最优一致逼近

设$f(x)$是定义在区间$[a,b]$上的连续函数，构造n次多项式$p_n(x)$作为$f(x)$的近似表达式，要求$p_n(x)$在区间$[a,b]$ 上的每一点算出的近似值都比较准确，也即要求最大误差的绝对值达到最小.

最优一致逼近

设$f(x)$是定义在区间$[a,b]$上的连续函数，构造n次多项式$p_n(x)$作为$f(x)$的近似表达式，要求$p_n(x)$在区间$[a,b]$ 上的每一点算出的近似值都比较准确，也即要求最大误差的绝对值达到最小.

Definition

设$f(x)$是定义在区间$[a,b]$上的连续函数，求n次多项式

$$p_n(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_n x^n$$

使

$$||f - p_n||_\infty = \max_{a \le x \le b} |f(x) - p_n(x)|$$

达到最小，其中c_0，$c_1, \cdots, c_n$是待定参数，则$p_n(x)$称为$f(x)$在区间$[a,b]$上的n次**最优一致逼近多项式**.

换句话说，若n次多项式$p_n^*(x) = c_0^* + c_1^* x + c_2^* x^2 + \cdots + c_n^* x^n$是$f(x)$在区间$[a, b]$上的最优一致逼近多项式，则

$$\max_{a \le x \le b} |f(x) - p_n^*(x)| = \min_{p_n \in H_n} \max_{a \le x \le b} |f(x) - p_n(x)|.$$

其中H_n是不超过n次的多项式集合.

换句话说，若n次多项式$p_n^*(x)=c_0^*+c_1^*x+c_2^*x^2+\cdots+c_n^*x^n$是$f(x)$在区间$[a,b]$上的最优一致逼近多项式，则

$$\max_{a\le x\le b}|f(x)-p_n^*(x)|=\min_{p_n\in H_n}\max_{a\le x\le b}|f(x)-p_n(x)|.$$

其中H_n是不超过n次的多项式集合.

Definition

设函数$f(x)$在区间$[a,b]$上连续，$p_n(x)\in H_n$，则

$$E=||f-p_n||_\infty=\max_{a\le x\le b}|f(x)-p_n(x)|$$

称为$p_n(x)$与$f(x)$的**偏差**. 若存在点$\tilde{x}\in[a,b]$使$|f(\tilde{x})-p_n(\tilde{x})|=E$，则点$\tilde{x}$称为$p_n(x)$关于$f(x)$的**偏差点**. 若$p_n(\tilde{x})-f(\tilde{x})=E$，则$\tilde{x}$称为**正偏差点**；若$p_n(\tilde{x})-f(\tilde{x})=-E$，则$\tilde{x}$称为**负偏差点**.

Theorem

Chebyshev定理 设函数$f(x)$在区间$[a,b]$上连续，$p_n(x) \in H_n$，则$p_n(x)$是$f(x)$ 的最优一致逼近多项式的充分必要条件是在区间$[a,b]$上至少有$n+2$个依次为正负的偏差点，即至少有$n+2$个点

$$a \leq \tilde{x}_0 < \tilde{x}_1 < \cdots < \tilde{x}_{n+1} \leq b,$$

使得

$$f(\tilde{x}_i) - p_n(\tilde{x}_i) = (-1)^i \sigma E = (-1)^i \sigma ||f - p_n||_\infty,\ \sigma = \pm 1,\ i = 0, \cdots, n+1.$$

偏差点$\tilde{x}_i$ $(i = 0, 1, \cdots, n+1)$也称为$f(x) - p_n(x)$的**切比雪夫交错点组**.

最优一致逼近

Theorem

设函数$f(x)$在区间$[a,b]$上连续，则$f(x)$在H_n中存在唯一的最优一致逼近多项式$p_n(x)$.

Theorem

设函数$f(x)$在区间$[a, b]$上连续，则$f(x)$在H_n中存在唯一的最优一致逼近多项式$p_n(x)$.

