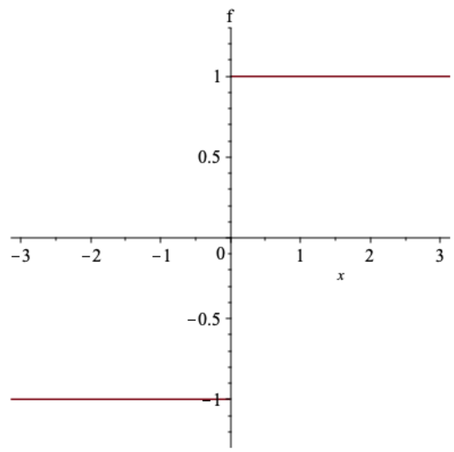
2 Séries de Fourier

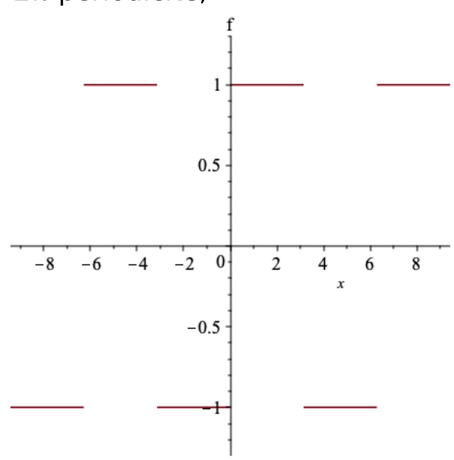
2.1 Motivation

Considérons (par exemple) cette fonction définie sur $[-\pi;\pi[$

$$f = -\mathbb{1}_{[-\pi;0[} + \mathbb{1}_{[0;\pi[} = x \mapsto \begin{cases} -1 & \text{si} \quad x \in [-\pi;0[\\ 1 & \text{si} \quad x \in [0;\pi[\end{cases}$$



et considérons son extension par 2π-périodicité,



On aimerait pouvoir "encoder" / représenter / repérer cette fonction avec des réels, comme on le fait avec des coordonnées pour les vecteurs de $\mathbb{R}^n$.

Idée : décomposer f sur une base Hilbertienne.

On va considérer un espace de Hilbert H qui contient $\mathcal{C}([-\pi;\pi],\mathbb{R})$ et les fonctions continues par morceaux, avec le produit scalaire

$$<f,g>= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\overline{g}$$

A ce stade du cours, on ne sait ni construire H ni même montrer qu'il existe. Ce sera l'objet des chapitres suivants. Cet espace a comme base hilbertienne $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ avec e_n définie sur $[-\pi,\pi[$ par

$$e_n(x) = e^{inx} = \cos(nx) + i\sin(nx)$$

La base hilbertienne est donc constituée des fonctions suivantes :

$$\begin{aligned}
&\{x \mapsto 1, (n=0)\\
&\ \ x \mapsto \cos x + i\sin x, (n=1)\\
&\ \ x \mapsto \cos x - i\sin x, (n=-1)\\
&\ \ x \mapsto \cos 2x + i\sin 2x, (n=2)\\
&\ \ x \mapsto \cos 2x - i\sin 2x, (n=-2)\\
&\dots\}
\end{aligned}$$

On a bien $\int_{-\pi}^{\pi} e^{inx}e^{-imx}dx = \delta_{n,m}$, mais on a du mal à vérifier que $\overline{\mathrm{Vect}\{e_n, n\in\mathbb{Z}\}}$ est l'espace de hilbert H... puisqu'on a pas défini l'espace. A venir donc.

Calculons $<f,e_n>$ et notons ce nombre c_n :

$$\begin{aligned}
c_n &= <f,e_n>\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{e_n(x)}dx\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} -1e^{-inx}dx + \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} e^{-inx}dx\\
&= \frac{-1}{2\pi}\int_{\pi}^{0} e^{int}(-dt) + \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} e^{-inx}dx \quad \text{(changement de variable } t=-x \text{ dans la 1e intégrale)}\\
&= \frac{-1}{2\pi}\int_{\pi}^{0} -e^{inx}dx + \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} e^{-inx}dx\\
&= \frac{-1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} e^{inx} - e^{-inx}dx\\
&= \frac{-i}{\pi}\int_{0}^{\pi} \sin(nx)dx \quad \text{(puisque } \sin(nx) = \frac{1}{2i}(e^{inx} - e^{-inx}))\\
&= \frac{i}{n\pi}\left[\cos nx\right]_0^{\pi} \text{ si } n\neq 0 \text{ et } 0 \text{ si } n=0\\
&= \frac{i}{n\pi}\left((-1)^n - 1\right) \text{ si } n\neq 0 \text{ et } 0 \text{ si } n=0
\end{aligned}$$

