Convergence, Intégration et Probabilités

Énoncés des travaux dirigés

John Cagnol, Lionel Gabet, Erick Herbin, Pauline Lafitte, Alexandre Richard

2019-2020

Table des matières

Séance I : Topologie des espaces métriques et espaces vectoriels normés

NB: Les questions précédées du symbole $*$ ou $**$ sont facultatives et demandent une compréhension et/ou des techniques qui vont au-delà de ce qui est exigé pour valider l'examen. Elles peuvent être passées et le cas échéant, admises pour répondre au reste de l'exercice.

A) Objectifs de la séance

A la fin de cette séance,

- Je suis capable de définir une topologie, des ouverts, des fermés, l'adhérence d'un ensemble, un ensemble compact;
- Je sais formaliser la notion de convergence et étudier la convergence d'une suite et la continuité d'une fonction;
- Je suis capable de déterminer la limite supérieure (limite inférieure) d'une suite et d'une fonction;
- Je sais ce qu'est une suite de Cauchy et la complétude d'un espace métrique;
- Je suis capable de prouver qu'une fonction est une norme d'un espace vectoriel ou une distance sur un ensemble;
- Je suis capable de déterminer les boules d'une distance donnée, comprendre les démonstrations par inclusions réciproques et les équivalences de normes.

B) Pour se familiariser avec les concepts (à traiter avant les séances de TD)

Les questions I.1 et I.2 sont à traiter avant la première séance de TD. Les corrigés sont disponibles sur internet.

La topologie est une branche des mathématiques fondamentale au développement de l'analyse moderne. Il est donc intéressant d'en connaître quelques principes. De plus, la ressemblance entre les axiomes de la topologie et ceux de la théorie de la mesure la rend incontournable dans ce cours.

Question I.1 (Exemples de topologie)

Q. I.1.1 Soit $X = \{a, b, c\}$. Parmi les ensembles suivants, lesquels sont des topologies?

1. $\{\emptyset, \{a, b, c\}\}$
2. $\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$
3. $\{\emptyset, \{a, b\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$
4. $\{\emptyset, \{a\}, \{c\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}\}$

Q. I.1.2 Soit $X = \mathbb{R}$ et T la topologie usuelle sur X. Parmi les ensembles suivants, lesquels sont ouverts?

1. $]0; 4[$
2. $]-\infty; 4]$
3. $]-\infty; 0[\cup]2; 4[$
4. $\{0\}$

Q. I.1.3 Soit $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ et $T = \{\emptyset, \{1, 2\}, \{5\}, \{1, 2, 5\}, \{1, 2, 3, 4\}, X\}$ une topologie sur X. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite définie par $u_n = \frac{3+(-1)^n}{2}$.

1. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle vers 1?
2. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle vers 2?
3. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle vers 3?
4. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle vers 4?
5. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle vers 5?

Question I.2 (Complétude dans $\mathbb{R}$)

Q. I.2.1 Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $u_n = \frac{1}{n}$ est une suite de Cauchy dans $\mathbb{R}$.

C) Exercices

Exercice I.1 (Métriques et limites de $\mathbb{R}^n$)
Les questions sont indépendantes les unes des autres.
E. I.1.1 Soit d_E la distance euclidienne dans $\mathbb{R}^d$. Pour $a \in \mathbb{R}^d$, on définit l'application $N_a : x \mapsto d_E(a, x)$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}^d$. Pour quel(s) a l'application N_a est-elle une norme sur $\mathbb{R}^d$?

E. I.1.2 On définit l'application $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $d(x, y) = |e^{-x} - e^{-y}|$, pour tous $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Montrer que d est une distance sur $\mathbb{R}$.

E. I.1.3 Pour $x = (x_1, x_2)$ et $y = (y_1, y_2)$ dans $\mathbb{R}^2$, on définit

1. $d(x, y) = |x_1 - y_1|$
2. $d(x, y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$
3. $d(x, y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|^2$
4. $d(x, y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| + 1$

Parmi ces fonctions, dire celles qui sont des distances.

E. I.1.4 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Vérifier les propriétés suivantes:

$$
\begin{aligned}
(i)\ & \limsup_{n\to+\infty} u_n < l \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall k \geq n,\ u_k < l \\
(ii)\ & \exists n \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall k \geq n,\ u_k < l \Rightarrow \limsup_{n\to+\infty} u_n \leq l \\
(iii)\ & \limsup_{n\to+\infty} u_n > l \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ \exists k \geq n \text{ tel que } u_k > l \\
(iv)\ & \forall n \in \mathbb{N},\ \exists k \geq n \text{ tel que } u_k > l \Rightarrow \limsup_{n\to+\infty} u_n \geq l.
\end{aligned}
$$

Écrire les propriétés correspondantes pour la $\liminf$.

Exercice I.2 (Un peu de topologie sur $\mathbb{R}^n$)
Les questions sont indépendantes les unes des autres.
E. I.2.1 Dans $\mathbb{R}^n$, on note $B(x, r)$ la boule euclidienne de centre x et de rayon $r > 0$. On définit la collection d'ensembles suivante:

$$\mathcal{O} = \{O \subset \mathbb{R}^n : \ \forall x \in O,\ \exists r > 0 \text{ tel que } B(x, r) \subset O\}\ .$$

Montrer que $\mathcal{O}$ est une topologie sur $\mathbb{R}^n$ (il s'agit de la topologie usuelle de $\mathbb{R}^n$).

E. I.2.2 Pour tous $x, y \in \mathbb{R}^2$, on définit

$$\delta(x, y) = \begin{cases} \|x - y\| & \text{si } x,\ y \text{ et } 0 \text{ sont alignés} \\ \|x\| + \|y\| & \text{sinon.} \end{cases}$$

(a) Montrer que δ est une distance (parfois appelée distance SNCF, pourquoi?).

(b) Décrire géométriquement les boules ouvertes.

(c) Montrer que tout ouvert pour la topologie usuelle est aussi ouvert pour la topologie de δ (commencer par une comparaison des boules ouvertes). La réciproque est-elle vraie? On dit que la topologie de δ est *plus fine* que la topologie usuelle.

Exercice I.3 (Compacité)
Les questions sont indépendantes.

E. I.3.1 Soient $(X, \mathcal{O})$ et $(X', \mathcal{O}')$ deux espaces topologiques séparés, et $f : X \to X'$ continue.

(a) L'image réciproque d'un compact par f est-elle compacte?

(b) L'image directe d'un compact par f est-elle compacte?

E. I.3.2 Soit $(X, \mathcal{O})$ un espace topologique séparé. Soit K un compact de X et $x \in X \setminus K$. Montrer qu'il existe deux ouverts U, U' de X tels que $K \subset U$, $\{x\} \subset U'$ et $U \cap U' = \emptyset$. *[Indication: par séparation, on pourra considérer pour tout $k \in K$ des ouverts U_k et V_k tels que $k \in U_k$, $x \in V_k$ et $U_k \cap V_k = \emptyset$.]*
Etendre au cas où K et K' sont deux compacts disjoints.

E. I.3.3 Soit (X, d) un espace métrique. Démontrer le théorème des compacts emboîtés: si $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante de compacts non vides de X, alors $\cap_{n\in\mathbb{N}} K_n \neq \emptyset$. Montrer que tout ouvert qui contient $\cap_{n\in\mathbb{N}} K_n$ contient tous les K_n à partir d'un certain rang.

La complétude est une propriété très utile car les espaces complets possèdent de nombreuses propriétés intéressantes : critère de Cauchy, absolue convergence, convergence normale, théorèmes de point fixe, théorème de prolongement, projection...

Exercice I.4 (Complétude et quelques applications)

E. I.4.1 Prélude (exemple simple d'espace non-complet): on considère la distance d sur $\mathbb{R}$ définie à la question E.I.1.2. Montrer que la suite des entiers naturels (i.e. $u_n = n, \forall n \in \mathbb{N}$) est de Cauchy pour cette distance. L'espace métrique $(\mathbb{R}, d)$ est-il complet?

Soit E un espace vectoriel normé complet.

***E. I.4.2** Démontrer que toute série de fonctions à valeurs dans E qui converge normalement converge uniformément.

***E. I.4.3** Démontrer que l'ensemble des fonctions continues de $[a, b]$ dans E est complet pour la norme infinie.

E. I.4.4 En déduire la continuité sur $\mathbb{R}$ de

$$x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{n^2}.$$

Exercice I.5 (Espace des fonctions continues)
On considère $\mathcal{C}$ l'espace vectoriel des fonctions continues de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$, ainsi que les trois normes suivantes: pour $f \in \mathcal{C}$,

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|, \quad \|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)|dx, \quad \|f\|_2 = \left(\int_0^1 |f(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

E. I.5.1 Comparer ces trois normes.

E. I.5.2 Soit $E_0 = \{f \in \mathcal{C} : f(0) = 0\}$. Déterminer l'adhérence de E_0 pour chacune des normes proposées.

***E. I.5.3** Soit $E_1 = \{f \in \mathcal{C} : f \text{ est dérivable}\}$ et $E_P = \{f \in \mathcal{C} : f \text{ est polynomiale sur } [0, 1]\}$. Déterminer l'intérieur de E_1 et E_P pour $\|\cdot\|_\infty$.

D) Approfondissement

Exercice I.6 (Topologie)
Les deux questions sont indépendantes.
***E. I.6.1** Soient X et Y deux espaces topologiques et f une fonction de X vers Y.

(a) Montrer que si f est continue alors pour tout ensemble $A \subset X$, $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$. On pourra vérifier puis utiliser la caractérisation de la continuité par les fermés: f est continue sssi pour tout F fermé de Y, $f^{-1}(F)$ est un fermé de X.

On souhaite démontrer la réciproque. Dans toute la suite on suppose donc que pour tout ensemble $A \subset X$, $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$.

(b) En supposant que l'ensemble $f^{-1}\left(\overline{f(A)}\right)$ n'est pas fermé, montrer qu'on aboutit à une contradiction.

(c) Soit B un fermé de Y. Montrer qu'il existe un $A \subset X$ tel que $\overline{f(A)} \subset B$ et $f^{-1}(B) = f^{-1}\left(\overline{f(A)}\right)$. En déduire la continuité de f.

E. I.6.2 Soit (X, d) un espace métrique. Soit $F \subset X$ un fermé non-vide. Pour tout $x \in X$, on note $d(x, F) = \inf_{y \in F} d(x, y)$.

(a) On souhaite étudier la continuité de $x \mapsto d(x, F)$. Quelles sont les topologies utilisées sur les espaces de départ et d'arrivée?

(b) Montrer que $x \mapsto d(x, F)$ est une application continue et que $d(x, F) = 0 \Leftrightarrow x \in F$.

Exercice I.7 (De l'intérêt des $\limsup$ **et** $\liminf$**)**
Soit $a > 0$ et $S_n = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{a+k}{n}\right)^n$. On cherche à calculer $\lim_{n \to +\infty} S_n$.
E. I.7.1 Remarquer que pour tous $n \geq 1$ et $x > 0$ tels que $1 + \frac{x}{n} > 0$, $(1 + \frac{x}{n})^n \leq e^x$. Montrer que $\limsup_{n \to +\infty} S_n \leq \frac{e^{a+1}}{e-1}$.

E. I.7.2 Montrer maintenant que pour tout $k \in \mathbb{N}$ fixé et pour tout $n > k$, $S_n \geq \sum_{j=0}^{k} (1 + \frac{a-j}{n})^n$. En déduire une inégalité sur $\liminf_{n \to +\infty} S_n$ et conclure.

Exercice I.8 (Complétude et quelques applications (suite))
Soit E un espace de Banach.
****E. I.8.1** Démontrer le théorème de prolongement des applications uniformément continues définies sur un domaine dense et à valeurs dans un espace vectoriel normé complet.

***E. I.8.2** On note F l'ensemble des suites de $[0, 1]$.

(a) Montrer que

$$d(x, y) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|x_n - y_n|}{2^n}$$

est une distance sur F.

(b) Montrer que F muni de d est complet.

Exercice I.9 (Point fixe de Picard)
Soient $d \in \mathbb{N}^*$, $T > 0$ et une fonction $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ tels que f est Lipschitz continue de constante de Lipschitz ℓ, i.e.

