ est appelé espace mesurable.

Définition 3.6 (Parties mesurables)

Les éléments de $\mathcal{T}$ sont appelées les parties $\mathcal{T}$-mesurables de Ω, ou simplement, s'il n'y a pas d'ambiguïté possible, parties mesurables de Ω.

Espaces mesurables usuels

→ espace discret $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ ... on travaille usuellement avec $\mathcal{P}(\Omega)$ $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$

→ Cas de $\mathbb{R}$? $\mathbb{R}^n$?

Tribu engendrée – Definition

Définition 3.7 (Tribu engendrée)

Soit $\mathcal{A}$ une collection de parties de Ω. L'intersection de toutes les tribus contenant $\mathcal{A}$ est une tribu. On l'appelle tribu engendrée par $\mathcal{A}$, et elle est usuellement notée $\sigma(\mathcal{A})$.

$\sigma(\mathcal{A})$ est donc la plus petite tribu contenant $\mathcal{A}$ au sens de l'inclusion.

$(\mathcal{A}_i)_{i\in I} \rightarrow$ quelconque

- $\forall i, \emptyset \in \mathcal{A}_i \Rightarrow \emptyset \in \bigcap_{i\in I} \mathcal{A}_i$
-
-

Tribu engendrée – Propriétés

Proposition 3.8 (Propriétés d'une tribu engendrée)

Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux collections de parties de Ω. Alors :

(a) $\mathcal{A} \subset \mathcal{B} \Longrightarrow \sigma(\mathcal{A}) \subset \sigma(\mathcal{B})$;

(b) *pour toute tribu $\mathcal{T}$ sur Ω, $\mathcal{A} \subset \mathcal{T} \Longrightarrow \sigma(\mathcal{A}) \subset \mathcal{T}$.*

(a) $\sigma(\mathcal{B})$ tribu contenant $\mathcal{A}$; or, $\sigma(\mathcal{A})$ plus petite tribu contenant $\mathcal{A}$

(b) idem .

Tribu de Borel

Définition 3.9 (Tribu de Borel)

On appelle tribu de Borel ou tribu borélienne de $\mathbb{R}$, et on note $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, la tribu engendrée par les ouverts de $\mathbb{R}$. Ses éléments sont appelés boréliens.

- $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ est l'espace mesurable usuel.
- **TD Exercice III.2** : $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma\left(\{]-\infty, a[, a \in \mathbb{R}\}\right)$.] $\mathbb{Q}$
- Tribu de Borel sur $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\} = [-\infty, +\infty]$? $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$

→ topologie de l'ordre sur $\overline{\mathbb{R}}$
sur $\mathbb{R}$ → topologie usuelle

Conséquence: Les boréliens de $\overline{\mathbb{R}}$ sont les boréliens de $\mathbb{R}$ auxquels on peut ajouter (union) les éléments $\{-\infty\}$ et/ou $\{+\infty\}$. ||

▸ $\mathcal{B}([a,b])$, $\mathcal{B}(\mathbb{R}^*)$

Programme

Introduction

Tribu et mesurabilité

- Tribu
- Fonctions mesurables
- Fonctions étagées

Mesure sur une tribu

Espace de probabilité

- Evénements, probabilités
- (Rappels : Probabilités conditionnelles, indépendance)
- Cas Ω fini ou dénombrable

Fonctions mesurables, fonctions boréliennes

Soit $(\Omega, \mathcal{T})$ et $(\Omega', \mathcal{T}')$ deux espaces mesurables.

