WIKIPEDIA

埃尔米特伴随

维基百科，自由的百科全书

数学上，特别是泛函分析中，希尔伯特空间中的每个线性算子有一个相应的**伴随算子**（adjoint operator）。算子的伴随将方块矩阵共轭转置推广到（可能）无穷维情形。如果我们将希尔伯特空间上的算子视为“广义复数”，则一个算子的伴随起着一个复数的共轭的作用。

一个算子A的伴随常常也称为**埃尔米特伴随**（Hermitian adjoint，以夏尔·埃尔米特命名），记作A^*或$A^\dagger$（后者尤其用于狄拉克符号记法）。

目录

有界算子

假設H是一個希爾伯特空間，帶有內積 $\langle\cdot,\cdot\rangle$。考慮連續線性算子$A : H \to H$（這與有界算子相同）。

利用里斯表示定理，我們可以證明存在惟一的連續線性算子

$A^* : H \to H$具有如下性質：

$$\langle Ax, y\rangle = \langle x, A^* y\rangle\text{，对所有}x, y \in H\text{。}$$

這個算子A^* 是A的伴隨。

這可以視為一個方塊矩陣的轉置共軛或伴隨矩陣推廣，在標準（復）內積下具有相似的性質。

性质

马上可得的性质

1. $A^{**} = A$
2. 如A可逆，则A^* 也可逆，且 $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$
3. $(A + B)^* = A^* + B^*$
4. $(\lambda A)^* = \lambda^* A^*$，这里$\lambda^*$ 表示复数λ的复共轭
5. $(AB)^* = B^* A^*$

如果我们定义A的算子范数为

$$\|A\|_{op} := \sup\{\|Ax\| : \|x\| \leq 1\}$$

则

$$\|A^*\|_{op} = \|A\|_{op},$$

而且有

$$\|A^*A\|_{op} = \|A\|_{op}^2。$$

希尔伯特空间H上有界线性算子与伴随算子以及算子范数给出一个C*代数例子。

A的像与它的伴随的核的关系为

$$\ker A^* = (\mathrm{im}\ A)^\perp,$$
$$(\ker A^*)^\perp = \overline{\mathrm{im}\ A}。$$

第一个等式的证明：

$$\begin{aligned} A^*x = 0 &\iff \langle A^*x, y\rangle = 0 \quad \forall y \in H \\ &\iff \langle x, Ay\rangle = 0 \quad \forall y \in H \\ &\iff x \perp \mathrm{im}\ A \end{aligned}$$

第二个等式由第一个推出，于两边取正交空间即可。注意到一般地，像未必是闭的，但连续算子的核总是闭的。

埃尔米特算子

有界算子$A: H \to H$称为埃尔米特或自伴如果

$$A = A^*$$

这等价于

$$\langle Ax, y\rangle = \langle x, Ay\rangle, \forall x, y \in H。$$

在某种意义下，这种算子起着实数（等于他们的复共轭）的作用。他们在量子力学中作为实值可观测量的模型。更多细节参见自伴算子一文。

无界算子的伴随

许多重要的算子不是连续的或只定义在希尔伯特的一个子空间上。在这种情形，我们仍然能定义伴随，在自伴算子一文有解释。

其他伴随

范畴论中，方程

$$\langle Ax, y\rangle = \langle x, A^*y\rangle$$

形式上类似地定义了伴随函子偶性质，这也是伴随函子得名之由来。

又见

- 数学概念
  - 线性代数
  - 内积
  - 希尔伯特空间
  - 埃尔米特算子
  - 范数
  - 算子范数
  - 线性映射的转置
- 物理应用
  - 对偶空间
  - 狄拉克符号
  - 量子力学
  - 可观测量

参考文献

- Walter Rudin. *Functional Analysis*(2nd ed.), China Machine Press, 2006