Theorem

设函数$f(x)$在区间$[a, b]$上$n+1$阶可导，$f^{(n+1)}(x)$在区间(a, b)中保持定号(即$f^{(n+1)}(x) > 0$或者$f^{(n+1)}(x) < 0$)，则区间$[a, b]$的端点a, b属于$f(x) - p_n(x)$的交错点组.

最优一致逼近

切比雪夫定理给出了一个构造最优一致逼近多项式的方法. 设最优一致逼近多项式

$$p_n(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_n x^n.$$

偏差点为$\tilde{x}_i (i = 0, 1, \cdots, n+1)$, 记$\mu = \sigma E$. 则由切比雪夫定理有

$$f(\tilde{x}_i) - p_n(\tilde{x}_i) = (-1)^i \mu, \quad i = 0, 1, \cdots, n+1.$$

这是关于参数$c_i (i = 0, 1, \cdots, n)$, 偏差点$\tilde{x}_i (i = 0, 1, \cdots, n+1)$和带有符号的偏差$\mu$的$2n+4$个未知量的$n+2$个方程的非线性方程组.

有两种方法.

方法1 列梅兹(Remes)方法

列梅兹方法的核心是由区间$[a, b]$上给定的$n+2$个点逐次求得交错点组, 最终求得最优一致逼近多项式的方法.

1. 区间$[a, b]$上给定的$n+2$个点$\tilde{x}_i\big(a \le \tilde{x}_0 < \tilde{x}_1 < \cdots < \tilde{x}_{n+1} \le b)$, 代入方程组(5.3.1), 求得$p_n(x)$的一组系数$c_0, c_1, \cdots, c_n$及$\mu$, 得到初始逼近函数$p_n(x)$.
2. 这时$f(x) - p_n(x)$在点$\tilde{x}_0, \tilde{x}_1, \cdots, \tilde{x}_{n+1}$上交错变号, 然后用$f(x) - p_n(x)$的极值点$\tilde{x}$替换$\{\tilde{x}_i\}$中的一点, 得到一个新的点集, 并使$f(x) - p_n(x)$ 在新点集上正负相间取值, 将新点集代入方程组再求解.
3. 重复这个过程, 直至满足精度为止(过程复杂, 不作讨论)

方法2

由偏差点的定义知，区间(a,b)内的偏差点必然是$f(x)-p_n(x)$的极值点，故偏差点$\tilde{x}_i$满足方程

$$f'(\tilde{x}_i)-p_n'(\tilde{x}_i)=0,\ \ i=1,2,\cdots,n.$$

又若$f^{(n+1)}(x)>0$或$f^{(n+1)}(x)<0$，取偏差点$\tilde{x}_0=a,\tilde{x}_{n+1}=b.$

方法2

由偏差点的定义知，区间(a,b)内的偏差点必然是$f(x)-p_n(x)$的极值点，故偏差点$\tilde{x}_i$满足方程

$$f'(\tilde{x}_i)-p_n'(\tilde{x}_i)=0,\ i=1,2,\cdots,n.$$

又若$f^{(n+1)}(x)>0$或$f^{(n+1)}(x)<0$，取偏差点$\tilde{x}_0=a,\tilde{x}_{n+1}=b$.则得关于参数$c_i(i=0,1,\cdots,n)$、偏差点$\tilde{x}(i=1,2,\cdots,n)$和带有符号的偏差$\mu$的$2n+2$未知量的$2n+2$个方程的方程组.

$$\begin{cases} f(\tilde{x}_i)-p_n(\tilde{x}_i)=(-1)^i\mu, & i=0,1,\cdots,n+1. \\ f'(\tilde{x}_i)-p_n'(\tilde{x}_i)=0, & i=1,2,\cdots,n. \end{cases}$$

例5.5 求函数$y = \arctan x$在区间$[0,1]$上的最优一致逼近一次多项式.

解 设$p_1(x) = c_0 + c_1 x$, 由于$f''(x) = -2x(1+x^2)^{-2} < 0$, $0 < x \leq 1$,

例5.5 求函数$y=\arctan x$在区间$[0,1]$上的最优一致逼近一次多项式.

