级数

维基百科，自由的百科全书

在数学中，一个有穷或无穷的序列$u_1, u_2, u_3, u_4 \ldots$的和$s = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots$称为**级数**。如果序列是有穷序列，其和称为**有穷级数**；反之，称为**无穷级数**(一般简称为级数)。序列$u_0, u_1, u_2, \ldots$中的项称作级数的**通项**（或**一般项**）。级数的通项可以是实数、矩阵或向量等常量，也可以是关于其他变量的函数，不一定是一个数。一般的，如果级数的通项是常量，则称之为**常数项级数**，如果级数的通项是函数，则称之为**函数项级数**。常见的简单有穷数列的级数包括等差数列和等比数列的级数。

有穷数列的级数一般通过初等代数的方法就可以求得。无穷级数有发散和收敛的区别，称为无穷级数的**敛散性**。判断无穷级数的敛散性是无穷级数研究中的主要工作。无穷级数在收敛时才會有一个**和**；发散的无穷级数在一般意义上没有和，但可以用一些别的方式来定义。

无穷级数的研究更多的需要数学分析的方法来解决。无穷级数一般写作$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots$、$\sum u_n$或者$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$，级数收敛时，其和通常被表示为$s = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$，其中符号

$\sum$称为求和号。

目录

无穷级数的定义

设(u_n)是一个无穷序列 ：$u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n, \ldots$ ，其前n项的和称为$\sum u_n$的**部分和**：

$$s_n = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n$$

(u_n)部分和依次构成另一个无穷序列：$s_1, s_2, s_3, \ldots, s_n, \ldots$

这两个序列合称为一个级数，记作$\sum u_n$或者$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$。

无穷级数的敛散性

对于级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ ，如果当n趋于正无穷大时，s_n趋向一个有限的极限：$s = \lim_{n\to\infty} s_n$ ，那么这个无穷级数就叫做是**收敛**的，s叫做级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$的和。如果极限不存在，这个无穷级数就是**发散**的。收敛的无穷级数存在唯一的一个和s。这时可以定义级数$\sum u_n$的**余项和**：$R_n = S - S_n$ 。

任意项级数

如果级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$中的各项可以是正数，负数或零，则级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$称为任意项级数。 将**任意项级数**各项u_n取绝对值，得到正项级数。 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n| = |u_1| + |u_2| + |u_3| + \cdots + |u_n| + \cdots$

条件收敛

> 如果**任意项级数**$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛，而**级数**$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$发散，则称**级数**$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$条件收敛。

绝对收敛

> 如果级数$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$收敛，则称级数绝对收敛

定理：如果任意项级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$的各项的绝对值所组成的正项级数$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$收敛，则级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛。

证明：

令

$$a_n = \frac{1}{2}(|u_n| + u_n), b_n = \frac{1}{2}(|u_n| - u_n)$$

于是，有

$$0 \le a_n \le |u_n|, 0 \le b_n \le |u_n|$$

因为$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n$均为正项级数，且$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$收敛，

由**比较审敛法**知，级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$和$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$收敛

又因为$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty}(a_n - b_n)$,所以由级数的

定义可得，级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛。

该定理表明，如果级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$绝对收敛，则级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$必收敛。

收敛级数的性质

- 若一个无穷级数$\sum u_n$ ： $u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \cdots$收敛，其和为$s$，则如果每一项乘以一个常数$a$，得到的级数$\sum au_n$： $au_1 + au_2 + au_3 + \cdots + au_n + \cdots$也收敛，且和等于*as*。
- 收敛的无穷级数可以逐项相加或相减，如有两个无穷级数：

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = s$和 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n = t$，则
$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n \pm v_n) = s \pm t.$

- 级数前面加上有限项或减去有限项不影响其敛散性，如：

$$s = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \cdots \text{和 } s = u_{12} + u_{15} + u_{16} + u_{17} + \cdots + u_n + \cdots$$