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^d, \quad \|f(x) - f(y)\| \leq \ell \|x - y\|.$$

Soit $y^0 \in \mathbb{R}^d$.
On définit l'application

$$F : \left(\mathcal{C}([0,T], \mathbb{R}^d), \|\cdot\|_\infty\right) \to \left(\mathcal{C}([0,T], \mathbb{R}^d), \|\cdot\|_\infty\right)$$
$$\varphi \mapsto F(\varphi)$$

avec

$$\forall t \in [0,T], \quad F(\varphi)(t) = y_0 + \int_0^t f(\varphi(s))\, ds.$$

E. I.9.1 On suppose dans cette question que $T = 1$ et $\ell < 1$. Montrer que F est une contraction et en déduire que la suite de fonctions $(\varphi_k)_{k \in \mathbb{N}}$ définies par

$$\varphi_k(t) = \begin{cases} y^0 & \text{si } k = 0 \\ y^0 + \int_0^t f(\varphi_{k-1}(s))\, ds & \text{si } k \geq 1, \end{cases}$$

converge uniformément vers une fonction y qui vérifie

$$\forall t \in [0,T], \quad y(t) = y^0 + \int_0^t f(y(s)) ds.$$

Il s'agit de la suite de Picard.

E. I.9.2 On ne suppose plus que $T = 1$ et $\ell < 1$. Montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $F^n = F \circ \cdots \circ F$ est une contraction.

E. I.9.3 En déduire que la suite de fonctions $(\psi_k)_{k \in \mathbb{N}}$ definies par

$$\psi_k(t) = \begin{cases} y^0 & \text{si } k = 0 \\ F^n(\psi_{k-1})(t) & \text{si } k \geq 1, \end{cases}$$

converge uniformément vers une fonction y qui vérifie

$$\forall t \in [0,T], \quad y(t) = y^0 + \int_0^t f(y(s)) ds.$$

***E. I.9.4** Soient désormais $d \in \mathbb{N}^*$, $T > 0$ et une fonction $f : [0,T] \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ tels que

$$\begin{array}{lll} \forall x \in \mathbb{R}^d, & t \mapsto f(t,x) & \text{est continue en t} \\ \forall t \in [0,T], & x \mapsto f(t,x) & \text{est Lipschitz continue, c'est-à-dire que:} \end{array}$$

$$\forall t \in [0,T],\ \exists \ell_{(t)} > 0 \text{ tel que } \forall x, y \in \mathbb{R}^d,\ |f(t,x) - f(t,y)| \leq \ell_{(t)} |x - y|.$$

Soient $t^0 \in [0,T]$ et $y^0 \in \mathbb{R}^d$. On définit la suite de fonctions $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ par

$$\varphi_k(t) = \begin{cases} y^0 & \text{si } k = 0 \\ y^0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi_{k-1}(s))\, ds & \text{si } k \geq 1. \end{cases}$$

Montrer que $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers une fonction y qui vérifie

$$\forall t \in [0,T], \quad y(t) = y^0 + \int_{t^0}^{t} f(s, y(s))ds.$$

Exercice I.10 (Point fixe ou non?)
Soit $(E, \|\cdot\|)$ un EVN, K un compact de E et $f : K \to K$ une fonction continue. On suppose que f vérifie, pour tous $x \neq y \in K$,

$$\|f(x) - f(y)\| < \|x - y\|.$$

***E. I.10.1** Montrer que f admet un unique point fixe *(on pourra utiliser ici la fonction $x \mapsto \|x - f(x)\|$ plutôt que la procédure itérative vue en cours)*. Que se passe-t-il si on suppose K uniquement fermé?

Exercice I.11 (Théorème du graphe fermé, version compacte)
Soient (X, d) un espace métrique et (X', d') un espace métrique compact. On munit $X \times X'$ de la topologie produit, c'est-à-dire la topologie la moins fine qui rend continue les projections sur chacune des deux coordonnées (en particulier, une suite $(x_n, y_n) \in X \times X'$ converge ssi (x_n) et (y_n) convergent). Soit $f : X \to X'$, dont le graphe est le sous-ensemble de $X \times X'$ donné par $G_f = \{(x, f(x)),\ x \in X\}$.

E. I.11.1 Montrer que si f est continue, alors G_f est fermé dans $X \times X'$.

E. I.11.2 Réciproquement, supposons que G_f est fermé. Montrer alors que f est continue.

Séance II : Séries de Fourier et espaces de Hilbert

A) Objectifs de la séance

A la fin de cette séance,

- je sais déterminer la série de Fourier d'une fonction continue périodique;
- je suis capable de déterminer la limite de la série de Fourier, lorsqu'elle existe;
- je connais la caractérisation des applications linéaires continues;
- je sais reconnaître un espace de Hilbert et montrer la convergence des suites dans un tel espace (suites de Cauchy);
- je sais exprimer un vecteur dans une base hilbertienne;
- je sais déterminer le projeté orthogonal d'un vecteur sur un convexe fermé d'un espace de Hilbert.

B) Pour se familiariser avec les concepts (à traiter avant les séances de TD)

Les questions II.1 et II.2 sont à traiter avant la séance de TD. Les corrigés sont disponibles sur internet.

Question II.1 (Séries de Fourier)
Soient $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ une fonction continue par morceaux. On rappelle que les coefficients de Fourier complexes sont notés

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-inx}dx.$$

Q. II.1.1 Rappeler l'identité de Parseval. Supposons que f est une fonction continue 2π-périodique. Montrer que $c_n(f)$ tend vers 0 quand $|n|$ tend vers l'infini.

Q. II.1.2 Donner la décomposition en séries de Fourier de $f(x) = \cos(5x)$.

Question II.2 (Questions diverses sur les Hilbert)

Q. II.2.1 Soit H un espace de Hilbert et $F, G \subset H$. Montrer les relations suivantes:

(a) $F \subset G \Rightarrow G^\perp \subset F^\perp$;

(b) $F^\perp \cap G^\perp \subset (F+G)^\perp$;

(c) $F \subset F^{\perp\perp}$;

(d) $F + G = H \Rightarrow F^\perp \cap G^\perp = \{0\}$;

Q. II.2.2 Soient $x, x' \in H$ et $r, r' > 0$ tels que les boules fermées $\overline{B}(x,r)$ et $\overline{B}(x',r')$ sont égales. Montrer que $x = x'$ et $r = r'$. *[Remarque: observez que cette propriété est vraie en général dans les EVN.]*

C) Exercices

Exercice II.1

E. II.1.1 Donner la décomposition en séries de Fourier de la fonction 2π-périodique définie sur $[-\pi, \pi[$ par $f(x) = -\mathbf{1}_{[-\pi,0[}(x) + \mathbf{1}_{[0,\pi[}(x)$. Quelle est la régularité de f? Que dire de la série de Fourier de cette fonction en 0? Peut-on avoir convergence normale de la série de Fourier de f vers f sur $[-\pi, \pi]$?

Exercice II.2 (Des sommes classiques)

Soit f la fonction 2π-périodique définie par $f(x) = x^2$ sur $[-\pi, \pi[$.

E. II.2.1 Calculer la série de Fourier de f et établir le lien entre f et sa série de Fourier.

E. II.2.2 En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ et $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$.

Exercice II.3 (Régularité et coefficients de Fourier)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et 2π-périodique. On a déjà vu que $c_n(f) \to 0$ quand $n \to \infty$ (le refaire si vous n'en êtes pas convaincu). Le but de cet exercice est d'étudier plus finement le lien entre décroissance des coefficients de Fourier et dérivabilité de f.

E. II.3.1 On suppose que $f \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R})$, $k \geq 1$. Calculer les coefficients de Fourier de $f^{(k)}$.

E. II.3.2 En déduire que si $f \in \mathcal{C}^\infty$, alors $c_n(f) = o(|n|^{-k})$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

E. II.3.3 Nous allons montrer la réciproque du résultat de la question précédente. On suppose donc que $c_n(f) = o(|n|^{-k})$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$. Soit S la série de Fourier définie par $S(x) = \displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)e^{inx}$.

∗(a) Montrer que $S \in \mathcal{C}^\infty$ et que S est la somme d'une série trigonométrique qui converge normalement.

(b) En déduire les coefficients de Fourier de S. *[On pourra utiliser une interversion somme-limite sans la justifier dans un premier temps. Après le cours 10, vous serez en mesure de justifier une telle interversion.]*

(c) On suppose que f et g sont continues sur $[0, 2\pi]$ et que $\forall n \in \mathbb{Z}$, $c_n(f) = c_n(g)$. En utilisant l'identité de Parseval, montrer que $f(x) = g(x)$ pour tout $x \in [0, 2\pi]$.

(d) En utilisant les résultats de (a), (b) et (c), montrer que $f = S$ et donc que $f \in \mathcal{C}^\infty$.

(e) Enoncer le théorème démontré dans cet exercice.

Exercice II.4

Les questions sont indépendantes.

E. II.4.1 Soit H un espace de Hilbert et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un suite de vecteurs orthogonaux. Montrer que $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ converge dans H sssi $\sum_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\|_H^2$ converge dans $\mathbb{R}$.

E. II.4.2 Soit H un espace de Hilbert et $\overline{B}$ sa boule unité fermée. Après avoir vérifié que le théorème de projection s'applique, montrer que la projection P de H sur $\overline{B}$ vérifie $P(x) = \frac{x}{\|x\|}$ pour tout $x \in H \setminus \overline{B}$ et $P(x) = x$ pour $x \in \overline{B}$.

Exercice II.5 (Espace $\ell^2(\mathbb{N})$)
On note $\ell^2(\mathbb{N})$ l'espace des suites de carré sommable, i.e. $\ell^2(\mathbb{N}) = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \sum_{n\in\mathbb{N}} u_n^2 < \infty\}$. Les questions 1 à 4 de cet exercice sont indépendantes, mais se réfèrent toutes à l'espace $\ell^2(\mathbb{N})$.

E. II.5.1 Nous allons vérifier que $\ell^2(\mathbb{N})$ est un espace de Hilbert.

(a) Montrer que $\ell^2(\mathbb{N})$ est un espace préhilbertien (proposer un produit scalaire compatible avec la définition de $\ell^2(\mathbb{N})$).

Montrons la complétude. Soit $(u^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy d'éléments de $\ell^2(\mathbb{N})$.

(b) Soit $\epsilon > 0$. Montrer qu'il existe $K > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tous $j, k \geq K$, $|u_n^{(j)} - u_n^{(k)}| \leq \epsilon$. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\lim_{k\to\infty} u_n^{(k)}$ existe. On note $u_n^{(\infty)}$ cette limite.

(c) Montrer qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\sum_{n\geq N} |u_n^{(K)}|^2 \leq \epsilon^2$.

(d) En déduire que pour tout $M \geq N$, on a $(\sum_{N\leq n\leq M} |u_n^{(\infty)}|^2)^{\frac{1}{2}} \leq 2\epsilon$, où les $u_n^{(\infty)}$ ont été définis à la question (b).

(e) Montrer que $u^{(\infty)} = (u_n^{(\infty)})_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2(\mathbb{N})$, et en déduire que $(u^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ converge dans $\ell^2(\mathbb{N})$ vers $u^{(\infty)}$.

E. II.5.2 Montrer que tout espace de Hilbert séparable est isométrique et isomorphe à $\ell^2(\mathbb{N})$.

***E. II.5.3** Soit $\varphi : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ bijective. Montrer que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi(n)}{n^2} = \infty$. *[Indication: commencer par étudier le signe de $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\varphi(k)}$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.]*

***E. II.5.4** On note $C = \{x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2(\mathbb{N}) : \ \forall n,\ x_n \geq 0\}$.

(a) Montrer que C est un convexe fermé.

(b) Déterminer la projection sur C. *[Indication: on pourra commencer par deviner la projection en dimension 2, puis vérifier que l'expression trouvée fonctionne aussi en dimension infinie.]*

D) Approfondissement

Exercice II.6 (Théorème de Féjer)
Dans tout cet exercice, on utilisera les notations suivantes: pour tout $n \in \mathbb{Z}$, e_n est la fonction définie par $e_n(x) = e^{inx}$; $S_N = \sum_{|n|\leq N} e_n$ et $V_N = \mathrm{Vect}\{e_n : \ |n| \leq N\}$. On note également $K_N = \frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N} S_n$ pour tout $N \in \mathbb{N}$, la suite des noyaux de Féjer.

