Cours d'Equations aux Dérivées Partielles

Résolution des problèmes elliptiques

Séance 6 - 7 Première partie Approximation variationnelle théorique et Introduction à la Méthode des éléments finis - Première partie

CentraleSupélec - Cursus ingénieur

17-01-2020

La courte histoire du cours EDP

Vous avez vu :

- Comment **modéliser** un problème issu de la physique, la biologie, etc... par une EDO ou une EDP, avec des conditions initiales et/ou aux limites

La courte histoire du cours EDP

Vous avez vu :

- Comment **modéliser** un problème issu de la physique, la biologie, etc... par une EDO ou une EDP, avec des conditions initiales et/ou aux limites
- Comment **analyser mathématiquement les EDOs** (existence et unicité de la solution, stabilité, comportement asymptotique, etc...)

La courte histoire du cours EDP

Vous avez vu :

- Comment **modéliser** un problème issu de la physique, la biologie, etc... par une EDO ou une EDP, avec des conditions initiales et/ou aux limites
- Comment **analyser mathématiquement les EDOs** (existence et unicité de la solution, stabilité, comportement asymptotique, etc...)
- Comment **approcher la solution d'une EDO** par un schéma aux différences finies

La courte histoire du cours EDP

Vous avez vu :

- Comment **modéliser** un problème issu de la physique, la biologie, etc... par une EDO ou une EDP, avec des conditions initiales et/ou aux limites
- Comment **analyser mathématiquement les EDOs** (existence et unicité de la solution, stabilité, comportement asymptotique, etc...)
- Comment **approcher la solution d'une EDO** par un schéma aux différences finies
- Comment donner un sens faible aux EDP par la **théorie des distributions** (espace de Sobolev)

La courte histoire du cours EDP

Vous avez vu :

- Comment **modéliser** un problème issu de la physique, la biologie, etc... par une EDO ou une EDP, avec des conditions initiales et/ou aux limites
- Comment **analyser mathématiquement les EDOs** (existence et unicité de la solution, stabilité, comportement asymptotique, etc...)
- Comment **approcher la solution d'une EDO** par un schéma aux différences finies
- Comment donner un sens faible aux EDP par la **théorie des distributions** (espace de Sobolev)
- Montrer le **caractère bien posé** d'un problème elliptique aux limites (théorème de Lax-Milgram) et prévoir la **régularité de la solution**

La courte histoire du cours EDP

Vous avez vu :

- Comment **modéliser** un problème issu de la physique, la biologie, etc... par une EDO ou une EDP, avec des conditions initiales et/ou aux limites
- Comment **analyser mathématiquement les EDOs** (existence et unicité de la solution, stabilité, comportement asymptotique, etc...)
- Comment **approcher la solution d'une EDO** par un schéma aux différences finies
- Comment donner un sens faible aux EDP par la **théorie des distributions** (espace de Sobolev)
- Montrer le **caractère bien posé** d'un problème elliptique aux limites (théorème de Lax-Milgram) et prévoir la **régularité de la solution**
- Aujourd'hui : **Approximation numérique**

Un peu d'histoire maths-Numerics

Lord Rayleigh, 1842-1919

Quotient de Rayleigh, problème d'optimisation

Un peu d'histoire maths-Numerics

Lord Rayleigh, 1842-1919

Quotient de Rayleigh, problème d'optimisation

Walter Ritz, 1878-1909

Méthode numérique de minimisation d'énergie mécanique
2 limitations importantes

Un peu d'histoire des maths

Boris Galerkin, 1871-1945

Extension de Ritz : Formulation faible des EDP, principe des travaux virtuels (principe fondamental d'équilibre mécanique)

Approximation en dimension finie

Un peu d'histoire des maths

Boris Galerkin, 1871-1945

Extension de Ritz : Formulation faible des EDP, principe des travaux virtuels (principe fondamental d'équilibre mécanique)
Approximation en dimension finie

Naissance des méthodes d'approximation de... Rayleigh-Ritz-Galerkin...

