WIKIPEDIA

特征函数 (概率论)

维基百科，自由的百科全书

在概率论中，任何随机变量的**特征函数**（缩写：ch.f，复数形式：ch.f's）完全定义了它的概率分布。在实直线上，它由以下公式给出，其中X是任何具有该分布的随机变量：

$$\varphi_X(t) = \mathrm{E}\left(e^{itX}\right),$$

其中t是一个实数，i是虚数单位，E表示期望值。

用矩母函数M_X（t）来表示（如果它存在），特征函数就是iX的矩母函数，或X在虚数轴上求得的矩母函数。

$$\varphi_X(t) = M_{iX}(t) = M_X(it)$$

与矩母函数不同，特征函数总是存在。

如果F_X是累积分布函数，那么特征函数由黎曼-斯蒂尔切斯积分给出：

$$\mathrm{E}\left(e^{itX}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\, dF_X(x)。$$

在概率密度函数f_X存在的情况下，该公式就变为：

$$\mathrm{E}\left(e^{itX}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f_X(x)\, dx。$$

如果X是一个向量值随机变量，我们便取自变量t为向量，tX为数量积。

R或$\mathbf{R}^n$上的每一个概率分布都有特征函数，因为我们是在有限测度的空间上对一个有界函数进行积分，且对于每一个特征函数都正好有一个概率分布。

一个对称概率密度函数的特征函数（也就是满足$f_X(x) = f_X(-x)$）是实数，因为从$x>0$所获得的虚数部分与从$x<0$所获得的相互抵消。

目录

性質

连续性

勒维连续定理说明，假设$(X_n)_{n=1}^{\infty}$为一个随机变量序列，其中每一个X_n都有特征函数φ_n，那么它依分布收敛于某个随机变量X：

$$X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X \text{当} n \to \infty$$

如果

$$\varphi_n \quad \xrightarrow{\text{pointwise}} \quad \varphi \text{当} n \to \infty$$

且$\varphi(t)$在 $t = 0$处连续，φ是X的特征函数。

勒维连续定理可以用来证明弱大数定律。

反演定理

在累积概率分布函数与特征函数之间存在双射。也就是说，两个不同的概率分布不能有相同的特征函数。

给定一个特征函数φ，可以用以下公式求得对应的累积概率分布函数F：

$$F_X(y) - F_X(x) = \lim_{\tau \to +\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\tau}^{+\tau} \frac{e^{-itx} - e^{-ity}}{it} \, \varphi_X(t) \, dt。$$

一般地，这是一个广义积分；被积分的函数可能只是条件可积而不是勒贝格可积的，也就是说，它的绝对值的积分可能是无穷大。[1]

博赫纳-辛钦定理/公理化定義

任意一个函数φ是对应于某个概率律μ的特征函数，当且仅当满足以下三个条件：

1. φ是连续的；
2. $\varphi(0)=1$；
3. φ是一个正定函数（注意这是一个复杂的条件，与$\varphi>0$不等价）。

計算性质

特征函数对于处理独立随机变量的函数特别有用。例如，如果X_1、X_2、……、X_n是一个独立（不一定同分布）的随机变量的序列，且

$$S_n=\sum_{i=1}^n a_i X_i,$$

其中a_i是常数，那么S_n的特征函数为：

$$\varphi_{S_n}(t)=\varphi_{X_1}(a_1 t)\varphi_{X_2}(a_2 t)\cdots\varphi_{X_n}(a_n t).$$

特别地，$\varphi_{X+Y}(t)=\varphi_X(t)\varphi_Y(t)$。这是因为：

$$\varphi_{X+Y}(t)=E\left(e^{it(X+Y)}\right)=E\left(e^{itX}e^{itY}\right)=E\left(e^{itX}\right)E\left(e^{itY}\right)=\varphi_X(t)\varphi_Y(t)\text{。}$$

注意我们需要X和Y的独立性来确立第三和第四个表达式的相等性。

另外一个特殊情况，是$a_i=1/n$且S_n为样本平均值。在这个情况下，用$\overline{X}$表示平均值，我们便有：

$$\varphi_{\overline{X}}(t)=\left(\varphi_X(t/n)\right)^n\text{。}$$

特征函数举例

分布	特征函数 *φ(t)*
退化分布 δ_a	e^{ita}
伯努利分布 Bern(*p*)	$1-p+pe^{it}$
二项分布 B(*n*, *p*)	$(1-p+pe^{it})^n$
负二项分布 NB(*r*, *p*)	$\left(\frac{1-p}{1-pe^{i\,t}}\right)^r$
泊松分布 Pois(λ)	$e^{\lambda(e^{it}-1)}$
连续均匀分布 U(*a*, *b*)	$\frac{e^{itb}-e^{ita}}{it(b-a)}$
拉普拉斯分布 L(*μ*, *b*)	$\frac{e^{it\mu}}{1+b^2t^2}$
正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$	$e^{it\mu-\frac{1}{2}\sigma^2t^2}$
卡方分布 χ^2_k	$(1-2it)^{-k/2}$
柯西分布 C(*μ*, *θ*)	$e^{it\mu-\theta\|t\|}$
伽玛分布 Γ(*k*, *θ*)	$(1-it\theta)^{-k}$
指数分布 Exp(*λ*)	$(1-it\lambda^{-1})^{-1}$
多元正态分布 *N*(*μ*, *Σ*)	$e^{it^T\mu-\frac{1}{2}t^T\Sigma t}$
多元柯西分布 *MultiCauchy*(*μ*, *Σ*) [2]	$e^{it^T\mu-\sqrt{t^T\Sigma t}}$

Oberhettinger (1973) 提供的特征函数表.