On en déduit les valeurs suivantes

$$\begin{array}{lcr} \cdots & & \\ c_{-5} & = & \frac{2i}{5\pi} \\ c_{-4} & = & 0 \\ c_{-3} & = & \frac{2i}{3\pi} \\ c_{-2} & = & 0 \\ c_{-1} & = & \frac{2i}{\pi} \\ c_0 & = & 0 \\ c_1 & = & -\frac{2i}{\pi} \\ c_2 & = & 0 \\ c_3 & = & -\frac{2i}{3\pi} \\ c_4 & = & 0 \\ c_5 & = & -\frac{2i}{5\pi} \\ \cdots & & \end{array}$$

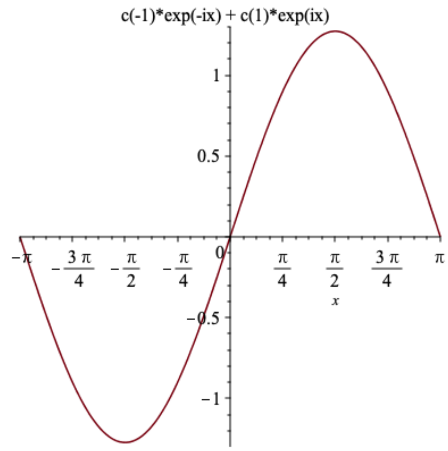
On remarque que les $|c_n|$ deviennent de plus en plus petits. En fait, montrera même que $|c_n|$ tend vers 0 lorsque $|n| \to +\infty$. En conséquence, en prenant un nombre fini de c_n, on "encodera" une fonction qui se rapproche de f.

$c_0 = 0$ donc

$$c_0 e_0 = 0$$

$c_1 = -\frac{2i}{\pi}$ et $c_{-1} = \frac{2i}{\pi}$ donc

$$c_1 e_1 + c_{-1} e_{-1} = \left(x \mapsto \frac{-2i}{\pi} e^{ix} + \frac{2i}{\pi} e^{-ix}\right) = \left(x \mapsto \frac{-2i}{\pi} 2i \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2i}\right) = \left(x \mapsto \frac{4}{\pi} \sin x\right)$$

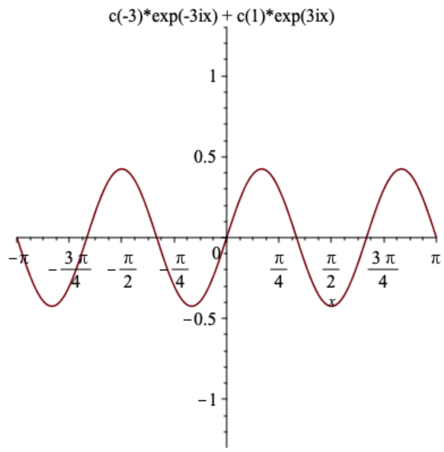


$c_2 = 0$ et $c_{-2} = 0$ donc

$$c_2 e_2 + c_{-2} e_{-2} = 0$$

$c_3 = -\frac{2i}{3\pi}$ et $c_{-3} = \frac{2i}{3\pi}$ donc

$$c_3 e_3 + c_{-3} e_{-3} = \left(x \mapsto \frac{-2i}{3\pi} e^{3ix} + \frac{2i}{3\pi} e^{-3ix}\right) = \left(x \mapsto \frac{-4}{3\pi} \sin 3x\right)$$