On rappelle que pour des fonctions continues sur $\mathbb{R}$, 2π-périodiques, le produit de convolution est donné par

$$(f * g)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{[0,2\pi]} f(x-y)g(y)\, dy\,.$$

E. II.6.1 On va démontrer le théorème de Féjer. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue 2π-périodique.

(a) Montrer que $f * S_N$ est un polynôme trigonométrique (i.e. une combinaison linéaire des e_n) qu'on identifiera.

(b) Si $x \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$, démontrer l'égalité suivante:

$$K_N(x) = \frac{1}{N+1} \left(\frac{\sin(\frac{1}{2}(N+1)x)}{\sin(\frac{x}{2})} \right)^2 .$$

(c) Montrer que $K_N \geq 0$ et que $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} K_N(x)\, dx = 1$. Déduire de la question précédente que pour tout $t \in]0, \pi]$, K_N converge uniformément vers 0 sur $]t, 2\pi - t[$.

$*$(d) Déduire des questions précédentes que $f * K_N$ converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$.

E. II.6.2 Application du théorème précédent: Soit f une fonction continue et 2π-périodique. On note $S_N(f)$ les sommes partielles de sa série de Fourier. Montrer que si f vérifie $\|S_N(f)\|_\infty \leq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors $\|f\|_\infty \leq 1$.

Exercice II.7 (Equations différentielles par méthode de Fourier)
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction 2π-périodique et dérivable telle qu'il existe un réel $\alpha \in \mathbb{R}$ pour lequel:

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = f(x+\alpha) .$$

E. II.7.1 Si f est une solution, montrer que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $(in - e^{in\alpha})c_n(f) = 0$.

E. II.7.2 En déduire pour quelle(s) valeur(s) de α on peut trouver une telle fonction f.

Exercice II.8 (Quelques questions de topologie des espaces de Hilbert)
Soit H un espace de Hilbert. Les questions sont indépendantes.

***E. II.8.1** On suppose que H est séparable, i.e. qu'il existe un sous-ensemble dénombrable dense de H. Montrer que la boule unité fermée de H n'est pas compacte. *[Indication: considérer une base hilbertienne et calculer la distance entre deux éléments de ce système.]*

***E. II.8.2** On rappelle qu'un sous-espace d'un espace vectoriel de dimension finie est fermé (le prouver si vous n'en êtes pas convaincu). On suppose à nouveau H séparable et on considère une base hilbertienne $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de H (i.e. en particulier $\overline{\mathrm{Vect}\{e_n, n \in \mathbb{N}\}} = H$). Montrer que $\mathrm{Vect}\{e_n, n \in \mathbb{N}\}$ n'est pas fermé. *[Indication: considérer $u_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} e_n$.]*
En déduire que $\mathrm{Vect}\{e_n, n \in \mathbb{N}\} \neq H$.

***E. II.8.3** Soit M un sous-espace de H (non nécessairement fermé). Montrer que $M^\perp$ est fermé et que $\overline{M}^\perp = M^\perp$.

Séance III : Mesurabilité

A) Objectifs de la séance

A la fin de cette séance,

- je sais vérifier qu'une collection d'ensembles constitue une tribu;
- je suis capable de déterminer la tribu engendrée par une collection d'ensembles;
- je connais la tribu de Borel;
- je sais vérifier qu'une fonction est mesurable;
- je connais le lien entre fonction continue et fonction borélienne;
- je suis capable de montrer la mesurabilité d'une fonction, en l'approchant par une suite de fonctions mesurables.
- je sais définir et construire une mesure de probabilités sur un ensemble discret.

B) Pour se familiariser avec les concepts (à traiter avant les séances de TD)

Les questions III.1 et III.2 sont à traiter avant la séance de TD. Les corrigés sont disponibles sur internet.

Question III.1

Q. III.1.1 Soit l'ensemble $\Omega = \{a, b, c, d\}$.

(a) Quelle est la tribu engendrée par $\{a\}$?

(b) Quelle est la tribu engendrée par $\{a, b\}$?

(c) Quelle est la tribu engendrée par $\{a\}$ et $\{a, b\}$?

(d) Quels sont les liens d'inclusion entre les tribus obtenues aux questions (a), (b) et (c) ?

Q. III.1.2 Déterminer la tribu de $\mathbb{R}$ engendrée par $\mathbf{1}_{\mathbb{Q}}$, fonction indicatrice de $\mathbb{Q}$, c'est-à-dire la plus petite tribu rendant cette fonction mesurable.

Q. III.1.3 Vérifier que toute fonction constante est mesurable.

Q. III.1.4 L'ensemble des ouverts de $\mathbb{R}$ est-il une tribu?

Question III.2

Q. III.2.1 On considère dans cette question des fonctions de $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

(a) Montrer que la fonction indicatrice de $\mathbb{Q}$ est mesurable.

(b) Montrer que la fonction sinus est mesurable.

(c) Montrer que si $f(x) = \exp(x)$ pour $x > 0$ et $f(x) = 0$ pour $x \leq 0$ alors f est mesurable.

C) Exercices

La notion de tribu est fondamentale en théorie de la mesure et en probabilités. Dans le cadre du cours d'Analyse, nous utiliserons surtout la tribu discrète de $\mathbb{N}$ et la tribu borélienne de $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{R}^n$).

En revanche, les tribus utilisées dans le cadre des probabilités doivent être constituées de l'ensemble des *événements aléatoires* sur un ensemble Ω qui ne se réduit pas nécessairement à $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{R}$. Les exercices de probabilités vous permettent de vous familiariser avec le formalisme moderne de cette discipline, en le reliant à la notion intuitive que vous avez rencontrée dans vos études précédentes. Même dans les cas les plus simples, il est important de spécifier l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Exercice III.1

E. III.1.1 On lance deux dés à six faces et on calcule la somme des deux nombres obtenus.

(a) Quel est l'espace d'arrivée? Proposez une tribu sur cet espace.

(b) Quel est l'espace de départ? Proposez une tribu sur cet espace.

(c) En fonction de vos choix de tribus, la fonction qui à deux dés associe leur somme est-elle mesurable? (*i. e.* est une variable aléatoire, dans le vocabulaire des probabilités).

Exercice III.2 (Continuité et mesurabilité)

E. III.2.1 On note $\mathcal{T}$ la topologie usuelle de $\mathbb{R}$. Montrer que si $f : (\mathbb{R}, \mathcal{T}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{T})$ est continue, alors $f : (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ est mesurable (on pourra commencer par montrer que $\mathcal{F} = \{B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) : f^{-1}(B) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$ est une tribu).
Montrer que la réciproque est fausse en proposant un contre-exemple.

E. III.2.2 Soit f et g deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que si f est continue et g est (Borel-)mesurable, alors $f \circ g$ est mesurable. $f \circ g$ est-elle continue?

Exercice III.3 (Tribu de Borel)

E. III.3.1 $*$(a) Montrer que tout ouvert de $\mathbb{R}$ peut s'écrire comme une union au plus dénombrable d'intervalles ouverts.

(b) En déduire que la tribu borélienne de $\mathbb{R}$, notée $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, est engendrée par l'ensemble des intervalles de la forme $]-\infty, a[$, avec $a \in \mathbb{R}$.

E. III.3.2 Montrer que $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ est engendrée par l'ensemble des compacts (parties fermées et bornées) de $\mathbb{R}$.

E. III.3.3 (a) Montrer que l'ensemble

$$\mathcal{C} = \{A \subset \mathbb{R} : A \text{ ou } \mathbb{R} \setminus A \text{ est fini ou dénombrable}\}$$

est une tribu sur $\mathbb{R}$.

$*$(b) Cette tribu est-elle égale à $\mathcal{B}(\mathbb{R})$?

(c) La tribu engendrée par les singletons est-elle la tribu $\mathcal{B}(\mathbb{R})$?

E. III.3.4 L'ensemble des unions finies ou dénombrables d'intervalles forme-t-il une tribu ?

Les fonctions mesurables constituent les objets d'étude de la théorie de l'intégration. Dans la théorie des probabilités, elles constituent les variables aléatoires. Dans le cadre du cours d'Analyse, la mesurabilité est souvent une hypothèse des théorèmes usuels.

Les trois exercices suivant permettent de mettre en œuvre des méthodes classiques.

Exercice III.4 (Mesurabilité)

E. III.4.1 On considère dans cette question les fonctions d'un espace mesurable $(\Omega, \mathcal{F})$ dans $(\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$.

(a) Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\{x : \limsup_{n\to+\infty} f_n(x) > t\}$ est mesurable. Idem pour $\{x : \liminf_{n\to+\infty} f_n(x) > t\}$.

(b) En déduire que $\{x : \lim_{n\to+\infty} f_n(x) \text{ existe}\}$ est mesurable et que si la fonction $\lim_{n\to+\infty} f_n$ existe, alors elle est mesurable.

(c) On suppose maintenant que $(\Omega, \mathcal{F}) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Montrer que si f est dérivable alors sa dérivée f' est mesurable.

E. III.4.2 On considère dans cette question des fonctions de $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

(a) Montrer que si $f(0) = 0$ et si $f(x) = \sin(1/x^2)$ si $x \neq 0$ alors f est mesurable (on pourra s'aider de la question 1)(b)).

(b) Montrer que la fonction $f(x) = x\mathbf{1}_{\{x\in\mathbb{Q}\}}$ est non continue par morceaux mais mesurable.

∗(c) Montrer que si f est monotone alors elle est mesurable.

E. III.4.3 On considère dans cette question des fonctions de $(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2))$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

(a) Montrer que la fonction $(x, y) \mapsto \sin(xy)$ est mesurable.

(b) Soit f telle que $f(0, 0) = 0$ et

$$f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \qquad \text{si } (x, y) \neq (0, 0).$$

Montrer que f est mesurable.

E. III.4.4 On considère dans cette question les fonctions d'un espace mesurable $(\Omega, \mathcal{F})$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

(a) Déterminer les fonctions mesurables lorsque $\mathcal{F} = \{\emptyset, \Omega\}$.

(b) Déterminer les fonctions mesurables lorsque $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$.

Exercice III.5 (Approximation d'une fonction mesurable)

Soit $f : E \to \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ une fonction. Pour tout $n \geq 1$ et pour tout $i \in \{0, 1, \ldots, n\,2^n - 1\}$, on pose $A_n = \{x \in E : f(x) \geq n\}$ et $B_{n,i} = \{x \in E : i\,2^{-n} \leq f(x) < (i+1)\,2^{-n}\}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit la fonction $f_n = \displaystyle\sum_{i=0}^{n2^n-1} i\,2^{-n}\,\mathbf{1}_{B_{n,i}} + n\mathbf{1}_{A_n}$.

E. III.5.1 Montrer que pour tout $x \in E$, $f_n(x)$ converge simplement vers $f(x)$. La convergence est-elle uniforme?

E. III.5.2 En déduire qu'une fonction borélienne $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ peut être approchée par une suite de fonctions étagées.

E. III.5.3 Ce résultat peut-il être étendu pour une fonction $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, non nécessairement positive?

A ce stade, les probabilités ne représentent qu'un cas particulier de la théorie de la mesure: les mesures sont de masse 1 et éventuellement discrètes (i.e à support dans $\mathbb{N}$). De nouvelles notions viendront plus tard montrer que les probabilités sont bien plus que cela (l'indépendance en est un premier aperçu). En attendant, voici quelques exercices de probabilités élémentaires.

Exercice III.6 (Dénombrement)

E. III.6.1 Lors d'une soirée, n personnes sont réunies. A partir de quelle valeur de n accepteriez-vous de parier qu'au moins 2 des personnes présentes ont leur anniversaire le même jour?

La connaissance précise de la loi d'une variable aléatoire permet de résoudre des problèmes pratiques.

Exercice III.7 (Loi binomiale et assurance)
Une grande mutuelle d'assurance étudie d'éventuels changements de tarifs. Pour cela, elle a évalué le risque d'accident automobile de ses assurés en fonction de l'ancienneté de leur permis de conduire:

- 20% des assurés de cette mutuelle ont leur permis de conduire depuis moins de 5 ans.
- L'étude montre que la probabilité d'avoir un accident dans l'année quelqu'un qui possède son permis depuis moins de 5 ans est 0,4.
- Et la probabilité devient 0,125 pour quelqu'un qui possède son permis depuis plus de 5 ans.

E. III.7.1 Si on choisit au hasard 10 personnes ayant leur permis de conduire depuis moins de 5 ans, quelle est la probabilité d'en voir au moins un accidenté dans l'année?

