CentraleSupélec - Cursus ingénieur

1ère année

Eléments de correctoion de la Composition de CIPEDP - Partie Probabilités

Vendredi 5 avril 2019

Exercice 1 - Presque du cours !

Dans l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans l'intervalle $[-1,1] \subset \mathbb{R}$, indépendantes et de loi uniforme sur $[-1,1]$.

Dans $\mathbb{R}^2$, on considére le carré $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [-1,1]$ et $y \in [-1,1]\}$ et le disque unité $\mathcal{U} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

1) *Exprimer $\mathbf{P}(X \in B)$ pour $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ et déterminer $\mathbf{P}(|X| \leq 1/2)$.*
2) *Rappeler la définition de l'indépendance de deux variables aléatoires U et V.*
3) *Quelle est la loi du couple (X,Y) ?*
   Plus précisément, pour tout $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$, exprimer la probabilité $\mathbf{P}\big((X,Y) \in B\big)$ comme une intégrale par rapport à la mesure de Lebesgue $\lambda^{(2)}$ de $\mathbb{R}^2$.
4) *Déterminer la valeur de $\mathbf{P}\big((X,Y) \in \mathcal{U}\big)$ et vérifier que $Z = \mathbb{1}_{(X,Y)\in\mathcal{U}}$ définit une variable de Bernoulli dont on précisera la loi.*
5) *Soient $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ des variables aléatoires à valeurs dans l'intervalle $[-1,1] \subset \mathbb{R}$, de loi uniforme sur $[-1,1]$ et telles que toutes ces variables aléatoires soient indépendantes.*
   Pour tout $n \geq 1$, on pose $Z_n = \mathbb{1}_{(X_n,Y_n)\in\mathcal{U}}$.
   (a) *Enoncer la loi des grands nombres. On précisera les différents modes de convergence.*
   (b) *Montrer que la proportion des $(X_1,Y_1),\dots,(X_n,Y_n)$ qui sont dans $\mathcal{U}$ converge vers $\pi/4$ lorsque n tend vers l'infini. En quel sens a lieu cette convergence ?*
   (c) *Que peut-on dire de la loi de $\sqrt{n}(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n Z_n - \frac{\pi}{4})$ lorsque n tend vers l'infini ?*

1) Puisque la loi de X est uniforme sur $[-1,1]$, elle admet pour densité la fonction $\mathbb{1}_{[-1,1]}/2$. Donc, en notant λ la mesure de Lebesgue de $\mathbb{R}$, on a

$$\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), \quad \mathbf{P}(X \in B) = P_X(B) = \frac{1}{2}\int_B \mathbb{1}_{[-1,1]}(x)\ \lambda(dx)$$
$$= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_B(x)\ \mathbb{1}_{[-1,1]}(x)\ \lambda(dx) = \frac{1}{2}\ \lambda(B \cap [-1,1]).$$

On en déduit

$$\mathbf{P}(|X| \leq 1/2) = \mathbf{P}(X \in [-1/2,1/2]) = \frac{1}{2}\ \lambda([-1/2,1/2]) = \frac{1}{2}.$$

2) Les variables aléatoires $U : (\Omega,\mathcal{F}) \to (E_1,\mathcal{E}_1)$ et $V : (\Omega,\mathcal{F}) \to (E_2,\mathcal{E}_2)$ sont dites indépendantes si

$$\forall A \in \mathcal{E}_1, \forall B \in \mathcal{E}_2, \quad \mathbf{P}(U \in A, V \in B) = \mathbf{P}(U \in A)\ \mathbf{P}(V \in B).$$

Ceci peut s'écrire de manière équivalente,

$$\forall A \in \mathcal{E}_1, \forall B \in \mathcal{E}_2, \quad \mathbf{P}\big(U^{-1}(A) \cap V^{-1}(B)\big) = \mathbf{P}(U^{-1}(A))\ \mathbf{P}(V^{-1}(B))$$

ou encore

$$\forall A \in \mathcal{E}_1, \forall B \in \mathcal{E}_2, \quad P_{(U,V)}(A \times B) = P_U(A)\ P_V(B).$$