Problème de Dirichlet

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^d$, $d \geqslant 1$.

$$\begin{cases} -\Delta u = f \;\text{ dans } \Omega, \\ \\ u|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases}$$

Problème de Dirichlet

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^d$, $d \geqslant 1$.

$$\begin{cases} -\Delta u = f \ \text{ dans } \Omega, \\ \\ u|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases}$$

Remarque 2.1

(i) Pas de résolution explicite en général !

(ii) EDP de transport-diffusion stationnaires (voir TD) :

$$-\Delta u + b \cdot \nabla u + cu = f \ \textit{ dans } \Omega \textit{ avec } b,\ c,\ f \ \textit{ fonctions données}$$

(iii) Conditions au bord : Neumann, Dirichlet-Neumann, Robin

Formulation variationnelle

Formulation **faible** à partir de la formule de Green :

$$\textbf{(FF)} \qquad \forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega), \quad \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \phi = \int_\Omega f\, \phi$$

Formulation **variationnelle** dans H Hilbert :

(a) on définit $\begin{cases} \text{la forme bilinéaire :} & a : (u, v) \longmapsto \displaystyle\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \\ \text{la forme linéaire :} & \ell : v \longmapsto \displaystyle\int_\Omega f\, v \end{cases}$

(b) a, ℓ définies : $H \subset H^1(\Omega)$

(c) u nulle au bord : $H = H_0^1(\Omega)$,$(\cdot,\cdot)_{H_0^1} : (u,v) \mapsto \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v$

(FV) Trouver $u \in H$ tq $\forall v \in H,\ a(u, v) = \ell(v)$

8/50

Existence et unicité

Théorème 2.2

Soient Ω ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^d$, $d \geqslant 1$ et $f \in L^2(\Omega)$.

(i) Il existe une unique solution $u \in H_0^1(\Omega)$ de **(FV)**. *De plus, u vérifie*

$$-\Delta u = f \quad \text{p.p. dans } \Omega \qquad \text{et} \qquad u \in H_0^1(\Omega).$$

Il existe $\mathcal{C}_\Omega$ indépendante de f telle que

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leqslant \mathcal{C}_\Omega \|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

(ii) Si Ω est de classe C^1, alors u est solution de **(D)** *au sens où*

$$-\Delta u = f \text{ p.p. dans } \Omega \text{ et } u = 0 \text{ p.p. sur } \partial\Omega.$$

Application du théorème de Lax-Milgram

(FV) Trouver $u \in H$ **tq**

$$\forall v \in H, \quad a(u,v) = \ell(v)$$

avec

(i) H espace de Hilbert,

(ii) $a : H \times H \to \mathbb{R}$ bilinéaire et $\ell : H \to \mathbb{R}$ linéaire, continues,

(iii) a coercive.

Il existe un et un seul $u \in H$ tel que $\forall v \in H, \quad a(u,v) = \ell(v)$.

De plus $\quad a(u,u) = \ell(u) \quad \Longrightarrow \quad \|u\|_H \leqslant C_\Omega \|\ell\|_{H'}$.

u est la solution varitionnelle (ou faible)

Comment calculer la solution du problème-Quelle méthode ?

Principe général

(FV) Trouver $u \in H$ tq $\forall v \in H,\ a(u,v) = \ell(v)$

Définition 3.1

approximation interne : *H remplacé par $H_h \subset H$ de dim finie*

Remarque 3.2

(a) H_h sev de dim finie de H : Hilbert pour $(\cdot,\cdot)_H$.