解 设$p_1(x)=c_0+c_1x$, 由于$f''(x)=-2x(1+x^2)^{-2}<0$, $0<x\le 1$, 故取偏差点$\tilde{x}_0=0,\tilde{x}_2=1$，由方程组(5.3.2)有

$$\begin{cases} -c_0=\mu, & arctan\tilde{x}_1-c_0-c_1\tilde{x}_1=-\mu, \\ \frac{\pi}{4}-c_0-c_1=\mu, & \frac{1}{1+\tilde{x}_1^2}-c_1=0. \end{cases}$$

解之, 得 $c_1=\pi/4\approx 0.785\,4,\quad \tilde{x}_1=\sqrt{1/c_1-1},$

$c_0=(arctan\tilde{x}_1-c_1\tilde{x}_1)/2\approx 0.035\,6,\quad \mu\approx -0.035\,6.$

得函数$y=arctanx$在区间$[0,1]$上的最优一致逼近一次多项式

$$arctanx\approx p_1(x)=0.035\,6+0.785\,4x.$$

最大误差$E=-\mu=0.035\,6.$

由切比雪夫定理知，若$p_n(x)$是$f(x)$的最优一致逼近多项式，则在区间$[a,b]$上至少有$n+2$偏差点$\tilde{x}_i(i=0,1,\cdots,n+1)$.
这说明$f(x)-p_n(x)$在区间$[a,b]$上至少变号$n+1$次，从而至少有$n+1$个不同的点$x_i\in[a,b](i=0,1,\cdots,n)$，使

$$f(x_i)-p_n(x_i)=0,\quad i=0,1,\cdots,n.$$

即

$$f(x_i)=p_n(x_i),\quad i=0,1,\cdots,n.$$

据此可知$p_n(x)$是以$x_i(i=0,1,\cdots,n)$**为插值节点构成的**$f(x)$ **的**n**次插值多项式**. 问题是如何选择插值节点$x_i(i=0,1,\cdots,n)$ 使构造出的插值多项式的最大误差达到最小. 即

$$\max_{a\le x\le b}|f(x)-p_n(x)|=\max_{a\le x\le b}|R_n(x)|=\min.$$

使最大误差达到最小的插值多项式就是近似最优一致逼近多项式.

由插值多项式的误差估计式有

$$
\begin{aligned}
\max_{a\le x\le b}|f(x)-p_n(x)| &= \max_{a\le x\le b}|R_n(x)| \\
&= \max_{a\le x\le b}\left|\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)\right| \\
&\le \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}\max_{a\le x\le b}|(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)|,
\end{aligned}
$$

其中$M_{n+1}=\max_{a\le x\le b}|f^{(n+1)}(x)|$.

若选取$x_i(i=0,1,\cdots,n)$使得$\max_{a\le x\le b}|(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)|$达到最小，则$\max_{a\le x\le b}|R_n(x)|$达到最小.

切比雪夫多项式

Property

$T_k(x)$在区间$[-1,1]$上有k个零点

$$x_i = cos\frac{2i+1}{2k}\pi, \ \ i = 0, \cdots, \ \ k-1.$$

切比雪夫多项式

Property

$T_k(x)$在区间$[-1,1]$上有k个零点

$$x_i = cos\frac{2i+1}{2k}\pi,\ i = 0,\cdots,\ k-1.$$

Property

在区间$[-1,1]$上$|T_k(x)| \leq 1$，在$k+1$个极值点$x_i = cos\frac{i\pi}{k}$ $(i = 0, 1, \cdots, k)$ 处，$T_k(x)$依次交替地取最大值*1*和最小值*-1*.