E. III.7.2 Même question avec 10 assurés ayant leur permis depuis plus de 5 ans.

E. III.7.3 Si on prend au hasard 10 personnes parmi les assurés, quelle est la probabilité d'en voir au moins un ayant un accident dans l'année?

Exercice III.8 (Loi de Bernoulli, loi binomiale)
Soient $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et distribuées suivant la même loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$, i.e. $\mathbb{P}(X_n = 1) = p$ et $\mathbb{P}(X_n = 0) = 1 - p$ pour tout $n \geq 1$.
E. III.8.1 Montrer que la variable $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$, définie par

$$\forall k \geq 0, \quad \mathbb{P}(S_n = k) = C_n^k\, p^k (1-p)^{n-k}.$$

E. III.8.2 Montrer que si $\lim_{n\to\infty}(n\, p_n) = \lambda > 0$, alors la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p_n)$ peut être approximée par la loi de Poisson de paramètre λ, c'est-à-dire que pour tout $k \geq 0$ fixé,

$$\mathbb{P}(S_n = k) \to e^{-\lambda}\, \frac{\lambda^k}{k!} \quad \text{lorsque } n \to \infty.$$

Indication : On pourra écrire

$$C_n^k = \frac{n^k}{k!}\left(\frac{n}{n}\right)\left(\frac{n-1}{n}\right)\cdots\left(\frac{n-k+1}{n}\right).$$

Exercice III.9 (Empreintes ADN)
Dans certaines fictions policières, le détective est amené à déclarer "le criminel possède les caractéristiques inhabituelles... ; il suffit de trouver la personne correspondante et vous aurez votre homme".
Supposons qu'un individu quelconque possède ces caractéristiques inhabituelles avec une probabilité 10^{-7} indépendamment des autres individus, et que la ville en question possède 10^7 habitants.

E. III.9.1 Déterminer le nombre moyen de personnes dans la ville possèdant ces caractéristiques inhabituelles.
Sachant que la police trouve une personne possédant les caractéristiques recherchées, quelle est la probabilité qu'il en existe au moins une autre?

E. III.9.2 Si la police trouve deux telles personnes, quelle est la probabilité qu'il en existe au moins une autre?

E. III.9.3 Combien de personnes possédant les caractéristiques recherchées la police doit-elle trouver, pour estimer les avoir raisonnablement toutes trouvées?

E. III.9.4 Etant donnée la population, à quel point les caractéristiques du criminel doivent-elles être improbable pour qu'il puisse être déterminé de manière unique?

D) Approfondissement

Exercice III.10 (Tribus infinies)
Le but de cet exercice est de montrer qu'il n'existe pas de tribu de taille infinie qui soit dénombrable.
Soit $(E, \mathcal{E})$ un ensemble mesurable tel que $\mathcal{E}$ contient un nombre infini d'éléments. Pour tout $x \in E$, on note $A_x = \cap_{A\in\mathcal{E}: x\in A} A$.

***E. III.10.1** Montrer que si $A_x \cap A_y \neq \emptyset$, alors $A_x = A_y$.

***E. III.10.2** On suppose que $\mathcal{E}$ est au plus dénombrable, montrer que:

(a) $\forall x \in E$, $A_x \in \mathcal{E}$;

(b) tout $B \in \mathcal{E}$ s'écrit $B = \cup_{x\in B} A_x$;

(c) cette union est au plus dénombrable et cette décomposition est unique.

****E. III.10.3** On considère $\mathcal{A} = \{A_x\}_{x\in E}$. Montrer que $\mathcal{A}$ contient un nombre infini d'éléments (on pourra supposer le contraire et aboutir à une contradiction). En déduire que $\mathcal{E}$ n'est pas dénombrable.

Exercice III.11

E. III.11.1 Soit f une fonction sur Ω muni d'une tribu $\mathcal{F}$. Montrer que si $\{x : f(x) \geq r\}$ est mesurable pour tout $r \in \mathbb{Q}$, alors f est mesurable de $(\Omega, \mathcal{F})$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

Exercice III.12 (Paradoxe de Bertrand)
Une corde du cercle unité est choisie au hasard. Quelle est la probabilité qu'un triangle équilatéral ayant cette corde pour base soit contenu dans le disque ? L'exercice montre que des constructions différentes de la "corde aléatoire" conduisent à des solutions différentes : on dit le problème est mal-posé.

Pour illustrer cela, on considère trois constructions différentes du triangle équilatéral. Soit $\mathcal{U}$ le cercle de centre O et de rayon unité, et soit X la longueur de la corde aléatoire $[A, B]$ où A et B sont sur le cercle $\mathcal{U}$. Déterminer la probabilité recherchée dans chacune des constructions suivantes:

E. III.12.1 Un point P est tiré au hasard (uniformément) à l'intérieur du disque, et la corde est construite de sorte que P soit le milieu du segment $[A, B]$.

E. III.12.2 On choisit au hasard (uniformément) un rayon de $\mathcal{U}$, et on choisit au hasard (uniformément) un point P de ce rayon. La corde est construite de sorte que P soit le milieu du segment $[A, B]$.

E. III.12.3 Les points A et B sont choisis au hasard (uniformément) de manière indépendante sur le cercle $\mathcal{U}$.

E. III.12.4 Commenter la différence entre ces résultats.

Séance IV : Mesure, intégrale et espaces L^p

A) Objectifs de la séance

A la fin de cette séance,

- je sais vérifier qu'une fonction définie sur des ensembles est une mesure;
- je maîtrise la construction de l'intégrale de fonctions positives par rapport à une mesure;
- je sais passer à la limite sous le signe intégral, lorsque la suite de fonctions est monotone;
- je sais particulariser au cas des probabilités le cadre général de l'intégration par rapport à une mesure;
- je sais ce qu'est une mesure de probabilités et je sais déterminer la loi d'une variable aléatoire discrète;
- je connais l'espace vectoriel normé L^p.

B) Pour se familiariser avec les concepts (à traiter avant les séances de TD)

Les questions IV.1 et IV.2 sont à traiter avant la séance de TD. Les corrigés sont disponibles sur internet.

Question IV.1 (Questions diverses sur les mesures)

Q. IV.1.1 Soient E_1, E_2 deux ensembles et $\mathcal{G}$ une tribu sur E_2. Soit f une application de E_1 vers E_2. Montrer que $\{f^{-1}(B) : \ B \in \mathcal{G}\}$ est une tribu sur E_1 (on l'appelle tribu engendrée par f, notée $\sigma(f)$. Vous pouvez vérifier que c'est la plus petite tribu qui rend f mesurable).

Q. IV.1.2 Soit $(E, \mathcal{F})$ un espace mesurable. Pour $x \in E$, on définit

$$\begin{aligned} \delta_x : &\mathcal{F} \to \mathbb{R}_+ \\ &A \mapsto \delta_x(A) = \begin{cases} = 1 & \text{si } x \in A \\ = 0 & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned}$$

Montrer que δ_x est une mesure.

Q. IV.1.3 La somme de deux mesures est-elle une mesure?

Question IV.2

Q. IV.2.1 Dans un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements de probabilité nulle. Montrer que $B = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ est un événement de probabilité nulle.

Q. IV.2.2 Plus généralement, considérons maintenant $(E, \mathcal{F}, \mu)$ un espace mesuré tel que $\mu(E) < \infty$. Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}^{\mathbb{N}}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mu(A_n) = \mu(E)$. Montrer que $\mu\left(\cap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \mu(E)$.

C) Exercices

La notation pour l'intégrale d'une fonction $f : E \to \mathbb{R}$ par rapport à une mesure ν peut s'écrire indifféremment

$$\int_E f(x)\, \nu(dx) \quad \text{ou} \quad \int_E f\, d\nu.$$

D'autre part, lorsqu'on parlera simplement d'intégrale, il s'agit de l'intégrale au sens de la mesure. Si la mesure est celle de Lebesgue, on parlera éventuellement d'intégrale de Lebesgue. Enfin, on écrira systématiquement "intégrale de Riemann" lorsque cette intégrale apparaît.

On se tourne désormais vers des exercices faisant intervenir l'intégrale construites en cours. En probabilités, on appelle "espérance", notée $\mathbb{E}[\cdot]$, l'intégrale par rapport à une mesure de probabilité $\mathbb{P}$.

Montrons pour commencer que l'intégrale permet d'unifier les notions de fonction intégrable et de suite sommable.

Exercice IV.1 (Mesure sur $\mathbb{N}$)
Soit $\Omega = \mathbb{N}$ et $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$.

E. IV.1.1 Vérifier que $\mathcal{F}$ est bien une tribu sur l'ensemble Ω.

E. IV.1.2 Vérifier que $\nu = \text{Card}$ est bien une mesure sur $\mathcal{F}$ (on l'appelle mesure de comptage).

E. IV.1.3 Vérifier que toute fonction f de $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ est bien mesurable.

E. IV.1.4 Soit f de $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ positive.

(a) Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} f(k)\mathbf{1}_{\{k\}} \uparrow f$.

(b) En déduire la valeur de $\displaystyle\int_{\mathbb{N}} f\, d\nu$.

E. IV.1.5 Déterminer les fonctions de $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \nu)$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ qui sont intégrables.

E. IV.1.6 Montrer que, pour toute famille de réels positifs $(x_{i,j})_{(i,j)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ on a dans $\overline{\mathbb{R}}_+$:

$$\sum_{i\in\mathbb{N}} \sum_{j\in\mathbb{N}} x_{i,j} = \sum_{j\in\mathbb{N}} \sum_{i\in\mathbb{N}} x_{i,j}.$$

Exercice IV.2 (Inégalité de Markov)

E. IV.2.1 Soit $(E, \mathcal{F}, \mu)$ un espace mesuré et f une fonction mesurable à valeurs dans $\mathbb{R}$. Démontrer l'inégalité de Markov:

$$\forall \alpha > 0,\ \mu\left(\{x \in E :\ |f(x)| > \alpha\}\right) \leq \frac{1}{\alpha} \int_E |f|\, d\mu\,.$$

E. IV.2.2 Soit f comme dans la question précédente. Montrer que $\mu\left(\{x \in E :\ f(x) = +\infty\}\right) \leq \lim_{n\to+\infty} \mu\left(\{x \in E :\ |f(x)| \geq n\}\right)$. En s'aidant du résultat de la question précédente, en déduire que si $f \in L^1(E, \mathcal{F}, \mu)$, alors $\mu\left(\{x \in E :\ f(x) = +\infty\}\right) = 0$. La réciproque est-elle vraie?

Exercice IV.3 (Mesure image)
Soit f une application mesurable de $(E, \mathcal{E})$ sur $(F, \mathcal{F})$ ($\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ sont respectivement des tribus sur E et F). Soit ν une mesure définie sur la tribu $\mathcal{E}$.

On pose

$$\forall B \in \mathcal{F}, \quad \nu_f(B) = \nu\big(f^{-1}(B)\big).$$

On considère une application $\varphi : F \to \mathbb{R}_+$ mesurable.

E. IV.3.1 Vérifier que ν_f définit une mesure sur la tribu $\mathcal{F}$.

E. IV.3.2 Rappeler le procédé de construction de l'intégrale dans le cas particulier de $\int_F \varphi(x)\,\nu_f(dx)$.

E. IV.3.3 En déduire que

$$\int_F \varphi(x)\,\nu_f(dx) = \int_E \varphi(f(x))\,\nu(dx).$$

La mesure ν_f est appelée *mesure image* de ν par l'application f.

Exercice IV.4 (Inégalité de Hölder)
Soit $(E, \mathcal{F}, \mu)$ un espace mesuré, et f, g deux fonctions mesurables à valeurs dans $\mathbb{R}$. On veut montrer l'inégalité de Hölder: pour tous $p, q \in [1, \infty]$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$,

$$\int_E |fg|\,d\mu \le \left(\int_E |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_E |g|^q d\mu\right)^{\frac{1}{q}}. \tag{IV.1}$$

E. IV.4.1 Traiter les cas $\|f\|_p = 0$ et $\|f\|_p = \infty$.

On suppose dorénavant que $\|f\|_p \in]0, +\infty[$ et $\|g\|_q \in]0, +\infty[$.

E. IV.4.2 Traiter le cas $p = 1$.

On suppose désormais que $1 < p < \infty$.