这两个级数的敛散性是一样的。

- 当n趋向无限大时，任何一个收敛级数的通项都趋于0： $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$
- 在一个完备空间中，也可以运用柯西收敛的准则来判断级数是否收敛：一个无穷级数$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$收敛的充要条件是，对任意$\epsilon > 0$ ，总存在$N_0 > 0$，使得任意的$n > m > N_0$，
$|s_n - s_m| = |\sum_{k=m+1}^{n} u_k| = |u_{m+1} + u_{m+2} + \cdots + u_n| < \epsilon$ 。

无穷级数的研究历史

将一个函数展开成无穷级数的概念最早来自14世纪印度的马德哈瓦。他首先发展了幂级数的概念，对泰勒级数、麦克劳林级数、无穷级数的有理逼近以及无穷连分数做了研究。他发现了正弦、余弦、正切函数等的泰勒展开，还用幂级数计算了 π 的值。他的学生继承和发展了他关于级数的工作。

17世纪，詹姆斯·格里高利也开始研究无穷级数，并发表了若干函数的麦克劳林展开式。1715年，布鲁克·泰勒提出了构造一般解析函数的泰勒级数的方法。18世纪时欧拉又发展了超几何级数和q-级数的理论。

对审敛法的研究

14世纪时，马德哈瓦已经开始讨论判别无穷级数敛散性的方法。他提出了一些审敛的准则，后来他的学生将其推广。

然而在欧洲，审查无穷级数是否收敛的研究一般被认为是从19世纪由高斯开始的。他于1812年发表了关于欧拉的超几何级数

$$1+\frac{\alpha\beta}{1\cdot\gamma}x+\frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1\cdot2\cdot\gamma(\gamma+1)}x^2+\cdots$$

的论文，提出了一些简单的收敛准则，并对余项和以及收敛半径进行了讨论。

柯西提出了严格的审敛法的重要性，他证明了两个收敛级数的乘积不一定是收敛的，同时开始研究严格的审敛准则。欧拉和高斯各自给出了各种审敛法则。柯西更研究了复函数的幂级数展开。

1826年，阿贝尔在他的关于二项式级数

$$1+\frac{m}{1}x+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\cdots$$

的论文中更正了柯西的若干个结论，并给出了二项式级数的严格的求和方法，指出了连续性在收敛问题中的重要性。

柯西提出的审敛法并不是普遍适用的，只能用于判别某些特定函数的敛散性。同时代的其他数学家，比如拉贝（Joseph Ludwig Raabe）的对数判别法，德·摩根的对数判别法（被 DuBois-Reymond和普林斯海姆证明对某些函数失效），以及贝特朗、斯托克斯、切比雪夫等人的审敛法也是如此。

对普遍的审敛法则的研究由恩斯特·库默尔开始，之后的艾森斯坦、维尔斯特拉斯、尤里斯·迪尼等都曾致力于这一领域。普林斯海姆于1889年发表的论文阐述了完整的普适审敛理论。

对一致连续性的研究

1821年，柯西首先开始对一致连续性的研究，但其中有不少错误和局限。这些错误最早被阿贝尔指出，但首先得出正确结论的是西德尔和斯托克斯。1853年，柯西在注意到阿贝尔的批评后重新开展研究，并得到了与斯托克斯一样的结论。然而，一致连续性的重要性在很长一段时间裡没有受到重视。

类别

更多級數請參見級數列表。

几何级数

几何级数（或**等比级数**）是指通项为等比数列的级数，比如：

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}=2$$

一般来说，几何级数$\sum_{n=0}^{\infty} z^n$收敛当且仅当$|z|<1$。

调和级数

调和级数是指通项为$\frac{1}{n}$的级数：

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$$

它是发散的。

p-级数

p-级数是指通项为$\frac{1}{n^p}$的级数：

$$U_p=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$$

对于实数值的p，当$p>1$时收敛，当$p\leq 1$时发散。这可以由**积分比较审敛法**得出。

函数$\zeta : p \mapsto U_p$是黎曼ζ函數在实轴大于1的部分的限制，关于黎曼ζ函数有著名的黎曼猜想。 特别地，當$p=1$時，p-級數即為調和級數。