Définition 3.10 (Fonction mesurable)

Une fonction $f : (\Omega, \mathcal{T}) \to (\Omega', \mathcal{T}')$ est dite mesurable *si l'image réciproque de la tribu $\mathcal{T}'$ par f est incluse dans la tribu $\mathcal{T}$, i.e.*

$$f^{-1}(\mathcal{T}') \subset \mathcal{T}, \text{ ou encore } \forall A' \in \mathcal{T}', f^{-1}(A') \in \mathcal{T}.$$

ex : $A \subset \Omega$ $f = \mathbb{1}_A : (\Omega, \mathcal{T}) \longrightarrow (\{0,1\}, \mathcal{P}(\{0,1\}))$

$f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$ $f^{-1}(\{1\}) = A$ $f^{-1}(\{0\}) = \Omega \setminus A$ $f^{-1}(\{0,1\}) = \Omega$

f mesurable ssi $A \in \mathcal{T}$.

Définition 3.11 (Fonction borélienne)

Une fonction mesurable de $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ est dite borélienne.

Mesurabilité: tribu engendrée

Proposition 3.12 (Mesurabilité et tribu engendrée)

Si $\mathcal{T}' = \sigma(\mathcal{A}')$ avec $\mathcal{A}'$ une collection de parties de Ω', alors f est mesurable si et seulement si l'image réciproque de la collection $\mathcal{A}'$ par f est incluse dans la tribu $\mathcal{T}$, i.e. $f^{-1}(\mathcal{A}') \subset \mathcal{T}$, ou encore $\forall A' \in \mathcal{A}', f^{-1}(A') \in \mathcal{T}$.

$(\Rightarrow)$ f mesurable ... OK

$(\Leftarrow)$ si $f^{-1}(\mathcal{A}') \subset \mathcal{T}$; alors : lemme de transport

$$\mathcal{T} \supset \sigma(f^{-1}(\mathcal{A}')) = f^{-1}(\sigma(\mathcal{A}')) = f^{-1}(\mathcal{T}')$$

Corollaire 3.13 (Mesurabilité des fonctions continues)

Toute fonction continue $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est borélienne.

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\cancel{\mathcal{O}(\mathbb{R})} \text{ ouverts})$$

- Voir aussi **TD Exercice III.2.1**.

Composition de fonctions mesurables

Proposition 3.14 (Composition de fonctions mesurables)

Soient $f : (\Omega, \mathcal{T}) \to (\Omega', \mathcal{T}')$ et $g : (\Omega', \mathcal{T}') \to (\Omega'', \mathcal{T}'')$ deux fonctions mesurables. Alors $g \circ f$ est mesurable.

$A \in \mathcal{T}''$ $\quad (g \circ f)^{-1}(A) = f^{-1}(g^{-1}(A)) \in \mathcal{T}.$

- Voir aussi **TD Exercice III.2.2**.

Opérations sur les fonctions mesurables à valeurs réelles

Proposition 3.15 (Fonction indicatrice)

$\mathbf{1}_A : (\Omega, \mathcal{T}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ *est mesurable si et seulement si* $A \in \mathcal{T}$.

$B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) : \mathbf{1}_A^{-1}(B) \in \{\emptyset, A, \Omega \setminus A, \Omega\}$

Proposition 3.16 (Algèbre des fonctions mesurables)

Soient deux fonctions f *et* g *de* $(\Omega, \mathcal{T}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. *Soit* $\alpha \in \mathbb{R}$. *Si* f *et* g *sont mesurables alors* $f + g$ *et* fg *sont mesurables.*

Proposition 3.17 (Suites de fonctions à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$)

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *une suite de fonctions mesurables de* $(\Omega, \mathcal{T})$ *dans* $\left(\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})\right)$. *Alors* $\sup_n f_n$, $\inf_n f_n$, $\liminf_n f_n$, $\limsup_n f_n$, $\lim_n f_n$ *(si elle existe) et* $\sum_n f_n$ *(si elle existe) sont mesurables.*

$\{x : \sup f_n(x) > a\} = \bigcup_n \{x : f_n(x) > a\}$

Mesurabilité des fonctions usuelles

- **Multiples exemples et applications : TD Exercice III.4**

f C^0

f monotone : $\uparrow \downarrow$

f C^0 par morceaux.