切比雪夫多项式

Property

$T_k(x)$在区间$[-1,1]$上有k个零点

$$x_i = cos\frac{2i+1}{2k}\pi,\ \ i=0,\cdots,\ \ k-1.$$

Property

在区间$[-1,1]$上$|T_k(x)|\le 1$，在$k+1$个极值点$x_i = cos\frac{i\pi}{k}$ $(i=0,1,\cdots,k)$ 处，$T_k(x)$依次交替地取最大值*1*和最小值*-1*.

Property

（切比雪夫多项式的极性） 设$p_n(x)$是最高次项系数为*1*的n次多项式，则 $\max\limits_{-1\le x\le 1}|p_n(x)| \ge \max\limits_{-1\le x\le 1}|2^{1-n}T_n(x)| = 2^{1-n}$.

1) 所讨论的区间是$[-1,1]$

$$\max_{-1\le x\le 1}|(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)|\ge \max_{-1\le x\le 1}|\frac{1}{2^n}T_{n+1}(x)|=\frac{1}{2^n}.$$

若选取插值节点$x_i(i=0,1,\cdots,n)$是$n+1$次切比雪夫多项式$T_{n+1}(x)$的零点

$$x_i=cos\frac{2i+1}{2(n+1)}\pi,\quad i=0,1,\cdots,n.$$

时，$\max_{-1\le x\le 1}|\pi(x)|=\max_{-1\le x\le 1}|(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)|$取到最小值$\frac{1}{2^n}$. 这时所构造的插值多项式$p_n(x)$的最大误差达到最小，则$p_n(x)$是$f(x)$在区间$[-1,1]$上的近似最优一致逼近多项式. 其最大误差满足

$$\max_{-1\le x\le 1}|R_n(x)|\le\frac{M_{n+1}}{(n+1)!}\frac{1}{2^n}.$$

切比雪夫插值多项式

2) 所讨论的区间是有限区间$[a, b]$

(i) 通过变量替换$x = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}t$，将$x \in [a, b]$变为$t \in [-1, 1]$.

在区间$[-1, 1]$上构造多项式$\tilde{p}_n(t)$, 然后将

$$t = \frac{2x - a - b}{b - a}$$

代入$\tilde{p}_n(t)$, 即得到区间$[a, b]$上的近似最优一致逼近多项式$p_n(x)$.

2) 所讨论的区间是有限区间$[a,b]$

(i) 通过变量替换$x=\frac{a+b}{2}+\frac{b-a}{2}t$，将$x\in[a,b]$变为$t\in[-1,1]$.
在区间$[-1,1]$上构造多项式$\tilde{p}_n(t)$，然后将

$$t=\frac{2x-a-b}{b-a}$$

代入$\tilde{p}_n(t)$，即得到区间$[a,b]$上的近似最优一致逼近多项式$p_n(x)$.

(ii) 直接取插值节点

$$x_i=\frac{a+b}{2}+\frac{b-a}{2}t_i,\quad i=0,1,\cdots,n.$$

其中t_i是$n+1$次切比雪夫多项式$T_{n+1}(x)$的零点. 即取

$$x_i=\frac{a+b}{2}+\frac{b-a}{2}cos\frac{2i+1}{2(n+1)}\pi,\quad i=0,1,\cdots,n.$$

作为插值节点，所构造的插值多项式$p_n(x)$就是$f(x)$在区间$[a,b]$上的近似最优一致逼近多项式.

此时

$$\max_{a\le x\le b}|\pi(x)| = \max_{a\le x\le b}|(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)|$$

达到最小，注意到

$$x - x_i = \frac{b-a}{2}(t-t_i),$$

于是有

$$\max_{a\le x\le b}|\pi(x)| \le \left(\frac{b-a}{2}\right)^{n+1}\frac{1}{2^n}.$$

$p_n(x)$的最大误差满足

$$\max_{-1\le x\le 1}|R_n(x)| \le \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}\left(\frac{b-a}{2}\right)^{n+1}\frac{1}{2^n} = \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}\frac{(b-a)^{n+1}}{2^{2n+1}}.$$

例5.6 利用切比雪夫插值多项式求$y = \arctan x$在区间$[0, 1]$上的近似最优一致逼近一次多项式.