裂项级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}(b_n-b_{n+1})$$

收敛当且仅当数列b_n收敛到某个极限L，并且这时级数的和是b_1-L。

泰勒级数

泰勒级数是关于一个光滑函数f在一点a附近取值的级数。泰勒函数由函数在点a的各阶导数值构成，具体形式为：

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

这是一个幂级数。如果它在a附近收敛，那么就称函数f在点a上是解析的。

交错级数

具有以下形式的级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$$

其中所有的a_n非负，被称作交错级数。交错级数的收敛通常要借助莱布尼茨判别法。

幂级数

形同$\sum a_n(x-x_0)^n$的函数项无穷级数称为$x-x_0$的**幂级数**。它的收敛与否和系数a_n有关。

傅里叶级数

任何周期函数都可以用正弦函数和余弦函数构成的无穷级数来表示，称为**傅里叶级数**。傅里叶级数是函数项无穷级数，也就是说每项都是一个函数。傅里叶级数在数论、组合数学、信号处理、概率论、统计学、密码学、声学、光学等领域都有着广泛的应用。

例如，周期为2π的周期函数$f(x)$可以表示为：

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx),n=1,2,3,\ldots$$

其中，$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx$，$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx$，特别的，$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx$

常数项无穷级数审敛法

正项级数

若通项为实数的无穷级数$\sum u_n$每一项u_n都大于等于零，则称$\sum u_n$是一**正项级数**。

如果无穷级数 $\sum u_n$ 是正项级数，则部分和S_n是一个单调递增数列。由数列极限的判别准则：单调有界数列必有极限。因此，要么部分和数列S_n有界，这时$\sum u_n$收敛，$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=s$，要么部分和数列趋于正无穷，这时级数发散。

比较判别法

设$\sum u_n$ 和 $\sum v_n$是正项级数。

> 如果存在正实数M，使得从若干项开始，$u_n\leq Mv_n$（也就是说$u_n=O_\infty(v_n)$），则
>
> - 当$\sum v_n$ 收敛时，可推出 $\sum u_n$ 也收敛。
> - 当$\sum u_n$ 发散时，可推出 $\sum v_n$ 也发散。
>
> 如果$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=0$，则
>
> - 当$\sum v_n$ 收敛时，可推出 $\sum u_n$ 也收敛。
> - 当$\sum u_n$ 发散时，可推出 $\sum v_n$ 也发散。
>
> 如果$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=1$或其它有限数，则$\sum v_n$ 和$\sum u_n$ 同时收敛或发散。

比如，我们已知级数：$\sum \frac{1}{n^2}$收敛，则级数：$\sum \frac{|\sin n|}{n^2}$也收敛，因为对任意的$n$，$\sin n \leq 1$。

比较判别法的特点是要已知若干级数的敛散性。一般来说，我们可以选择比较简单的级数：$U_p = \sum \frac{1}{n^p}$作为“标准级数”，依此判断其他函数的敛散性。需要知道的是当$p \leq 1$时，U_p发散，当$p > 1$时，U_p收敛。

达朗贝尔判别法

在比较判别法中，如果取几何级数为比较的标准级数，可得：

> 设$\sum u_n$是通项大于零的正项级数。并且$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = p$，则
>
> - 当$p < 1$ 时，级数$\sum u_n$收敛。
> - 当$p > 1$ 时，级数$\sum u_n$发散。
> - 当$p = 1$ 时，级数$\sum u_n$可能收敛也可能发散。

这个判别法也称为**比值判别法**或**比值审敛法**。

柯西收敛准则

> 设 $\sum u_n$ 是正项级数。并且$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = p$，则
>
> - 当$p < 1$时，级数 $\sum u_n$ 收敛。
> - 当$p > 1$时，级数 $\sum u_n$ 发散。
> - 当$p = 1$时，级数 $\sum u_n$ 可能收敛也可能发散。

这个判别法也称为**根值判别法**或**根值审敛法**'。

交错级数

具有以下形式的级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$$

其中所有的a_n非负，被称作交错级数。

莱布尼茨判别法

在上述的级数$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$中，如果当$n$趋于无穷时，数列$a_n$的极限存在且等于 0，并且每个$a_n$小于$a_{n-1}$（即，数列$a_n$是单调递减的），那么级数收敛。

