

Séance X : Problèmes paraboliques

A) Objectifs de la séance

A la fin de cette séance,

- Je sais reconnaître une équation parabolique.
- Je connais les propriétés qualitatives fondamentales d'une équation parabolique (comportement asymptotique, principe du maximum, régularisation).
- Je sais discrétiser un problème parabolique en temps par un schéma d'Euler et en espace par la méthode des éléments finis ou des différences finies.
- Je sais programmer un algorithme itératif me donnant une solution numérique évoluant en temps.

B) Pour se familiariser avec les concepts (à traiter avant les séances de TD)

La question X.1 doit être faite avant le TD 10. Le corrigé est disponible sur internet.

Question X.1 (Diagonalisation de la matrice du Laplacien)

Soit $J \in \mathbb{N}^*$.

Q. X.1.1 Rappeler la forme de la matrice $A_{\Delta x}$ de discrétisation de l'opérateur $u \mapsto -u''$ avec conditions au bord de Dirichlet pour un pas d'espace $\Delta x = 1/(J+1)$.

Solution de Q. X.1.1 Voir cours.

Q. X.1.2 Montrer que la matrice $A_{\Delta x}$ est diagonalisable à valeurs propres réelles, de spectre strictement positif.

Solution de Q. X.1.2 La matrice $A_{\Delta x} \in \mathcal{M}_J(\mathbb{R})$ est symétrique réelle, donc diagonalisable à valeurs propres réelles. De plus, on a montré au TD16 qu'elle est définie positive : son spectre est donc inclus dans $]0, +\infty[$.

Q. X.1.3 Montrer, à l'aide du théorème de Gershgorin-Hadamard, que $\text{Sp}(A_{\Delta x}) \subset]0, 4/(\Delta x)^2]$.

Solution de Q. X.1.3 D'après le théorème de Gershgorin-Hadamard,

$$\text{Sp}(A_{\Delta x}) \subset \bigcup_{1 \leq j \leq J} D \left(a_{jj}, \sum_{k \neq j} |a_{jk}| \right),$$

d'où

$$\text{Sp}((\Delta x)^2 A_{\Delta x}) \subset]0, +\infty[\cap (D(2, 2) \cup D(2, 1)) =]0, 4].$$

Q. X.1.4 Soit $\lambda \in \text{Sp}((\Delta x)^2 A_{\Delta x})$. On pose $\Lambda = 2 - 2\cos(\theta)$ pour $\theta \in]0, \pi]$. Soit v un vecteur propre associé à Λ . Calculer v et en déduire les valeurs possibles de θ .

Solution de Q. X.1.4 Notons $v = (v_1, \dots, v_J)^T$. Alors $(\Delta x)^2 A_{\Delta x} v = \lambda v$ est équivalent au système linéaire

$$\begin{cases} 2\cos(\theta)v_1 - v_2 = 0 \\ -v_1 + 2\cos(\theta)v_2 - v_3 = 0 \\ \vdots \\ -v_{J-2} + 2\cos(\theta)v_{J-1} - v_J = 0 \\ -v_{J-1} + 2\cos(\theta)v_J = 0. \end{cases}$$

Posons $v_0 = 0$. Alors (v_j) est définie par une récurrence linéaire double dont l'équation caractéristique est $0 = r^2 - 2 \cos(\theta)r + 1 = (r - e^{i\theta})(r - e^{-i\theta})$. Les solutions sont donc de la forme

$$v_j = \alpha \cos(j\theta) + \beta \sin(j\theta),$$

avec α, β réels. Comme $v_0 = 0$, $\alpha = 0$. De plus, la dernière ligne du système donne

$$\begin{aligned} 0 &= \beta(2 \cos(\theta) \sin(J\theta) - \sin((J-1)\theta)) \\ &= \beta(2 \cos(\theta) \sin(J\theta) - \sin(J\theta) \cos(\theta) + \sin(\theta) \cos(J\theta)) \\ &= \beta(\sin(J+1)\theta). \end{aligned}$$

Notons que $2 - 2 \cos(\theta) = 4 \sin^2(\theta/2)$. Le vecteur v est non nul (et donc bien un vecteur propre de) si et seulement si $\sin((J+1)\theta) = 0$, c'est-à-dire si $\theta = k\pi/(J+1)$ pour $k \in \{1, \dots, J\}$, car $\lambda \neq 0$.

Q. X.1.5 Expliciter le spectre de $A_{\Delta x}$.

Solution de Q. X.1.5 On a trouvé exactement J valeurs propres distinctes : le spectre de $A_{\Delta x}$ est donc

$$\text{Sp}(A_{\Delta x}) = \left\{ \frac{1}{(\Delta x)^2} 4 \sin^2 \left(\frac{k\pi}{2(J+1)} \right), \quad k \in \{1, \dots, J\} \right\}.$$

C) Exercices

On considère une barre homogène de longueur 1 dont la température à l'instant $t = 0$ est décrite par une fonction u . Les deux extrémités $x = 0, x = 1$ sont maintenues à température nulle et une source stationnaire f est appliquée en tout point de la barre. L'évolution de la température est gouvernée par le problème (H) suivant

$$(H) \quad \begin{cases} \partial_t u(t, x) - \nu \partial_{xx}^2 u(t, x) = f(x), \quad t > 0, x \in]0, 1[, \\ u(0, x) = u^0(x), \quad x \in]0, 1[, \\ u(t, 0) = 0, u(t, 1) = 0, \quad t \geq 0. \end{cases}$$

On suppose $u^0, f \in L^2(0, 1)$. On rappelle que le problème est dit *homogène* si $u^0 = f = 0$. The problem is called *homogeneous* if $u^0 = f = 0$.

Exercice X.1 (Approximation par différences finies)

On suppose $f \in C^2([0, 1])$. Soient $T > 0$ fixé, $(N, J) \in (\mathbb{N}^*)^2$, $\Delta x = 1/(J+1)$ et $\Delta t = T/N$. On discrétise le domaine $[0, T] \times [0, 1]$ en un réseau régulier de points $(t^n, x_j) = (n\Delta t, j\Delta x)$, $n \in \{0, \dots, N\}$ et $j \in \{0, \dots, J+1\}$.