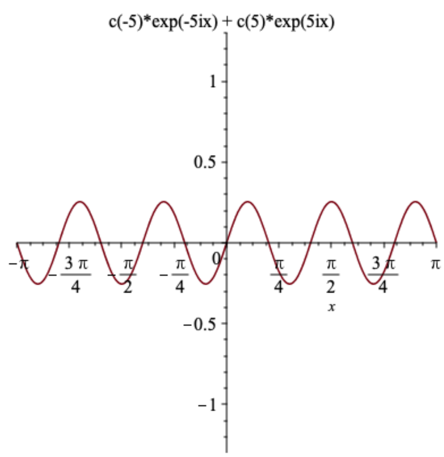


$c_4 = 0$ et $c_{-4} = 0$ donc

$$c_4 e_4 + c_{-4} e_{-4} = 0$$

$c_5 = -\frac{2i}{5\pi}$ et $c_{-5} = \frac{2i}{5\pi}$ donc

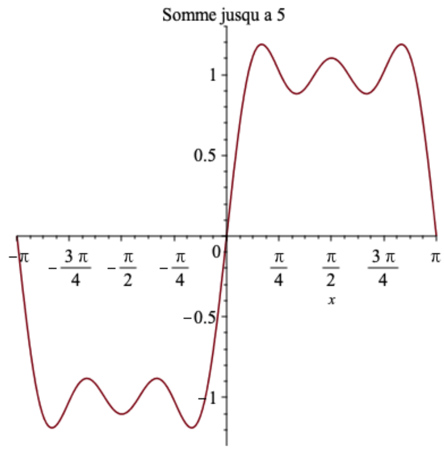
$$c_5 e_5 + c_{-5} e_{-5} = \left(x \mapsto \frac{-2i}{5\pi} e^{5ix} + \frac{2i}{5\pi} e^{-5ix} \right) = \left(x \mapsto \frac{4}{5\pi} \sin 5x \right)$$



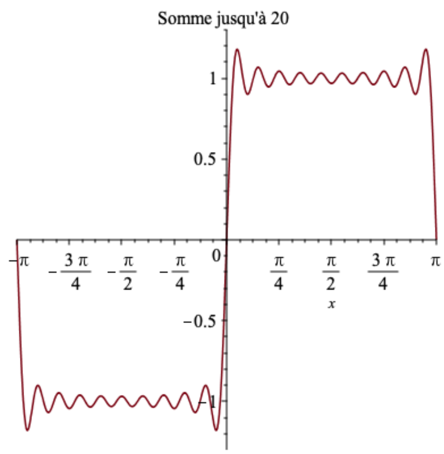
Ainsi

$$\sum_{n=-5}^{n=5} c_n e_n = x \mapsto \frac{4}{\pi} \sin x - \frac{4}{3\pi} \sin 3x + \frac{4}{5\pi} \sin 5x$$

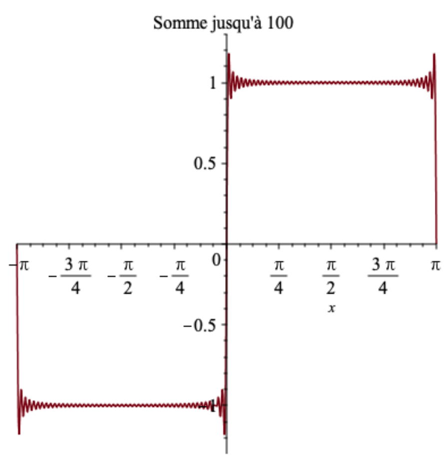
qui est représentée ci-dessous



On peut pousser le calcul de c_n plus loin. La fonction $\sum_{n=-20}^{n=20} c_n e_n$ est représentée ci-dessous



La fonction $\sum_{n=-100}^{n=100} c_n e_n$ est représentée ci-dessous



2.2 Définition d'une série de Fourier

Définition *Une fonction* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *est* 2π*-périodique si* $\forall x \in \mathbb{R}, f(x+2\pi) = f(x)$

Définition *Soit* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *une fonction* 2π*-périodique et continue par morceaux. On définit les coefficients de Fourier de* f *par*

$$\forall n \in \mathbb{Z}, c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} dt$$

On note $a_n = c_n + c_{-n}$ *et* $b_n = i(c_n - c_{-n})$ *pour* $n \in \mathbb{N}$*. On les appelle coefficients de Fourier trigonométriques de f. Bien sûr, il s'agit de notations, et on peut passer de l'un à l'autre sans problème. On peut aussi écrire :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos nt dt$$
$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin nt dt$$

Définition *Pour* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$*,* 2π*-périodique et continue par morceaux, on appelle série de Fourier la série*

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{int}$$

ou, de manière équivalente,

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos nt + b_n \sin nt$$

2.3 Théorèmes de convergence

Pour une fonction f continue par morceaux, On définie $\tilde{f}$ la fonction définie par

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } f \text{ est continue en } x \\ \frac{1}{2}(f(x^+) + f(x^-)) & \text{si } f \text{ n'est pas continue en } x \end{cases}$$

où on note $f(x^+)$ la limite à droite en x et $f(x^-)$ la limite à gauche en x.

Théorème (Dirichlet, convergence simple) *Soit f une fonction* 2π*-périodique et* $\mathcal{C}^1$ *par morceaux. Alors la série de Fourier converge simplement vers* $\tilde{f}$*.*

Démonstration :
Voir Ramis 3.6.2 ■

Théorème (Dirichlet, convergence uniforme) *Soit* f *une fonction* 2π*-périodique,* $\mathcal{C}^1$ *par morceaux et* ***continue****. Alors la série de Fourier de* f *converge uniformément (et même normalement) vers* f*.*

Démonstration :
Voir Ramis 3.6.2 ■