Programme

Introduction

Tribu et mesurabilité

- Tribu
- Fonctions mesurables
- Fonctions étagées

Mesure sur une tribu

Espace de probabilité

- Evénements, probabilités
- (Rappels : Probabilités conditionnelles, indépendance)
- Cas Ω fini ou dénombrable

Fonctions étagées

Définition 3.18 (Fonction étagée)

Une fonction $f : (\Omega, \mathcal{T}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ mesurable est dite étagée si elle ne prend qu'un nombre fini de valeurs dans $\mathbb{R}$.

On note $\mathcal{E}(\Omega, \mathcal{T})$ l'ensemble des fonctions étagées sur $(\Omega, \mathcal{T})$ à valeurs dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

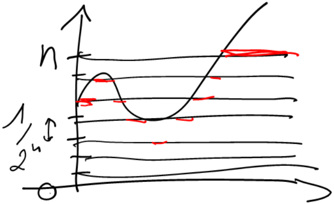
- Exemples: $\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}$
- Forme canonique d'une fonction étagée: Toute fonction étagée s'écrit de façon unique sous la forme $f = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \mathbf{1}_{A_i}$ où $N \in \mathbb{N}^*$, les $(\alpha_i)_{i \in \{1,\dots,N\}}$ sont des éléments de $\mathbb{R}$ *deux à deux distincts*, et les $(A_i)_{i \in I}$ sont des éléments de $\mathcal{T}$ formant une *partition* de Ω.
- $\mathcal{E}(\Omega, \mathcal{T}) = \text{Vect}\left(\{\mathbf{1}_A : A \in \mathcal{T}\}\right)$.
- Si f et g sont étagées, alors $f + g$ et fg sont étagées.

$f = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbb{1}_{A_i}$ $g = \sum_{j=1}^{p} \beta_j \mathbb{1}_{B_j}$ $f+g = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} (\alpha_i + \beta_j) \mathbb{1}_{A_i \cap B_j}$

Théorèmes d'approximation

Théorème 3.19 (Approximation des fonctions mesurables)

Soit une fonction $f : (\Omega, \mathcal{T}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. *Si* f *est mesurable, alors* f *est limite (simple) d'une suite de fonctions étagées* $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$.



$$f_n = \sum \frac{k}{2^n} \mathbb{1}_{\{\frac{k}{2^n} \leq f(x) < \frac{k+1}{2^n}\}} + n \mathbb{1}_{\{f(x) \geq n\}}$$

- **TD Exercice III.5**: démonstration complète.

Corollaire 3.20 (Corollaire pour les fonctions positives)

Soit une fonction $f : (\Omega, \mathcal{T}) \to (\overline{\mathbb{R}}_+, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}_+))$ *mesurable. Alors* f *est limite simple d'une suite croissante de fonctions étagées positives.*

Programme

Introduction

Tribu et mesurabilité
- Tribu
- Fonctions mesurables
- Fonctions étagées

Mesure sur une tribu

Espace de probabilité
- Evénements, probabilités
- (Rappels : Probabilités conditionnelles, indépendance)
- Cas Ω fini ou dénombrable

Mesure, espace mesuré

Définition 3.21 (Mesure)

Soit $(\Omega, \mathcal{T})$ un espace mesurable. On appelle mesure sur $(\Omega, \mathcal{T})$ toute application $\mu : \mathcal{T} \to \overline{\mathbb{R}_+}$ telle que :

(M1) *la mesure de l'ensemble vide est nulle : $\mu(\emptyset) = 0$;*

(M2) *μ est σ-additive : si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille d'éléments de $\mathcal{T}$ deux à deux disjoints, alors $\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n)$.*

Définition 3.22 (Espace mesuré)

Le triplet $(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ est appelé espace mesuré.

Premiers exemples de mesures

- Soit $a \in \Omega$ fixé. $\delta_a : A \in \mathcal{P}(\Omega) \mapsto \mathbf{1}_A(a) = \begin{cases} 1 & \text{si } a \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

  est une mesure sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ appelée mesure de Dirac au point $a \in \Omega$.