E. IV.4.3 (a) Soit $\alpha \in]0, 1[$. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $x^\alpha - \alpha x \le 1 - \alpha$. En déduire que pour tous $u, v \ge 0$, $u^\alpha v^{1-\alpha} \le \alpha u + (1-\alpha)v$.

(b) Appliquer l'inégalité précédente à $\alpha = \frac{1}{p}$, $u = \frac{|f(x)|^p}{\|f\|_p^p}$ et $v = \frac{|g(x)|^q}{\|g\|_q^q}$. Conclure.

***E. IV.4.4** Lorsque $1 < p < \infty$, trouver une CNS pour qu'il y ait égalité dans (IV.1).

De premiers exercices de probabilité faisant intervenir la mesure.

Exercice IV.5
Soit $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$.

E. IV.5.1 Existe-t-il une mesure de probabilité $\mathbb{P}$ sur Ω telle que $\mathbb{P}(\omega_1) = \mathbb{P}(\omega_2) = \mathbb{P}(\omega_3)$?

E. IV.5.2 On définit les applications X et Y de Ω dans $\mathbb{R}$ telles que

$$X(\omega_1) = 1, \quad X(\omega_2) = 2, \quad X(\omega_3) = 3,$$
$$Y(\omega_1) = 2, \quad Y(\omega_2) = 3, \quad Y(\omega_3) = 1.$$

(a) Justifier que X et Y définissent des variables aléatoires.

(b) Montrer que les variables aléatoires X et Y ont même loi.

(c) Déterminer les distributions de probabilité de $X+Y$ et XY.

Exercice IV.6
Soit $X = \{1, 2, 3, 4\}$ et $\mathcal{F} = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, X\}$.
E. IV.6.1 Montrer que $\mathcal{F}$ engendre $\mathcal{P}(X)$ (i.e. $\sigma(\mathcal{F}) = \mathcal{P}(X)$). $\mathcal{F}$ est-il une tribu?

E. IV.6.2 On note $\mathcal{M}_1(X)$ l'ensemble des mesures *de probabilité* sur $(X, \mathcal{P}(X))$. Montrer que $\mathcal{M}_1(X)$ est en bijection avec l'ensemble $\{x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in [0, 1]^4 : \ \sum_{i=1}^4 x_i = 1\}$.

E. IV.6.3 Utiliser la question précédente pour trouver deux mesures de probabilités (i.e. telles que $\mu_1(X) = \mu_2(X) = 1$) distinctes sur $\mathcal{P}(X)$ mais égales sur $\mathcal{F}$.

Exercice IV.7 (Probabilité de limite d'évènements)
Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite d'événements de l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. On définit, pour tout $n \geq 1$,

$$B_n = \bigcup_{m\geq n} A_m, \qquad C_n = \bigcap_{m\geq n} A_m.$$

Pour tout $n \geq 1$, $C_n \subset A_n \subset B_n$ et les suites $(B_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(C_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont respectivement décroissante et croissante. On définit alors

$$\lim_{n\to\infty} B_n = B = \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} B_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} \bigcup_{m\geq n} A_m,$$
$$\lim_{n\to\infty} C_n = C = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} C_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \bigcap_{m\geq n} A_m.$$

E. IV.7.1 Justifier que

(a) $B = \{\omega \in \Omega : \omega \in A_n,$ pour une infinité de valeurs de $n \in \mathbb{N}^*\}$.

(b) $C = \{\omega \in \Omega : \omega \in A_n,$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ sauf pour un nombre fini de valeurs de $n\}$.

E. IV.7.2 On dit que la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers A lorsque B et C sont égaux à A. Dans cette question, on suppose que A_n converge vers A, lorsque $n \to \infty$.

(a) Montrer que A est un événement, c'est-à-dire que $A \in \mathcal{F}$.

(b) Montrer que $\mathbb{P}(A_n)$ tend vers $\mathbb{P}(A)$, lorsque $n \to \infty$.

E. IV.7.3 On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les événements B_n et C_n sont indépendants.

(a) Montrer que B et C sont indépendants.

(b) En déduire que lorsque A_n tend vers A, lorsque $n \to \infty$, $\mathbb{P}(A)$ vaut 0 ou 1.

D) Approfondissement

Exercice IV.8 (Construction de mesures)
Soit $(E, \mathcal{F}, \mu)$ un espace mesuré et f une fonction mesurable positive. Pour tout $A \in \mathcal{F}$, on définit

$$\nu(A) = \int_A f \, d\mu \, .$$

E. IV.8.1 Justifier *rigoureusement* que ν est une mesure.
On dit que ν a pour densité f par rapport à μ.

Exercice IV.9 (Uniforme continuité de l'intégrale)
Soit $(E, \mathcal{F}, \mu)$ un espace mesuré et $f \in L^1(\mu)$.
***E. IV.9.1** Montrer l'assertion suivante:

$$\forall \epsilon > 0, \; \exists \delta > 0 \text{ tel que } \mu(A) < \delta \Rightarrow \int_A |f| \, d\mu < \epsilon \, .$$

Exercice IV.10 (Mesure? *(cf exercice d'I.Kortchemski à l'ENS)***)**
Soit $\ell^\infty = \left\{ \mathbf{u} = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \; \|\mathbf{u}\|_\infty := \sup_{n\in\mathbb{N}} |u_n| < \infty \right\}$ l'ensemble des suites réelles bornées.
***E. IV.10.1** Montrer que $(\ell^\infty, \|\cdot\|_\infty)$ est un espace de Banach.

On admet la propriété suivante (conséquence du théorème de Hahn-Banach), selon laquelle il existe une forme linéaire continue $F : \ell^\infty \to \mathbb{R}$ qui vérifie les propriétés suivantes: pour tout $\mathbf{u} \in \ell^\infty$,

- $F(\mathbf{u}) \leq \|\mathbf{u}\|_\infty$,
- si $\lim_{n\to\infty} u_n = \alpha$, alors $F(\mathbf{u}) = \alpha$.

E. IV.10.2 Pour tout $A \subset \mathbb{N}$, on rappelle que $\mathbf{1}_A$ est l'indicatrice de A, définie par la relation suivante: $\mathbf{1}_A(n) = 1$ si $n \in A$, et $\mathbf{1}_A(n) = 0$ sinon. On peut donc considérer $\mathbf{1}_A$ comme un élément de ℓ^∞. On définit $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathbb{R}$ par la relation $\mu(A) = F(\mathbf{1}_A)$. Montrer que

- $\mu(\emptyset) = 1 - \mu(\mathbb{N}) = 0$,
- $\mu(A^c) = 1 - \mu(A)$,
- $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$ si $A \cap B = \emptyset$.

E. IV.10.3 Montrer que μ n'est pas une mesure.

Exercice IV.11
Soit X un ensemble non-dénombrable et définissons

$$\mathcal{M} = \{E \subset X : E \text{ est dénombrable ou } E^c \text{ est dénombrable}\}.$$

E. IV.11.1 Montrer que $\mathcal{M}$ est une tribu.

E. IV.11.2 On définit $\mu : \mathcal{M} \to \{0, 1\}$ par $\mu(E) = 0$ si E est dénombrable et $\mu(E) = 1$ sinon. Montrer que μ est une mesure sur $(X, \mathcal{M})$.

****E. IV.11.3** Décrire les fonctions mesurables de $(X, \mathcal{M})$ vers $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ et leur intégrale par rapport à μ.

Exercice IV.12 (Fonction d'Euler)
On choisit au hasard un des entiers $1, 2, \ldots, n$, de manière équiprobable. Pour tout nombre entier p tel que $0 < p \leq n$, on considère l'événement

$$A_p = \{\text{le nombre choisi est divisible par } p\}.$$

E. IV.12.1 Calculer $\mathbb{P}(A_p)$ lorsque p divise n.

E. IV.12.2 Montrer que si $p_1, p_2, \ldots, p_k$ sont des diviseurs premiers distincts de n, alors les événements $A_{p_1}, A_{p_2}, \ldots, A_{p_k}$ sont indépendants.

E. IV.12.3 On rappelle que la *fonction indicatrice d'Euler* $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est définie par : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\phi(n)$ est égal au nombre d'entiers dans $\{1, \ldots, n\}$ premiers avec n.
Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\phi(n) = n \prod_{\substack{p \in \mathcal{P} \\ p | n}} (1 - \tfrac{1}{p}).$$

Exercice IV.13 (Indépendance conditionnelle)
Deux événements E et F sont dits *indépendants conditionnellement à un événement* C si

$$\mathbb{P}(E \cap F \mid C) = \mathbb{P}(E \mid C)\mathbb{P}(F \mid C).$$

E. IV.13.1 Montrer que E et F peuvent être indépendants, et ne pas l'être conditionnellement à un événement C.

Séance V : Mesure et intégrale de Lebesgue

A) Objectifs de la séance

A la fin de cette séance,

- je sais appliquer le théorème de convergence dominée pour passer à la limite sous le signe intégral;
- je connais la caractérisation de la mesure de Lebesgue sur les intervalles de $\mathbb{R}$;
- je suis capable d'exprimer la différence entre l'intégrale de Lebesgue et l'intégrale de Riemann;
- je sais calculer des intégrales de fonctions de la variable réelle;
- je suis capable d'identifier les valeurs d'intégrales de fonctions qui sont égales presque partout;
- je connais le lien entre intégration et dérivation;
- je sais définir et étudier la convergence des séries de Fourier dans L^2.

B) Pour se familiariser avec les concepts (à traiter avant les séances de TD)

Les questions V.1 et V.2 sont à traiter avant la séance de TD. Les corrigés sont disponibles sur internet.

Sur $\mathbb{R}$ muni de sa tribu de Borel, la mesure usuelle est celle de Lebesgue, notée λ. Elle prolonge naturellement la notion de longueur.

Question V.1 (Questions diverses)

Q. V.1.1 On note λ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$.

(a) Justifier que $\lambda(\{x\}) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

(b) Grâce au (a), on calcule

$$\lambda(\mathbb{R}) = \lambda\left(\bigcup_{x\in\mathbb{R}} \{x\}\right) = \sum_{x\in\mathbb{R}} \lambda(\{x\}) = 0.$$

Ceci contredit le fait que $\lambda(\mathbb{R}) = +\infty$.

Où est l'erreur ?

Q. V.1.2 Soit $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ deux tribus. L'ensemble $\mathcal{F} \cup \mathcal{G}$ est-il une tribu ?

Question V.2

Q. V.2.1 Soit f la fonction identité de $[0,1]$. Justifier que $f \in L^1([0,1], \lambda)$.

Q. V.2.2 Calculer $\int_{[0,1]} f \, d\lambda$ sans passer par l'intégrale de Riemann. Justifier le calcul en vérifiant précisément les hypothèses du théorème utilisé.

C) Exercices

Une des mesures les plus courantes est bien sûr la mesure de Lebesgue, qui généralise la notion de longueur ou de volume en dimension supérieure (mais finie). Les cinq prochains exercices traitent de la mesure de Lebesgue.

Exercice V.1 (Attention aux interversions limite/intégrale: quelques exemples sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$.)

E. V.1.1 (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit $f_n(x) = \mathbf{1}_{[0,n]}(x)$. Montrer que f_n converge simplement vers une fonction f que vous préciserez. Montrer que $\int_{\mathbb{R}} f d\lambda = +\infty$. Le théorème de convergence monotone s'applique-t-il ici?

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit $f_n(x) = \frac{1}{n}\mathbf{1}_{[n,\infty[}(x)$. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n d\lambda$ et $\int_{\mathbb{R}} \lim\limits_{n\to+\infty} f_n d\lambda$. Expliquer pourquoi le théorème de convergence monotone ne s'applique pas ici.

(c) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit $f_n(x) = \frac{1}{n}\mathbf{1}_{[0,n]}(x)$ et $f(x) = 0$. Montrer que f_n converge uniformément vers f, mais que $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n d\lambda \neq \int_{\mathbb{R}} \lim\limits_{n\to+\infty} f_n d\lambda$. Expliquer pourquoi le théorème de convergence monotone ne s'applique pas ici.

Exercice V.2 (Mesure définie par sa densité)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ mesurable et μ une mesure sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

E. V.2.1 On suppose que pour toute fonction $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ mesurable, $\int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\,\mu(dx) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)f(x)\,\lambda(dx)$. Que vaut $\mu(A)$, pour $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$?