Pour $y' = a(t, y)$, on appelle θ -schéma, pour $\theta \in [0, 1]$, la méthode définie par

$$\begin{cases} z^0 & \text{donnée} \\ z^{n+1} &= z^n + \Delta t(1 - \theta)a(t^n, z^n) + \Delta t\theta a(t^{n+1}, z^{n+1}). \end{cases} \quad (X.1)$$

E. X.1.1 Soit $\theta \in [0, 1]$. Écrire sous forme d'une récurrence vectorielle le schéma aux différences finies en temps-espace pour (H) avec le θ -schéma en temps et la discrétisation centrée à trois points classique en espace.

Solution de Q. X.1.1 Le problème approché s'écrit : trouver $(v_j^n)_{j \in \{1, \dots, J\}, n \in \{1, \dots, N\}}$ tel que

$$\begin{cases} \forall j \in \{1, \dots, J\}, & v_j^0 = u^0(x_j), \quad \forall n \geq 0, \quad v_j^n = v_{j+1}^n, \\ \forall n \in \{0, N-1\}, \quad \forall j \in \{1, \dots, J\}, & \frac{v_j^{n+1} - v_j^n}{\Delta t} = \theta v \frac{v_{j+1}^{n+1} - 2v_j^{n+1} + v_{j-1}^{n+1}}{\Delta x^2} + (1-\theta)v \frac{v_{j+1}^n - 2v_j^n + v_{j-1}^n}{\Delta x^2} + f(x_j). \end{cases}$$

Soit $n \in \{0, \dots, N-1\}$. En notant $V^n = (v_1^n, \dots, v_J^n)^T$ et $F = (f(x_1), \dots, f(x_J))^T$, on a

$$(I_J + \theta \Delta t A_{\Delta x}) V^{n+1} = (I_J - \Delta t (1-\theta) v A_{\Delta x}) V^n + \Delta t F.$$

Pour $\theta = 0$, on reconnaît bien entendu le schéma d'Euler explicite et pour $\theta = 1$, le schéma d'Euler implicite. Grâce à l'exercice X.1, on sait que le spectre de $A_{\Delta x}$ est strictement positif : la matrice $I_J + \theta \Delta t v A_{\Delta x}$ est donc inversible et le θ -schéma est bien défini pour tout $\theta \in [0, 1]$.

Pour $\theta = 1/2$, on l'appelle le *schéma de Crank-Nicolson*.

E. X.1.2 Calculer l'erreur de consistance du θ -schéma. Quel est son ordre ?

Solution de Q. X.1.2 Soit u la solution exacte de (H). D'après l'exercice X.2, $u \in C^\infty([0, +\infty[, C^4([0, 1]))$. Calculons l'erreur de consistance : $\forall n \in \{0, N-1\}, \quad \forall j \in \{0, \dots, J\}$,

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_j^n &= \frac{u(t^{n+1}, x_j) - u(t^n, x_j)}{\Delta t} - \theta v \frac{u(t^{n+1}, x_{j+1}) - 2u(t^{n+1}, x_j) + u(t^{n+1}, x_{j-1}))}{(\Delta x)^2} \\ &\quad - (1-\theta)v \frac{u(t^n, x_{j+1}) - 2u(t^n, x_j) + u(t^n, x_{j-1}))}{(\Delta x)^2} - f(x_j) \\ &= \partial_t u(t^n, x_j) + \frac{\Delta t}{2} \partial_{tt}^2 u(t^n, x_j) - \underbrace{\theta v \partial_{xx}^2 u(t^{n+1}, x_j) - (1-\theta)v \partial_{xx}^2 u(t^n, x_j)}_{= -\partial_{xx}^2 u(t^n, x_j) - \theta \Delta t v \partial_{txx}^3 u(t^n, x_j) + O(\Delta t^2)} - f(x_j) + O(\Delta t^2) + O(\Delta x^2) \\ &= \partial_t u(t^n, x_j) - \partial_{xx}^2 u(t^n, x_j) + \frac{\Delta t}{2} \partial_t \left(\partial_t u(t^n, x_j) - 2\theta \underbrace{v \partial_{xx}^2 u(t^n, x_j)}_{= \partial_t u(t^n, x_j) - f(x_j)} \right) - f(x_j) + O(\Delta t^2) + O(\Delta x^2) \\ &= \partial_t u(t^n, x_j) - \partial_{xx}^2 u(t^n, x_j) - f(x_j) + \frac{\Delta t}{2} (1-2\theta) \partial_{tt}^2 u(t^n, x_j) + O(\Delta t^2) + O(\Delta x^2) \\ &= \frac{\Delta t}{2} (1-2\theta) \partial_{tt}^2 u(t^n, x_j) + O(\Delta t^2) + O(\Delta x^2). \end{aligned}$$

On en conclut donc que le θ -schéma est d'ordre 1 pour $\theta \neq 1/2$ et que le schéma de Crank-Nicolson est d'ordre 2.

E. X.1.3 Donner une condition suffisante de stabilité L^2 du type CFL du θ -schéma. Pourquoi le schéma de Crank-Nicolson est-il particulièrement intéressant ?

Solution de Q. X.1.3 D'après le cours, un schéma est stable en norme $\|\cdot\|$ s'il existe une constante $C > 0$ telle que, pour l'équation sans terme source ($f = 0$), $\forall n \geq 0$, $\|V^n\| \leq C\|V^0\|$.