(b) indice $_h$: notation liée à la taille des cellules du maillage

$$h \longrightarrow 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \dim(H_h) \longrightarrow \infty$$

Exemple : $h \sim 1/(J+1) \Longleftrightarrow \dim(H_h) = J^{\,d}$

Problème discret

Lemme

$$(\mathrm{FV}_h) \quad \text{trouver } u_h \in H_h \text{ tq} \qquad \forall v_h \in H_h, \qquad a(u_h, v_h) = \ell(v_h)$$

Problème discret

Lemme

Soient H Hilbert, a forme bilinéaire, continue et coercive $(\alpha > 0)$ sur $H \times H$ et $\ell \in H'$. Soit H_h **sev de dim finie** de H. Alors

(FV$_h$) trouver $u_h \in H_h$ tq $\qquad \forall v_h \in H_h, \qquad a(u_h, v_h) = \ell(v_h)$

Problème discret

Lemme

Soient H Hilbert, a forme bilinéaire, continue et coercive $(\alpha > 0)$ sur $H \times H$ et $\ell \in H'$. Soit H_h **sev de dim finie** de H. Alors

$$(\mathrm{FV}_h) \quad \text{trouver } u_h \in H_h \text{ tq} \qquad \forall v_h \in H_h, \qquad a(u_h, v_h) = \ell(v_h)$$

est **bien posé** dans H_h : il existe un et un seul $u_h \in H_h$ tel que

$$\forall v_h \in H_h, \qquad a(u_h, v_h) = \ell(v_h)$$

Problème discret

Lemme

Soient H Hilbert, a forme bilinéaire, continue et coercive ($\alpha > 0$) sur $H \times H$ et $\ell \in H'$. Soit H_h **sev de dim finie** de H. Alors

$$(\text{FV}_h) \quad \text{trouver } u_h \in H_h \text{ tq} \qquad \forall v_h \in H_h, \qquad a(u_h, v_h) = \ell(v_h)$$

est **bien posé** dans H_h : il existe un et un seul $u_h \in H_h$ tel que

$$\forall v_h \in H_h, \qquad a(u_h, v_h) = \ell(v_h) \qquad \text{et} \qquad \|u_h\|_H \leqslant \frac{\|\ell\|_{H'}}{\alpha}$$

Problème discret

Proposition

Le problème discret (FV$_h$) est équivalent à la résolution d'un système linéaire de taille $n_h = \dim(H_h)$.
De plus, si $a(u, v)$ est symétrique, alors la matrice est symétrique définie positive (SDP).

Problème discret

Proposition

Le problème discret (FV_h) est équivalent à la résolution d'un système linéaire de taille $n_h = \dim(H_h)$.
De plus, si $a(u, v)$ est symétrique, alors la matrice est symétrique définie positive (SDP).

Preuve : Soit $(\phi_1, \phi_2, \cdots, \phi_{n_h})$ une base de H_h. Le problème (FV_h) est équivalent à trouver

$$u_h = \sum_{j=1}^{n_h} U_j \phi_j \quad \text{tel que} \quad a(u_h, \phi_i) = \ell(\phi_i) \quad 1 \leqslant i \leqslant n_h.$$

Par linéarité, on obtient un système de la forme

$$\mathbb{A} U = L \text{ où } \mathbb{A}_{ij} = a(\phi_j, \phi_i) \text{ et } L_i = \ell(\phi_i)$$

et réciproquement.

Problème discret

Proposition

Le problème discret (FV$_h$) est équivalent à la résolution d'un système linéaire de taille $n_h = \dim(H_h)$.
De plus, si $a(u,v)$ est symétrique, alors la matrice est symétrique définie positive (SDP).

Preuve : Soit $(\phi_1, \phi_2, \cdots, \phi_{n_h})$ une base de H_h. Le problème (FV$_h$) est équivalent à trouver

$$u_h = \sum_{j=1}^{n_h} U_j \phi_j \quad \text{tel que} \quad a(u_h, \phi_i) = \ell(\phi_i) \quad 1 \leqslant i \leqslant n_h.$$

Par linéarité, on obtient un système de la forme

$$\mathbb{A} U = L \text{ où } \mathbb{A}_{ij} = a(\phi_j, \phi_i) \text{ et } L_i = \ell(\phi_i)$$

et réciproquement.
$\mathbb{A}$ est la **matrice de rigidité** et L l'effort externe (ref. à la Mécanique)