例5.6 利用切比雪夫插值多项式求$y = \arctan x$在区间$[0,1]$上的近似最优一致逼近一次多项式.

解 作变量替换, 令$x = (t+1)/2$, 先关于t做插值多项式, $T_2(t)$的零点$t_i = cos\frac{2i+1}{4}\pi$, $i = 0, 1$. 即

$$x_0 = \frac{t_0+1}{2} = \frac{2+\sqrt{2}}{4}, \quad x_1 = \frac{t_1+1}{2} = \frac{2-\sqrt{2}}{4}.$$

利用牛顿插值多项式则

$$y = arctanx \approx N_1(x) = y_0 + \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0)$$

$$= arctan\frac{2+\sqrt{2}}{4} + \frac{arctan\frac{2-\sqrt{2}}{4} - arctan\frac{2+\sqrt{2}}{4}}{\frac{2-\sqrt{2}}{4} - \frac{2+\sqrt{2}}{4}}(x - \frac{2+\sqrt{2}}{4})$$

$$\approx 0.029\,197 + 0.793\,572x\ .$$

截断切比雪夫级数法

设函数$f(x)$在区间$[-1,1]$上连续，当正交函数系取为切比雪夫多项式时，广义傅里埃级数

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k T_k(x)$$

称为函数$f(x)$的切比雪夫级数，其中系数

$$c_k = \frac{(T_k, f)}{(T_k, T_k)}, \quad k = 0, 1, 2, \cdots$$

而$(T_0, T_0) = \pi, \quad (T_k, T_k) = \pi/2, \quad k = 1, 2, \cdots$

于是

$$c_0 = \frac{(T_0, f)}{\pi} = \frac{(1, f)}{\pi} = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x \overset{x=cos\theta}{=} \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(cos\theta)\,\mathrm{d}\theta,$$

$$c_k = \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{cos(karccosx)f(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x \overset{x=cos\theta}{=} \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(cos\theta)cosk\theta\,\mathrm{d}\theta$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k T_k(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k cos(karccosx) \overset{x=cos\theta}{=} \sum_{k=0}^{\infty} c_k cosk\theta.$$

由此可见，$f(x)$的切比雪夫级数就是$f(cos\theta)$的傅里埃余弦级数.

若将函数$f(x)$的切比雪夫级数的部分和记为

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k T_k(x),$$

截断切比雪夫级数法的缺点是：在一般情况下系数c_k中的积分难以计算.

Theorem

设在区间$[-1, 1]$上$f(x)$的一阶导数存在且分段连续，则当$n \to \infty$时，$S_n(x)$在$[-1, 1]$上一致收敛于$f(x)$.

例5.7 利用截断切比雪夫级数法求$y = \arctan x$在区间$[0, 1]$上的近似最优一致逼近一次多项式.

例5.7 利用截断切比雪夫级数法求$y=\arctan x$在区间$[0,1]$上的近似最优一致逼近一次多项式.

解 令$x=\frac{t+1}{2}$, 则$y=\arctan\frac{t+1}{2}$, $-1\le t\le 1$.

按切比雪夫级数系数计算公式

$$c_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} arctan(\frac{cos\theta+1}{2})\,\mathrm{d}\theta\approx 0.427\,078\,586\,4,$$

$$c_1=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} arctan(\frac{cos\theta+1}{2})cos\theta\,\mathrm{d}\theta\approx 0.394\,736\,453\,9.$$

所以,

$$\begin{aligned}\arctan x&\approx c_0T_0(t)+c_1T_1(t)=c_0+c_1t=c_0+c_1(2x-1)\\&\approx 0.032\,342\,132\,5+0.789\,472\,907\,8x.\end{aligned}$$

用高阶泰勒(Taylor)多项式逼近$f(x)$, 为减少计算量, 将n次多项式$p_n(x)$降低为$n-1$次多项式$p_{n-1}(x)$,要求最大误差达到最小.