Ici, la matrice d'itération est $B = (I + \theta \Delta t A_{\Delta x})^{-1}(I - (1 - \theta) \Delta t A_{\Delta x})$. C'est une fraction rationnelle en $A_{\Delta x}$ de la forme $B = R(A_{\Delta x})$ avec $R : x \mapsto (1 - (1 - \theta)x)/(1 + \theta x)$, qui est une fonction décroissante : son spectre est donc l'image par R du spectre de $A_{\Delta x}$

$$\text{Sp}(B) = \left\{ \frac{1 - (1 - \theta)\Delta t \lambda}{1 + \theta \Delta t \lambda}, \lambda \in \text{Sp}(A_{\Delta x}) \right\}.$$

De plus, B est symétrique réelle. Sa 2-norme est donc son rayon spectral. Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|B^n\|_2 = \rho(B^n) = \rho(B)^n$. Par conséquent, $(\|B^n\|_2)_{n \geq 0}$ est bornée si et seulement si

$$\forall J \in \mathbb{N}^*, \quad -1 \leq R(\max \text{Sp}(\nu A_{\Delta x})) \leq R(\min \text{Sp}(\nu A_{\Delta x})) \leq 1$$

si et seulement si

$$\forall J \in \mathbb{N}^*, \quad (1 - 2\theta)\nu \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \sin^2(J\pi/(2(J+1))) \leq \frac{1}{2}$$

si et seulement si

$$(1 - 2\theta)\nu \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \leq \frac{1}{2}. \quad (\text{X.2})$$

C'est la condition CFL. Si $\theta \geq 1/2$, le schéma est **inconditionnellement stable**. Si $\theta = 1/2$, le schéma est donc inconditionnellement stable et d'ordre 2.

E. X.1.4 Montrer que, sous condition CFL, le θ -schéma converge.

Solution de Q. X.1.4 Soit $n \geq 1$. On définit (E^n) , $n \in \{0, \dots, N\}$ par $E_j^n := u(t^n, x_j) - v_j^n$ pour $j \in \{0, \dots, J\}$. On a, pour $n \in \{0, \dots, N-1\}$,

$$E^{n+1} = \Pi_{\Delta x} u(t^{n+1}, \cdot) - V^{n+1} = BE^n + \Delta t(I_J + \Delta t \theta A_{\Delta x})^{-1} \mathcal{E}^n.$$

D'où

$$\|E^n\|_2 \leq \|B\|_2^n \|E^0\|_2 + \Delta t \|(I_J + \Delta t \theta A_{\Delta x})^{-1}\|_2 \sum_{k=0}^{n-1} \|B^{n-1-k}\|_2 \|\mathcal{E}^k\|_2$$

car $A_{\Delta x}$ commute avec B . Or $\|(I_J + \Delta t \theta A_{\Delta x})^{-1}\|_2 \leq 1$ et, sous condition CFL s'il y a lieu, $\|B\|_2 \leq 1$. On en déduit que

$$\|E^n\|_2 \leq \|E^0\|_2 + n \Delta t \max_{k \in \{0, \dots, n-1\}} \|\mathcal{E}^k\|_2.$$

Or $\|\mathcal{E}^k\|_2 \leq \|\mathcal{E}^k\|_\infty$. Donc

$$\|E^n\|_2 \leq \|E^0\|_2 + (1 - 2\theta)O(\Delta t) + O(\Delta t^2) + O(\Delta x^2).$$

Exercice X.2 (Résolution par séparation des variables)

Dans cet exercice, on suppose $\nu = 1$. Cette simplification est uniquement une simplification d'écriture des calculs, aucune difficulté mathématique n'apparaît en gardant un ν général (dans la mesure où il est strictement positif).

On pose $\mathcal{H}_0 = C^0([0, +\infty[, L^2(0, 1)) \cap C^\infty([0, +\infty[\times [0, 1])$ et $\mathcal{H} = C^0([0, +\infty[, L^2(0, 1)) \cap C^\infty([0, +\infty[, H^2(0, 1))$.

E. X.2.1 Montrer que le problème admet au plus une solution dans \mathcal{H}_0 en étudiant

l'énergie $E : t \mapsto \int_{]0,1[} \tilde{u}^2(t, x) dx$ du problème homogène.

Solution de Q. X.2.1 Soit $\tilde{u} \in \mathcal{H}_0$ une solution du problème homogène. Alors la fonction

$$E : t \mapsto \int_{]0,1[} \tilde{u}^2(t, x) dx$$

est dérivable sur $]0, +\infty[$ en vertu du théorème de dérivation des fonctions définies par une intégrale. En effet, les hypothèses sont vérifiées :

- pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, $\tilde{u}^2(t, \cdot)$ est sommable sur $]0, 1[$,
- pour tout $x \in [0, 1]$, la fonction $t \mapsto \tilde{u}^2(t, x)$ est dérivable sur \mathbb{R}^{+*} et sa dérivée vaut $2\tilde{u}\partial_t \tilde{u}$,
- pour tous $\varepsilon > 0$, $A > \varepsilon$, pour tout $(t, x) \in [\varepsilon, A] \times [0, 1]$, $|\partial_t \tilde{u}^2(t, x)| \leq \|\partial_t \tilde{u}^2\|_{L^\infty([\varepsilon, A] \times [0, 1])}$, la constante étant intégrable sur $[0, 1]$.

Ainsi, pour tout $\varepsilon > 0$, pour tout $t > 0$,

$$E'(t) = 2 \int_0^1 \tilde{u}(t, x) \partial_t \tilde{u}(t, x) dx = 2 \int_0^1 \tilde{u}(t, x) \partial_{xx}^2 \tilde{u}(t, x) dx = -2 \int_0^1 (\partial_x \tilde{u}(t, x))^2 dx.$$

Or, comme $\tilde{u}(\cdot, 0) = 0$, l'inégalité de Poincaré est vérifiée : pour tout $t > 0$,

$$\int_0^1 (\tilde{u}(t, x))^2 dx \leq \int_0^1 (\partial_x \tilde{u}(t, x))^2 dx.$$

On en déduit que, pour tout $t > 0$,

$$E'(t) \leq -2E(t),$$

et, par suite, pour tout $\varepsilon > 0$ et pour tout $t \geq \varepsilon$,

$$E(t) \leq E(\varepsilon) e^{-2(t-\varepsilon)}.$$

Or $\tilde{u} \in C^0([0, +\infty[, L^2(0, 1))$, donc $E(\varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} E(0)$ et, pour tout $t \geq 0$, $E(t) \leq E(0) e^{-2t}$. Or, comme le problème est homogène, $u^0 = 0$ et $E(0) = 0$. On en déduit donc que E est nulle partout et que \tilde{u} est la fonction nulle. On en déduit l'unicité par linéarité du problème. .