Estimation d'erreur

Lemme de Céa

Sous les hypothèses du lemme, soient $u \in H$ la solution de (FV) et u_h la solution de (FV$_h$). Alors on a

$$\|u - u_h\|_H \leqslant \frac{M}{\alpha} \inf_{v_h \in H_h} \|u - v_h\|_H .$$

Estimation d'erreur

Lemme de Céa

Sous les hypothèses du lemme, soient $u \in H$ la solution de (FV) et u_h la solution de (FV$_h$). Alors on a

$$\|u - u_h\|_H \leqslant \frac{M}{\alpha} \inf_{v_h \in H_h} \|u - v_h\|_H.$$

Preuve :

$$\begin{aligned} a(u - u_h, u - u_h) &= a(u - u_h, u - v_h + v_h - u_h) \\ &= a(u - u_h, u - v_h) + a(u - u_h, v_h - u_h) \end{aligned}$$

donc par coercivité et continuité :

$$\alpha\|u-u_h\|_H^2 \leqslant a(u-u_h, u-u_h) = a(u-u_h, u-v_h) \leqslant M\|u-u_h\|_H\|u-v_h\|_H$$

Estimation d'erreur

Lemme de Céa

Sous les hyp du lemme, soient $u \in H$ la solution de (FV) et u_h la solution de (FV$_h$). Alors on a

$$\|u - u_h\|_H \leqslant \frac{M}{\alpha} \inf_{v_h \in H_h} \|u - v_h\|_H.$$

Estimation d'erreur

Lemme de Céa

Sous les hyp du lemme, soient $u \in H$ la solution de (FV) et u_h la solution de (FV$_h$). Alors on a

$$\|u - u_h\|_H \leqslant \frac{M}{\alpha} \inf_{v_h \in H_h} \|u - v_h\|_H.$$

Infimum atteint par Projection Orthogonale de u sur V_h par rapport à $(.,.)_H$

Estimation d'erreur

Lemme de Céa

Sous les hyp du lemme, soient $u \in H$ la solution de (FV) et u_h la solution de (FV$_h$). Alors on a

$$\|u - u_h\|_H \leqslant \frac{M}{\alpha} \inf_{v_h \in H_h} \|u - v_h\|_H .$$

Infimum atteint par Projection Orthogonale de u sur V_h par rapport à $(.,.)_H$

Remarque 3.3

Si a symétrique, $a(\cdot,\cdot)$ associé à une norme équivalente à $\|\cdot\|_H$. Alors u_h **projection orthogonale** *de u sur H_h et*

$$\|u - u_h\|_H \leqslant \sqrt{\frac{M}{\alpha}} \inf_{v_h \in H_h} \|u - v_h\|.$$

Estimation d'erreur

Lemme de Céa

Sous les hyp du lemme, soient $u \in H$ la solution de (FV) et u_h la solution de (FV$_h$). Alors on a

$$\|u - u_h\|_H \leqslant \frac{M}{\alpha} \inf_{v_h \in H_h} \|u - v_h\|_H .$$

Infimum atteint par Projection Orthogonale de u sur V_h par rapport à $(.,.)_H$

Remarque 3.3

Si a symétrique, $a(\cdot,\cdot)$ associé à une norme équivalente à $\|\cdot\|_H$. Alors u_h **projection orthogonale** *de u sur H_h et*

$$\|u - u_h\|_H \leqslant \sqrt{\frac{M}{\alpha}} \inf_{v_h \in H_h} \|u - v_h\|.$$

Erreur pas très explicite...+ insuffisance des hypothèses sur une construction pertinente des H_h

Estimation d'erreur

Lemme de Céa

Sous les hyp du lemme, soient $u \in H$ la solution de (FV) et u_h la solution de (FV$_h$). Alors on a

$$\|u - u_h\|_H \leqslant \frac{M}{\alpha} \inf_{v_h \in H_h} \|u - v_h\|_H .$$

Infimum atteint par Projection Orthogonale de u sur V_h par rapport à $(.,.)_H$

Remarque 3.3

Si a symétrique, $a(\cdot,\cdot)$ associé à une norme équivalente à $\|\cdot\|_H$. Alors u_h **projection orthogonale** *de u sur H_h et*

$$\|u - u_h\|_H \leqslant \sqrt{\frac{M}{\alpha}} \inf_{v_h \in H_h} \|u - v_h\|.$$

Erreur pas très explicite...+ insuffisance des hypothèses sur une construction pertinente des H_h Manque : une notion de densité !