任意项级数

对于通项为任意实数的无穷级数$\sum u_n$，将级数$\sum |u_n|$称为它的绝对值级数。可以证明，如果$\sum |u_n|$收敛，那么$\sum u_n$也收敛，这时称 $\sum u_n$**绝对收敛**。如果$\sum u_n$收敛，但是$\sum |u_n|$发散，则称$\sum u_n$**条件收敛**。比如说，级数$\sum \frac{\sin n}{n^2}$绝对收敛，因为前面已经证明$\sum \frac{|\sin n|}{n^2}$收敛。而级数$\sum \frac{(-1)^n}{n}$是条件收敛的。它自身收敛到$\ln \frac{1}{2}$，但是它的绝对值级数$\sum \frac{1}{n}$是发散的。

黎曼级数定理说明，如果一个无穷级数$\sum u_n$条件收敛，那么对于任意的实数x，存在一个正整数到正整数的双射σ，使得级数$\sum u_{\sigma(n)}$收敛到x。对于正负无穷大，上述双射也存在。

函数项级数

设$(u_n(x))_{n\geq 0}$为定义在区间$\mathcal{I}$上的函数列，则表达式：$u_1(x)+u_2(x)+\cdots+u_n(x)+\cdots$称为函数项级数，简记为$\sum u_n(x)$。对函数项级数的主要研究是：

1. 确定对哪些x，$\sum u_n(x)$收敛。
2. $\sum u_n(x)$收敛的话，其和是什么，有什么性质？

收敛域

对区间$\mathcal{I}$上的每个 x_0，级数 $\sum u_n(x_0)$是常数项级数。若 $\sum u_n(x_0)$收敛，则称x_0是$\sum u_n(x)$的一个**收敛点**，$\sum u_n(x)$全体收敛点的集合称为它的**收敛域**。若$\sum u_n(x_0)$发散，则称x_0是$\sum u_n(x)$的一个**发散点**，$\sum u_n(x)$全体发散点的集合称为它的**发散域**。$\sum u_n(x)$在其收敛域的每一点上都有定义，因此定义了一个函数，称为$\sum u_n(x)$的**和函数**，记为$S(x)$。按照定义，$S(x_0)=\lim_{n\to\infty} S_n(x_0)$，其中$S_n(x_0)=u_1(x_0)+u_2(x_0)+\cdots+u_n(x_0)$为函数项级数在$x_0$点上的部分和。

一致收敛

函数项级数的取值可以在它的收敛域上用和函数定义，但和函数的性质可能会和级数的每一项不同。比如说，当函数项级数$\sum u_n(x)$中的每一项$u_n(x)$在收敛域上都是连续函数时，和函数未必会是连续函数。以下是一个例子：

> 设$u_n(x)=x^n-x^{n+1}$，也就是说$u_0(x)=1-x$，$u_1(x)=x-x^2$等等，它们显然都是连续函数（甚至是光滑函数）。这时函数项级数在x 点上的部分和$S_n(x)=\sum_{k=0}^{n}(x^k-x^{k+1})=1-x^{n+1}$。
>
> 在区间$[0,1]$的每一点上，部分和都有极限：
>
> > 当$x\neq 1$时，$S_n(x)\to 1$
> > 当$x=1$时，$S_n(x)\to 0$
>
> 于是在区间$[0,1]$上，级数$\sum u_n(x)$ 收敛，其和函数$S(x)$为：
>
> > 当$0\leq x<1$时，$S(x)=1$；$S(1)=0$。
>
> 这不是一个连续函数。

然而，如果函数项级数能够满足某些更严格的条件的话，可以证明级数的和函数的规则性将会等于每一项函数的规则性，这就是所谓的**一致收敛**性质。和函数列的一致收敛性质一样，函数项级数$\sum u_n(x)$在某个区间$\mathcal{I}$内（关于某个范数$\|\cdot\|$）一致收敛的定义是它的部分和函数S_n 在区间$\mathcal{I}$上一致收敛到和函数S，

$$\lim_{n\to\infty}\|S-S_n\|_{\mathcal{I}}=0$$

或者写成 $\lim_{n\to\infty}\left\|\sum_{k=n}^{\infty}u_k\right\|_{\mathcal{I}}=0$

可以证明：

> 如果级数 $\sum u_n(x)$ 在区间 $\mathcal{I}$ 内一致收敛，并且每个 $u_n(x)$ 都是连续函数，那么和函数 S 在区间 $\mathcal{I}$ 上也是连续函数。

