Equations aux Dérivées Partielles
Modélisation par des EDP

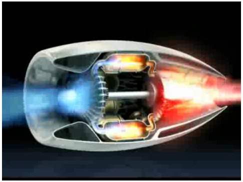
Classe intégrée avancée

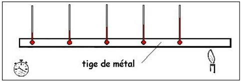
CentraleSupélec - Cursus ingénieur

7 janvier 2020

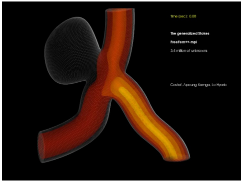
Plan

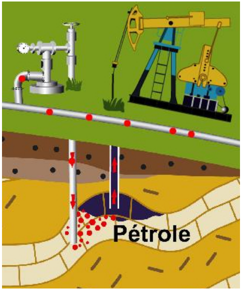
Plan





Problèmes **elliptiques (paraboliques)** : $\begin{cases} (\partial_t u) - \mathrm{div}(\lambda\, \mathrm{grad}(u)) + \kappa u = f \text{ dans } (\mathbb{R}^+\times)\Omega \\ \text{conditions sur } \partial\Omega(\text{ et à } t=0) \end{cases}$





Plan

Equation stationnaire

Problème de Dirichlet

Soit $\Omega =]0,1[$.

$$\textbf{(D)} \begin{cases} -u''(x) + c(x)u(x) = f(x), \ 0 < x < 1 \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

Problème bien posé ? Trouver E, F ensembles fonctionnels tq

pour tout $f \in F$, il existe un et un seul $u \in E$ tq **(D)** soit satisfait

et

il existe C_Ω tel que $\forall f \in F$, $\|u\|_E \leq C_\Omega \|f\|_F$.

Equation stationnaire

Problème de Dirichlet

Soit Ω un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^d$ de classe C^1.

$$\textbf{(D)}\begin{cases} -\Delta u(x) + c(x)u(x) = f(x), \ x \in \Omega \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

Problème bien posé ? Trouver E, F ensembles fonctionnels tq

pour tout $f \in F$, il existe un et un seul $u \in E$ tq **(D)** soit satisfait

et

il existe C_Ω tel que $\forall f \in F$, $\|u\|_E \leq C_\Omega \|f\|_F$.

Equation stationnaire

Problème de Dirichlet

Soit Ω un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^d$ de classe C^1.

$$\textbf{(D)} \begin{cases} -\Delta u(x) + c(x)u(x) = f(x), \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

Problème bien posé ? Trouver E, F ensembles fonctionnels tq

pour tout $f \in F$, il existe un et un seul $u \in E$ tq **(D)** soit satisfait

et

il existe C_Ω tel que $\forall f \in F$, $\|u\|_E \leq C_\Omega \|f\|_F$.

Définition V.1.1

On dit que u est **une solution classique** *si $u \in C^0(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$. Sinon, on parle de* **solution faible ou variationnelle**.

Equation instationnaire

Problème instationnaire

Soit $\Omega =]0,1[$.

$$\textbf{(D)} \begin{cases} \partial_t u(t,x) - u''(t,x) = f(t,x), \ \ t > 0, \ \ 0 < x < 1 \\ u(\cdot,0) = u(\cdot,1) = 0 \end{cases}$$

Problème bien posé ? Trouver E, F ensembles fonctionnels tq

pour tout $f \in F$, il existe un et un seul $u \in E$ tq **(D)** soit satisfait

et

il existe C_Ω tel que $\forall f \in F$, $\|u\|_E \leq C_\Omega \|f\|_F$.

Equation instationnaire

Problème instationnaire

Soit Ω un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^d$ de classe C^1.

$$\textbf{(D)} \begin{cases} \partial_t u(t,x) - \Delta u(t,x) = f(t,x), \ \ t > 0, \ \ x \in \Omega \\ u(t,\cdot)|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

Problème bien posé ? Trouver E, F ensembles fonctionnels tq

pour tout $f \in F$, il existe un et un seul $u \in E$ tq **(D)** soit satisfait

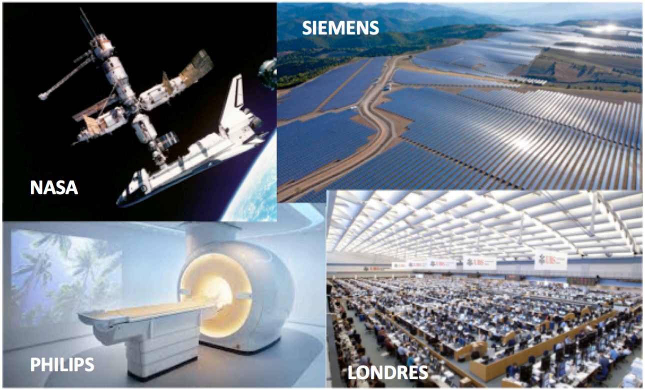
et

il existe C_Ω tel que $\forall f \in F$, $\|u\|_E \leq C_\Omega \|f\|_F$.

Plan

- **Enjeux :** Observation/description de nombreux phénomènes en astronomie, physique, chimie, biologie, économie, finance...

- **Enjeux :** Observation/description de nombreux phénomènes en astronomie, physique, chimie, biologie, économie, finance...



- **Enjeux :** Observation/description de nombreux phénomènes en astronomie, physique, chimie, biologie, économie, finance...

  ... afin de prédire / concevoir **via la simulation numérique**

- **Enjeux :** Observation/description de nombreux phénomènes en astronomie, physique, chimie, biologie, économie, finance...
  ... afin de prédire / concevoir **via la simulation numérique**

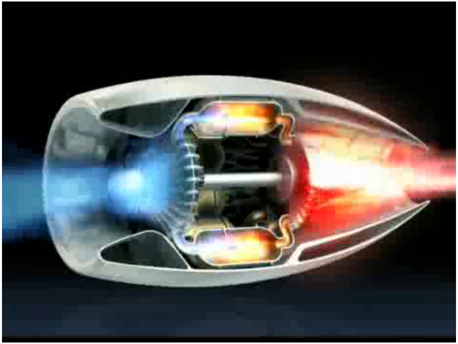
- **Concept :** Modèle (approché) $\longrightarrow$ Formalisation mathématique

- **Enjeux :** Observation/description de nombreux phénomènes en astronomie, physique, chimie, biologie, économie, finance...
  ... afin de prédire / concevoir **via la simulation numérique**
- **Concept :** Modèle (approché) $\longrightarrow$ Formalisation mathématique
- **Étude mathématique :**
  - Analyse mathématique et qualitative
    - existence et propriétés **qualitatives** de solutions en variables continues
  - Discrétisation et implémentation
    - résultats **quantitatifs** « concrets »
  - Analyse numérique
    - maîtrise de l'approximation - validation des simulations - convergence

Démarche de modélisation

Plan

Combustion du kérosène : réaction et aérothermie



$$2\,C_{12}H_{26} + 37\,O_2 \longrightarrow 24\,CO_2 + 26\,H_2O + \text{ chaleur}$$

Réaction : cinétique chimique

Equation de combustion

Variable : $t \geq 0$ (temps) – **Inconnues** : $t \mapsto Y(t) \in \mathbb{R}^4$

avec $Y = (Y_{C_{12}H_{26}}, Y_{O_2}, Y_{CO_2}, Y_{H_2O})$

Données : Y^0

$f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ **non-linéaire**

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}t}(t) = f(Y(t)) \\ Y(0) = Y^0 \end{cases}$$

Réaction : cinétique chimique

Equation de combustion

Variable : $t \geq 0$ (temps) – **Inconnues** : $t \mapsto Y(t) \in \mathbb{R}^4$

avec $Y = (Y_{C_{12}H_{26}}, Y_{O_2}, Y_{CO_2}, Y_{H_2O})$

Données : Y^0

$f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ **non-linéaire**

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}t}(t) = f(Y(t)) \\ Y(0) = Y^0 \end{cases}$$

Pas de solution explicite !