On cherche formellement une solution **non nulle** u de l'équation $\partial_t u = \partial_{xx}^2 u$ munie de la condition $u(\cdot, 0) = u(\cdot, 1) = 0$ sous la forme $u(t, x) = T(t)X(x)$.

E. X.2.2 Montrer que X''/X et T'/T sont égales à une constante négative que l'on notera $-\lambda^2$.

Solution de Q. X.2.2 Supposons qu'il existe I intervalle ouvert non vide de \mathbb{R}^{+*} et J intervalle ouvert non vide de $[0, 1]$ tels que T soit dérivable sur I et X soit deux fois dérivable sur J . On suppose de plus que T (resp. X) ne s'annule pas sur I (resp. J).

Alors on a, pour tout $(t, x) \in I \times J$, $T'(t)X(x) = T(t)X''(x)$, c'est-à-dire

$$\forall (t, x) \in I \times J, \quad \frac{T'}{T}(t) = \frac{X''}{X}(x).$$

Comme t et x sont des variables indépendantes, ce quotient est constant égal à μ .

Examinons le problème

$$\begin{cases} X'' - \mu X = 0 \text{ dans }]0, 1[\\ X(0) = X(1) = 0. \end{cases}$$

Il y a trois cas :

- si $\mu = 0$, X est une fonction affine s'annulant en 2 points et est donc nulle ;
- si $\mu > 0$, X est de la forme $X : x \mapsto a \cosh(\sqrt{\mu} x) + b \sinh(\sqrt{\mu} x)$. Or $X(0) = 0$ implique que $a = 0$ et $X(1) = 0$ implique que $b \sinh(\sqrt{\mu}) = 0$, c'est-à-dire $b = 0$. On en conclut donc que X est nulle.
- si $\mu < 0$, X est de la forme $X : x \mapsto a \cos(\sqrt{-\mu} x) + b \sin(\sqrt{-\mu} x)$. Or $X(0) = 0$ implique que $a = 0$ et $X(1) = 0$ implique que $b \sin(\sqrt{-\mu}) = 0$, c'est-à-dire $b = 0$ ou $\sin(\sqrt{-\mu}) = 0$. On en conclut que $\sqrt{-\mu} = k\pi, k \in \mathbb{N}^*$, c'est-à-dire $\mu = -k^2\pi^2$.

Dans ce cas, T est de la forme $T : t \mapsto ae^{-k^2\pi^2 t}$, $a \in \mathbb{R}$. On vérifie que $u_k : (t, x) \mapsto e^{-k^2\pi^2 t} \sin(k\pi x)$ satisfait $\partial_t u = \partial_{xx}^2 u$ munie de la condition $u(\cdot, 0) = u(\cdot, 1) = 0$.

E. X.2.3 En supposant l'existence d'une solution dans \mathcal{H}_0 , déduire l'expression générale des solutions u à variables séparées.

Solution de Q. X.2.3 Pour $f = 0$, on va chercher les solutions sous la forme

$$u : (t, x) \mapsto \sum_{k \geq 1} u_k e^{-k^2\pi^2 t} \sin(k\pi x).$$

Rappelons que, pour tout $t > 0$, pour tout $k \geq 1$, pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, $P(k)e^{-k^2\pi^2 t} = O(1/k^2)$ est le terme général d'une série convergente. Pour tout $a \in \mathbb{R}^{+*} \times [0, 1]$, la série et ses dérivées convergent normalement sur $[a, +\infty[\times]0, 1]$. On en conclut que $u \in C^\infty(]0, +\infty[\times]0, 1])$.

Si $f \neq 0$, on va chercher la solution sous la forme

$$u : (t, x) \mapsto \sum_{k \geq 1} T_k(t) \sqrt{2} \sin(k\pi x).$$

Alors, pour tout $k \geq 1$, T_k doit satisfaire

$$T'_k + k^2 \pi^2 T_k = (f, \sqrt{2} \sin(k\pi \cdot))_{L^2(0,1)}. \quad (\text{X.3})$$

E. X.2.4 En supposant l'existence d'une solution dans \mathcal{H} , donner l'expression de la solution de (H).

Solution de Q. X.2.4 On commence par décomposer u^0 et f sur la base hilbertienne des $(\sqrt{2} \sin(k\pi \cdot))_{k \geq 1}$: on prolonge u^0 par imparité à $] -1, 1[$, puis par périodicité de période 2 à \mathbb{R} tout entier et enfin on calcule la série de Fourier sur $] -1, 1[$ de la fonction impaire ainsi obtenue. Le développement est alors en $\sin(k\pi \cdot)$. On obtient :

$$\begin{cases} u^0 = \sqrt{2} \sum_{k \geq 1} a_k \sin(k\pi \cdot), \\ f = \sqrt{2} \sum_{k \geq 1} b_k \sin(k\pi \cdot) \end{cases}$$

avec, pour tout $k \geq 1$, $a_k = \sqrt{2} \int_{]0,1[} u^0 \sin(k\pi \cdot)$ et $b_k = \sqrt{2} \int_{]0,1[} f \sin(k\pi \cdot)$. En résolvant (X.3), on trouve alors pour tout $k \geq 1$,

$$T_k : t \mapsto a_k e^{-k^2 \pi^2 t} + \frac{b_k}{k^2 \pi^2} (1 - e^{-k^2 \pi^2 t}).$$

On pose

$$u : (t, x) \mapsto \sum_{k \geq 1} \left(a_k e^{-k^2 \pi^2 t} + \frac{b_k}{k^2 \pi^2} (1 - e^{-k^2 \pi^2 t}) \right) \sin(k\pi x).$$

E. X.2.5 Montrer que la solution u appartient à \mathcal{H} .

Solution de Q. X.2.5 On montre grâce aux théorèmes de dérivation que pour tout $t > 0$, la fonction $u(t, \cdot)$ est de classe $H^2(0, 1)$. Notons que, si $f = 0$, $u \in \mathcal{H}_0$.