E. V.2.2 Supposons désormais que pour toute fonction continue bornée $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, $\int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\,\mu(dx) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)f(x)\,\lambda(dx)$. Que vaut $\mu(]a,b[)$, pour $a < b \in \mathbb{R}$?

Exercice V.3 (Interversion entre limite et intégrale)

Les questions de cet exercice sont indépendantes mais traitent toutes d'interversion entre une limite et une intégrale.

E. V.3.1 Dans cette question, on montre que:

> Si une suite de fonctions positives $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge λ-p.p. vers une fonction f, le fait que $\int f_n\, d\lambda$ converge vers une constante $c \in \mathbb{R}_+$ n'implique pas nécessairement que $\int f\, d\lambda = c$.

On considère $f_n = \mathbf{1}_{[n,n+1]}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(a) Etudier la convergence de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (convergence simple, convergence λ-p.p.).

(b) Déterminer $\int_{\mathbb{R}} f_n\, d\lambda$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(c) Conclure.

E. V.3.2 Etudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \int_{]0,+\infty[} \frac{\sin(t^n)}{t^n(1+t)}\,\lambda(dt).$$

E. V.3.3 Soit $(E, \mathcal{F}, \mu)$ un espace mesuré et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables bornées sur E à valeurs dans $\mathbb{R}$. On suppose que cette suite converge uniformément vers f.

(a) On suppose que $\mu(E) < \infty$. Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_E f_n \, d\mu = \int_E f \, d\mu \, .$$

$*$(b) On enlève l'hypothèse $\mu(E) < \infty$. Que se passe-t-il?

L'exercice suivant permet de retrouver que pour une fonction continue sur un segment, les intégrales de Riemann et Lebesgue coïncident.

Exercice V.4 (Intégrale d'une fonction continue sur un segment)
Soit f une fonction continue sur un segment $[a, b]$ de $\mathbb{R}$. On pose $a_{k,n} = a + k\frac{b-a}{n}$ et on considère:

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f(a_{k,n}) 1_{]a_{k-1,n}, a_{k,n}]}(x)$$

E. V.4.1 (a) Calculer $\int_{[a,b]} f_n \, d\lambda$.

(b) Montrer que $\int_{[a,b]} f_n \, d\lambda$ converge vers $\int_a^b f(x) \, dx$.

E. V.4.2 Montrer que $\int_{[a,b]} f_n \, d\lambda$ converge vers $\int_{[a,b]} f \, d\lambda$.

E. V.4.3 En déduire que:

$$\int_a^b f(x) \, dx = \int_{[a,b]} f \, d\lambda.$$

Dans l'exercice qui suit, nous allons retrouver la valeur de l'intégrale de Gauss:

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-u^2/2} \, \lambda(du) = \sqrt{2\pi}$$

en utilisant les propriétés fondamentales de l'intégrale de Lebesgue.

Exercice V.5 (Calcul d'une intégrale)
On pose

$$F(x) = \left(\int_{[0,x]} \mathrm{e}^{-t^2} \, \lambda(dt) \right)^2 \qquad \text{et} \qquad G(x) = \int_{[0,1]} \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2} \, \lambda(dt).$$

E. V.5.1 Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer F' (sous forme intégrale).

E. V.5.2 Montrer que G est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer G' (sous forme intégrale).

E. V.5.3 En déduire $F + G$.

E. V.5.4 Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} G(x) = 0$.

E. V.5.5 En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2} \, dt$.

De nombreuses fonctions réelles ne sont pas Riemann-intégrables. On peut néanmoins étudier leur intégrabilité par rapport à la mesure de Lebesgue. L'exemple simple de la fonction indicatrice de $\mathbb{Q}$ est étudié ci-dessous.

Exercice V.6 (Étude de la fonction indicatrice de $\mathbb{Q}$)

E. V.6.1 (a) Montrer que $\mathbf{1}_{\mathbb{Q}}$ n'est pas continue par morceaux.

$*$(b) Montrer que $\mathbf{1}_{\mathbb{Q}}$ n'est pas réglée (i.e. limite uniforme de fonctions en escalier) .

$*$(c) Montrer que $\mathbf{1}_{\mathbb{Q}}$ n'est pas intégrable au sens de Riemann.

E. V.6.2 (a) Démontrer que $\mathbb{Q}$ est négligeable dans $\mathbb{R}$ (i.e. $\lambda(\mathbb{Q}) = 0$).

(b) Prouver l'existence de $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{\mathbb{Q}}\, d\lambda = \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{\mathbb{Q}}(x)\, \lambda(dx)$ et calculer sa valeur.

Exercice V.7 (Comparaison entre les intégrales de Riemann et de Lebesgue)

E. V.7.1 (a) Calculer $\displaystyle\int_{\mathbb{R}_+} e^{-t}\, \lambda(dt)$.

(b) Calculer $\lim_{n\to+\infty} \displaystyle\int_0^{\pi} \sin^n(t)\, dt$.

E. V.7.2 Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$.

(a) La fonction $x \mapsto \displaystyle\int_0^x f(t)\, dt$ est-elle dérivable sur $\mathbb{R}$?

(b) La fonction $x \mapsto \displaystyle\int_{[0,x]} f(t)\, \lambda(dt)$ est-elle dérivable sur $\mathbb{R}$?

(c) La fonction $x \mapsto \displaystyle\int_{[0,x]} f(t) 1_{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}(t)\, \lambda(dt)$ est-elle dérivable sur $\mathbb{R}$?

E. V.7.3 (a) La fonction $t \mapsto \frac{\sin(t)}{t}$ est-elle Riemann-intégrable sur $\mathbb{R}_+$? Lebesgue-intégrable?

(b) Mêmes questions pour $t \mapsto \frac{\sin(t)}{t} 1_{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}(t)$.

D) Approfondissement

Exercice V.8 (Théorème de Féjer dans L^p)

Cet exercice fait suite à l'Exercice II.6. On en reprend donc les notations.

E. V.8.1 Soit $p \in [1, \infty[$. Dans cette question, nous allons étendre le théorème de Féjer à $L^p([-\pi, \pi], \mathcal{B}([-\pi, \pi]), \lambda)$, nous ne supposons donc plus que f est continue.

(a) Soit $r \in [1, \infty]$. Prouver que pour tout $g \in L^r(\mathbb{R})$ et tout $h \in L^1(\mathbb{R})$, $\|g * h\|_r \le \|g\|_r \|h\|_1$. *[Indication: commencer par appliquer l'inégalité de Hölder à $|g| * |h|(x)$.]*

**(b) Utiliser le théorème de Féjer tel qu'énoncé à la question E.II.6.1 pour démontrer que si $\widetilde{f}$ est continue sur $[-\pi, \pi]$, alors pour tout $\epsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $\|\widetilde{f} - K_n * \widetilde{f}\|_p \leq \epsilon$.

*(c) Soit $f \in L^p([-\pi, \pi], \mathcal{B}([-\pi, \pi]), \lambda)$. En utilisant les questions précédentes, montrer que $\|f - K_N * f\|_p \to 0$ quand $N \to \infty$.

E. V.8.2 Application du théorème précédent: Soit $f \in L^1([-\pi, \pi], \mathcal{B}([-\pi, \pi]), \lambda)$. Montrer l'injectivité des coefficients de Fourier (i.e. si $\forall n \in \mathbb{N}, c_n(f) = 0$, alors $f = 0$ p.p.).

L'exercice suivant montre que la mesure de Lebesgue possède des propriétés qui ne sont pas toujours intuitives.

Exercice V.9 (Propriétés topologiques de la mesure de Lebesgue)

***E. V.9.1** Montrer que pour tout $\epsilon > 0$, il existe O_ϵ un ouvert dense de $\mathbb{R}$ tel que $\lambda(O_\epsilon) \leq \epsilon$.

E. V.9.2 Soit A un ouvert de $\mathbb{R}$. A-t-on équivalence entre "A est borné" et "A est de mesure (de Lebesgue) finie"?

E. V.9.3 Soit A dans $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. A-t-on équivalence entre "$\lambda(A) > 0$" et "A contient un ouvert non vide"?

Exercice V.10 (Inégalité de Hardy)

Soit f une fonction de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ appartenant à L^2. Pour $x > 0$, on pose:

$$F(x) = \frac{1}{x} \int_{[0,x]} f(t) \, \lambda(dt).$$

E. V.10.1 Montrer que F est définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

E. V.10.2 On suppose que f est continue à support compact dans $\mathbb{R}_+^*$.

(a) Montrer que F est solution d'une équation différentielle linéaire simple.

(b) En déduire que:

$$\int_{\mathbb{R}_+} F^2(x) \, \lambda(dx) = 2 \int_{\mathbb{R}_+} F(x) f(x) \, \lambda(dx).$$

(c) Montrer que:

$$||F||_2 \leq 2||f||_2.$$

E. V.10.3 On ne suppose plus que f est continue à support compact. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues à support compact qui converge vers f dans L^2.

(a) Justifier l'existence de la suite (f_n).

(b) Soit $F_n(x) = \dfrac{1}{x} \displaystyle\int_{[0,x]} f_n(t) \, \lambda(dt)$. Montrer que $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans L^2.

(c) Soit $\hat{F}$ la limite de la suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Montrer que:

$$||\hat{F}||_2 \leq 2||f||_2.$$

(d) Montrer que $\hat{F} = F$ p.p.

(e) En déduire que $||F||_2 \leq 2||f||_2$ et donc que l'application $f \mapsto F$ est continue.

Remarque : de manière plus générale, on peut démontrer que si f est dans L^p alors F l'est aussi et que:

$$||F||_p \leq \frac{p}{p-1}||f||_p.$$

Séance VI : Probabilités et mesure

A) Objectifs de la séance

A la fin de cette séance,

- je maîtrise les notions d'espace de probabilités, de variable aléatoire, de loi;
- je suis capable de calculer la probabilité d'un événement, lorsque la mesure de probabilité est donnée;
- je maîtrise les notions de fonction de répartition et de densité de probabilité;
- je sais déterminer la loi d'une variable aléatoire;
- je suis capable de vérifier qu'une variable aléatoire donnée est mesurable par rapport à une sous-tribu;
- je suis capable de calculer l'espérance et la variance d'une variable aléatoire, lorsqu'elles existent;
- je maîtrise l'application du théorème de transfert (calculs, détermination de lois).

B) Pour se familiariser avec les concepts (à traiter avant les séances de TD)

Les questions VI.1 et VI.2 sont à traiter avant la séance de TD. Les corrigés sont disponibles sur internet.

Question VI.1
Soient $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité et N une variable aléatoire réelle suivant une loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ de paramètre $\lambda > 0$:

$$\mathbb{P}(N = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}.$$

Q. VI.1.1 (a) Rappeler la définition de $\mathbb{E}[N]$ (i.e. sous la forme d'une intégrale sur Ω).

(b) En utilisant le théorème de transfert, écrire $\mathbb{E}[N]$ sous forme d'une somme.

(c) Calculer l'espérance de N.

Question VI.2
Soient $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité et X une variable aléatoire réelle suivant une loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma)$:

$$\mathbb{P}(X \leq x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{x} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(t-m)^2}{\sigma^2}\right) dt.$$

Q. VI.2.1 (a) Rappeler la définition de $\mathbb{E}[X]$ (i.e. sous la forme d'une intégrale sur Ω).

(b) En utilisant le théorème de transfert, écrire $\mathbb{E}[X]$ sous forme d'une intégrale sur $\mathbb{R}$.

(c) Calculer l'espérance de X.

C) Exercices

Voici deux exercices préliminaires mettant en oeuvre la définition de variable aléatoire, le théorème de transfert et les changements de variables.

Exercice VI.1 (Calculs d'espérance)
Les deux questions sont indépendantes.
E. VI.1.1 Pour tout $p \in]0,1[$, on considère une mesure de probabilité μ sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, proportionnelle à $\sum_{n=0}^{\infty} p^n \, \delta_n$, où δ_n désigne la mesure de Dirac en n.

(a) Justifier l'existence de μ.

(b) Déterminer l'espérance d'une variable aléatoire de loi μ.

E. VI.1.2 On pose $U = \frac{X-m}{\sigma}$, où X est une variable aléatoire réelle suivant une loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma)$. Quelle est la loi de U ? Déterminer la loi de la variable aléatoire $Y = U^2$. *[Indication : on considérera la quantité $\mathbb{E}[h(Y)]$ pour $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonction mesurable bornée.]*

Exercice VI.2 (Densité de probabilité, loi log-normale)
Soit X une variable aléatoire réelle dont la loi est proportionnelle à $e^{-x^2/2} \, \lambda(dx)$, où λ désigne la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$.
E. VI.2.1 Montrer que $Y = e^X$ est une variable aléatoire admettant une densité de probabilité.