Réaction : cinétique chimique

Equation de combustion

Variable : $t \geq 0$ (temps) – **Inconnues** : $t \mapsto Y(t) \in \mathbb{R}^4$

avec $Y = (Y_{C_{12}H_{26}}, Y_{O_2}, Y_{CO_2}, Y_{H_2O})$

Données : Y^0

$f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ **non-linéaire**

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}t}(t) = f(Y(t)) \\ Y(0) = Y^0 \end{cases}$$

Mais solutions numériques...

Réaction : cinétique chimique

Equation de combustion

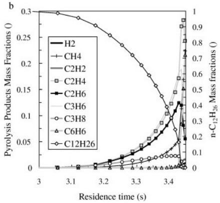
Variable : $t \geq 0$ (temps) – **Inconnues** : $t \mapsto Y(t) \in \mathbb{R}^4$

avec $Y = (Y_{C_{12}H_{26}}, Y_{O_2}, Y_{CO_2}, Y_{H_2O})$

Données : Y^0

$f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ **non-linéaire**

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}t}(t) = f(Y(t)) \\ Y(0) = Y^0 \end{cases}$$



Réaction : cinétique chimique

Equation de combustion

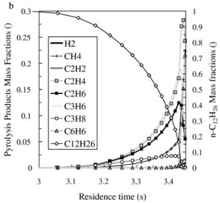
Variable : $t \geq 0$ (temps) – **Inconnues** : $t \mapsto Y(t) \in \mathbb{R}^4$

avec $Y = (Y_{C_{12}H_{26}}, Y_{O_2}, Y_{CO_2}, Y_{H_2O})$

Données : Y^0

$f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ **non-linéaire**

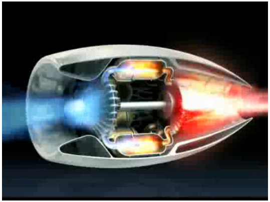
$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}t}(t) = f(Y(t)) \\ Y(0) = Y^0 \end{cases}$$



- **Equation** : système de 4 équations différentielles d'ordre 1
- **Conditions** : initiales
- **Nomenclature** : problème de Cauchy

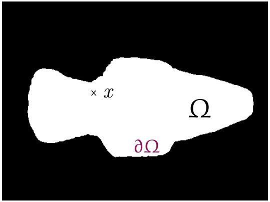
12/40

Plan

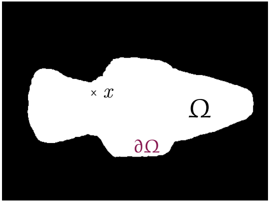


On cherche à décrire la température dans le réacteur par une équation :

On cherche à décrire la température dans le réacteur par une équation :



On cherche à décrire la température dans le réacteur par une équation :



Variables : $t \geq 0,\ x \in \Omega$

Inconnue : $(t, x) \mapsto \theta(t, x)$

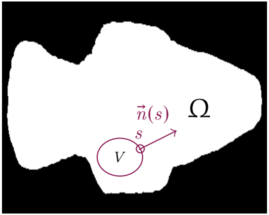
Données : ρ (densité), $\overrightarrow{u}$ (vitesse), f (source)

Paramètres : $x \mapsto c_v(x)$, $x \mapsto \kappa(x) > 0$

Équation de la chaleur

$$\rho c_v \partial_t \theta + \mathrm{div}_x(\rho c_v\, \theta\, \overrightarrow{u}) - \mathrm{div}_x(\kappa\, \overrightarrow{\mathrm{grad}}_x(\theta)) = f \text{ dans } \mathbb{R}^{+*} \times \Omega.$$

Bilan d'énergie



Bilan d'énergie dans un volume V à $t \geq 0$:

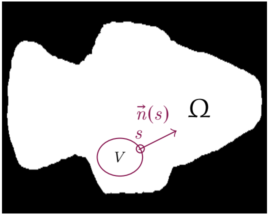
Énergie volumique dans V : $(t, x) \mapsto \rho c_v(x)\theta(t, x)$

Énergie dans V : $t \mapsto \iiint_V \rho c_v(x)\theta(t, x)\mathrm{d}x$

Flux d'énergie à travers ∂V : $(t, s) \mapsto \overrightarrow{q}(t, s)$

Source / puits d'énergie dans V : $(t, x) \mapsto f(t, x)$

Bilan d'énergie



Bilan d'énergie dans un volume V à $t \geq 0$:

Énergie volumique dans V : $(t,x) \mapsto \rho c_v(x)\theta(t,x)$

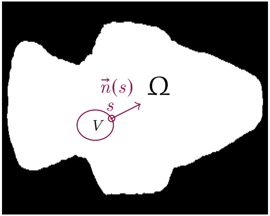
Énergie dans V : $t \mapsto \iiint_V \rho c_v(x)\theta(t,x)\mathrm{d}x$

Flux d'énergie à travers ∂V : $(t,s) \mapsto \overrightarrow{q}(t,s)$

Source / puits d'énergie dans V : $(t,x) \mapsto f(t,x)$

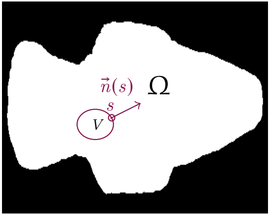
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iiint_V \rho c_v(x)\theta(t,x)\mathrm{d}x = -\iint_{\partial V} \overrightarrow{q}(t,s)\cdot\overrightarrow{n}(s)\mathrm{d}s + \iiint_V f(t,x)\mathrm{d}x$$

Fluide au repos : $\overrightarrow{u} = 0$ (V immobile)



$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iiint_V \rho c_v(x)\theta(t,x)\mathrm{d}x = -\iint_{\partial V} \overrightarrow{q}(t,s)\cdot\overrightarrow{n}(s)\mathrm{d}s + \iiint_V f(t,x)\mathrm{d}x$$

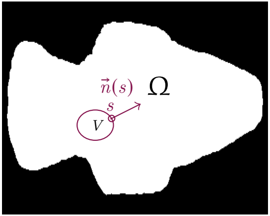
Fluide au repos : $\overrightarrow{u} = 0$ (V immobile)



$$\underbrace{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iiint_V \rho c_v(x)\theta(t,x)\mathrm{d}x}_{=\iiint_V \partial_t(\rho c_v \theta)(t,x)\mathrm{d}x} = -\iint_{\partial V} \overrightarrow{q}(t,s)\cdot\overrightarrow{n}(s)\mathrm{d}s + \iiint_V f(t,x)\mathrm{d}x$$

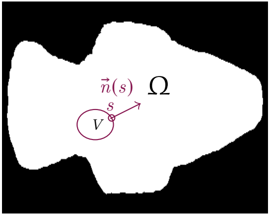
16/40

Fluide au repos : $\overrightarrow{u} = 0$ (V immobile)



$$\iiint_V \partial_t(\rho c_v \theta)(t,x)\mathrm{d}x = -\iint_{\partial V} \overrightarrow{q}(t,s)\cdot\overrightarrow{n}(s)\mathrm{d}s + \iiint_V f(t,x)\mathrm{d}x$$

