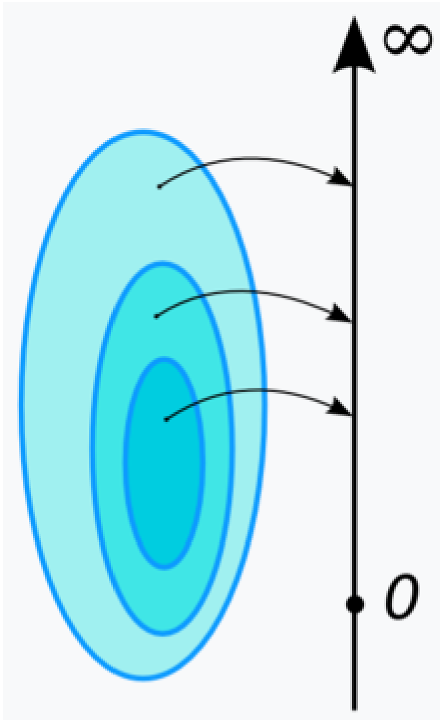
維基百科

测度

维基百科，自由的百科全书

测度（英語：Measure）在数学分析里是指一个函数，它对一个给定集合的某些子集指定一个数。感官上，测度的概念相当于长度、面积、体积等。一个特别重要的例子是欧氏空间上的勒贝格测度，它把欧氏几何上传统的诸如长度、面积和体积等概念赋予 n 维欧式空间 $\mathbf{R}^n$ 。例如，实数区间 [0, 1] 上的勒贝格测度就是它显而易见的长度，即 1。



通俗的说，测度把每个集合映射到非负实数来规定这个集合的大小：空集的测度是0；集合变大时测度至少不会减小（因为要加上变大的部分的测度，而它是非负的）。

传统的积分是在区间上进行的，后来人们希望把积分推广到任意的集合上，就发展出测度的概念，它在数学分析和概率论有重要的地位。

测度论是实分析的一个分支，研究对象有σ代数、测度、可测函数和积分，其重要性在概率论和统计学中都有所体现。

目录

定义

X是個集合，定義在 X上的另一集合 $\mathcal{A}$ ，$\mathcal{A}$中的元素是 X的子集合，而且是一個σ-代數，测度 μ（详细的说法是**可數可加的正測度**）是個定義在 $\mathcal{A}$ 上的函数，于$[0, \infty]$中取值，且满足以下性质：

- **非負性質**：對所有的 $E \in \mathcal{A}$，有 $\mu(E) \geq 0$，

- **空集合的测度为零**：$\mu(\varnothing)=0$，
- **可数可加性**，或称 σ**-可加性**：若 $\{E_k\}_{k=1}^{\infty}$ 为 $\mathcal{A}$ 中可数个两两不相交元素的集合，換句話講，對所有 $E_i, E_j \in \{E_k\}_{k=1}^{\infty}$，$i \neq j$ 有 $E_i \cap E_j = \varnothing$，則可得

$$\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i)。$$

这样的三元组$(X, \mathcal{A}, \mu)$称为一个**测度空间**，而$\mathcal{A}$ 中的元素称为这个空间中的**可测集合**。

性质

下面的一些性质可从测度的定义导出：

单调性

测度μ 的单调性：若E_1 和E_2 为可测集，而且$E_1 \subseteq E_2$，则$\mu(E_1) \leq \mu(E_2)$。

可数个可测集的并集的测度

若$E_1, E_2, E_3 \cdots$为可测集（不必是两两不交的），则集合E_n 的并集是可测的，且有如下不等式（「次可列可加性」）：

$$\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i)$$

如果还满足并且对于所有的n ，$E_n \subseteq E_{n+1}$ ，则如下极限式成立：

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \lim_{i\to\infty} \mu(E_i).$$