E. X.2.6 Énoncer le problème stationnaire associé à (H).

Solution de Q. X.2.6

$$\begin{cases} -\partial_{xx}^2 \bar{u}(t, x) = f(x), & x \in]0, 1[, \\ \bar{u}(0) = 0, \bar{u}(1) = 0. \end{cases}$$

E. X.2.7 Quelle est la fonction-limite \bar{u} (ne dépendant que de la variable d'espace) vers laquelle tend $u(t, \cdot)$ quand t tend vers $+\infty$? Montrer que $\|u(t, \cdot) - \bar{u}(\cdot)\|_{L^2(0,1)} \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$.

Solution de Q. X.2.7 La limite est la fonction $\bar{u} \in H^2(0,1)$ solution du problème stationnaire. Soit $w : (t, x) \mapsto u(t, x) - \bar{u}(x)$. Alors w est solution de

$$(H) \quad \begin{cases} \partial_t w(t, x) - \partial_{xx}^2 w(t, x) = 0, & t > 0, x \in]0, 1[, \\ w(0, x) = u^0(x) - \bar{u}(x), & x \in]0, 1[, \\ w(t, 0) = 0, w(t, 1) = 0, & t > 0. \end{cases}$$

D'après les questions précédentes, $w \in \mathcal{H}_0$. De plus, d'après l'estimation de $E : t \mapsto \int_{]0,1[} w^2(t, x) dx$ obtenue en E.X.2.1, on a

$$\forall t \geq 0, \quad E(t) \leq E(0)e^{-2t}.$$

D'où le résultat.

Exercice X.3

On se propose d'étudier les schémas suivants définis pour $j \in \{1, \dots, J\}$ et $n \in \{0, \dots, N-1\}$ par :

- schéma à six points :

$$\frac{v_{j+1}^{n+1} - v_{j+1}^n}{12\Delta t} + \frac{5(v_j^{n+1} - v_j^n)}{6\Delta t} + \frac{v_{j-1}^{n+1} - v_{j-1}^n}{12\Delta t} - \nu \frac{v_{j+1}^n - 2v_j^n + v_{j-1}^n}{2\Delta x^2} - \nu \frac{v_{j+1}^{n+1} - 2v_j^{n+1} + v_{j-1}^{n+1}}{2\Delta x^2} = f_j,$$

- schéma de DuFort-Frankel :

$$\frac{v_j^{n+1} - v_j^{n-1}}{2\Delta t} - \nu \frac{v_{j+1}^{n+1} - v_j^{n+1} - v_j^{n-1} + v_{j-1}^{n-1}}{\Delta x^2} = f_j,$$

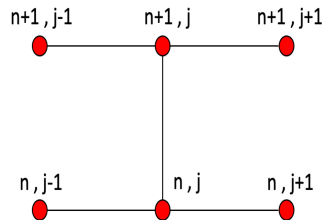
- schéma de Gear :

$$\frac{3v_j^{n+1} - 4v_j^n + v_j^{n-1}}{2\Delta t} - \nu \frac{v_{j+1}^{n+1} - 2v_j^{n+1} + v_{j-1}^{n+1}}{\Delta x^2} = f_j.$$

E. X.3.1 (Consistance) Montrer que le schéma à six points est précis à l'ordre 2 en temps et 4 en espace, celui de Gear est précis à l'ordre 2 en temps et 2 en espace. Que dire du schéma de DuFort-Frankel ?

Solution de Q. X.3.1

The six-point scheme: The stencil of this scheme is:



We can use the Taylor expansion to express each term of the scheme with respect to the center point (t^n, x_j) . There are a lot of computations but they will lead the the result, eventually.

There is a more clever way to go: noticing the six-point scheme is a θ -scheme.

Looking at the three first terms of the scheme, we notice that

$$\begin{aligned}
 & \frac{v_{j+1}^{n+1} - v_{j+1}^n}{12\Delta t} + \frac{5(v_j^{n+1} - v_j^n)}{6\Delta t} + \frac{v_{j-1}^{n+1} - v_{j-1}^n}{12\Delta t} \\
 &= \frac{v_{j+1}^{n+1} - v_j^n}{\Delta t} + \frac{(v_{j+1}^{n+1} - v_{j+1}^n) - 2(v_j^{n+1} - v_j^n) + (v_{j-1}^{n+1} - v_{j-1}^n)}{12\Delta t} \\
 &= \frac{v_j^{n+1} - v_j^n}{\Delta t} + \frac{v_{j+1}^{n+1} - 2v_j^{n+1} + v_{j-1}^{n+1}}{12\Delta t} - \frac{v_{j+1}^n - 2v_j^n + v_{j-1}^n}{12\Delta t} \\
 &= \frac{v_j^{n+1} - v_j^n}{\Delta t} + \frac{(\Delta x)^2}{12\Delta t} \frac{v_{j+1}^{n+1} - 2v_j^{n+1} + v_{j-1}^{n+1}}{(\Delta x)^2} - \frac{(\Delta x)^2}{12\Delta t} \frac{v_{j+1}^n - 2v_j^n + v_{j-1}^n}{(\Delta x)^2}
 \end{aligned}$$

Therefore

$$\begin{aligned}
 & \frac{v_{j+1}^{n+1} - v_{j+1}^n}{12\Delta t} + \frac{5(v_j^{n+1} - v_j^n)}{6\Delta t} + \frac{v_{j-1}^{n+1} - v_{j-1}^n}{12\Delta t} - \nu \frac{v_{j+1}^n - 2v_j^n + v_{j-1}^n}{2\Delta x^2} - \nu \frac{v_{j+1}^{n+1} - 2v_j^{n+1} + v_{j-1}^{n+1}}{2\Delta x^2} \\
 &= \frac{v_j^{n+1} - v_j^n}{\Delta t} - \left(\frac{\nu}{2} + \frac{(\Delta x)^2}{12\Delta t} \right) \frac{v_{j+1}^n - 2v_j^n + v_{j-1}^n}{(\Delta x)^2} - \left(\frac{\nu}{2} - \frac{(\Delta x)^2}{12\Delta t} \right) \frac{v_{j+1}^{n+1} - 2v_j^{n+1} + v_{j-1}^{n+1}}{(\Delta x)^2} \\
 &= \frac{v_j^{n+1} - v_j^n}{\Delta t} - \nu(1 - \theta) \frac{v_{j+1}^n - 2v_j^n + v_{j-1}^n}{(\Delta x)^2} + \nu\theta \frac{v_{j+1}^{n+1} - 2v_j^{n+1} + v_{j-1}^{n+1}}{(\Delta x)^2}
 \end{aligned}$$

where

$$\theta = \frac{1}{2} - \frac{(\Delta x)^2}{12\nu\Delta t}$$

This proves the six-point scheme is a θ -scheme¹ for this specific θ .