Fluide au repos : $\overrightarrow{u} = 0$ (V immobile)

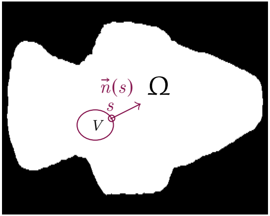


$$\iiint_V \partial_t(\rho c_v \theta)(t,x)\mathrm{d}x = -\iint_{\partial V} \overrightarrow{q}(t,s)\cdot\overrightarrow{n}(s)\mathrm{d}s + \iiint_V f(t,x)\mathrm{d}x$$

Formule de Green pour $\overrightarrow{w} \in (C^1(\overline{\Omega}))^3$

$$\iint_{\partial V} \overrightarrow{w}(s)\cdot\overrightarrow{n}(s)\mathrm{d}s = \iiint_V \mathrm{div}_x(\overrightarrow{w})(x)\mathrm{d}x$$

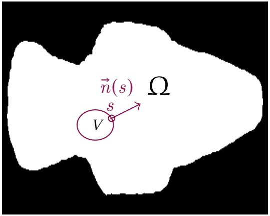
Fluide au repos : $\overrightarrow{u} = 0$ (V immobile)



$$\iiint_V \partial_t(\rho c_v \theta)(t,x)\mathrm{d}x = -\iint_{\partial V} \overrightarrow{q}(t,s)\cdot\overrightarrow{n}(s)\mathrm{d}s + \iiint_V f(t,x)\mathrm{d}x$$

$$\forall V,\ \iiint_V (\rho c_v)(x)\partial_t\theta(t,x)\mathrm{d}x + \iiint_V \mathrm{div}_x(\overrightarrow{q})(t,x)\mathrm{d}x = \iiint_V f(t,x)\mathrm{d}x$$

Fluide au repos : $\overrightarrow{u} = 0$ (V immobile)



$$\iiint_V \partial_t(\rho c_v \theta)(t,x)\mathrm{d}x = -\iint_{\partial V} \overrightarrow{q}(t,s)\cdot\overrightarrow{n}(s)\mathrm{d}s + \iiint_V f(t,x)\mathrm{d}x$$

$$\forall V,\ \iiint_V (\rho c_v)(x)\partial_t\theta(t,x)\mathrm{d}x + \iiint_V \mathrm{div}_x(\overrightarrow{q})(t,x)\mathrm{d}x = \iiint_V f(t,x)\mathrm{d}x$$

Alors $\forall t>0,\ \forall x\in\Omega,\ (\rho c_v)(x)\,\partial_t\theta(t,x) + \mathrm{div}_x(\overrightarrow{q})(t,x) = f(t,x)$

Equation de la chaleur

Attention, ce n'est pas une EDP !

$$\forall t > 0,\ \forall x \in \Omega, \quad \rho c_v(x)\partial_t\theta(t,x) + \mathrm{div}_x(\overrightarrow{q})(t,x) = f(t,x)$$

En effet, il faut lier $\overrightarrow{q}$ à θ !

Loi de Fourier

On pose $\qquad \overrightarrow{q} = -\kappa\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}_x(\theta)$

EDP : $\quad \rho c_v \partial_t\theta - \mathrm{div}_x(\kappa\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}_x(\theta)) = f \quad$ dans $\quad \mathbb{R}^{+*} \times \Omega$

Equation de la chaleur

Attention, ce n'est pas une EDP !

$$\forall t > 0,\ \forall x \in \Omega, \quad \rho c_v(x)\partial_t\theta(t,x) + \mathrm{div}_x(\overrightarrow{q})(t,x) = f(t,x)$$

En effet, il faut lier $\overrightarrow{q}$ à θ !

Loi de Fourier

On pose $\overrightarrow{q} = -\kappa \overrightarrow{\mathrm{grad}}_x(\theta)$

EDP : $\rho c_v \partial_t \theta - \mathrm{div}_x(\kappa \overrightarrow{\mathrm{grad}}_x(\theta)) = f$ dans $\mathbb{R}^{+*} \times \Omega$

$\vec{u} \neq 0$ annexe : $\rho c_v \partial_t \theta + \mathrm{div}_x(\rho c_v \theta \vec{u}) - \mathrm{div}_x(\kappa \overrightarrow{\mathrm{grad}}_x(\theta)) = f$

Plan

Conditions au bord pour obtenir un problème (fermé)

Problème très délicat : en domaine borné, les conditions au bord apparaissent dans les formulations intégrales par formules de Green

- Condition à $t = 0$: θ^0 donnée, problème de Cauchy

condition initiale

- Condition au bord $\partial\Omega$:
  - valeur imposée : $\theta|_{\partial\Omega} = g$

    condition de Dirichlet

  - flux imposé : $\overrightarrow{\nabla}\theta|_{\partial\Omega} \cdot \overrightarrow{n} = h$

    condition de Neumann

  - les deux - $\partial\Omega = \partial\Omega_D \sqcup \partial\Omega_N$: $\theta|_{\partial\Omega_D} = g$ et $\overrightarrow{\nabla}\theta|_{\partial\Omega_N} \cdot \overrightarrow{n} = h$

    conditions mêlées

  - fluide mobile : $\left(-\rho C_v \theta \vec{u} + \kappa \overrightarrow{\nabla}\theta\right)_{|\partial\Omega} \cdot \overrightarrow{n} = h$

    conditions de Robin/Fourier

Plan

Du **modèle physique** au **problème mathématique**

En mathématiques, les **quantités sont sans dimension** (nombres !).
Étape indispensable aux mathématiques appliquées : l'adimensionnement !
Dans le cas de l'équation de la chaleur :

Nom	Quantité	Unité	Adimensionnement
temps (s)	t	T	$t = Tt^*$
longueur (m)	x	L	$x = Lx^*$
température (K)	θ	Θ	$\theta = \Theta\theta^*$
vitesse $(m.s^{-1})$	u	U	$u = Uu^*$
cond. th. $(kg.m.s^{-2}.K^{-1})$	κ	$\mathcal{K}$	$\kappa = \mathcal{K}\kappa^*$
source $(kg.m^2.s^{-3})$	f	F	$f = Ff^*$

Equations adimensionnées

Adimensionnement des opérateurs physiques : $\begin{cases} \partial_t \theta = \dfrac{1}{T} \partial_{t^*} \theta \\ \partial_{x_i} \theta = \dfrac{1}{L} \partial_{x_i^*} \theta \\ \mathrm{div}_x \theta = \dfrac{1}{L} \mathrm{div}_{x^*} \theta \end{cases}$ Dans

l'équation (ρc_v, κ constants) :

$$\frac{\rho c_v \Theta}{T} \partial_{t^*} \theta^* + \frac{\rho c_v \Theta U}{L} \mathrm{div}_{x^*}(\theta^* \overrightarrow{u^*}) - \frac{\Theta \mathcal{K}}{L^2} \Delta_{x^*} \theta^* = F f^*$$

ou encore

$$1\, \partial_{t^*} \theta^* + \frac{T}{T_C} \mathrm{div}_{x^*}(\theta^* \overrightarrow{u^*}) - \frac{T}{T_D} \Delta_{x^*} \theta^* = \frac{T}{T_S} f^*$$

avec les temps caractéristiques

$$T_C = \frac{L}{U}, \qquad T_D = \frac{\rho c_v L^2}{\mathcal{K}} \qquad \text{et} \qquad T_S = \frac{\rho c_v \Theta}{F}.$$