可数个可测集的交集的测度

若$E_1, E_2, \cdots$为可测集，并且对于所有的n ，$E_{n+1} \subseteq E_n$ ，则E_n 的交集是可测的。进一步说，如果至少一个E_n 的测度有限，则有极限：

$$\mu(\bigcap_{i=1}^{\infty} E_i) = \lim_{i\to\infty} \mu(E_i)$$

如若不假设至少一个E_n 的测度有限，则上述性质一般不成立。例如对于每一个$n \in \mathbb{N}$，令

$$E_n = [n, \infty) \subseteq \mathbb{R}$$

这裡，全部集合都具有无限测度，但它们的交集是空集。

σ-有限测度

如果$\mu(X)$ 是一个有限实数（而不是∞），则测度空间$(X, \mathcal{A}, \mu)$称为**有限测度空间**。非零的有限测度与概率测度类似，因为可以通过乘上比例因子$\frac{1}{\mu(X)}$进行归一化。如果X 可以表示为可数个可测集的并集，而且这些可测集的测度均有限，则该测度空间称为**σ-有限测度空间**。如果测度空间中的一个集合A 可以表示为可数个可测集的并集，而且这些可测集的测度均有限，就称A **具有σ-有限测度**。

作为例子，实数集赋以标准勒贝格测度是σ-有限的，但不是有限的。为说明之，只要考虑闭区间族$[k, k+1]$，k取遍所有的整数；这样的区间共有可数多个，每一个的测度为1，而且并起来就是整个实数集。作为另一个例子，取实数集上的计数测度，即对实数集的每个有限子集，都把元素个数作为它的测度，至于无限子集的测度则令为∞。这样的测度空间就不是σ-有限的，因为任何有限测度集只含有有限个点，从而，覆盖整个实数轴需要不可数个有限测度集。σ-有限的测度空间有些很好的性质；从这点上说，σ-有限性可以类比于拓扑空间的可分性。

完备性

对于一个可测集N，若$\mu(N) = 0$ 成立，则称为**零测集**，其子集称为**可去集**。

一个可去集未必是可测的，但零测集一定是可去集。

如果所有的可去集都可测，则称该测度为**完备测度**。

一个测度可以按如下的方式延拓为完备测度：

考虑X的所有与某个可测集E仅差一个可去集的子集F，可得到E与F的对称差包含于一个零测集中。

由这些子集F生成的σ代数，并定义$\mu(F) = \mu(E)$，所得到的测度即为完备测度。

例子

下列是一些测度的例子（顺序与重要性无关）。

- **计数测度**　定义为$\mu(S) = S$ 的「元素个数」。
- **一维勒贝格测度**是定义在$\mathbb{R}$的一个含所有区间的σ代数上的、完备的、平移不变的、满足$\mu([0, 1]) = 1$ 的唯一测度。
- **Circular angle测度**是旋转不变的。
- 局部紧拓扑群上的**哈尔测度**是勒贝格测度的一种推广，而且也有类似的刻划。
- **恒零测度**定义为$\mu(S) = 0$ ，对任意的S 。
- 每一个概率空间都有一个测度，它对全空间取值为1（于是其值全部落到单位区间[0,1]中）。这就是所谓**概率测度**。见概率论公理。

其它例子，包括：狄拉克测度、波莱尔测度、若尔当测度、遍历测度、欧拉测度、高斯测度、贝尔测度、拉东测度。

相关条目

- 外测度（Outer measure）
- 幾乎處處（Almost everywhere）
- 勒贝格测度（Lebesgue measure）
- 勒貝格積分
- 法圖引理(Fatou's lemma)
- 富比尼定理(Fubini's theorem)
- 可測基數

参考文献

- R. M. Dudley, 2002. *Real Analysis and Probability*. Cambridge University Press.
- D. H. Fremlin, 2000. *Measure Theory (https://web.archive.org/web/20070206212033/http://www.essex.ac.uk/maths/staff/fremlin/mt.htm)*. Torres Fremlin.
- Paul Halmos, 1950. *Measure theory*. Van Nostrand and Co.
- M. E. Munroe, 1953. *Introduction to Measure and Integration*. Addison Wesley.
- Shilov, G. E., and Gurevich, B. L., 1978. *Integral, Measure, and Derivative: A Unified Approach*, Richard A. Silverman, trans. Dover Publications. ISBN 0-486-63519-8. Emphasizes the Daniell integral.

外部链接

- Hazewinkel, Michiel (编), Measure, 数学百科全书, Springer, 2001, ISBN 978-1-55608-010-4
- Tutorial: Measure Theory for Dummies（为初学者准备的测度论教学） (https://vannevar.ece.uw.edu/techsite/papers/documents/UWEETR-2006-0008.pdf) （页面存档备份 (https://web.archive.org/web/20210117205435/https://vannevar.ece.uw.edu/techsite/papers/documents/UWEETR-2006-0008.pdf)，存于互联网档案馆）