进一步的，如果导函数级数的每一项都是 $\mathcal{C}^p$ 函数（p 阶连续可微函数），并且各阶导函数级数 $\sum u_n(x), \sum u_n^{(1)}(x), \sum u_n^{(2)}(x), \ldots, \sum u_n^{(p)}(x)$ 在区间 $\mathcal{I}$ 内都一致收敛，那么级数和函数 $S(x)=\sum u_n(x)$ 也是 $\mathcal{C}^p$ 函数，并且：

$$\forall 0\le i\le p \text{ ， } S^{(i)}(x)=\sum u_n^{(i)}(x) \text{。}$$

绝对收敛

函数项级数也有绝对收敛的概念。对于某个给定的区间 $\mathcal{I}$ 和范数 $\|\cdot\|_{\mathcal{I}}$，函数项级数 $\sum u_n(x)$ 在区间 $\mathcal{I}$ 内绝对收敛，当且仅当常数级数 $\sum \|u_n\|_{\mathcal{I}}$ 收敛。

绝对收敛的（连续？）函数在每一点都收敛，并且在区间 $\mathcal{I}$ 内一致收敛。

幂级数

形同 $\sum a_n(x-x_0)^n$ 的函数项无穷级数称为 $x-x_0$ 的**幂级数**。一般只需讨论形同 $\sum a_n x^n$ 的幂级数。

幂函数的收敛域

根据阿贝尔定理，它的收敛域是一个关于零对称的区间，即为 $(-R,R)$（可开可闭）的形式。这个正数 R（可以是无穷大）叫做幂级数的**收敛半径**。并有定理：

设幂级数 $\sum a_n x^n$ 满足 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\rho$，则：

- ρ 是正实数时，$R=\frac{1}{\rho}$。
- $\rho=0$ 时，$R=\infty$。
- $\rho=\infty$ 时，$R=0$。

幂级数的和函数

求解幂级数的和函数有时需要利用先对各项积分（或求导）以得到一个方便利用已有公式进行求和的形式，在求和后在对各项求导（或积分）。

渐进级数

渐进级数是用来对某些函数的间断点附近的情况进行逼近的级数。渐进级数一般是发散的，它的部分和趋于无穷大，因此可以很好地逼近一个趋于无穷大的函数。但要注意的是，渐进级数提供的逼近是相对的，即只是比值趋于一致，与函数值之间的误差并不像收敛的级数一样趋于无穷小。一般来说，渐进级数在若干项后便达到最小的绝对误差，之后的绝

对误差一般会增大甚至趋于无穷。

发散级数的和

发散级数的部分和没有极限，但是在应用中可以使用比较弱的级数和定义，比如切萨罗求和、阿贝尔求和以及欧拉求和。

推广

级数的概念可以在任何的对称拓扑群中定义，常用的是在一个巴拿赫空间（比如实数或复数空间）中。

参见

- 收敛
- 发散级数
- 函数级数
- 求和变换
- 阿贝尔定理
- 黎曼级数定理
- 柯西-阿达马公式

注释

参考文献

参考书目

- 同济大学数学系. 高等数学 6. 高等教育出版社. ISBN 978-7-04-021277-8 （中文（中国大陆））.
- 北京大学数学科学学院. 数学分析 **2**. 北京大学出版社 （中文（中国大陆））.

取自“https://zh.wikipedia.org/w/index.php?title=级数&oldid=55831133”

本页面最后修订于2019年8月26日 (星期一) 10:13。

本站的全部文字在知识共享 署名-相同方式共享 3.0协议之条款下提供，附加条款亦可能应用。（请参阅使用条款）
Wikipedia®和维基百科标志是维基媒体基金会的注册商标；维基™是维基媒体基金会的商标。
维基媒体基金会是按美国国内税收法501(c)(3)登记的非营利慈善机构。