Identification des régimes

Art de l'ingénieur : maîtrise des approximations dans les modèles

$$\partial_t \theta + \frac{T}{T_C}\text{div}_x(\theta \overrightarrow{u}) - \frac{T}{T_D}\Delta_x \theta = \frac{T}{T_S} f$$

régime	équation mathématique	nomenclature
$T << T_D, T_C$	$\partial_t \theta = f$	**EDO**
$T >> T_C >> T_D$	$-\Delta_x \theta = f$	**diffusion stationnaire**
$T \sim T_D << T_C$	$\partial_t \theta - \Delta_x \theta = f$	**diffusion instationnaire**
$T \sim T_C << T_D$	$\partial_t \theta + \text{div}_x(\theta \overrightarrow{u}) = f$	**transport**
$T_D \sim T \sim T_C$	$\partial_t \theta + \text{div}_x(\theta \overrightarrow{u}) - \Delta_x \theta = f$	**transport-diffusion instationnaire**

Plan

Vocabulaire

- **ordre** d'une EDP : plus grand ordre de dérivation par variable
- **équation stationnaire** : pas de dérivée en temps
- **équation d'évolution** : le temps est une variable de dérivation

Exemple

- $-\Delta_x \theta = f$: *équation stationnaire d'ordre 2 (en espace)*
- $\partial_t \theta + u \partial_x \theta = 0$: *équation d'évolution d'ordre 1 en temps, 1 en espace*
- $\partial_t \theta - \Delta_x \theta = 0$: *équation d'évolution d'ordre 1 en temps, 2 en espace*

Classification des EDP linéaires

Plan

équation mathématique	nomenclature	type
$\partial_t\theta = f(t,\theta)$	**EDO**	EDO
$-\Delta_x\theta = f$	**diffusion stationnaire**	elliptique
$\partial_t\theta - \Delta_x\theta = f$	**diffusion instationnaire**	parabolique
$\partial_t\theta + u\cdot\overrightarrow{\mathrm{grad}}_x(\theta) = f$	**transport**	hyperbolique
$\partial_t\theta + \vec{u}\cdot\overrightarrow{\mathrm{grad}}_x(\theta) - \Delta_x\theta = f$	**transport-diffusion instationnaire**	parabolique
$\partial_{tt}\rho - c^2\partial_{xx}\rho = f$	**ondes**	hyperbolique

Plan

EDP : infinité de solutions $\Longrightarrow$ **Problème** : EDP + conditions

- **problème aux limites** : EDP + conditions aux limites sur $\partial\Omega$
  (ex : pb de Dirichlet)
- **problème de Cauchy** : équation d'évolution + conditions initiales

EDP : infinité de solutions $\Longrightarrow$ **Problème** : EDP + conditions

- **problème aux limites** : EDP + conditions aux limites sur $\partial\Omega$ (ex : pb de Dirichlet)
- **problème de Cauchy** : équation d'évolution + conditions initiales

Définition V.3.1

Soient E et F deux espaces. Soient $f \in F$ les données et $\mathcal{A} : E \longrightarrow F$ le problème dont on cherche une solution $u \in E$:

$$\mathcal{A}(u) = f \text{ avec } u \in E.$$

Ce problème est **bien posé (au sens de Hadamard)** *si pour toute donnée $f \in F$ il existe* **une unique solution** *$u_f \in E$ et qu'elle dépend continûment de f.*

Exemple : Système linéaire

Plan

Equation parabolique

Équation de diffusion : $\begin{cases} \partial_t \theta - \kappa\, \partial^2_{xx} \theta = 0 \text{ dans } \mathbb{R}, \\ \theta(0,\cdot) = \theta^0 \text{ dans } \mathbb{R} \end{cases}$

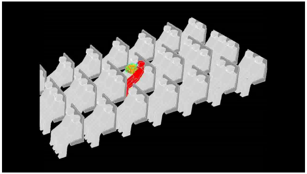
Équation linéaire... **Outil :** Transformée de Fourier !

Résolution « explicite » :

$$\theta : (t,x) \in \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R} \mapsto \frac{1}{\sqrt{4\pi\kappa t}} \int_{\mathbb{R}} e^{-(x-y)^2/4\kappa t}\, \theta^0(y) \mathrm{d}y.$$

Propriétés :

- équation régularisante :
  θ plus régulière que θ^0 !
- propagation de l'énergie à vitesse infinie
- principe du maximum :
  $$\theta(t,x) \leq \max_x \theta^0(x)$$



Equation de transport : caractéristiques

En 1D : $x \in \mathbb{R}$, $u \in \mathbb{R}$ supposée constante

$$\begin{cases} \partial_t \theta + u \partial_x \theta = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}, \\ \theta(0, \cdot) = \theta^0 & \text{sur } \mathbb{R} \end{cases}$$

Courbes caractéristiques :

Equation de transport : caractéristiques

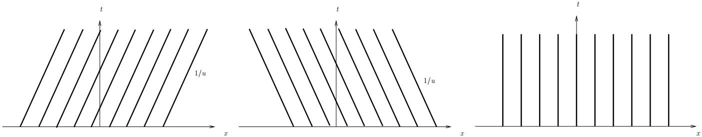
En 1D : $x \in \mathbb{R}$, $u \in \mathbb{R}$ supposée constante

$$\begin{cases} \partial_t \theta + u \partial_x \theta = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}, \\ \theta(0, \cdot) = \theta^0 & \text{sur } \mathbb{R} \end{cases}$$

Courbes caractéristiques :
Cherchons $t \mapsto X(t)$ tq $w : t \mapsto \theta(t, X(t))$ fonction constante.

$$\text{On a} \quad \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t} = \partial_t \theta + \partial_x \theta \, \frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t}. \qquad \text{Si} \quad \frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t} = u, \quad \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t} = 0\,!$$

Alors $X(s) = us + X(0)$ et $\theta(t, X(t)) = \theta^0(X(0))$.



$u > 0$ $u < 0$ $u = 0$

Propriétés :

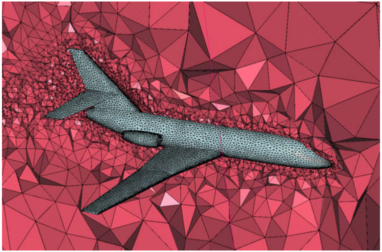
- propagation des singularités : θ a même régularité que θ^0 !
- propagation de l'information à vitesse finie
- principe du maximum

Plan

Discrétisation

Soit un problème (d'évolution ou non) posé dans un domaine Ω.

- Étape 1 : discrétisation du **domaine** (géométrie)



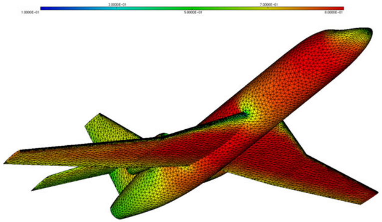
Maillage d'un avion

- en 1D : sous-intervalles
- en 2D : polygones (triangles, quadrangles,...)
- en 3D : polyèdres (tétraèdres, pyramides,...)