设

$$p_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n, \quad -1 \leq x \leq 1.$$

将$p_n(x)$降低为$n-1$次多项式$p_{n-1}(x)$, 减去一个包含a_nx^n项的n次多项式$\bar{p}_n(x)$, 要求$p_n(x) - p_{n-1}(x)$的最大误差达到最小, 由切比雪夫多项式的性质有

$$p_{n-1}(x) = p_n(x) - \frac{a_n}{2^{n-1}} T_n(x).$$

$p_{n-1}(x)$称为$p_n(x)$的缩短多项式. 缩短多项式又可以用同样的方法逐步缩短, 最终得到满足所给精度要求的近似最优一致逼近多项式.

缩短多项式$p_{n-1}(x)$的另一种求法.

由切比雪夫多项式$T_k(x)$ $(k=0,1,2,\cdots)$是区间$[-1,1]$上的正交多项式知，$p_n(x)$ 可以由切比雪夫多项式唯一地表示为

$$p_n(x)=c_0T_0(x)+c_1T_1(x)+\cdots+c_nT_n(x).$$

注意到含x^n的项只能出现在$T_n(x)$中，比较系数，得

$$a_n=c_n2^{n-1},$$

故$c_n=\frac{a_n}{2^{n-1}}$. 知$p_n(x)$的缩短多项式$p_{n-1}(x)$等于$p_n(x)$减去$c_nT_n(x)$，即

$$p_{n-1}(x)=c_0T_0(x)+c_1T_1(x)+\cdots+c_{n-1}T_{n-1}(x).$$

为得到$p_{n-1}(x)$关于$x^k(k=0,1,\cdots,n-1)$的表达式，我们将$p_n(x)$的表达式中的$x^k(k=0,1,\cdots,n)$用切比雪夫多项式$T_k(x)(k=0,1,\cdots,n)$表示（x^k与$T_k(x)$的关系如表5.1所示），关于$T_k(x)$合并同类项后，删除含有$T_n(x)$的项，即得(5.3.8)式.

表5.1 用切比雪夫多项式表示单项式x^k

$$
\begin{aligned}
1 &= T_0\\
x &= T_1\\
x^2 &= \frac{1}{2}(T_0+T_2)\\
x^3 &= \frac{1}{4}(3T_1+T_3)\\
x^4 &= \frac{1}{8}(3T_0+4T_2+T_4)\\
x^5 &= \frac{1}{16}(10T_1+5T_3+T_5)\\
x^6 &= \frac{1}{32}(10T_0+15T_2+6T_4+T_6)\\
x^7 &= \frac{1}{64}(35T_1+21T_3+7T_5+T_7)\\
x^8 &= \frac{1}{128}(35T_0+56T_2+28T_4+8T_6+T_8)
\end{aligned}
$$

然后将$T_k(x)(k=0,1,\cdots,n-1)$ 代入(5.3.8)（切比雪夫多项式的前几项见表5.2），就得到$p_{n-1}(x)$关于$x^k(k=0,1,\cdots,n-1)$的表达式.

表5.2 切比雪夫多项式

$T_0(x)=1$
$T_1(x)=x$
$T_2(x)=2x^2-1$
$T_3(x)=4x^3-3x$
$T_4(x)=8x^4-8x^2+1$
$T_5(x)=16x^5-20x^3+5x$
$T_6(x)=32x^6-48x^4+18x^2-1$
$T_7(x)=64x^7-112x^5+56x^3-7x$
$T_8(x)=128x^8-256x^6+160x^4-32x^2+1$

例5.8 利用缩短幂级数法求$y = arctanx$在区间$[0, 1]$上的近似最优一致逼近一次多项式.

缩短幂级数法

例5.8 利用缩短幂级数法求$y = arctan x$在区间$[0,1]$上的近似最优一致逼近一次多项式.

解 令$x = \frac{1}{2}(t+1)$, 则$y = arctan\frac{t+1}{2}$, $-1 \le t \le 1$.