La question ne précise pas les ensembles d'arrivée des variables U et V. On accepte les réponses où $E_1 = E_2 = \mathbb{R}$ et $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_2 = \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

3) Comme les variables X et Y sont indépendantes, la loi du couple (X, Y) ($P_{(X,Y)} = P_X \otimes P_Y$) admet pour densité la fonction $f_{(X,Y)} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f_{(X,Y)}(x, y) = f_X(x)\ f_Y(y) = \left(\frac{1}{2}\ \mathbb{1}_{[-1,1]}(x)\right)\left(\frac{1}{2}\ \mathbb{1}_{[-1,1]}(y)\right).$$

Ainsi, en notant $\lambda^{(2)}$ la mesure de Lebesgue de $\mathbb{R}^2$, pour tout $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$, on a

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\big((X,Y) \in B\big) &= \int_B f_{(X,Y)}(x,y)\ \lambda^{(2)}(dx, dy) \\ &= \frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}^2} \mathbb{1}_B(x,y)\ \mathbb{1}_{[-1,1]}(x)\ \mathbb{1}_{[-1,1]}(y)\ \lambda^{(2)}(dx, dy) \\ &= \frac{1}{4}\ \lambda^{(2)}\big(B \cap ([-1,1] \times [-1,1])\big).\end{aligned}$$

4) D'après 3), on a

$$\mathbf{P}\big((X,Y) \in \mathcal{U}\big) = \frac{1}{4}\ \lambda^{(2)}\big(\mathcal{U}\big) = \frac{1}{4}\ \mathrm{Aire}\big(\mathcal{U}\big) = \frac{\pi}{4}.$$

$Z = \mathbb{1}_{(X,Y)\in\mathcal{U}}$ est une fonction de $(\Omega, \mathcal{F})$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})$, qui est mesurable (puisque (X, Y) est mesurable de $(\Omega, \mathcal{F})$ dans $(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2))$. C'est donc une variable aléatoire, qui prend ses valeurs dans $\{0, 1\}$.
La loi de Z vérifie

$$\mathbf{P}(Z = 1) = \mathbf{P}\big((X,Y) \in \mathcal{U}\big) = \frac{\pi}{4} \quad \text{et} \quad \mathbf{P}(Z = 0) = 1 - \mathbf{P}(Z = 1) = 1 - \frac{\pi}{4}.$$

Z est donc une variable de Bernoulli de paramètre $\pi/4$.

5) (a) Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ des variables aléatoires dans $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, indépendantes et de même loi.
On pose $\mu = \mathbf{E}[X_1]$ et $\sigma^2 = \mathrm{Var}(X_1) < +\infty$.
En posant $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$, la variable aléatoire S_n/n converge presque sûrement, en probabilité et dans L^2 vers μ, lorsque n tend vers l'infini.

(b) Pour tout $n \geq 1$, la proportion recherchée est

$$\frac{1}{n}\ \#\{k \leq n : (X_k, Y_k) \in \mathcal{U}\} = \frac{1}{n}\ \#\{k \leq n : Z_k = 1\} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} Z_k.$$

Comme les Z_k sont i.i.d. et dans L^2, la loi forte des grands nombres implique que cette proportion converge presque sûrement vers $\mathbf{E}[Z_1] = \mathbf{P}(Z_1 \in \mathcal{U}) = \pi/4$.
Cette convergence a également lieu dans L^2 et en probabilité.

(c) Les conditions d'application du Théorème Central Limite sont vérifiées : les $(Z_n)_n$ sont i.i.d. et dans L^2.
En conclusion, en remarquant que $\pi/4 = \mathbf{E}[Z_1]$, la variable $\sqrt{n}(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} Z_n - \frac{\pi}{4})$ converge en loi vers une variable aléatoire de loi normale $\mathcal{N}(0,\sigma^2)$ avec $\sigma^2 = (\pi/4)(1-\pi/4)$.