Discrétisation

Soit un problème (d'évolution ou non) posé dans un domaine Ω.

- Étape 1 : discrétisation du **domaine** (géométrie)



Champ de vitesse autour d'un avion

- en 1D : sous-intervalles
- en 2D : polygones (triangles, quadrangles,...)
- en 3D : polyèdres (tétraèdres, pyramides,...)

35/40

Discrétisation et convergence

- Étape 2 : discrétisation du **problème** (analyse numérique)

Théorie	variables continues ($x \in [0,1]$)	$\longleftrightarrow$	variables discrètes ($(x_j)_{1 \leq j \leq J}$)
	fonctions ($f : x \mapsto f(x)$)	$\longleftrightarrow$	vecteurs ($(v_j)_{1 \leq j \leq J}$)
	opérateurs	$\longleftrightarrow$	matrices (par ex. de différences)
	équation	$\longleftrightarrow$	récurrence, système (non-)linéaire
Exemple	$\partial_x f(x)$	$\longleftrightarrow$	$\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$, $h>0$
Conséquences	dimension infinie	$\longleftrightarrow$	dimension finie **variable**
	problème continu	$\longleftrightarrow$	problème approché
	solution du pb continu	?	solution du pb approché
	QUESTION DE LA CONVERGENCE		
Mathématiques	analyse fonctionnelle	$\longleftrightarrow$	analyse numérique

Approximation

- Étape 3 : principe fondamental de discrétisation & convergence

  « **L'analyse numérique doit montrer que la solution du problème approché est bien une approximation de la solution exacte du problème continu** »

  Pour savoir cela, il faut

  - montrer que le problème continu est bien posé
  - le discrétiser
  - montrer que le problème discret est bien posé
  - (respecter des propriétés qualitatives)
  - montrer la convergence de la solution approchée vers la solution exacte

Analyse fonctionnelle

Il faut montrer que le problème continu est bien posé :

- Problème de Cauchy $\begin{cases} Y'(t) = f(t, Y(t)), \quad t \in I, \\ Y(0) = Y^0 \text{ donnée} \end{cases}$
- Problème de Dirichlet $\begin{cases} -\Delta_x \theta = f \text{ dans } \Omega \\ \theta|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$
  - Régularité de θ (distributions)
  - IPP - Formulation faible / variationnelle
  - Espaces fonctionnels adaptés (espaces de Sobolev)
  - Etude de formes bilinéaires dans des espaces de Hilbert

Analyse fonctionnelle

Il faut montrer que le problème continu est bien posé :

- Problème de Cauchy $\begin{cases} Y'(t) = f(t, Y(t)), & t \in I, \\ Y(0) = Y^0 \text{ donnée} \end{cases}$
- Problème de Dirichlet $\begin{cases} -\Delta_x \theta = f \text{ dans } \Omega \\ \theta|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$
    - Régularité de θ (distributions)
    - IPP - Formulation faible / variationnelle
    - Espaces fonctionnels adaptés (espaces de Sobolev)
    - Etude de formes bilinéaires dans des espaces de Hilbert

Outils fonctionnels

- théorèmes de Cauchy-Lipschitz
- analyse hilbertienne
- distributions
- espaces de Sobolev

Analyse numérique classique

Techniques de **discrétisation** :

- différences finies (temps et/ou espace)
  - description des fonctions par les valeurs aux nœuds
  - taux d'accroissement ; formules de Taylor
  - obtention de suites vectorielles définies par récurrence en temps
  - obtention de systèmes linéaires en espace de très grande taille
- éléments finis (espace)
  - description des fonctions par des polynômes définis par maille
  - utilisation de la formulation variationnelle
  - obtention de systèmes linéaires en espace de très grande taille

Analyse numérique classique

Techniques de **discrétisation** :

- différences finies (temps et/ou espace)
  - description des fonctions par les valeurs aux nœuds
  - taux d'accroissement ; formules de Taylor
  - obtention de suites vectorielles définies par récurrence en temps
  - obtention de systèmes linéaires en espace de très grande taille
- éléments finis (espace)
  - description des fonctions par des polynômes définis par maille
  - utilisation de la formulation variationnelle
  - obtention de systèmes linéaires en espace de très grande taille

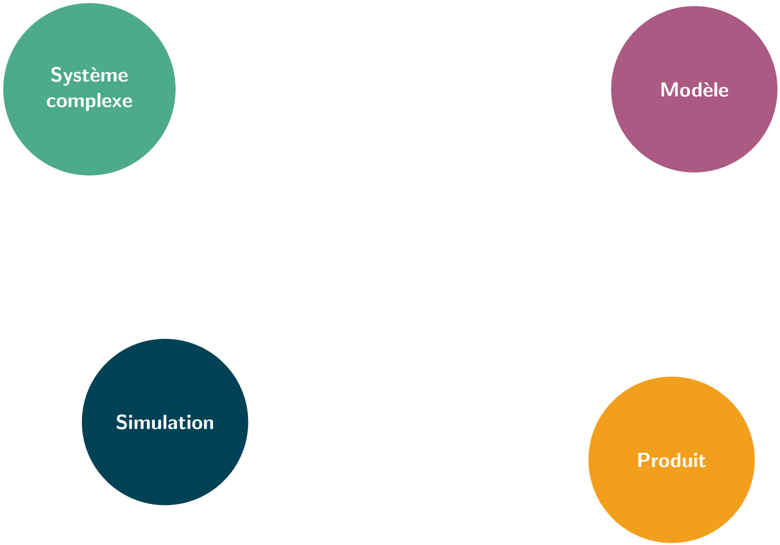
Outils numériques indispensables

- analyse spectrale des matrices
- résolution de grands systèmes linéaires

Conclusion

Théorie	variables continues	$\longleftrightarrow$	variables discrètes
	$\boxed{\text{fonctions}}$	$\longleftrightarrow$	$\boxed{\text{vecteurs}}$
	$\boxed{\text{opérateurs}}$	$\longleftrightarrow$	$\boxed{\text{matrices}}$
	$\boxed{\text{équation}}$	$\longleftrightarrow$	$\boxed{\text{système linéaire, récurrence}}$
Exemple	$\partial_x f(x)$	$\longleftrightarrow$	$\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$, $h>0$
Conséquences	valeur ponctuelle $f(x)$	$\longleftrightarrow$	z_j
	$\boxed{\text{dimension infinie}}$	$\longleftrightarrow$	$\boxed{\text{dimension finie}}$
	$\boxed{\text{problème continu}}$	$\longleftrightarrow$	problème approché
	$\boxed{\text{solution du pb continu}}$	??>	$\boxed{\text{solution du pb approché}}$
	QUESTION DE LA CONVERGENCE		
Mathématiques	$\boxed{\text{analyse fonctionnelle}}$	$\longleftrightarrow$	$\boxed{\text{analyse numérique}}$

Démarche de modélisation : de l'observation au produit



Environnement

Modèle

Simulation

Produit

Démarche de modélisation : de l'observation au produit

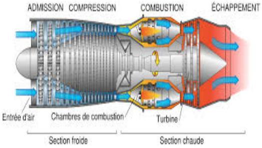
Environnement

Modèle

Simulation

Produit

Démarche de modélisation : de l'observation au produit



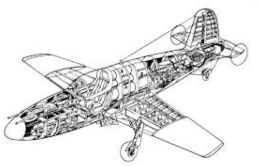
Propulsion

Modèle

Simulation

Produit

Démarche de modélisation : de l'observation au produit



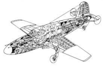
Structure

Modèle

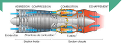
Simulation

Produit

Démarche de modélisation : de l'observation au produit



Système complexe



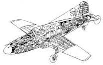
Modélisation mathématique

Modèle

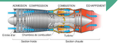
Mécanique des fluides
Mécanique du solide
Thermique
Chimie