  $\to \delta_a(\emptyset) = 0$

  $\to (A_n)_n$ de $\mathcal{P}(\Omega)$ 2 à 2 disjoints

  $\delta_a(\bigcup_n A_n) = \begin{cases} 1 & \text{si } a \in A_n \\ 0 & \end{cases} \overset{?}{=} \sum_{n \in \mathbb{N}} \delta_a(A_n)$

- Dans le cas $\Omega = \mathbb{N}$ et $\mathcal{T} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$, $\mu : A \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \mapsto \text{Card } A$ si A est une partie finie et $+\infty$ sinon, est une mesure sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ appelée mesure de comptage.

Propriétés d'une mesure I

Proposition 3.23 (Propriétés d'une mesure)

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ *un espace mesuré.*

(a) *(Additivité finie) Pour toute famille finie* $(A_n)_{n=1,\dots,N}$ *d'éléments deux à deux disjoints de* $\mathcal{T}$, $\mu\left(\bigcup_{n=1}^N A_n\right) = \sum_{n=1}^N \mu(A_n)$.

(b) *(Croissance) Pour tous* $A, B \in \mathcal{T}$, *si* $A \subset B$, *alors* $\mu(A) \leq \mu(B)$.

(c) *Pour tous* $A, B \in \mathcal{T}$, *si* $A \subset B$ *et si* $\mu(A) < +\infty$, *alors* $\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$.

(d) *("Principe d'inclusion-exclusion") Pour tous* $A, B \in \mathcal{T}$, $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B)$.

(b) $B = A \cup B \setminus A$ union disjointe

$\mu(B) = \mu(A) + \underbrace{\mu(B \setminus A)}_{\geq 0}$

Propriétés d'une mesure II

Propriétés d'une mesure III

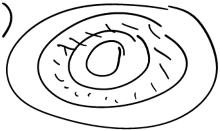
Proposition 3.24 (Propriétés d'une mesure (suite))

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré.

(a) *Pour toute suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ croissante (au sens de l'inclusion) d'éléments de $\mathcal{T}$, $\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \lim_n \mu(A_n)$.*

(b) *Pour toute suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante (au sens de l'inclusion) d'éléments de $\mathcal{T}$ telle que l'un au moins de A_n soit de mesure finie, $\mu\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \lim_n \mu(A_n)$.*

(c) *(Sous-additivité dénombrable) Pour toute suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{T}$, $\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n)$.*

(a) 

$B_0 = A_0$

$B_n = A_n \setminus A_{n-1}$

2 à 2 disjoints

Propriétés d'une mesure IV

Définitions complémentaires

- Un point $a \in \Omega$ est un atome si $\{a\} \in \mathcal{T}$ et $\mu(\{a\}) > 0$.
- μ est dite diffuse si elle n'a pas d'atomes.
- Si $\mu(\Omega) < \infty$, la mesure est dite finie ou bornée.
- S'il existe une suite $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ croissante d'éléments de $\mathcal{T}$ telle que $\Omega = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \mu(E_n) < \infty$, alors la mesure μ est dite σ-finie.
- Si $\mu(\Omega) = 1$, μ est une mesure de probabilité.

Programme

Introduction

Tribu et mesurabilité

- Tribu
- Fonctions mesurables
- Fonctions étagées

Mesure sur une tribu

Espace de probabilité

- Evénements, probabilités
- (Rappels : Probabilités conditionnelles, indépendance)
- Cas Ω fini ou dénombrable

Programme

Introduction

Tribu et mesurabilité
- Tribu
- Fonctions mesurables
- Fonctions étagées

Mesure sur une tribu

Espace de probabilité
- Evénements, probabilités
- (Rappels : Probabilités conditionnelles, indépendance)
- Cas Ω fini ou dénombrable

$(\Omega, \mathcal{F}, \mu) \xrightarrow{\text{jeudi}} \int$

Univers, expériences aléatoires, probabilités

- Introduction aux probabilités: expériences aléatoires, lancer de dés, pile ou face, univers, événements, opérations sur les événements, probabilités.