Interpolation

Définition-théorème

Soit (H_h) famille emboîtée $\left(H_h \subset H_k \text{ si } k < h\right)$, de dim. resp. N_h telle que $N_h \underset{h \to 0}{\longrightarrow} +\infty$.

Interpolation

Définition-théorème

Soit (H_h) famille emboîtée ($H_h \subset H_k$ si $k < h$), de dim. resp. N_h telle que $N_h \underset{h \to 0}{\longrightarrow} +\infty$.
Sous les hyp. du lemme et l'existence de $\mathcal{H}$ **dense dans** H et de

$$r_h : \mathcal{H} \longrightarrow H_h$$

application linéaire appelée **opérateur d'interpolation** tq

$$\forall v \in \mathcal{H}, \quad \lim_{h \to 0} \|v - r_h(v)\|_H = 0.$$

Interpolation

Définition-théorème

Soit (H_h) famille emboîtée $(H_h \subset H_k$ si $k < h)$, de dim. resp. N_h telle que $N_h \xrightarrow[h\to 0]{} +\infty$.

Sous les hyp. du lemme et l'existence de $\mathcal{H}$ **dense dans** H et de

$$r_h : \mathcal{H} \longrightarrow H_h$$

application linéaire appelée **opérateur d'interpolation** tq

$$\forall v \in \mathcal{H}, \quad \lim_{h\to 0} \|v - r_h(v)\|_H = 0.$$

Alors la méthode d'approximation interne **converge**, càd

$$\|u - u_h\|_H \xrightarrow[h\to 0]{} 0.$$

Interpolation

Définition-théorème

Soit (H_h) famille emboîtée ($H_h \subset H_k$ si $k < h$), de dim. resp. N_h telle que $N_h \underset{h \to 0}{\longrightarrow} +\infty$.
Sous les hyp. du lemme et l'existence de $\mathcal{H}$ **dense dans** H et de

$$r_h : \mathcal{H} \longrightarrow H_h$$

application linéaire appelée **opérateur d'interpolation** tq

$$\forall v \in \mathcal{H}, \quad \lim_{h \to 0} \|v - r_h(v)\|_H = 0.$$

Alors la méthode d'approximation interne **converge**, càd

$$\|u - u_h\|_H \underset{h \to 0}{\longrightarrow} 0.$$

Si de plus $\|u - u_h\|_H = O(h^p)$, la méthode converge **à l'ordre** p.

Un outil utile : Unicité

- En **discret et linéaire**, l'**unicité** de la solution assure son existence

Un outil utile : Unicité

- En **discret et linéaire**, l'**unicité** de la solution assure son existence
- En **continu, linéaire**, pour certains problèmes, l'unicité assure l'existence aussi !

Un outil utile : Unicité

- En **discret et linéaire**, l'**unicité** de la solution assure son existence
- En **continu, linéaire**, pour certains problèmes, l'unicité assure l'existence aussi !
- En **continu, linéaire**, l'unicité assure qu'il suffit de calculer une solution analytique pour l'EDP

Un outil utile : Unicité

- En **discret et linéaire**, l'**unicité** de la solution assure son existence
- En **continu, linéaire**, pour certains problèmes, l'unicité assure l'existence aussi !
- En **continu, linéaire**, l'unicité assure qu'il suffit de calculer une solution analytique pour l'EDP
- En **continu ou discret, linéaire, mais surtout nonlinéaire**, la **non-unicité est génératrice de complexités**

Application

Construction raisonnée :

(a) construire une « bonne » famille emboîtée de sev (H_h) de dimension finie,

(b) construire analytiquement une base, formant H_h

(c) résoudre le système linéaire sur H_h « pour tout h », ce qui donne (u_h),

(d) $\lim_{h \to 0} u_h$ donne la solution du problème variationnel continu.

