# 多元正态分布

维基百科,自由的百科全书

**多变量正态分布**亦称为**多变量高斯分布**。它是单维正态分布向多维的推广。它同矩阵正态分布有紧密的联系。

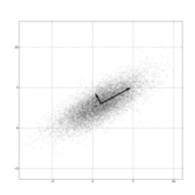
### 一般形式

N维随机向量  $X = [X_1, \dots, X_N]^T$  如果服从多变量正态分布,必须满足下面的三个等價条件:

- 任何线性组合  $Y = a_1 X_1 + \cdots + a_N X_N$  服从正态分布。
- 存在随机向量  $Z=[Z_1,\ldots,Z_M]^T$ (它的每个元素服从独立标准正态分布),向量  $\mu=[\mu_1,\ldots,\mu_N]^T$  及 $N\times M$  矩阵 A满足  $X=AZ+\mu$ .
- 存在 $\mu$ 和一个对称半正定阵  $\Sigma$ 满足 X的特征函数

$$\phi_{X}\left(u;\mu,\Sigma
ight)=\exp\!\left(i\mu^{T}u-rac{1}{2}u^{T}\Sigma u
ight)$$

如果  $\Sigma$ 是非奇异的,那么该分布可以由以下的PDF来描述: $^{[1]}$ 



Many samples from a multivariate (bivariate) Gaussian distribution centered at (1,3) with a standard deviation of 3 in roughly the (0.878, 0.478) direction (longer vector) and of 1 in the second direction (shorter vector, orthogonal to the

longer vector).

	概率多变量函數
参數	<i>μ</i> ∈ R <sup>N</sup> — 位置 Σ ∈ R <sup>N×N</sup> — 协方差矩阵 (半正 定)
支撑集	$x \in \mu$ +span( $\Sigma$ ) $\subseteq \mathbb{R}^N$

概率多变量函数 
$$(2\pi)^{-\frac{N}{2}}|\Sigma|^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{1}{2}(x-\mu)'\Sigma^{-1}(x-\mu)},$$
 (仅当  $\Sigma$  为正定矩阵时)

累積分佈函數	解析表达式不存在
期望值	μ
眾數	μ
方差	Σ
信息熵	$\frac{1}{2}\ln((2\pi e)^N \mathbf{\Sigma} )$
動差生成函數	$\exp\Bigl(oldsymbol{\mu}'\mathbf{t}+rac{1}{2}\mathbf{t}'oldsymbol{\Sigma}\mathbf{t}\Bigr)$
特性函数	$\exp\!\left(ioldsymbol{\mu}'\mathbf{t}-rac{1}{2}\mathbf{t}'oldsymbol{\Sigma}\mathbf{t} ight)$

$$f_{\mathbf{x}}(x_1,\ldots,x_k) = rac{1}{\sqrt{(2\pi)^k |\mathbf{\Sigma}|}} \expigg(-rac{1}{2}(\mathbf{x}-oldsymbol{\mu})^{\mathrm{T}} \mathbf{\Sigma}^{-1}(\mathbf{x}-oldsymbol{\mu})igg),$$

注意这里的|Σ|表示协方差矩阵的行列式。

#### 二元的情况

在二维非奇异的情况下  $(k = \text{rank}(\Sigma) = 2)$  ,向量 [X Y]' 的概率密度函数为:

$$f(x,y) = rac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y\sqrt{1-
ho^2}} \exp\Biggl(-rac{1}{2(1-
ho^2)} \left[rac{(x-\mu_X)^2}{\sigma_X^2} + rac{(y-\mu_Y)^2}{\sigma_Y^2} - rac{2
ho(x-\mu_X)(y-\mu_Y)}{\sigma_X\sigma_Y}
ight]\Biggr)$$

其中  $\rho$  是 X 与 Y 之间的相关系数 ,  $\sigma_X > 0$  且  $\sigma_Y > 0$ 。在这种情况下 ,

$$oldsymbol{\mu} = egin{pmatrix} \mu_X \ \mu_Y \end{pmatrix}, \quad oldsymbol{\Sigma} = egin{pmatrix} \sigma_X^2 & 
ho\sigma_X\sigma_Y \ 
ho\sigma_X\sigma_Y & \sigma_Y^2 \end{pmatrix}.$$

## 參考資料

1. UIUC, Lecture 21. *The Multivariate Normal Distribution* (http://www.math.uiuc.edu/~r-ash/Stat/StatLec21-25.pdf), 21.5:"Finding the Density".

取自"https://zh.wikipedia.org/w/index.php?title=多元正态分布&oldid=51304757"

#### 本页面最后修订于2018年9月16日 (星期日) 09:03。

本站的全部文字在知识共享署名-相同方式共享 3.0协议之条款下提供,附加条款亦可能应用。(请参阅使用条款)Wikipedia®和维基百科标志是维基媒体基金会的注册商标;维基™是维基媒体基金会的商标。维基媒体基金会是按美国国内税收法501(c)(3)登记的非营利慈善机构。