QCM n^o2

CIPEDP – 1A – 2018-2019 (Durée : 20mn)

Question 1 Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Indiquer les assertions qui sont vraies :

■ Si $f \in L^p(\mathbb{R})$ alors $f^2 \in L^{p/2}(\mathbb{R})$.
[**Sol:** $f \in L^p$ signifie que $f^p \in L^1$. Il en résulte que $(f^2)^{p/2} \in L^1$ et donc que $f^2 \in L^{p/2}$.]

■ Si $f \in L^p(\mathbb{R})$ et $g \in L^p(\mathbb{R})$ alors $\max\{f,g\} \in L^p(\mathbb{R})$.
[**Sol:** $\max\{f,g\} = \frac{1}{2}(|f-g|+f+g)$ donc $f,g \in L^p$ entraîne $\max\{f,g\} \in L^p$.]

■ $H^p(0,1) \subset C^{p-1}([0,1])$.
[**Sol:** Si $f \in H^p(0,1)$ alors $f^{(p-1)} \in H^1(0,1)$. Le théorème de Rellich (IV.3.4) donne $f^{(p-1)} \in C^0([0,1])$ et donc $f \in C^{p-1}([0,1])$.]

D Si $f \in L^p(\mathbb{R})$ alors $|f|^{1/p} \in L^1(\mathbb{R})$.
[**Sol:** La fonction $f\,:\,x \mapsto \frac{1}{x^2}\,1_{[1,+\infty[}$ est dans $L^2(\mathbb{R})$ mais $\sqrt{f}\,:\,x \mapsto \frac{1}{x}\,1_{[1,+\infty[}$ n'est pas dans $L^1(\mathbb{R})$, l'assertion $f \in L^2(\mathbb{R}) \Rightarrow |f|^{1/2} \in L^1(\mathbb{R})$ est donc fausse.]

E $L^{p+1}(\mathbb{R}) \subset L^p(\mathbb{R})$.
[**Sol:** L'exercice IV.3 donne un contre-exemple à l'inclusion $L^{p+1}(\mathbb{R}) \subset L^p(\mathbb{R})$.]

Question 2 Soit une mesure μ sur $(E, \mathcal{E})$ un espace mesurable. Soit $f \in L^1(E, \mu)$. Indiquer les assertions qui sont vraies :

■ f est limite simple d'une suite de fonctions étagées.

[**Sol:** On peut écrire $f = f_+ - f_-$. Or d'après le Théorème III.1.12, f_+ et f_- sont limites simples de suites de fonctions étagées, donc f l'est également.]

B f est bornée : $\max_{x \in E} |f(x)| < \infty$.

[**Sol:** Voici un contre-exemple : $E = \mathbb{R}_+$, $\mu = \lambda$ et $f(x) = x^{-1/2}$ pour tout $x > 0$, $f(0) = 0$.]

C $f(x)$ est finie en tout point x.

[**Sol:** Non, il suffit de choisir n'importe quelle fonction intégrable f, modifier sa valeur en un point pour la rendre infinie en ce point, et cette modification $\tilde{f}$ est toujours intégrable (on a raisonné ici en termes de fonctions, mais on rappelle que $f \in L^1$ est une classe d'équivalence, la "modification" $\tilde{f}$ évoquée précédemment n'est donc qu'un autre représentant de f).]

■ f est finie μ-presque partout.

[**Sol:** Si $\mu(\{f = +\infty\} \cup \{f = -\infty\}) > 0$, disons par exemple et sans restriction que $\mu(\{f = +\infty\}) > 0$, alors $\int_E f_+ d\mu \geq \int_{\{f=+\infty\}} f d\mu = +\infty$. Ainsi $\int_E |f| d\mu \geq \int_E f_+ d\mu = +\infty$. Donc $f \notin L^1$.]

Question 3 Dans l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, soit (X, Y) un couple de variables aléatoires réelles tel que la loi $P_{(X,Y)}$ admet la densité f définie par $\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad f(x, y) = \frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2}\right)$. Indiquer les assertions qui sont vraies :

■ La loi de X admet la densité $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$.

[**Sol:** L'énoncé indique que f est une densité sur $\mathbb{R}^2$, donc en particulier $\int_{\mathbb{R}^2} f d\lambda^{(2)} = 1$. De plus $f(x, y) = f_1(x) f_1(y)$, où $f_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-x^2/2)$. Donc f_1 est une densité sur $\mathbb{R}$, et comme vu en cours, la densité de la loi de X est donnée par $f_X(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x, y) \lambda(dy) = f_1(x) \int_{\mathbb{R}} f_1(y) \lambda(dy) = f_1(x)$.]