Application

Construction raisonnée :

(a) construire une « bonne » famille emboîtée de sev (H_h) de dimension finie,

(b) construire analytiquement une base, formant H_h

(c) résoudre le système linéaire sur H_h « pour tout h », ce qui donne (u_h),

(d) $\lim\limits_{h \to 0} u_h$ donne la solution du problème variationnel continu.

Attention, **conditions** sur les espaces H_h :

Application

Construction raisonnée :

(a) construire une « bonne » famille emboîtée de sev (H_h) de dimension finie,

(b) construire analytiquement une base, formant H_h

(c) résoudre le système linéaire sur H_h « pour tout h », ce qui donne (u_h),

(d) $\lim\limits_{h \to 0} u_h$ donne la solution du problème variationnel continu.

Attention, **conditions** sur les espaces H_h :

(i) construction de r_h opérateur d'interpolation de $\mathcal{H}$ dans H_h tq

$$\forall v \in \mathcal{H}, \qquad \|v - r_h(v)\|_H \underset{h \to 0}{\longrightarrow} 0$$

Par exemple : si H Sobolev, $\mathcal{H}$ espace de fonctions très régulières.

Application

Construction raisonnée :

(a) construire une « bonne » famille emboîtée de sev (H_h) de dimension finie,

(b) construire analytiquement une base, formant H_h

(c) résoudre le système linéaire sur H_h « pour tout h », ce qui donne (u_h),

(d) $\lim_{h \to 0} u_h$ donne la solution du problème variationnel continu.

Attention, **conditions** sur les espaces H_h :

(i) construction de r_h opérateur d'interpolation de $\mathcal{H}$ dans H_h tq

$$\forall v \in \mathcal{H}, \qquad \|v - r_h(v)\|_H \xrightarrow[h \to 0]{} 0$$

Par exemple : si H Sobolev, $\mathcal{H}$ espace de fonctions très régulières.

(ii) résolution des systèmes linéaires peu coûteuse (matrices creuses)

En pratique

- Méthode de Galerkin (voir TD) :
  si H Hilbert séparable, il a une base hilbertienne $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$.

  $h = 1/n$, $H_h = \text{vect}\{e_k,\ k \in \{1,\dots,n\}\}$ et r_h : proj. orth. de H sur H_h

  Problèmes :
  - calcul d'une base hilbertienne pas évident
  - si la base hilbertienne est mal choisie, A_h pleine
  - $\text{cond}(A_h) \to \infty$

- Méthode de Éléments finis (MEF) :
  espaces de fonctions continues polynomiales par morceaux : Idée de maillage du domaine Ω

Définition 4.1

Un **maillage** *est la discrétisation (spatiale) d'un milieu continu, ou, aussi, une modélisation géométrique d'un domaine par des éléments proportionnés finis et bien définis.*

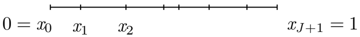
But : calcul d'un nombre fini de valeurs par projection

- qualitatif : simplification d'un système par un modèle
- quantitatif : simulations numériques et/ou visualisation

Maillages en 1D

- en 1D : $(x_j)_{j\in\{0,\dots,J+1\}}$ suite croissante ; $x_0 = 0$, $x_{J+1} = 1$

$$h = \max_{j\in\{0,\dots,J\}} (x_{j+1} - x_j)$$

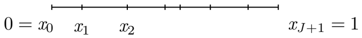


- Attention : h et J n'ont pas la même dimension !