Simulation

Produit

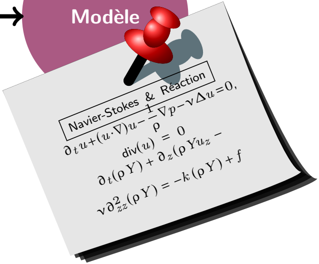


Système complexe



Modélisation mathématique

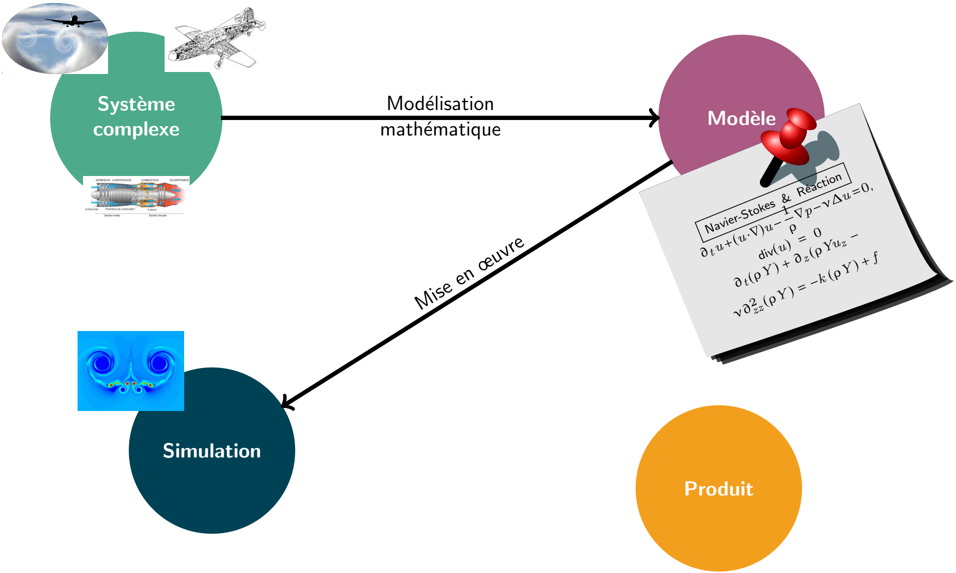
Modèle



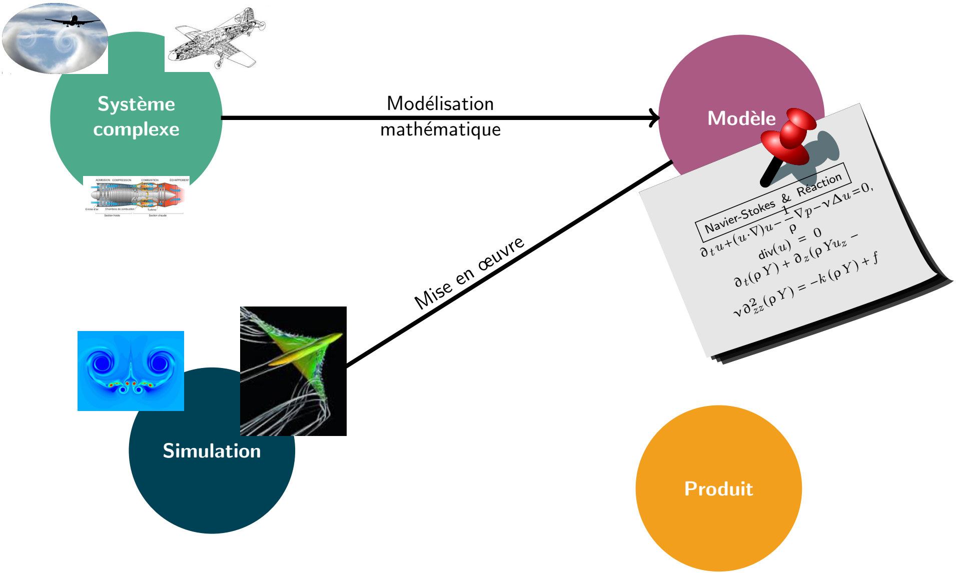
Simulation

Produit

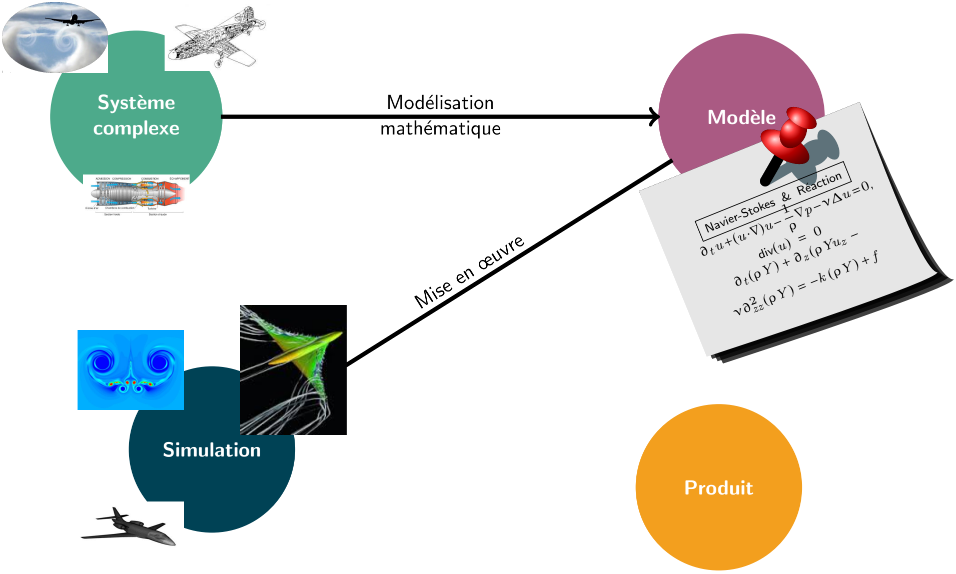
Démarche de modélisation : de l'observation au produit



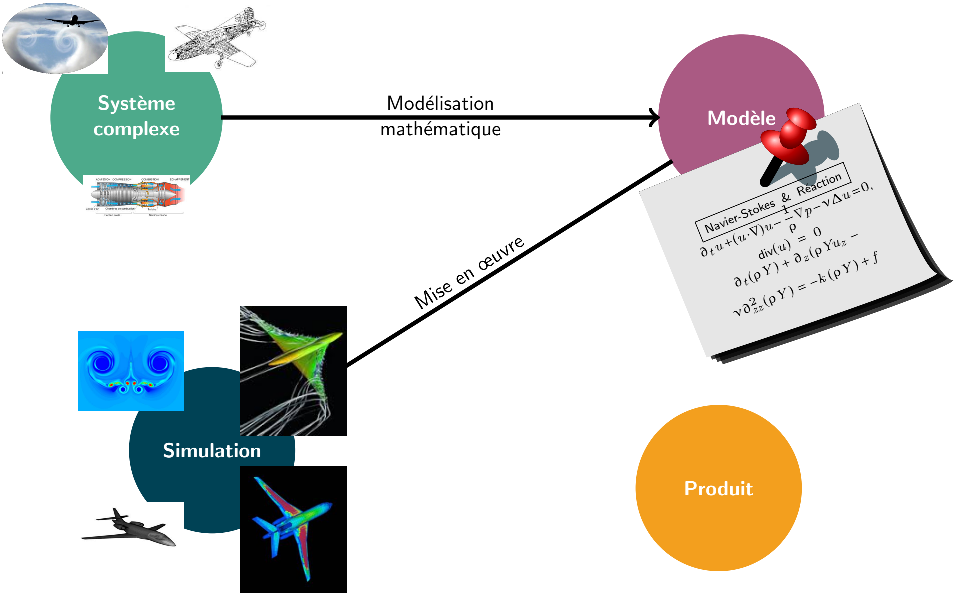
Démarche de modélisation : de l'observation au produit