$(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$

- La notion d'espace mesuré (espace, tribu, mesure) est une structure idéale pour la formalisation des probabilités.

Kolmogorov

Tribu des événements, probabilité

Définition 3.25 (Tribu des événements)

Un événement est un élément de la tribu $\mathcal{F}$ de Ω :

1. $\emptyset \in \mathcal{F}$ et $\Omega \in \mathcal{F}$;
2. *$\mathcal{F}$ est stable par complémentation : si $A \in \mathcal{F}$ alors $A^c = \Omega \setminus A \in \mathcal{F}$;*
3. *$\mathcal{F}$ est stable par intersections et unions finies ou dénombrables : si $A_n \in \mathcal{F}$ pour tout $n \in \mathcal{T}$ fini ou dénombrable, alors $\bigcap_{n \in \mathcal{T}} A_n \in \mathcal{F}$ et $\bigcup_{n \in \mathcal{T}} A_n \in \mathcal{F}$.*

$\mathcal{F}$ est stable par différence : $A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \setminus B \in \mathcal{F}$

Définition 3.26 (Mesure de probabilité)

Une mesure de probabilité sur l'espace mesurable $(\Omega, \mathcal{F})$ est une application $\mathbf{P} : \mathcal{F} \to [0, 1]$ telle que

1. $\mathbf{P}(\emptyset) = 0$ *et* $\boxed{\mathbf{P}(\Omega) = 1}$;
2. *$\mathbf{P}$ est σ-additif, i.e. pour toute suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments 2 à 2 disjoints,*
$$\mathbf{P}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}(A_n).$$

Propriétés fondamentales des mesures de probabilité

Proposition 3.27 (Propriétés des mesures de probabilité)

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ *un espace de probabilité. Soient* $A, B \in \mathcal{F}$.

(a) $\mathbf{P}(A^c) = 1 - \mathbf{P}(A)$

(b) $B \subset A \Rightarrow \mathbf{P}(A \setminus B) = \mathbf{P}(A) - \mathbf{P}(B)$

(c) $\mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A \cap B)$

(d) *Si* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite croissante dans* $\mathcal{F}$ *alors* $\mathbf{P}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(A_n)$.

(e) *Si* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite décroissante dans* $\mathcal{F}$ *alors* $\mathbf{P}\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(A_n)$.

Définition 3.28 (Evénement P-presque sûr)

Un événement A *d'un espace de probabilité* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ *est dit* **P**-presque sûr *(ou simplement* presque sûr*) si* $\mathbf{P}(A) = 1$.

Mesure de probabilité – premiers exemples

- Mesure de Dirac en $a \in \Omega$ quelconque muni de la tribu $\mathcal{F}$.

$$\begin{array}{rcl} \delta_a : \mathcal{F} & \to & [0,1] \\ A & \mapsto & \begin{cases} 1 & \text{si } a \in A \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \end{array}$$

- Mesure de comptage sur $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$ muni de la tribu $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$.

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{P} : \mathcal{P}(\Omega) & \to & [0,1] \\ A & \mapsto & \displaystyle\frac{1}{\mathrm{Card}(\Omega)} \sum_{\omega \in \Omega} \mathbb{1}_A(\omega) = \frac{\mathrm{Card}(A)}{\mathrm{Card}(\Omega)}. \end{array}$$

Programme

Introduction

Tribu et mesurabilité
- Tribu
- Fonctions mesurables
- Fonctions étagées

Mesure sur une tribu

Espace de probabilité
- Evénements, probabilités
- (Rappels : Probabilités conditionnelles, indépendance)
- Cas Ω fini ou dénombrable

Probabilités conditionnelles

Définition 3.29

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ *un espace probabilisé et* $B \in \mathcal{F}$ *tel que* $\mathbf{P}(B) \neq 0$. *On définit la* probabilité conditionnelle de $A \in \mathcal{F}$ sachant B *par*

$$\mathbf{P}(A \mid B) = \frac{\mathbf{P}(A \cap B)}{\mathbf{P}(B)}.$$

Théorème de Bayes

Théorème 3.30 (Equation de partition)