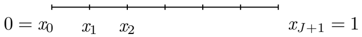
Maillages en 1D

- en 1D : $(x_j)_{j\in\{0,\dots,J+1\}}$ suite croissante ; $x_0 = 0$, $x_{J+1} = 1$

$$h = \max_{j\in\{0,\dots,J\}} (x_{j+1} - x_j)$$

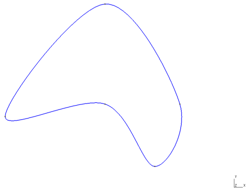


- Maillage uniforme : $h = 1/(J+1)$ et $x_j = jh$

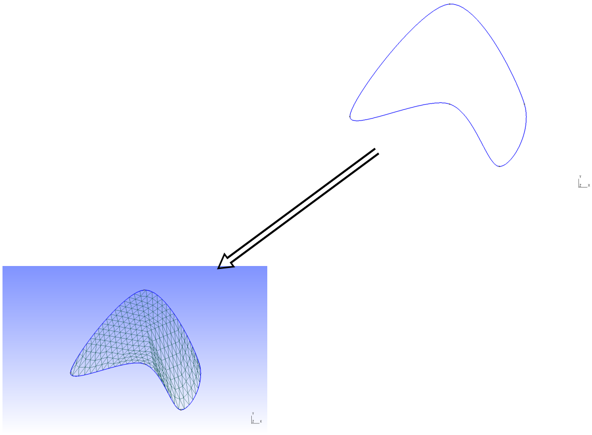


- Attention : h et J n'ont pas la même dimension !

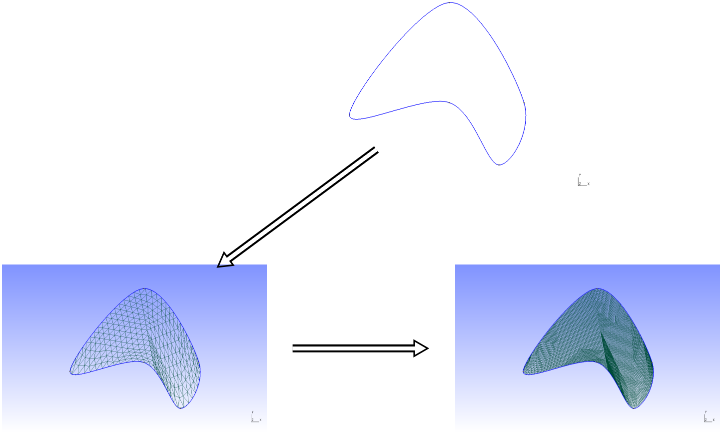
Maillages en 2D



Maillages en 2D



Maillages en 2D



Exemple de maillage FreeFem++

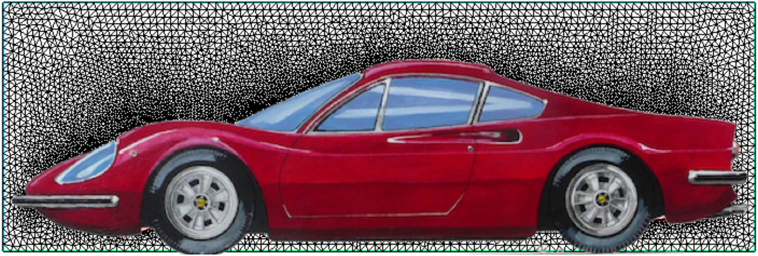
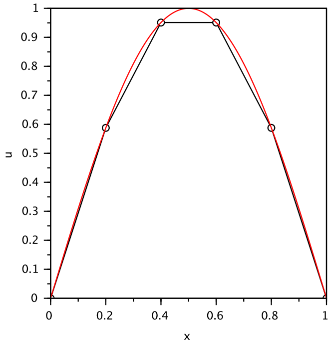
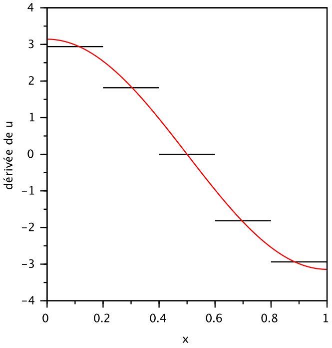