■ Les variables aléatoires X et Y sont indépendantes.

[**Sol:** La densité de la loi du couple (X, Y) s'écrit comme le produit de la densité de la loi de X par celle de Y. Ainsi par une caractérisation de l'indépendance vue en coursThen, thanks to a characterization seen in class, X et Y sont indépendantes.]

■ La covariance $\mathrm{Cov}(X, Y)$ est nulle.

[**Sol:** Cela découle de l'indépendance de X et Y.]

D Pour toute fonction $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mesurable bornée, $h(X, Y)$ admet une densité de probabilité.

[**Sol:** Voici un contre-exemple : $h \equiv 1$.]

Question 4 Soit $N \geq 1$. Soit $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ un borélien et $\lambda^{(N)} = \lambda \otimes \ldots \otimes \lambda$ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^N$. Indiquer les assertions qui sont vraies :

■ Si A est dénombrable, alors $\lambda(A) = 0$.

[**Sol:** $A = \cup_{i \in I} \{a_i\}$ avec I dénombrable. Donc $\lambda^{(N)}(A) = \sum_{i \in I} \lambda^{(N)}(\{a_i\}) = 0$.]

■ Si A est borné, alors $\lambda(A) < \infty$.

[**Sol:** A borné $\Rightarrow \exists R > 0$ tel que $A \subseteq B(0, R)$, donc $\lambda^{(N)}(A) \leq \lambda^{(N)}(B(0, R)) < \infty$.]

C Si $\lambda(A) < \infty$, alors A est borné.

[**Sol:** $\lambda^{(N)}(\mathbb{Q}^N) = 0$ et $\mathbb{Q}^N$ n'est pas borné.]

D Si $\lambda(A) = 0$, alors A est dénombrable.

[**Sol:** Il n'y a pas de raison que ce soit le cas. L'ensemble triadique de Cantor fournit un exemple d'ensemble non-dénombrable et de mesure de Lebesgue nulle.]

Question 5 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2018 - |x|$. La dérivée seconde de f au sens des distributions...

- A ... est $x \mapsto 0$.
- B ... est $-\delta_0$.
- C ... est δ_0.
- D ... n'existe pas.
- ■ ... est $-2\,\delta_0$.

[**Sol:** La dérivée de f est la fonction $x \mapsto \begin{cases} -1 & \text{si} \quad x < 0 \\ 1 & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$ (notez toutefois que la valeur en zéro est sans importance puisque $\{0\}$ est en ensemble de mesure nulle et que la classe de la fonction est inchangée si on considère $x \mapsto \begin{cases} -1 & \text{si} \quad x \leq 0 \\ 1 & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$) La dérivée seconde de f au sens des distributions s'obtient soit par le calcul direct utilisant la définition de la dérivée d'une distribution avec une fonction test, soit en appliquaant la formule du saut (Théorm̀e IV.2.7). On a alors $f'' = -2\,\delta_0$ (au sens des distributions).]

Question 6 Soit μ une mesure sur l'espace mesurable $(E, \mathcal{E})$. Indiquer les assertions qui sont vraies :

$\boxed{A}$ Si la suite de fonctions étagées $(\varphi_n)_n \in \mathbb{N}$ converge uniformément vers $f : E \to \mathbb{R}$, alors $\int_E \varphi_n(x)\ \mu(dx)$ tend vers $\int_E f(x)\ \mu(dx)$ lorsque $n \to \infty$.

[**Sol:** Voici un contre-exemple : prenons $E = \mathbb{R}$, $\mu = \lambda$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $\varphi_n = \frac{1}{n}\mathbb{1}_{[n,+\infty[}$. Alors $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers la fonction constante égale à 0 et pourtant $+\infty = \int_E \varphi_n d\lambda \neq \int_E f d\lambda = 0$.]

■ Si la suite croissante de fonctions étagées $(\varphi_n)_n \in \mathbb{N}$ converge simplement vers $f : E \to \mathbb{R}_+$, alors $\int_E \varphi_n(x)\ \mu(dx)$ tend vers $\int_E f(x)\ \mu(dx)$ lorsque $n \to \infty$.

[**Sol:** Si les φ_n sont supposées à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, alors c'est le théorème de convergence monotone. Sinon on trouve des contre-exemples : $\varphi_n = -\frac{1}{n}$ converge simplement vers 0 et pourtant $-\infty = \int \varphi_n d\lambda \neq \int \lim \varphi_n d\lambda = 0$.]