Les trois exercices suivants vous familiarisent avec la définition de variable aléatoire. Ils illustrent l'importance de la mesurabilité par rapport à une certaine tribu et le lien avec des égalités presque sures. Les trois résultats qu'ils démontrent sont très importants et pourraient faire partie du cours.

Exercice VI.3

E. VI.3.1 Montrer que si X et Y sont 2 variables aléatoires réelles presque sûrement égales, alors elles ont la même loi. Montrer que la réciproque est fausse.

Exercice VI.4

E. VI.4.1 Dans l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, soient $\mathcal{G}$ et $\mathcal{H}$ deux sous-tribus indépendantes de $\mathcal{F}$. Les sous-tribus $\mathcal{G}$ et $\mathcal{H}$ sont dites indépendantes si pour tout $A \in \mathcal{G}$ et tout $B \in \mathcal{H}$,

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \, \mathbb{P}(B).$$

Montrer que si X est une variable aléatoire réelle à la fois $\mathcal{G}$-mesurable et $\mathcal{H}$-mesurable, alors X est constante presque surement, i.e. qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ telle que $\mathbb{P}(X = c) = 1$.

Exercice VI.5
Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, et à valeurs dans $\mathbb{R}^p$ et $\mathbb{R}^q$ respectivement.

Le but de l'exercice est de montrer que Y est X-mesurable (c'est-à-dire $\sigma(X)$-mesurable) si et seulement s'il existe une fonction borélienne $\Psi : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ telle que $Y = \Psi(X)$.

E. VI.5.1 On suppose que Y est étagée, i.e. $Y = \sum_{i=1}^{k} a_i \mathbb{1}_{A_i}$, et $\sigma(X)$-mesurable.

(a) Exprimer la mesurabilité de Y en fonction des A_i.

(b) En déduire une fonction étagée $\Psi : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ telle que $Y = \Psi(X)$.

E. VI.5.2 Dans le cas général,

(a) justifier l'existence d'une suite de v.a. étagées et $\sigma(X)$-mesurables $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers Y.

(b) En écrivant $Y_n = \Psi_n(X)$ avec Ψ_n borélienne, on considère l'ensemble de convergence $C = \{x \in \mathbb{R}^p : \lim_{n\to\infty} \Psi_n(x) \in \mathbb{R}^q\}$. Montrer que $C \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^p)$.

(c) Remarquer que $X(\Omega) \subset C$ et en déduire une fonction borélienne $\Psi : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ telle que $Y = \Psi(X)$.

E. VI.5.3 Réciproquement montrer que si $Y = \Psi(X)$ avec $\Psi : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ borélienne, alors Y est $\sigma(X)$-mesurable.

La loi exponentielle est très utilisée dans la modélisation des défaillances de systèmes. L'exercice suivant montre ses caractéristiques vis à vis du phénomène de mémoire...

Exercice VI.6 (Loi exponentielle)
Un fabricant d'ordinateurs portables souhaite vérifier que la période de garantie qu'il doit associer au disque dur correspond à un nombre pas trop important de retours de ce composant sous garantie. Des essais en laboratoire ont montré que la durée de vie X (en années) de ce composant est distribuée selon une loi exponentielle de moyenne 4.

E. VI.6.1 Quelle est la probabilité qu'un disque dur fonctionne sans défaillance plus de 4 ans?

E. VI.6.2 Quelle est la probabilité qu'un disque dur fonctionne sans défaillance 6 ans au mois, sachant qu'il a déjà fonctionné five ans?

E. VI.6.3 Quelle est la probabilité que la durée de vie soit comprise entre $\mathbb{E}[X] - \sigma(X)$ et $\mathbb{E}[X] + \sigma(X)$?

E. VI.6.4 Pendant combien de temps 50% des disques durs fonctionnent-ils sans défaillance?

E. VI.6.5 Donner la période de garantie optimum pour remplacer moins de 15% des disques durs sous garantie.

D) Approfondissement

Exercice VI.7 (Loi exponentielle)
Soit T une variable aléatoire réelle telle que

$$\forall s, t \geq 0; \quad \mathbb{P}(T > t + s) = \mathbb{P}(T > t)\, \mathbb{P}(T > s). \tag{VI.1}$$

Le but de cet exercice est de montrer que soit $\mathbb{P}(T > 0) = 0$, soit T suit une loi exponentielle.

E. VI.7.1 Vérifier que si $\mathbb{P}(T > 0) = 0$, alors la relation de départ est satisfaite.

E. VI.7.2 On suppose alors $\mathbb{P}(T > 0) > 0$.

(a) Déterminer la limite de la suite $\left(\mathbb{P}(T > \frac{1}{n})\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

(b) En déduire qu'il existe $\epsilon > 0$ tel que $\mathbb{P}\{T > \epsilon\} > 0$.

(c) Montrer que pour tout $t > 0$, $\mathbb{P}(T > t) > 0$. Pour tout $t > 0$, on considérera $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $t < n\epsilon$.

E. VI.7.3 On définit l'application $f : t \mapsto \log \mathbb{P}(T > t)$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

(a) Ecrire la relation vérifiée par f.

(b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(n) = nf(1)$.

(c) En déduire que pour tout $x \in \mathbb{Q}_+$, $f(x) = xf(1)$ puis que cette relation est valable pour tout $x \in \mathbb{R}_+$.

E. VI.7.4 Déterminer $\lim_{n\to\infty} f(n)$. En déduire que $f(1) < 0$. Conclure.

Exercice VI.8 (Lois gamma, beta, χ^2)
Pour $a > 0$, on rappelle la définition de

$$\Gamma(a) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{a-1}\, dx.$$

On appelle *loi gamma* de paramètres $a > 0$ et $\lambda > 0$, notée $G(a, \lambda)$, la mesure de probabilité sur $\mathbb{R}$ de densité $\gamma_{a,\lambda}$ définie par

$$x \mapsto \gamma_{a,\lambda}(x) = \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} e^{-\lambda x} x^{a-1} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x).$$

E. VI.8.1 Soit X une v. a. de loi $G(a, \lambda)$. Calculer $\mathbb{E}[X]$ et $\mathbb{V}\mathrm{ar}(X)$.

E. VI.8.2 Soient X et Y deux v. a. indépendantes de lois $G(a, \lambda)$ et $G(b, \lambda)$.

(a) Montrer que $X + Y$ et $\frac{X}{X+Y}$ sont indépendantes et déterminer leur lois de probabilité. En déduire que

$$B(a, b) = \int_0^1 x^{a-1}(1 - x)^{b-1}\, dx = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a + b)}.$$

(b) Déterminer la loi de $\frac{X}{Y}$.

(c) Si $X_1, \dots, X_n$ sont des variables aléatoires i.i.d. de loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$, donner la loi de $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.

E. VI.8.3 Soit Y une v.a. gaussienne centrée réduite. Montrer que Y^2 suit la loi gamma $G(1/2, 1/2)$. En déduire $\Gamma(1/2)$.

E. VI.8.4 Si $Y_1, \dots, Y_n$ sont des v. a. i.i.d. de loi $\mathcal{N}(0, 1)$, donner la loi de $Z = Y_1^2 + \cdots + Y_n^2$ et calculer $\mathbb{E}[Z]$ et $\mathbb{V}\mathrm{ar}(Z)$.

Séance VII : Mesures produits

A) Objectifs de la séance

A la fin de cette séance,

- je connais la notion de tribu produit;
- je connais la caractérisation de la mesure produit, par ses valeurs sur les produits cartésiens;
- je suis capable de vérifier qu'une fonction de plusieurs variables est mesurable et intégrable;
- je maîtrise l'application des théorèmes de Fubini-Tonelli et Fubini-Lebesgue, pour calculer des intégrales de fonctions de plusieurs variables;
- je suis capable d'appliquer l'intégration par rapport à une mesure produit, au cas particulier des lois de variables aléatoires;
- je sais effectuer un changement de variables dans une intégrale multiple.

B) Pour se familiariser avec les concepts (à traiter avant les séances de TD)

Les questions VII.1 et VII.2 sont à traiter avant la séance de TD. Les corrigés sont disponibles sur internet.

Question VII.1

Q. VII.1.1 Trouver une fonction $f \in L^1(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ qui ne soit pas dans $L^p(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$, $\forall p > 1$. Trouver une fonction $f \in L^p(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ pour un certain $p > 1$ qui ne soit pas dans $L^1(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$.

Question VII.2

Soit $\lambda^{(2)}$ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^2$ et f la fonction définie par

$$f(x, y) = \sin(2\pi x)e^{-y}.$$

Q. VII.2.1 On considère le domaine $D = [0, 1] \times \mathbb{R}_+$.

(a) En utilisant précisément les théorèmes du cours, montrer que $f \in L^1(D, \lambda^{(2)})$.

(b) Calculer $\int_D f \, d\lambda^{(2)}$.

C) Exercices

La théorie de Lebesgue (et plus généralement la théorie de la mesure) fournit un cadre plus naturel et cohérent pour l'étude des intégrales multiples que celui de l'intégrale de Riemann. A travers ce TD, on observera, sur des exemples simples, que les théorèmes de Tonelli et Fubini constituent des outils efficaces pour l'étude de l'intégrabilité des fonctions de plusieurs variables.

Exercice VII.1 (Intégrabilité)

E. VII.1.1 La fonction g définie par $g(x,y,z) = \frac{1}{1-xyz}$ est-elle intégrable sur $]0,1[^3$?

E. VII.1.2 Pour quelles valeurs de α la fonction h définie $h(x,y) = \frac{1}{(x^2+y^2)^\alpha}$ est-elle intégrable sur $D = \{(x,y) \in]0,+\infty[^2 /\ x^2+y^2 < 1\}$?

Exercice VII.2 (Tribu et mesure de $\mathbb{R}^3$)
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction borélienne.
On considère $\Gamma = \{(x, f(x));\ x \in \mathbb{R}^2\}$ le graphe de f.

E. VII.2.1 Montrer que Γ est un borélien de $\mathbb{R}^3$.

E. VII.2.2 Montrer que Γ est négligeable dans $\mathbb{R}^3$ (pour la mesure de Lebesgue).

Le but de l'exercice qui suit est d'étendre le lemme de Riemann-Lebesgue des fonctions Riemann-intégrables sur un segment aux fonctions Lebesgue-intégrables sur un intervalle quelconque. Outre le résultat de cet exercice, on retiendra la méthode qui repose sur un raisonnement de densité.

Exercice VII.3 (Lemme de Riemann-Lebesgue)

E. VII.3.1 (a) Soit f une fonction en escalier sur $[a,b]$. Montrer que:

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f(x)\cos(nx)\,dx = 0 = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f(x)\sin(nx)\,dx.$$

(b) Etendre le résultat au cas d'une fonction Riemann-intégrable (ou réglée ou continue par morceaux).

E. VII.3.2 Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.

(a) Soit f une fonction indéfiniment dérivable à support compact dans I. Montrer que:

$$\lim_{n\to\infty} \int_I f(x)\cos(nx)\,\lambda(dx) = 0 = \lim_{n\to\infty} \int_I f(x)\sin(nx)\,\lambda(dx).$$

(b) Etendre le résultat au cas d'une fonction Lebesgue-intégrable.

Exercice VII.4

E. VII.4.1 La fonction f définie par $f(0,0) = 0$ et $f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$ est-elle intégrable sur $[0,1]^2$?

Exercice VII.5
Soit X une variable aléatoire positive de densité de probabilité f.

E. VII.5.1 Montrer que pour tout $r \geq 1$, on a

$$\mathbb{E}\left[X^r\right] = \int_{\mathbb{R}_+} r\, x^{r-1}\, \mathbb{P}(X > x)\, \lambda(dx),$$

lorsque l'intégrale est finie (λ désigne la mesure de Lebesgue).

Les deux exercices qui suivent montrent que les théorèmes usuels sur les intégrales multiples permettent d'obtenir rapidement et facilement des résultats classiques.

Exercice VII.6 (Calcul d'intégrales simples)
Soient $0 < a < b$.