特征函数的应用

由于连续定理，特征函数被用于中心极限定理的最常见的证明中。

矩

特征函数还可以用来求出某个随机变量的矩。只要第*n*个矩存在，特征函数就可以微分*n*次，得到：

$$\mathrm{E}(X^n) = i^{-n}\,\varphi_X^{(n)}(0) = i^{-n}\left[\frac{d^n}{dt^n}\varphi_X(t)\right]_{t=0}.$$

例如，假设X具有标准柯西分布。那么$\varphi_X(t)=e^{-|t|}$。它在$t=0$处不可微，说明柯西分布没有期望值。另外，注意到n个独立的观测的样本平均值$\overline{X}$具有特征函数$\varphi_{\overline{X}}(t)=(e^{-|t|/n})^n=e^{-|t|}$，利用前一节的结果。这就是标准柯西分布的特征函数；因此，样本平均值与总体本身具有相同的分布。

特征函数的对数是一个累积量母函数，它对于求出累积量是十分有用的；注意有时定义累积量母函数为矩母函数的对数，而把特征函数的对数称为*第二累积量母函数*。

一个例子

具有尺度参数*θ*和形状参数*k*的伽玛分布的特征函数为：

$(1-\theta\,i\,t)^{-k}$。

现在假设我们有：

$$X \sim \Gamma(k_1,\theta) \text{且 } Y \sim \Gamma(k_2,\theta)$$

其中X和Y相互独立，我们想要知道$X+Y$的分布是什么。X和Y特征函数分别为：

$$\varphi_X(t)=(1-\theta\,i\,t)^{-k_1}, \qquad \varphi_Y(t)=(1-\theta\,i\,t)^{-k_2}$$

根据独立性和特征函数的基本性质，可得：

$$\varphi_{X+Y}(t)=\varphi_X(t)\varphi_Y(t)=(1-\theta\,i\,t)^{-k_1}(1-\theta\,i\,t)^{-k_2}=(1-\theta\,i\,t)^{-(k_1+k_2)}。$$

这就是尺度参数为θ、形状参数为k_1+k_2的伽玛分布的特征函数，因此我们得出结论：

$$X+Y \sim \Gamma(k_1+k_2,\theta)\ ，$$

这个结果可以推广到n个独立、具有相同尺度参数的伽玛随机变量：

$$\forall i \in \{1,\ldots,n\} : X_i \sim \Gamma(k_i,\theta) \qquad \Rightarrow \qquad \sum_{i=1}^n X_i \sim \Gamma\left(\sum_{i=1}^n k_i,\theta\right)。$$

多元特征函数

如果X是一个多元随机变量，那么它的特征函数定义为：

$$\varphi_X(t)=\operatorname{E}\left(e^{it\cdot X}\right)。$$

这裡的点表示向量的点积，而向量t位于X的对偶空间内。用更加常见的矩阵表示法，就是：

$$\varphi_X(t)=\operatorname{E}\left(e^{it^TX}\right)。$$

例子

如果$X \sim N(0,\Sigma)$ 是一个平均值为零的多元高斯随机变量，那么：

$$\varphi_X(t)=\operatorname{E}\left(e^{it^TX}\right)=\int_{x\in\mathbf{R}^n}\frac{1}{(2\pi)^{n/2}|\Sigma|^{1/2}}\,e^{-\frac{1}{2}x^T\Sigma^{-1}x}\cdot e^{it^Tx}\,dx=e^{-\frac{1}{2}t^T\Sigma t}, \quad t\in\mathbf{R}^n,$$

其中$|\Sigma|$表示正定矩阵 Σ的行列式。

矩阵值随机变量

如果X是一个矩阵值随机变量，那么它的特征函数为：

$$\varphi_X(T)=\operatorname{E}\left(e^{i\,\operatorname{Tr}(XT)}\right)$$

在这裡，$\operatorname{Tr}(\cdot)$是迹函数， XT表示T与X的矩阵乘积。由于矩阵XT一定有迹，因此矩阵X必须与矩阵T的转置的大小相同；因此，如果X是$m\times n$矩阵，那么T必须是$n\times m$矩阵。

注意乘法的顺序不重要（$XT \neq TX$但 $tr(XT) = tr(TX)$）。

矩阵值随机变量的例子包括威沙特分布和矩阵正态分布。

相关概念

相关概念有矩母函数和概率母函数。特征函数对于所有概率分布都存在，但矩母函数不是这样。

特征函数与傅里叶变换有密切的关系：一个概率密度函数$p(x)$的特征函数是$p(x)$的连续傅里叶变换的共轭复数（按照通常的惯例）。

$$\varphi_X(t) = \langle e^{itX} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} p(x)\,dx = \overline{\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} p(x)\,dx \right)} = \overline{P(t)},$$

其中$P(t)$表示概率密度函数$p(x)$的连续傅里叶变换。类似地，从$\varphi_X(t)$可以通过傅里叶逆变换求出$p(x)$：

$$p(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} P(t)\,dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \overline{\varphi_X(t)}\,dt\,。$$

确实，即使当随机变量没有密度时，特征函数仍然可以视为对应于该随机变量的测度的傅里叶变换。

参考文献

1. P. Levy, Calcul des probabilités, Gauthier-Villars, Paris, 1925. p. 166
2. Kotz et al. p. 37 using 1 as the number of degree of freedom to recover the Cauchy distribution

- Lukacs E. (1970) Characteristic Functions. Griffin, London. pp. 350
- Bisgaard, T. M., Sasvári, Z. (2000) Characteristic Functions and Moment Sequences, Nova Science