At this point, we know from E.X.1.2 the scheme is (at least) of order 1 in time and 2 in space. But, it might (and will) be better for this specific choice of θ . To show this, let us go back to the expression in E.X.1.2.

$$\mathcal{E}_j^n = \frac{\Delta t}{2} (1 - 2\theta) \partial_{tt}^2 u(t^n, x_j) + O(\Delta t^2) + O(\Delta x^2)$$

When substituting θ by $\frac{1}{2} - \frac{(\Delta x)^2}{12\nu\Delta t}$, we get

$$\mathcal{E}_j^n = \frac{(\Delta x)^2}{24\alpha} \partial_{tt}^2 u(t^n, x_j) + O(\Delta t^2) + O(\Delta x^2)$$

consequently

$$\mathcal{E}_j^n = O(\Delta t^2) + O(\Delta x^2)$$

The scheme is (at least) of order 2 in time and space.

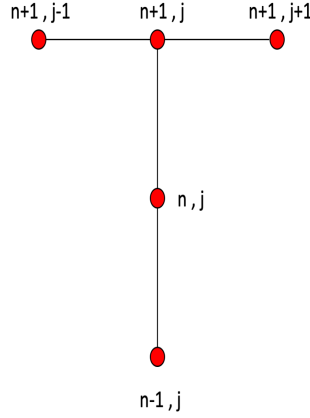
¹It is easy to get confused with the negative signs. Note that the terms are all to the left hand side of equation (X.1).

We may actually get an even better convergence. In order to find out, we need to go back to the computations of E.X.1.2 and push the development further. When doing this, we obtain

$$\mathcal{E}_j^n = \left(\frac{\nu}{240}(\Delta x)^4 - \frac{\nu^3}{12}(\Delta t)^2 \right) \partial_{xxxxxx}^6 u + O(\Delta t^2) + O(\Delta x^4)$$

The six-point scheme is of order 2 in time and order 4 in space.

The Gear scheme: The stencil of this scheme is:



We start, as usual, by computing Taylor expansions of every term of the scheme around the point of interest (t^n, x_j) . After several pages of long computations, we are both worn out and concerned about the number of trees need to carry out this proof. We turn back to the stencil and try to see if it suggests a different modulus operandi.

The configuration of the stencil suggests we try computing Taylor expansions around the point (t^{n+1}, x_j) instead of the point of interest as we usually do.

$$\begin{aligned} & -4u(t^n, x_n) \\ &= -4u(t^{n+1} - \Delta t, x_n) \\ &= -4u(t^{n+1}, x_j) + 4\Delta t \partial_t u(t^{n+1}, x_j) - 2(\Delta t)^2 \partial_{tt}^2 u(t^{n+1}, x_j) + \frac{2}{3}(\Delta t)^3 \partial_{ttt}^3 u(t^{n+1}, x_j) + O((\Delta t)^4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & u(t^{n-1}, x_n) \\ &= u(t^{n+1} - 2\Delta t, x_n) \\ &= u(t^{n+1}, x_j) - 2\Delta t \partial_t u(t^{n+1}, x_j) + 2(\Delta t)^2 \partial_{tt}^2 u(t^{n+1}, x_j) - \frac{4}{3}(\Delta t)^3 \partial_{ttt}^3 u(t^{n+1}, x_j) + O((\Delta t)^4) \end{aligned}$$

Therefore

$$\frac{3u(t^{n+1}, x_j) - 4u(t^n, x_n) + u(t^{n-1}, x_n)}{2\Delta t} = \partial_t u(t^{n+1}, x_j) - \frac{1}{3}(\Delta t)^2 \partial_{ttt}^3 u(t^{n+1}, x_j) + O((\Delta t)^3)$$

Similarly, we have:

$$\begin{aligned}
& u(t^{n+1}, x_{j+1}) \\
&= u(t^{n+1}, x_n + \Delta x) \\
&= u(t^{n+1}, x_n) + \Delta x \partial_x u(t^{n+1}, x_n) + \frac{1}{2}(\Delta x)^2 \partial_{xx}^2 u(t^{n+1}, x_n) + \frac{1}{6}(\Delta x)^3 \partial_{xxx}^3 u(t^{n+1}, x_n) \\
&\quad + \frac{1}{24}(\Delta x)^4 \partial_{xxxx}^4 u(t^{n+1}, x_n) + \frac{1}{120}(\Delta x)^5 \partial_{xxxxx}^5 u(t^{n+1}, x_n) + O((\Delta x)^6)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& u(t^{n+1}, x_{j-1}) \\
&= u(t^{n+1}, x_n - \Delta x) \\
&= u(t^{n+1}, x_n) - \Delta x \partial_x u(t^{n+1}, x_n) + \frac{1}{2}(\Delta x)^2 \partial_{xx}^2 u(t^{n+1}, x_n) - \frac{1}{6}(\Delta x)^3 \partial_{xxx}^3 u(t^{n+1}, x_n) \\
&\quad + \frac{1}{24}(\Delta x)^4 \partial_{xxxx}^4 u(t^{n+1}, x_n) - \frac{1}{120}(\Delta x)^5 \partial_{xxxxx}^5 u(t^{n+1}, x_n) + O((\Delta x)^6)
\end{aligned}$$