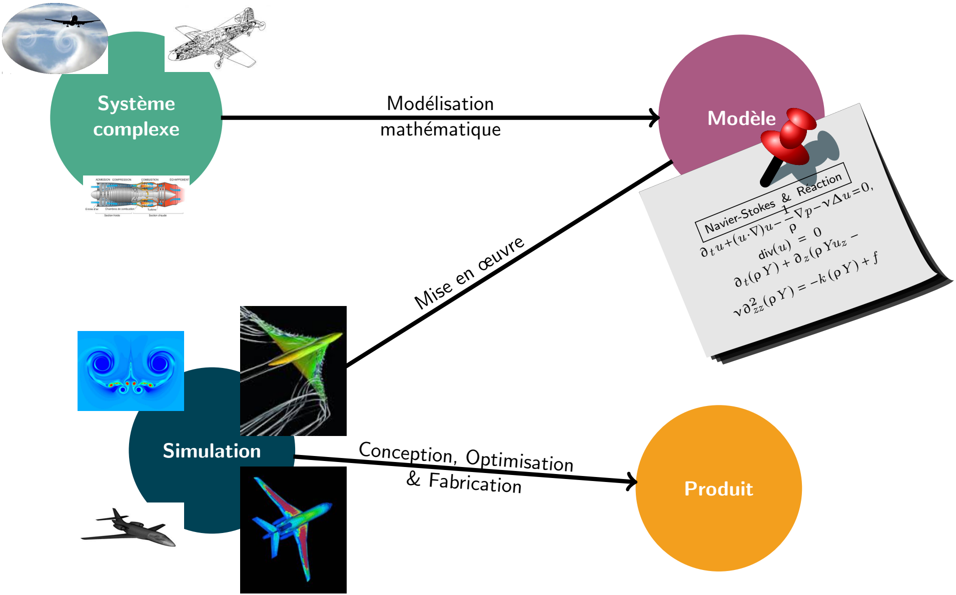
Démarche de modélisation : de l'observation au produit



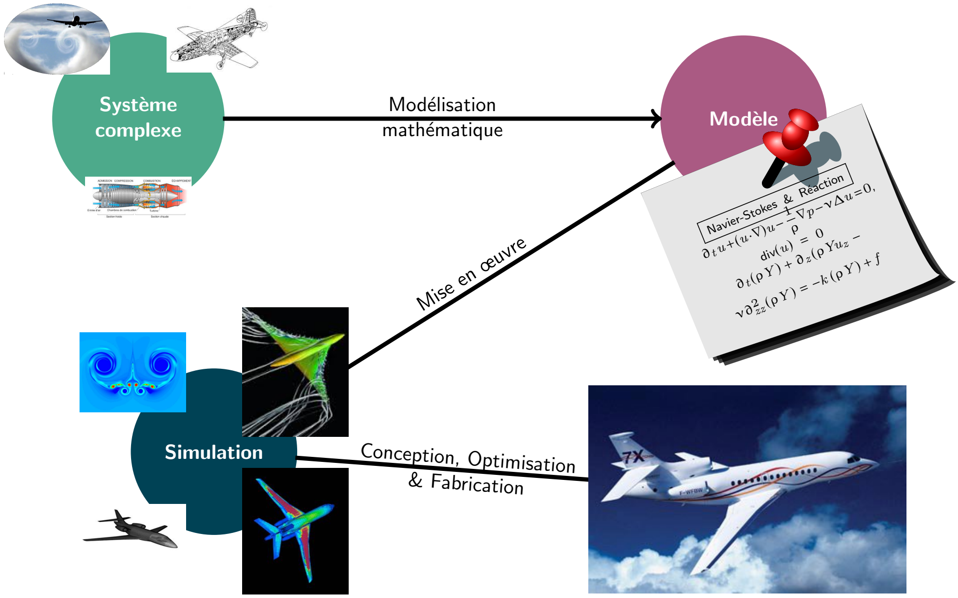
Démarche de modélisation : de l'observation au produit



Démarche de modélisation : de l'observation au produit

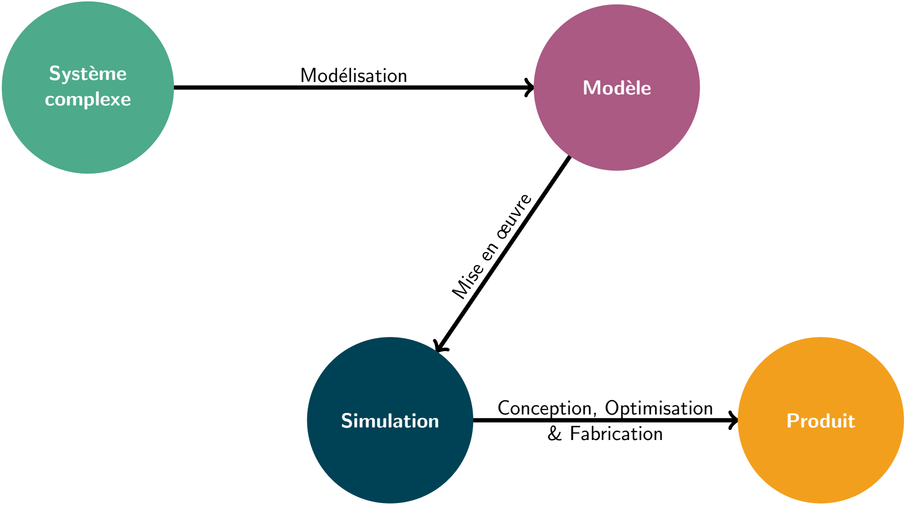


Démarche de modélisation : de l'observation au produit

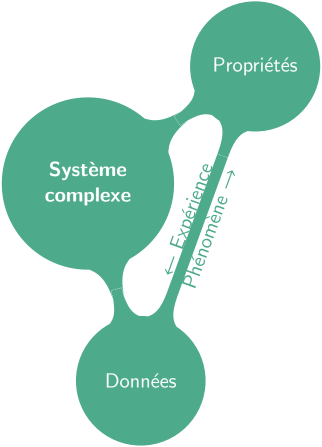


F7X, 2007

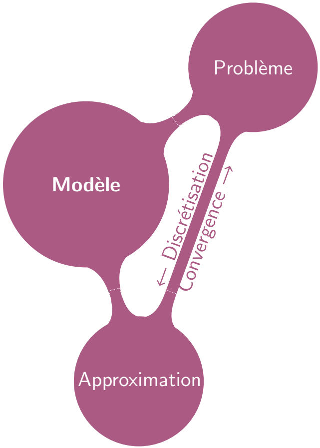
Démarche de modélisation : de l'observation au produit