Exercice 2 - Convergence d'une série de variables aléatoires

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite bornée des réels positifs et dans l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, soient $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ des variables aléatoires indépendantes telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbf{P}(X_n = a_n) = \mathbf{P}(X_n = -a_n) = 1/2.$$

On pose $M = \sup_{n\in\mathbb{N}^*} a_n$.

1) (a) Soit $\varphi_n : t \mapsto \mathbf{E}[e^{itS_n}]$ la fonction caractéristique de $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$ pour $n \geq 1$.

Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\varphi_n(t) = \prod_{k=1}^{n} \cos(t\ a_k)$.

(b) A quelle condition sur φ_n , la variable S_n converge-t-elle en loi, lorsque n tend vers l'infini ?

2) On suppose que S_n converge en loi, lorsque $n \to \infty$.

(a) Montrer que pour $t \in \left[0, \frac{\pi}{4M}\right]$, $\ln\cos(t\ a_n)$ tend vers 0, lorsque $n \to \infty$.

(b) En déduire que a_n tend vers 0, lorsque $n \to \infty$.

(c) Montrer que la série $\sum a_n^2$ converge.

3) Dans cette question, on suppose que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = +\infty$. On pose $\alpha_n = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2}$.

(a) Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\ln\varphi_n(t/\alpha_n)$ tend vers $-t^2/2$ lorsque $n \to \infty$.

(b) En déduire que $\frac{1}{\alpha_n}\sum_{k=1}^{n} X_k$ converge en loi. Déterminer la loi limite.

1) (a) Pour tout $t \in \mathbb{R}$, en utilisant l'indépendance des X_k, on a

$$\begin{aligned}\varphi_n(t) &= \mathbf{E}\left[e^{it\sum_{k\leq n} X_k}\right] \\ &= \mathbf{E}\left[\prod_{k=1}^{n} e^{itX_k}\right] = \prod_{k=1}^{n} \mathbf{E}\left[e^{itX_k}\right].\end{aligned}$$

Or, $\mathbf{E}\left[e^{itX_k}\right] = \frac{1}{2}\left(e^{ita_k} + e^{-ita_k}\right) = \cos(t\ a_k)$. Donc $\varphi_n(t) = \prod_{k=1}^{n} \cos(t\ a_k)$.

(b) On a vu en cours que S_n converge en loi si et seulement si φ_n converge simplement vers une fonction caractéristique, c'est-à-dire si :

— pour tout $t \in \mathbb{R}$ fixé, $\varphi_n(t)$ converge vers une limite $\varphi(t)$ lorsque n tend vers l'infini

— et que φ est la fonction caractéristique d'une mesure de probabilité.

2) (a) Pour tout $t \in \left[0, \frac{\pi}{4M}\right]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $(t\ a_n) \in [0, \pi/4]$.
On en déduit que $\cos(t\ a_n) \geq 1/2$ et $\ln \cos(t\ a_n)$ est bien défini.
Comme S_n converge en loi, $\varphi_n(t)$ admet une limite finie, qui est strictement positive, lorsque $n \to \infty$.
Donc $\ln \varphi_n(t) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln \cos(t\ a_k)$ admet une limite finie, lorsque $n \to \infty$.
Cela implique que $\ln \cos(t\ a_n) = \ln \varphi_n(t) - \ln \varphi_{n-1}(t)$ tend vers 0, lorsque $n \to \infty$.

(b) D'après (a), pour tout $t \in \left[0, \frac{\pi}{4M}\right]$, $\cos(t\ a_n)$ tend vers 1, lorsque $n \to \infty$.
En appliquant la fonction arccos ($= \cos^{-1}$), puisque le fait que $(t\ a_n) \in [0, \pi/4]$ implique $\arccos(\cos(t\ a_n)) = t\ a_n$, on obtient : $t\ a_n$ tend vers 0.
Donc a_n tend vers 0, lorsque $n \to \infty$.