而, $\arctan\frac{t+1}{2} \approx p_2(t) = arctan\frac{1}{2} + \frac{2}{5}t - \frac{2}{25}t^2$.

由公式(5.3.6)知

$$p_1(t) = p_2(t) - (-\frac{2}{25}) \times \frac{1}{2} T_2(t) = p_2(t) + \frac{1}{25}(2t^2 - 1) = arctan\frac{1}{2} + \frac{2}{5}t - \frac{1}{25}.$$

所以,

$$\arctan x \approx p_1(x) = arctan\frac{1}{2} - \frac{1}{25} + \frac{2}{5}(2x-1) \approx 0.0236476 + 0.8x.$$

解法2 由解法1和表5.1知

$$
\begin{aligned}
\arctan\frac{t+1}{2} \approx p_2(t) &= \arctan\frac{1}{2}+\frac{2}{5}t-\frac{2}{25}t^2 \\
&= \arctan\frac{1}{2}\times T_0+\frac{2}{5}T_1-\frac{2}{25}\times\frac{T_0+T_2}{2} \\
&= (\arctan\frac{1}{2}-\frac{1}{25})T_0+\frac{2}{5}T_1-\frac{1}{25}T_2.
\end{aligned}
$$

由(5.3.8)式知

$$
\begin{aligned}
p_1(t) &= (\arctan\frac{1}{2}-\frac{1}{25})T_0+\frac{2}{5}T_1 \\
&= (\arctan\frac{1}{2}-\frac{1}{25})+\frac{2}{5}t.
\end{aligned}
$$

所以， $\arctan x \approx p_1(x) = \arctan\frac{1}{2}-\frac{1}{25}+\frac{2}{5}(2x-1).$

例5.9 利用缩短幂级数法求函数$f(x) = e^x$在区间$[-1, 1]$上的近似最优一致逼近多项式，使得误差不超过0.005.

例5.9 利用缩短幂级数法求函数$f(x)=e^x$在区间$[-1,1]$上的近似最优一致逼近多项式，使得误差不超过0.005.

解 e^x在$x=0$处的泰勒展开式为

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+R_n(x),$$

其中误差项$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}=\frac{e^{\xi}}{(n+1)!}x^{n+1}$，$\xi$介于0与$x$之间.

显然，

$$\max_{-1\le x\le 1}|R_n(x)|\le\frac{e}{(n+1)!}.$$

当$n=4$时，$\max\limits_{-1\le x\le 1}|R_4(x)|\le\frac{e}{5!}\approx 0.022\,652\,348>0.005.$

当$n=5$时，$\max\limits_{-1\le x\le 1}|R_5(x)|\le\frac{e}{6!}\approx 0.003\,775\,391.$

$$p_5(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!}$$
$$= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} = T_0 + T_1 + \frac{1}{2}\frac{T_0 + T_2}{2}$$
$$+ \frac{1}{6}\frac{3T_1 + T_3}{4} + \frac{1}{24}\frac{3T_0 + 4T_2 + T_4}{8} + \frac{1}{120}\frac{10T_1 + 5T_3 + T_5}{16}$$
$$= \frac{81}{64}T_0 + \frac{217}{192}T_1 + \frac{13}{48}T_2 + \frac{17}{384}T_3 + \frac{1}{192}T_4 + \frac{1}{1\,920}T_5.$$

由于$\frac{e}{6!} + \frac{T_5}{1920} < 0.003\,78 + 0.000\,53 = 0.004\,31 < 0.005$. 所以

$$e^x \approx P_4(x) = \frac{81}{64}T_0 + \frac{217}{192}T_1 + \frac{13}{48}T_2 + \frac{17}{384}T_3 + \frac{1}{192}T_4$$
$$= \frac{81}{64} + \frac{217}{192}x + \frac{13}{48}(2x^2 - 1) + \frac{17}{384}(4x^3 - 3x) + \frac{1}{192}(8x^4 - 8x^2 +$$
$$= 1 + \frac{383}{384}x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{17}{96}x^3 + \frac{1}{24}x^4.$$