Figure: Maillage du domaine extérieur

Interpolation de $u : x \mapsto \sin(\pi x)$ sur une grille uniforme



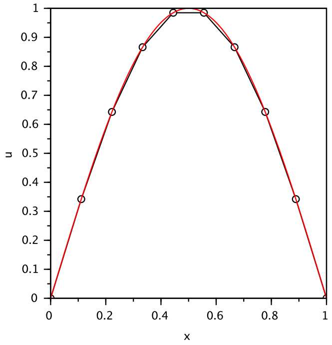
u (rouge) et u_{approx}



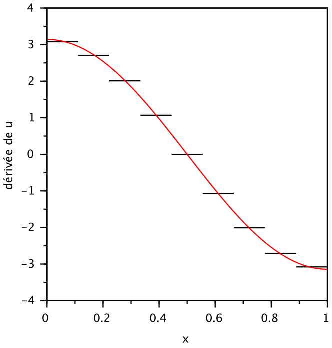
u' (rouge) et u'_{approx}

$$J = 4 \text{ et } h = 1/5$$

Interpolation de $u : x \mapsto \sin(\pi x)$ sur une grille uniforme



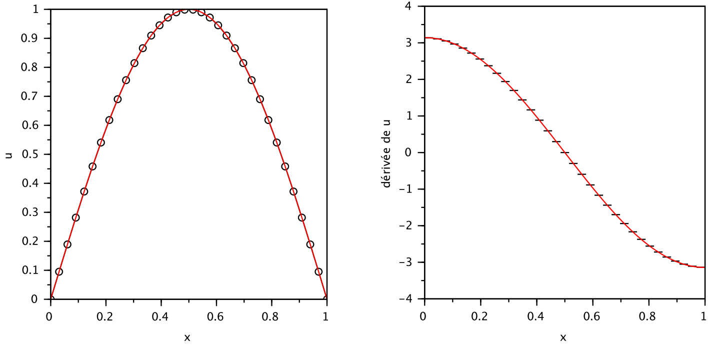
u (rouge) et u_{approx}



u' (rouge) et u'_{approx}

$$J = 8 \text{ et } h = 1/9$$

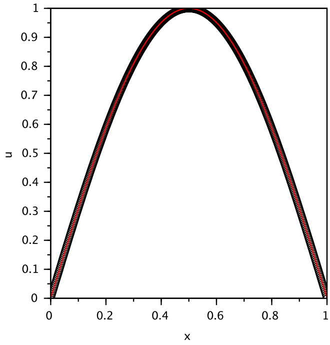
Interpolation de $u : x \mapsto \sin(\pi x)$ sur une grille uniforme



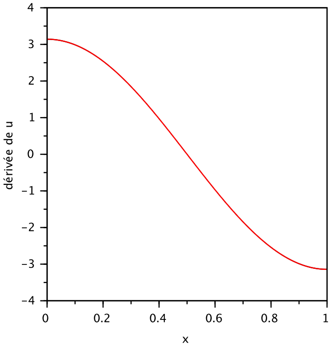
u (rouge) et u_{approx} $\quad$ u' (rouge) et u'_{approx}

$$J = 32 \text{ et } h = 1/33$$

Interpolation de $u : x \mapsto \sin(\pi x)$ sur une grille uniforme



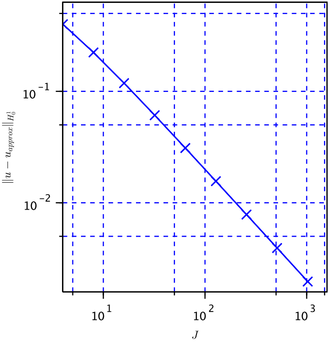
u (rouge) et u_{approx}



u' (rouge) et u'_{approx}

$$J = 512 \text{ et } h = 1/513$$

Interpolation de $u : x \mapsto \sin(\pi x)$ sur une grille uniforme



Erreur logarithmique $\|u - u_{approx}\|_{H_0^1}$