(c) On fixe $t \in]0, \pi/(4M)]$. La série $\displaystyle\sum_n \ln \cos(t\ a_n)$ converge.
Or, on a l'équivalence $\cos(t\ a_n) \sim 1 - \dfrac{t^2 a_n^2}{2}$, puisque $a_n \to 0$.
En utilisant $\ln(1 + x) \sim x$ au voisinage de 0, on en déduit l'équivalence

$$\ln \cos(t\ a_n) \sim -\frac{t^2 a_n^2}{2}.$$

Comme la série $\displaystyle\sum_n \ln \cos(t\ a_n)$ converge, on conclut que la série $\displaystyle\sum_n a_n^2$ converge.
Remarque : on peut également raisonner avec des développements limités, à la place des équivalents.

3) (a) Par hypothèse, on a $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = +\infty$.
Donc pour $t \in \mathbb{R}$ fixé, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq n_0, \quad t/\alpha_n \in \left[-\frac{\pi}{4M}, \frac{\pi}{4M}\right].$$

On a alors

$$\begin{aligned} \ln \varphi_n(t/\alpha_n) &= \sum_{k=1}^{n} \ln \cos(t\ a_k/\alpha_n) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \ln \left[1 + (\cos(t\ a_k/\alpha_n) - 1)\right] \end{aligned}$$

Or, pour tout $k \leq n$, $\cos(t\ a_k/\alpha_n) - 1 = -\dfrac{t^2 a_k^2}{2\alpha_n^2} + o\left(\dfrac{t^2 a_k^2}{\alpha_n^2}\right)$.

Donc

$$\begin{aligned}
\ln \varphi_n(t/\alpha_n) &= \sum_{k=1}^{n} \left[\left(-\frac{t^2 a_k^2}{2\alpha_n^2} \right) + t^2 \ o\left(\frac{a_k^2}{\alpha_n^2} \right) \right] \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left(-\frac{t^2 a_k^2}{2\alpha_n^2} \right) + t^2 \ o\left(\frac{\sum_{k=1}^{n} a_k^2}{\alpha_n^2} \right) \\
&= -\frac{t^2}{2} + o(1).
\end{aligned}$$

Remarque : Pour justifier rigoureusement les développements ci-dessus (le o dépend de k), il faudrait considérer la fonction $f : x \mapsto \ln\cos(x)$ et utiliser une formule des accroissements finis à l'ordre 3 (ou formule de Taylor avec reste intégral ou inégalité de Taylor-Lagrange)

$$f\left(t \ \frac{a_k}{a_n} \right) = f(0) + \frac{f''(0)}{2} \frac{t^2 \ a_k^2}{\alpha_n^2} + \frac{t^3 \ a_k^3}{6\alpha_n^3} f^{(3)}(c_{k,n})$$

où $0 < c_{k,n} < t \ a_k/\alpha_n$, (notons que $f'(0) = 0$) et remarquer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k^3}{6\alpha_n^3} f^{(3)}(c_{k,n})$ tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini.

(b) Pour $t \in \mathbb{R}$, comme $\ln \varphi_n(t/\alpha_n)$ tend vers $-t^2/2$ lorsque $n \to \infty$, $\varphi_n(t/\alpha_n)$ tend vers $e^{-t^2/2}$ lorsque $n \to \infty$.
Or, $t \mapsto e^{-t^2/2}$ est la fonction caractéristique de la loi $\mathcal{N}(0,1)$.
On en déduit que la v.a. $\displaystyle\frac{1}{\alpha_n}\sum_{k=1}^{n} X_k$, dont la fonction caractéristique est la fonction $t \mapsto \varphi_n(t/\alpha_n)$, converge en loi vers une variable aléatoire de loi normale $\mathcal{N}(0,1)$.

Exercice 3 - Inégalité de Kolmogorov

Dans l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires réelles indépendantes, de moyenne nulle et de variance finie.