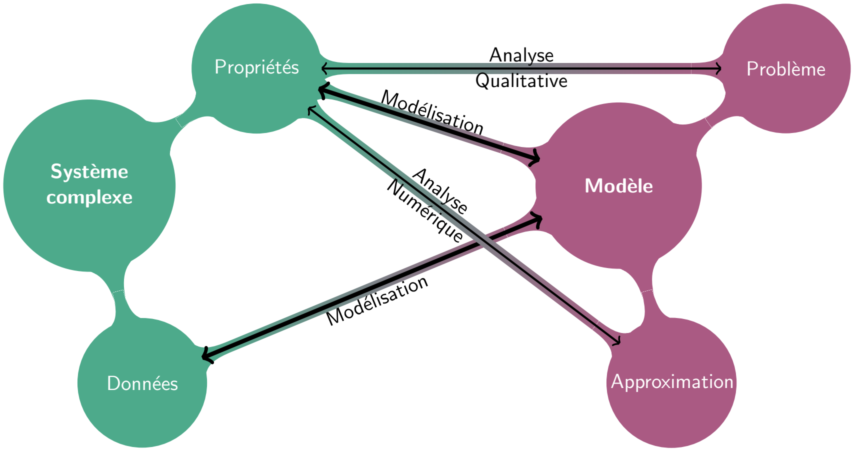
Démarche de modélisation : de l'observation au produit



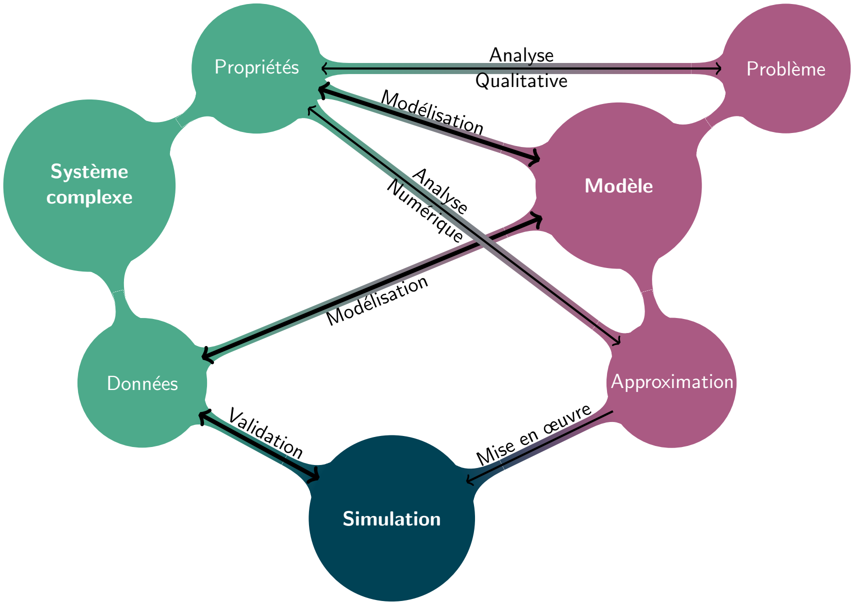
Démarche de modélisation : de l'observation au produit



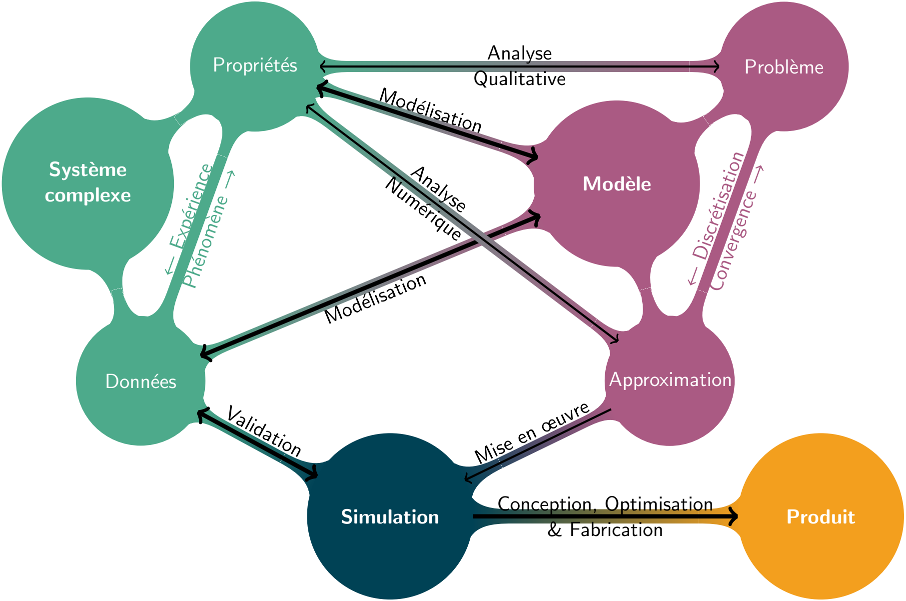
Démarche de modélisation : de l'observation au produit



Démarche de modélisation : de l'observation au produit



Démarche de modélisation : de l'observation au produit



Fluide en mouvement : $\overrightarrow{u} \neq 0$

Bilan + Formule de Green :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iiint_V \rho c_v(x)\theta(t,x)\mathrm{d}x + \iiint_V \mathrm{div}_x(\overrightarrow{q})(t,x)\mathrm{d}x = \iiint_V f(t,x)\mathrm{d}x$$

Si V_t bouge au cours du temps car $\overrightarrow{u} \neq 0$, on a pour $C, \overrightarrow{u} \in C^1$,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iiint_{V_t} C(t,x)\mathrm{d}x = \iiint_{V_t} \partial_t C(t,x)\mathrm{d}x + \iiint_{V_t} \mathrm{div}_x(C\overrightarrow{u})(t,x)\mathrm{d}x$$

d'où, pour $C = \rho c_v \theta$,

$$\rho c_v \partial_t \theta + \mathrm{div}_x(\rho c_v\, \theta\, \overrightarrow{u}) - \mathrm{div}_x(\kappa\, \overrightarrow{\mathrm{grad}}_x(\theta)) = f \text{ dans } \mathbb{R}^{+*} \times \Omega$$

Attention, il faudra adapter les conditions au bord ! (Robin-Fourier)

Retour aux conditions aux limites

Classification des EDP linéaires

Prenons une EDP linéaire générale en 2 dimensions sous la forme

$$a\,\partial^2_{xx}\theta + b\,\partial^2_{xy}\theta + c\,\partial^2_{yy}\theta + d\,\partial_x\theta + e\,\partial_y\theta + f\,\theta = 0$$

avec $(a, b, c, d, e, f) \in \mathbb{R}^6$.

Définition V.5.1

$$a\,\xi^2 + b\,\xi\zeta + c\,\zeta^2 + d\,\xi + e\,\zeta + f = 0$$

on dit que

- *si* $4ac - b^2 > 0$, *l'équation est* **elliptique**,
- *si* $4ac - b^2 < 0$, *l'équation est* **hyperbolique**,
- *si* $4ac = b^2$ *et* $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$, *l'équation est* **parabolique**.

Si $a = b = c = 0$, *on dit encore que l'équation est* **hyperbolique**.

Retour au vocabulaire