Soit $(E_n)_n$ *une partition finie ou dénombrable de l'espace probabilisé* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$.
Alors, pour tout événement $A \in \mathcal{F}$,

$$\mathbf{P}(A) = \sum_n \mathbf{P}(A \mid E_n)\mathbf{P}(E_n).$$

Théorème 3.31 (de Bayes)

Soit $(E_n)_n$ *une partition finie ou dénombrable de l'espace probabilisé* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$.
Alors, pour tout événement $A \in \mathcal{F}$ *tel que* $\mathbf{P}(A) > 0$,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathbf{P}(E_n \mid A) = \frac{\mathbf{P}(A \mid E_n)\mathbf{P}(E_n)}{\sum_m \mathbf{P}(A \mid E_m)\mathbf{P}(E_m)}.$$

Indépendance

Définition 3.33

Deux événements A *et* B *d'un espace de probabilité* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ *sont dits* indépendants *si*

$$\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B).$$

Définition 3.34

Des événements $(A_i)_{i \in \mathcal{I}}$ *d'un espace probabilisé* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ *sont dits* indépendants *si pour toute partie finie* $\mathcal{J} \subset \mathcal{I}$

$$\mathbf{P}\left(\bigcap_{i \in \mathcal{J}} A_i\right) = \prod_{i \in \mathcal{J}} \mathbf{P}(A_i).$$

Proposition 3.36

Si A et B sont des événements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, avec $\mathbf{P}(B) > 0$, alors A et B sont indépendants si et seulement si $\mathbf{P}(A \mid B) = \mathbf{P}(A)$.

Programme

Introduction

Tribu et mesurabilité
- Tribu
- Fonctions mesurables
- Fonctions étagées

Mesure sur une tribu

Espace de probabilité
- Evénements, probabilités
- (Rappels : Probabilités conditionnelles, indépendance)
- Cas Ω fini ou dénombrable

Probabilité sur un espace fini ou dénombrable

Théorème 3.37 (Caractérisation des probabilités sur Ω dénombrable)

(a) *Dans l'espace probabilisé* **dénombrable** $(\Omega, \mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega), \mathbf{P})$, *la mesure de probabilité* $\mathbf{P}$ *est caractérisée par ses valeurs sur les atomes :* $p_\omega = \mathbf{P}(\{\omega\})$, $\omega \in \Omega$.

$A \subset \Omega : \mathbb{P}(A) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{\omega \in A} \{\omega\}\right) = \sum \mathbb{P}(\{\omega\})$

(b) *Soit* $\Omega = \{\omega_n ;\ n \in \mathbb{N}\}$ *un ensemble dénombrable et* $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *une suite de réels. Alors, il existe une probabilité* $\mathbf{P}$ *telle que* $\mathbf{P}(\{\omega_n\}) = p_n$ *(*$\forall n$*) si et seulement si*

- $\forall n \in \mathbb{N}; \quad p_n \geq 0$
- *et* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1$.

La probabilité $\mathbf{P}$ *est alors unique.*

Variables aléatoires sur un espace discret

Définition 3.38

Soient $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé fini ou dénombrable et E un ensemble muni de la tribu $\mathcal{P}(E)$.
On appelle variable aléatoire (v.a.) à valeurs dans E, toute application mesurable $X : (\Omega, \mathcal{F}) \to (E, \mathcal{P}(E))$.