Therefore

$$\frac{u(t^{n+1}, x_{j+1}) - 2u(t^{n+1}, x_j) + u(t^{n+1}, x_{j-1}))}{(\Delta x)^2} = \partial_{xx}^2 u(t^{n+1}, x_n) + \frac{1}{12}(\Delta x)^2 \partial_{xxxx}^4 u(t^{n+1}, x_n) + O((\Delta x)^4)$$

Consequently

$$\begin{aligned}
& \frac{3u(t^{n+1}, x_j) - 4u(t^n, x_n) + u(t^{n-1}, x_n)}{2\Delta t} - \nu \frac{u(t^{n+1}, x_{j+1}) - 2u(t^{n+1}, x_j) + u(t^{n+1}, x_{j-1}))}{(\Delta x)^2} \\
&= \partial_t u(t^{n+1}, x_j) - \frac{1}{3}(\Delta t)^2 \partial_{ttt}^3 u(t^{n+1}, x_j) - \nu \partial_{xx}^2 u(t^{n+1}, x_n) - \frac{\nu}{12}(\Delta x)^2 \partial_{xxxx}^4 u(t^{n+1}, x_n) + O((\Delta t)^3) + O((\Delta x)^4)
\end{aligned}$$

Using (H) we have

$$\partial_t u(t^{n+1}, x_j) = \nu \partial_{xx}^2 u(t^{n+1}, x_j) + f_i$$

and

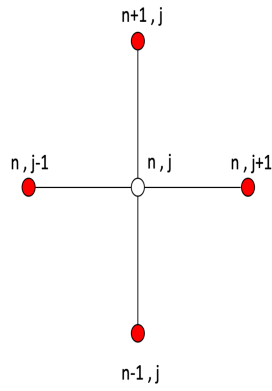
$$\begin{aligned}
& \partial_{ttt}^3 u(t^{n+1}, x_j) \\
& \partial_{tt}^2 (\partial_t u(t^{n+1}, x_j)) \\
&= \partial_{tt}^2 (\nu \partial_{xx}^2 u(t^{n+1}, x_j) + f_i) \\
&= \partial_{tt}^2 (\nu \partial_{xx}^2 u(t^{n+1}, x_j)) \\
&= \nu \partial_{xx}^2 \partial_t (\partial_t u(t^{n+1}, x_j)) \\
&= \nu \partial_{xx}^2 \partial_t (\nu \partial_{xx}^2 u(t^{n+1}, x_j) + f_i) \\
&= \nu \partial_{xx}^2 \partial_t (\nu \partial_{xx}^2 u(t^{n+1}, x_j)) \\
&= \nu^2 \partial_{xxxx}^4 \partial_t (u(t^{n+1}, x_j)) \\
&= \nu^3 \partial_{xxxxx}^6 u(t^{n+1}, x_j) + \nu^2 \partial_{xxxx}^4 f_i
\end{aligned}$$

which leads to

$$\begin{aligned}
 & \frac{3u(t^{n+1}, x_j) - 4u(t^n, x_n) + u(t^{n-1}, x_n)}{2\Delta t} - f_i - v \frac{u(t^{n+1}, x_{j+1}) - 2u(t^{n+1}, x_j) + u(t^{n+1}, x_{j-1}))}{(\Delta x)^2} \\
 &= -\frac{1}{3}(\Delta t)^2 v^3 \partial_{xxxxx}^6 u(t^{n+1}, x_j) - \frac{v}{12}(\Delta x)^2 \partial_{xxxx}^4 u(t^{n+1}, x_n) - \frac{1}{3}(\Delta t)^2 v^2 \partial_{xxxx}^4 f_i + O((\Delta t)^3) + O((\Delta x)^4) \\
 &= O((\Delta t)^2) + O((\Delta x)^2)
 \end{aligned}$$

Therefore, the Gear scheme is of order 2 in time and space.

The DuFort-Frankel scheme: The stencil of this scheme is:



Let us compute the Taylor expansions around the point of interest (t^n, x_j) . We have:

$$\begin{aligned}
 & \frac{u(t^{n+1}, x_j) - u(t^{n-1}, x_j)}{2\Delta t} \\
 &= \frac{u(t^n, x_j) + \Delta t \partial_t u(t^n, x_j) + \frac{1}{2}(\Delta t)^2 \partial_{tt}^2 u(t^n, x_j) - u(t^n, x_j) + \Delta t \partial_t u(t^n, x_j) - \frac{1}{2}(\Delta t)^2 \partial_{tt}^2 u(t^n, x_j) + O(\Delta t^3)}{2\Delta t} \\
 &= \frac{2\Delta t \partial_t u(t^n, x_j) + O(\Delta t^3)}{2\Delta t} \\
 &= \partial_t u(t^n, x_j) + O(\Delta t^2)
 \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}
& \frac{u(t^n, x_{j+1}) - u(t^{n+1}, x_j) - u(t^{n-1}, x_j) + u(t^n, x_{j-1}))}{\Delta x^2} \\
&= \frac{1}{\Delta x^2} (u(t^n, x_j) + \Delta x \partial_x u(t^n, x_j) + \frac{1}{2} (\Delta x)^2 \partial_{xx}^2 u(t^n, x_j) + \frac{1}{6} (\Delta x)^3 \partial_{xxx}^3 u(t^n, x_j) \\
&\quad + \frac{1}{24} (\Delta x)^4 \partial_{xxxx}^4 u(t^n, x_j) + \frac{1}{120} (\Delta x)^5 \partial_{xxxxx}^5 u(t^n, x_j) - u(t^n, x_j) \\
&\quad - \Delta t \partial_t u(t^n, x_j) - \frac{1}{2} (\Delta t)^2 \partial_{tt}^2 u(t^n, x_j) - \frac{1}{6} (\Delta t)^3 \partial_{ttt}^3 u(t^n, x_j) - u(t^n, x_j) \\
&\quad + \Delta t \partial_t u(t^n, x_j) - \frac{1}{2} (\Delta t)^2 \partial_{tt}^2 u(t^n, x_j) + \frac{1}{6} (\Delta t)^3 \partial_{ttt}^3 u(t^n, x_j) + u(t^n, x_j) \\
&\quad - \Delta x \partial_x u(t^n, x_j) + \frac{1}{2} (\Delta x)^2 \partial_{xx}^2 u(t^n, x_j) - \frac{1}{6} (\Delta x)^3 \partial_{xxx}^3 u(t^n, x_j) \\
&\quad + \frac{1}{24} (\Delta x)^4 \partial_{xxxx}^4 u(t^n, x_j) - \frac{1}{120} (\Delta x)^5 \partial_{xxxxx}^5 u(t^n, x_j) + O(\Delta x^6) + O(\Delta t^4)) \\
&= \partial_{xx}^2 u(t^n, x_j) - \frac{(\Delta t)^2}{(\Delta x)^2} \partial_{tt}^2 u(t^n, x_j) + \frac{1}{12} (\Delta x)^2 \partial_{xxxx}^4 u(t^n, x_j) + O(\Delta x^4) + O\left(\frac{\Delta t^4}{\Delta x^2}\right)
\end{aligned}$$