■ Si l'intégrale $\mathcal{I}(f) = \int_E f(x)\ \mu(dx)$ est finie pour toute fonction $f : E \to \mathbb{R}$ mesurable positive, alors on a nécessairement $0 \leq \mu(E) < +\infty$.

[**Sol:** Choisir la fonction constante égale à 1.]

■ L'intégrale $\mathcal{I}(f) = \int_E f(x)\ \mu(dx)$ pour $f \in L^1(E, \mathcal{E}, \mu)$ est caractérisée par $\mathcal{I}(\mathbb{1}_A) = \mu(A)$ pour tout $A \in \mathcal{E}$.

[**Sol:** L'intégrale $\mathcal{I}$ est construite par approximation par des intégrales de fonctions étagées. On rappelle que l'intégrale d'une fonction étagée $g = \sum \alpha_k \mathbb{1}_{A_k}$ est donnée par $\mathcal{I}(g) = \sum \alpha_k \mu(A_k)$. Ainsi la donnée des $\mu(A)$ pour tout $A \in \mathcal{E}$ caractérise la valeur des $\mathcal{I}(g)$ pour toute fonction étagée g, et par suite caractérise $\mathcal{I}(f)$.]

■ Si $\int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{[a,b]}\ \mu(dx) = b - a$, pour tous $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a \leq b$, alors μ est nécessairement la mesure de Lebesgue.

[**Sol:** Il s'agit d'une des caractérisations de la mesure de Lebesgue vue en cours, cf Proposition `III.9.3` .]

Question 7 On considère une variable aléatoire réelle X d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ dont la densité de probabilité est donnée par la fonction $x \mapsto \begin{cases} 2 & \text{si} \quad x \in [0, \frac{1}{2}] \\ 0 & \text{si} \quad x \notin [0, \frac{1}{2}] \end{cases}$.
Indiquer les assertions qui sont vraies :

A $\forall x \in]1829, 1894[,\ \mathbf{P}(X^{-1}(]x, x+1[) = 1.$

[**Sol:** Soit $x \in]1829, 1894[$. Comme $1829 > \frac{1}{2}$ on a $X^{-1}(]x, x+1[) = \emptyset$, il en résulte $P(X^{-1}(]x, x+1[) = 0$ (et non 1).]

■ $\forall x \in [0, \frac{1}{2}],\ F_X(x) = 2x,\ F_X$ étant la fonction de répartition de X.

[**Sol:** En utilisant le théorème III.11.6, on a $F_X(x) = \int_{]-\infty,x]} f(x)\lambda(dx) = \int_{]-\infty,0[} 0\lambda(dx) + \int_{[0,x[} 2\lambda(dx) = 2x$.]

C $\mathbb{E}(X) = 1.$

■ $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{4}.$

[**Sol:** Notons f la densité de probabilité.

En utilisant le théorème III.12.8 (et $h(x) = x$), il vient

$\mathbb{E}(X) = \int_{\mathbb{R}} x f(x)\lambda(dx) = \int_{[0,\frac{1}{2}]} 2x\lambda(dx) = [x^2]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{4}$]

Question 8 Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ une fonction borélienne et λ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$. Pour tout $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, on pose $\alpha(B) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\ \mathbb{1}_B(x)\ \lambda(dx)$. Indiquer les assertions qui sont vraies :

A Pour toute fonction $f \in L^1(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$, on a $\int_{\mathbb{R}} |f(x)|\ \varphi(x)\ \lambda(dx) < +\infty$.

[**Sol:** Voici un contre-exemple: $\varphi(x) = e^x$ et $f(x) = x^{-2}\mathbb{1}_{[1,+\infty[}$.]

■ α est une mesure sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

[**Sol:** On vérifie que $\alpha(\emptyset) = 0$ et que si (B_n) est une famille de boréliens deux à deux disjoints, $\alpha(\cup B_n) = \sum \alpha(B_n)$. Pour cela, on utilise l'égalité $\mathbb{1}_{\cup B_n} = \sum \mathbb{1}_{B_n}$ qui est vraie ici car les B_n sont disjoints.]

C Pour tout $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, on a $\alpha(B) < +\infty$.

[**Sol:** Voici un contre-exemple : $\varphi(x) = 1$ et $B = \mathbb{R}$.]

■ Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ est une fonction borélienne, $\int_{\mathbb{R}} f(x)\ \alpha(dx) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\ \varphi(x)\ \lambda(dx)$.

[**Sol:** Soit (g_n) une suite croissante de fonctions étagées qui converge vers f (qui est positive). On vérifie que l'égalité est bien vérifiée pour les fonctions étagées, donc par passage à la limite, elle l'est aussi pour f.]