On pose $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ et on fixe $x \geq 0$. On considère les événements disjoints $A_1 = \{|S_1| \geq x\}$ et $A_k = \displaystyle\bigcap_{j<k} \{|S_j| < x\} \cap \{|S_k| \geq x\}$, pour $2 \leq k \leq n$.

1) Déterminer $\displaystyle\bigcup_{k=1}^{n} A_k$ et montrer que $\mathbf{E}[(S_n)^2] \geq \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \int_{A_k} (S_n)^2 . d\mathbf{P}$.

2) Montrer que pour tout $1 \leq k \leq n$, $\displaystyle\int_{A_k} (S_n)^2 . d\mathbf{P} \geq \int_{A_k} (S_k)^2 . d\mathbf{P}$.
Indication : On pourra utiliser une décomposition $\mathbf{E}[(S_n)^2 \mathbb{1}_{A_k}] = \mathbf{E}[(S_k + (S_n - S_k))^2 \mathbb{1}_{A_k}]$.

3) En justifiant l'inégalité $\mathbf{P}(A_k) \leq x^{-2} \displaystyle\int_{A_k} (S_k)^2 \ d\mathbf{P}$, montrer que $\mathbf{E}[(S_n)^2] \geq x^2 \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}(A_k)$.

4) En déduire l'inégalité de Kolmogorov

$$\mathbf{P}\left(\max_{1 \leq k \leq n} |S_k| \geq x \right) \leq \frac{1}{x^2} \sum_{1 \leq k \leq n} Var(X_k).$$

5) *En remplaçant la famille finie de variables aléatoires indépendantes $X_1, \dots, X_n$ par une famille dénombrable de variables aléatoires indépendantes $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, le raisonnement précédent permet-il de prouver l'inégalité de 4) en remplaçant n par ∞ ?*
On justifiera soigneusement la réponse.

1) Les A_k (pour $1 \leq k \leq n$) sont deux à deux disjoints et

$$\bigcup_{k=1}^n A_k = \{\max_{1\leq k\leq n} |S_k| \geq x\}.$$

Comme les A_k (pour $1 \leq k \leq n$) sont deux à deux disjoints, on a

$$\mathbf{E}[(S_n)^2] = \int_\Omega (S_n)^2 \; d\mathbf{P} \geq \int_{\bigcup_k A_k} (S_n)^2 \; d\mathbf{P} = \sum_{k=1}^n \int_{A_k} (S_n)^2 \; d\mathbf{P}.$$

2) On suit l'indication de l'énoncé :

$$\begin{aligned}\int_{A_k} (S_n)^2.d\mathbf{P} = \mathbf{E}[(S_n)^2 \mathbb{1}_{A_k}] &= \mathbf{E}[(S_k + (S_n - S_k))^2 \mathbb{1}_{A_k}] \\ &= \mathbf{E}[(S_k)^2 + 2S_k(S_n - S_k) + (S_n - S_k)^2 \mathbb{1}_{A_k}] \\ &\geq \mathbf{E}[(S_k)^2 \mathbb{1}_{A_k}] + 2\; \mathbf{E}[S_k(S_n - S_k)\mathbb{1}_{A_k}].\end{aligned}$$

Or, $\mathbf{E}[S_k(S_n - S_k)\mathbb{1}_{A_k}] = \mathbf{E}[S_k \mathbb{1}_{A_k}]\; \mathbf{E}[S_n - S_k] = 0$, puisque $S_n - S_k$ est indépendant de $\sigma(X_1, \dots, X_k)$ donc de $S_k \mathbb{1}_{A_k}$ et $\mathbf{E}[S_n - S_k] = 0$ puisque les variables sont centrées.
On a donc montré que

$$\int_{A_k} (S_n)^2.d\mathbf{P} \geq \mathbf{E}[(S_k)^2 \mathbb{1}_{A_k}] = \int_{A_k} (S_k)^2.d\mathbf{P}.$$

3) En majorant S_k par x sur A_k, on a

$$\int_{A_k} (S_k)^2 \; d\mathbf{P} \geq x^2 \int_{A_k} d\mathbf{P} = x^2 \; \mathbf{P}(A_k).$$