It follows:

$$\begin{aligned}
& \frac{u(t^{n+1}, x_j) - u(t^{n-1}, x_j)}{2\Delta t} - \nu \frac{u(t^n, x_{j+1}) - u(t^{n+1}, x_j) - u(t^{n-1}, x_j) + u(t^n, x_{j-1}))}{\Delta x^2} - f_i \\
&= \underbrace{\partial_t u(t^n, x_j) + \nu \partial_{xx}^2 u(t^n, x_j)}_{=f(x_j)} + \frac{1}{12} (\Delta x)^2 \partial_{xxxx}^4 u(t^n, x_j) - \nu \frac{(\Delta t)^2}{(\Delta x)^2} \partial_{tt}^2 u(t^n, x_j) - f_i + O(\Delta t^2) + O(\Delta x^4) + O\left(\frac{\Delta t^4}{\Delta x^2}\right) \\
&= -\nu \frac{(\Delta t)^2}{(\Delta x)^2} \partial_t (\partial_t u(t^n, x_j)) + \frac{1}{12} (\Delta x)^2 \partial_{xxxx}^4 u(t^n, x_j) + O(\Delta t^2) + O(\Delta x^4) + O\left(\frac{\Delta t^4}{\Delta x^2}\right) \\
&= -\nu \frac{(\Delta t)^2}{(\Delta x)^2} \partial_t (\nu \partial_{xx}^2 u(t^n, x_j) + f(x_j)) + \frac{1}{12} (\Delta x)^2 \partial_{xxxx}^4 u(t^n, x_j) + O(\Delta t^2) + O(\Delta x^4) + O\left(\frac{\Delta t^4}{\Delta x^2}\right) \\
&= -\nu^2 \frac{(\Delta t)^2}{(\Delta x)^2} \partial_t (\partial_{xx}^2 u(t^n, x_j)) + \frac{1}{12} (\Delta x)^2 \partial_{xxxx}^4 u(t^n, x_j) + O(\Delta t^2) + O(\Delta x^4) + O\left(\frac{\Delta t^4}{\Delta x^2}\right) \\
&= -\nu^2 \frac{(\Delta t)^2}{(\Delta x)^2} \partial_{xx}^2 (\partial_t u(t^n, x_j)) + \frac{1}{12} (\Delta x)^2 \partial_{xxxx}^4 u(t^n, x_j) + O(\Delta t^2) + O(\Delta x^4) + O\left(\frac{\Delta t^4}{\Delta x^2}\right) \\
&= -\nu^3 \frac{(\Delta t)^2}{(\Delta x)^2} \partial_{xxxx}^4 u(t^n, x_j) + \nu \frac{(\Delta t)^2}{(\Delta x)^2} \partial_{xx}^2 f(x_j) + \frac{1}{12} (\Delta x)^2 \partial_{xxxx}^4 u(t^n, x_j) + O(\Delta t^2) + O(\Delta x^4) + O\left(\frac{\Delta t^4}{\Delta x^2}\right) \\
&= \left(\frac{(\Delta x)^2}{12} - \nu^3 \frac{(\Delta t)^2}{(\Delta x)^2} \right) \partial_{xxxx}^4 u(t^n, x_j) + \nu \frac{(\Delta t)^2}{(\Delta x)^2} \partial_{xx}^2 f(x_j) + O(\Delta t^2) + O(\Delta x^4) + O\left(\frac{\Delta t^4}{\Delta x^2}\right) \\
&= O(\Delta x^2) + O\left(\frac{\Delta t^2}{\Delta x^2}\right)
\end{aligned}$$

The “legal” answer to the question should be “the scheme is not consistent”: it does not fall into the definition given in class because of the term with $\Delta t^2/\Delta x^2$. However, since we can choose the Δt and Δx , it would make sense to choose

$$\Delta t = \Delta x^2$$

then

$$O(\Delta x^2) + O\left(\frac{\Delta t^2}{\Delta x^2}\right) = O(\Delta x^2)$$

the Gear scheme becomes of the second order in space.

E. X.3.2 (Stabilité L^2) Montrer que les schémas à six points, de DuFort-Frankel et de Gear sont inconditionnellement L^2 -stables.

Solution de Q. X.3.2

The six-point scheme: We have noticed the six-point scheme is a θ -scheme for $\theta = \frac{1}{2} - \frac{(\Delta x)^2}{12\nu\Delta t}$. Since $\frac{1}{12} < \frac{1}{2}$, Equation (X.2) provides the stability of the six-point scheme.

The Gear scheme:

E. X.3.3 (Principe du maximum) Montrer que, si $2\nu\Delta t/\Delta x^2 \leq 1$, le θ -schéma vérifie le principe du maximum. Montrer le même résultat pour le schéma de DuFort-Frankel si $\nu\Delta t/\Delta x^2 \leq 1$. Que dire de la stabilité L^∞ ?

D) Approfondissement

Ces exercices sont disponibles sous forme de Jupyter notebooks sur edunao.