- **TD Exercice III.1**.
- Si E est fini ou dénombrable, X est une v.a. si

$$\forall e \in E; \quad X^{-1}(\{e\}) \in \mathcal{F}.$$

Loi d'une variable aléatoire

Définition 3.39 (Loi d'une variable aléatoire)

Pour toute variable aléatoire $X : \Omega \to E$ *sur* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ *discret, l'application* $P_X : \mathcal{P}(E) \to [0, 1]$ *telle que*

$$\forall A \in \mathcal{P}(E); \quad P_X(A) = \mathbf{P}(\{\omega : X(\omega) \in A\}) = \mathbf{P}(X^{-1}(A))$$

définit une mesure de probabilité sur l'espace $(E, \mathcal{P}(E))$*, appelée mesure image de* $\mathbf{P}$ *par* X*.*
On note $\mathbf{P}(X \in A) = P_X(A)$*. La mesure de probabilité* P_X *est appelée distribution ou loi de* X*.*

Exemples de lois discrètes I

Loi uniforme sur $\{1, 2, \dots, n\}$

X suit une *loi uniforme* sur $\{1, 2, \dots, n\}$
si $\forall \omega \in \Omega$, $X(\omega) \in \{1, 2, \dots, n\}$ et

$$\forall k \in \{1, \dots, n\}, \quad \mathbf{P}(X = k) = \frac{1}{n}.$$

On a alors $\mathbf{E}[X] = \dfrac{n+1}{2}$.

Exemples de lois discrètes II

Loi binomiale

N suit une *loi binomiale* $B(n, p)$ où $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0, 1]$
si $\forall \omega \in \Omega$, $N(\omega) \in \{0, 1, \ldots, n\}$ et

$$\forall k \in \{0, 1, \ldots, n\}, \quad \mathbf{P}(N = k) = C_n^k \; p^k (1 - p)^{n-k}.$$

N est le nombre de succès d'une certaine expérience aléatoire de probabilité de succès p, répétée n fois de manière indépendante.
Remarquons que

$$N = X_1 + X_2 + \cdots + X_n,$$

où les X_i sont des v.a. de Bernoulli indépendantes, représentant le succès ou l'échec de chaque expérience i.
On en déduit $\mathbf{E}[N] = np$ et $\mathrm{Var}(N) = np(1 - p)$.

Exemples de lois discrètes III

Loi géométrique

N suit une *loi géométrique* de paramètre $p \in [0, 1]$
si $\forall \omega \in \Omega$, $N(\omega) \in \mathbb{N}$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathbf{P}(N = n) = p^n(1 - p).$$

On a alors $\mathbf{E}[N] = \dfrac{p}{1-p}$ et $\mathrm{Var}(N) = \dfrac{p}{(1-p)^2}$.

Distribution de Poisson

X suit une *loi de Poisson* de paramètre $\lambda > 0$
si $\forall \omega \in \Omega$, $X(\omega) \in \mathbb{N}$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathbf{P}(X = n) = \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}.$$

On a alors $\mathbf{E}[X] = \lambda$ et $\mathrm{Var}(X) = \lambda$.

Programme

Introduction

Tribu et mesurabilité

- Tribu
- Fonctions mesurables
- Fonctions étagées

$(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$

$\int f$

Mesure sur une tribu

Espace de probabilité

- Evénements, probabilités
- (Rappels : Probabilités conditionnelles, indépendance)
- Cas Ω fini ou dénombrable

Références bibliographiques

- M. Briane, G. Pagès. *Théorie de l'intégration*. Vuibert.
- T. Gallouët, R. Herbin. *Mesure, intégration, probabilités*.
  `www-gm3.univ-mrs.fr/ gallouet/licence.d/mes-int-pro.pdf`
- O. Garet. *Intégration et probabilités*.
  `http://www.iecl.univ-lorraine.fr/ Olivier.Garet/cours/ip/ip-2016-2017.pdf`
- J.-F. Le Gall. *Intégration, probabilités et processus aléatoires*.
  `https://www.math.u-psud.fr/ jflegall/IPPA2.pdf`
- E. Ramis, C. Deschamps, J. Odoux. *Cours de mathématiques spéciales, tome 3 - topologie et éléments d'analyse*. Masson.
- W. Rudin. *Real and Complex Analysis*. McGraw-Hill.