En rassemblant les inégalités ci-dessus, on trouve

$$\mathbf{E}[(S_n)^2] \geq \sum_{k=1}^n \int_{A_k} (S_n)^2 \; d\mathbf{P} \geq \sum_{k=1}^n \mathbf{E}[(S_k)^2 \mathbb{1}_{A_k}] \geq \sum_{k=1}^n x^2 \; \mathbf{P}(A_k).$$

4) En utilisant le fait que $\bigcup_{k=1}^n A_k = \{\max_{1\leq k\leq n} |S_k| \geq x\}$ et que le fait que les A_k sont 2 à 2 disjoints, on a

$$\mathbf{P}\left(\max_{1\leq k\leq n} |S_k| \geq x\right) = \sum_{k=1}^n \mathbf{P}(A_k),$$

d'où on tire

$$\mathbf{E}[(S_n)^2] \geq x^2 \; \mathbf{P}\left(\max_{1\leq k\leq n} |S_k| \geq x\right).$$

Or, puisque les $X_1, \ldots, X_n$ sont indépendants et centrées, on a

$$\mathbf{E}[(S_n)^2] = \mathrm{Var}(S_n) = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Var}(X_k),$$

ce qui permet de conclure

$$\mathbf{P}\left(\max_{1\leq k\leq n} |S_k| \geq x\right) \leq \frac{1}{x^2}\, \mathbf{E}[(S_n)^2] = \frac{1}{x^2} \sum_{1\leq k\leq n} \mathrm{Var}(X_k).$$

5) Deux stratégies sont envisageables pour démontrer l'inégalité pour une famille dénombrable (et non plus simplement finie) de variables aléatoires $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ indépendantes, de moyenne nulle et de variance finie :
— soit calquer le raisonnement dans cette nouvelle situation,
— soit faire tendre n vers l'infini dans l'inégalité obtenue au 4) pour une famille finie.

Examinons la 1ère stratégie.
On peut définir les ensembles A_k de la même manière, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.
Dans ce cas, $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} A_n = \{\max_{n\in\mathbb{N}^*} |S_n| \geq x\}$ et

$$\mathbf{P}\left(\max_{n\in\mathbb{N}^*} |S_n| \geq x\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}(A_n),$$

Comme ci-dessus, on a toujours

$$\mathbf{E}[(S_n)^2] \geq \sum_{k=1}^{n} \int_{A_k} (S_n)^2 \, d\mathbf{P} \geq \sum_{k=1}^{n} \mathbf{E}[(S_k)^2 \mathbb{1}_{A_k}] \geq x^2 \sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}(A_k).$$

Mais k doit rester inférieur à n dans ces inégalités et on ne peut pas comparer

$$\mathbf{E}[(S_n)^2] \quad \text{et} \quad x^2\, \mathbf{P}\left(\max_{n\in\mathbb{N}^*} |S_n| \geq x\right) = x^2 \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}(A_n).$$

Donc on ne peut pas appliquer directement le raisonnement précédent en remplaçant n par ∞.

La 2ème stratégie consiste à faire tendre n vers ∞ dans les inégalités précédentes.
En visant l'efficacité, on examine l'inégalité obtenue au 4).
La suite d'événements $\left(\{\max_{1\leq k\leq n} |S_k| \geq x\}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante. Donc $\mathbf{P}\left(\max_{1\leq k\leq n} |S_k| \geq x\right)$ croît vers $\mathbf{P}\left(\max_{n\in\mathbb{N}^*} |S_n| \geq x\right)$.
D'un autre côté, on a $\displaystyle\frac{1}{x^2} \sum_{1\leq k\leq n} \mathrm{Var}(X_k) \leq \frac{1}{x^2} \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{Var}(X_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
On en déduit

$$\mathbf{P}\left(\max_{n\in\mathbb{N}^*} |S_n| \geq x\right) \leq \frac{1}{x^2} \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{Var}(X_n),$$

qui est l'inégalité demandée.