E. VII.6.1 Calculer $\displaystyle\int_a^b \mathrm{e}^{-xy}\, dy$. En déduire la valeur de

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-ax} - \mathrm{e}^{-bx}}{x}\, dx.$$

E. VII.6.2 Adapter la méthode précédente pour calculer

$$J = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(ax) - \cos(bx)}{x}\, dx.$$

Exercice VII.7 (Calcul d'une intégrale classique)
Soit $a > 0$ et $D_a =]0, a[\times]0, +\infty[$.

E. VII.7.1 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(u, v) = \frac{\sin(u)}{u}\mathrm{e}^{-v}$ pour $(u, v) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ et $f(0, v) = \mathrm{e}^{-v}$ pour $v \in \mathbb{R}$. Montrer que f est intégrable sur D_a.

E. VII.7.2 Montrer que l'application T définie par $T(x, y) = (x, xy)$ est un difféomorphisme de D_a sur lui-même.

E. VII.7.3 Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}^2$ par $g(x, y) = \mathrm{e}^{-xy} \sin(x)$. Montrer que g est intégrable sur D_a. Comparer son intégrale à celle de f.

E. VII.7.4 Exprimer $\displaystyle\int_0^a \frac{\sin(u)}{u}\, du$ en fonction de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-ay}}{1 + y^2}\, dy$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{y\, \mathrm{e}^{-ay}}{1 + y^2}\, dy$.

E. VII.7.5 En déduire l'existence et la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u}\, du$.

Exercice VII.8

E. VII.8.1 Soient X et Y deux variables aléatoires réelles dont la loi jointe admet la densité $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$. Déterminer la loi de Y/X.

D) Approfondissement

La formule d'intégration par parties est valable pour des fonctions C^1. Nous allons généraliser cette formule à une classe plus large de fonctions.

Exercice VII.9 (Généralisation de la formule d'intégration par parties)
Dans cet exercice, on note $L^1 = L^1([0,1])$.

Soit f une fonction de L^1. Pour tout x de $[0,1]$, on pose:

$$F(x) = \int_{[0,x]} f(t)\ \lambda(dt).$$

E. VII.9.1 La formule d'intégration par parties est-elle valable pour des fonctions dérivables presque partout ou même partout?

E. VII.9.2 (a) La fonction F est-elle dérivable presque partout sur $]0,1[$?

(b) La fonction F est-elle nécessairement dérivables partout sur $]0,1[$?

E. VII.9.3 Soit g une fonction de L^1. Pour tout x de $[0,1]$, on pose

$$G(x) = \int_{[0,x]} g(t)\ \lambda(dt).$$

(a) Montrer que, pour tout couple (u,t) de $[0,1]^2$,

$$\mathbf{1}_{[0,t]}(u)\ \mathbf{1}_{[0,x]}(t) = \mathbf{1}_{[0,x]}(u)\left(\mathbf{1}_{[0,x]}(t) - \mathbf{1}_{[0,u[}(t)\right).$$

(b) Montrer que $(t,u) \mapsto |f(t)g(u)|$ est intégrable sur $[0,1]^2$.

(c) En déduire que, pour tout x de $[0,1]$,

$$\int_{[0,x]} G(t)f(t)\ \lambda(dt) = G(x)F(x) - \int_{[0,x]} g(t)F(t)\ \lambda(dt).$$

(d) Démontrer alors que pour tout couple (a,b) de $]0,1[^2$, on a

$$\int_{[a,b]} G(t)f(t)\ \lambda(dt) = [GF]_a^b - \int_{[a,b]} g(t)F(t)\ \lambda(dt).$$

Séance VIII : Convolution, probabilités dans $\mathbb{R}^d$ et indépendance

---

A) Objectifs de la séance

A la fin de cette séance,

- je suis capable d'étudier la convolution de deux fonctions (intégrabilité, convergence);
- je suis capable d'exprimer l'indépendance de variables aléatoires en terme de mesure produit;
- je suis capable de vérifier que deux variables aléatoires sont indépendantes;
- je suis capable de déterminer la loi d'une variable aléatoire définie comme fonction de deux variables aléatoires indépendantes;
- je distingue parfaitement les notions d'indépendance et de non corrélation;
- je suis capable d'étudier un vecteur de variables aléatoires réelles, dont la loi est donnée (loi de chaque composante, indépendance).

B) Pour se familiariser avec les concepts (à traiter avant les séances de TD)

Les questions VIII.1 et VIII.2 sont à traiter avant la séance de TD. Les corrigés sont disponibles sur internet.

Question VIII.1
Soient $m_1, m_2 \in \mathbb{R}$ et $\sigma_1, \sigma_2 > 0$. Soient X et Y deux variables aléatoires independantes telles que $X \sim \mathcal{N}(m_1, \sigma_1^2)$ et $Y \sim \mathcal{N}(m_2, \sigma_2^2)$, i.e. X (resp. Y) suit une loi gaussienne de moyenne m_1 (resp. m_2) et d'écart type σ_1 (resp. σ_2).

Q. VIII.1.1 Déterminer la loi de $X + Y$.

La question suivante illustre le fait que la non-corrélation entre des variables aléatoires n'implique pas nécessairement leur indépendance.

Question VIII.2
Soient X et Y deux variables aléatoires de Bernoulli independantes de paramètre $\frac{1}{2}$.

Q. VIII.2.1 Déterminer la loi de $X + Y$, $|X - Y|$ et $(X + Y)|X - Y|$.

Q. VIII.2.2 Montrer que $X + Y$ et $|X - Y|$ sont des variables aléatoires non-corrélées.

Q. VIII.2.3 Montrer que $X + Y$ et $|X - Y|$ ne sont pas indépendantes. *[Indication: on pourra par exemple calculer $\mathbb{P}(X + Y = 0, |X - Y| = 0)$].*

C) Exercices

Exercice VIII.1
Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes distribuées suivant la même loi exponentielle de paramètre 1.

E. VIII.1.1 Déterminer la loi jointe de $U = X + Y$ et $V = \dfrac{X}{X+Y}$.

E. VIII.1.2 Les variables aléatoires U et V sont-elles indépendantes?

E. VIII.1.3 En déduire que V suit la loi uniforme sur $[0, 1]$.

Le produit de convolution est un outil très utilisé en analyse ainsi qu'en sciences de l'ingénieur. Voici un petit exercice permettant de le manipuler avec des noyaux régularisants, dont on verra plus tard certaines applications pour les EDP et que vous rencontrerez également en traitement du signal.

Exercice VIII.2 (Noyau régularisant)
On note $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}$ qui sont indéfiniment dérivables et à support compact. Autrement dit, $f \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ sssi f est continuement dérivable à tout ordre et si il existe $R > 0$ tel que f est nulle en dehors de la boule fermée $\overline{B(0, R)}$.

On appelle *noyau régularisant* une fonction $j \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ telle que:

- $j \geq 0$;
- $\int_{\mathbb{R}^d} j(x)\lambda(dx) = 1$;
- $|x| \geq 1 \Rightarrow j(x) = 0$.

On définit alors une famille régularisante $\{j_\epsilon\}_{\epsilon>0}$ par la relation: $\forall \epsilon > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}^d,\ j_\epsilon(x) = \epsilon^{-d} j(\frac{x}{\epsilon})$.

E. VIII.2.1 Que peut-on dire du support de j_ϵ? Combien vaut $\int_{\mathbb{R}^d} j_\epsilon(x)\lambda(dx)$?

E. VIII.2.2 On se place dans le cas $d = 1$. On considère la fonction

$$j(x) = \begin{cases} C \exp\left(-\frac{1}{1-|x|^2}\right) & \text{si } |x| < 1\,, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

où $C = \left(\int_{]-1,1[} \exp\left(-\frac{1}{1-|x|^2}\right) \lambda(dx)\right)^{-1}$.
Vérifier que j est un noyau régularisant.

E. VIII.2.3 Dans le reste de l'exercice, j désigne le noyau particulier défini à la question précédente. Montrer que si f est continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, alors $j_\epsilon * f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ pour tout $\epsilon > 0$.

E. VIII.2.4 Pour la même fonction f, montrer que $j_\epsilon * f$ converge ponctuellement vers f lorsque $\epsilon \to 0$. Soit $\varrho > 0$, montrer que la convergence est uniforme sur la boule fermée $\overline{B(0, \varrho)}$ (on dit que la convergence est uniforme sur les compacts).

***E. VIII.2.5** Étendre les résultats précédents au cas $d > 1$.

Les deux exercices suivants s'intéressent à la composée de variables aléatoires.

Exercice VIII.3
Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité. Soient N une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires.

On définit X_N par

$$\forall \omega \in \Omega, \quad X_N(\omega) = X_{N(\omega)}(\omega).$$

E. VIII.3.1 Montrer que X_N est une variable aléatoire.

Exercice VIII.4
On suppose que l'intensité d'un tremblement de terre est une variable aléatoire X suivant une loi exponentielle de paramètre a et que le nombre de tremblements de terre par an N est une variable de Poisson de paramètre λ.

E. VIII.4.1 On considère la variable Y représentant l'intensité maximale annuelle de ces tremblements de terre. Quelle est la loi de Y?

On étudie maintenant les liens entre indépendances de variables aléatoires, lois marginales et lois conditionnelles.

Exercice VIII.5
Dans l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, on considère un couple de v. a. (X, Y), dont la loi est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue, défini sur le domaine

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ 0 < y \leq 1 \text{ et } 0 \leq x \leq y\right\},$$

by the probability density function $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_+$,

$$f(x, y) = \begin{cases} 1/y & \text{si } (x, y) \in D \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

E. VIII.5.1 Montrer que f définit bien une densité de probabilité.

E. VIII.5.2 Exprimer la fonction de répartition du couple (X, Y).

E. VIII.5.3 Calculer les densités de probabilité marginales des variables aléatoires X et Y.

E. VIII.5.4 Calculer les densités de probabilité des variables $Y \mid X = x$ et $X \mid Y = y$.

E. VIII.5.5 Les variables X et Y sont-elles indépendantes?

D) Approfondissement

Exercice VIII.6 (Convolution)
Soient f un élément de $L^1(\mathbb{R})$ et g et h deux éléments de $L^2(\mathbb{R})$. On définit $\check{f}$ en posant $\check{f}(x) = f(-x)$.

E. VIII.6.1 Montrer que $|f| * |g| \in L^2(\mathbb{R})$.

E. VIII.6.2 Montrer que la fonction $(x, y) \mapsto f(x - y)g(y)h(x)$ est intégrable sur $\mathbb{R}^2$.

E. VIII.6.3 En déduire que:

$$\int_{\mathbb{R}} (f * g)h \, d\lambda = \int_{\mathbb{R}} g(\check{f} * h) \, d\lambda.$$

***E. VIII.6.4** Démontrer que si f et g sont des fonctions à supports compacts notés A et B, alors $f * g$ est à support compact inclus dans $A + B$.

Exercice VIII.7 (Noyau régularisant (suite) - Lemme d'Urysohn et conséquence)

***E. VIII.7.1** On va prouver le Lemme d'Urysohn: soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$ et $K \subset \Omega$ un compact, alors il existe $\psi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ avec $\psi(x) = 1$ pour tout $x \in K$.

(a) Soit $\delta > 0$ tel que l'ensemble $K^{2\delta} = \{x : \ |x - y| \leq 2\delta \text{ pour un } y \in K\}$ est inclus dans Ω. Vérifier que $K^{2\delta}$ est compact.

(b) Soit j le noyau de l'exercice VIII.2 et $\{j_\epsilon\}_{\epsilon>0}$ la famille régularisante. Montrer que pour $\epsilon = \delta$, la fonction $\psi_K = j_\epsilon * \mathbf{1}_{K^\delta}$ est une solution au problème d'Urysohn.

***E. VIII.7.2** On admet la densité des fonctions $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$ dans $L^p(\mathbb{R}^d)$. A l'aide de la question précédente, montrer que $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ est dense dans $L^p(\mathbb{R}^d)$. *[Indication: considérer une suite croissante de compacts $\{K_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tel que $\cup K_n = \mathbb{R}$ et la suite de fonctions $\{\psi_{K_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$.]*

Séance IX : Transformée de Fourier et fonction caractéristique

A) Objectifs de la séance

A la fin de cette séance,

- je connais la définition et les propriétés de la transformée de Fourier d'une fonction intégrable;
- je connais la transformée de Fourier d'une gaussienne;
- je comprends la construction de la transformation de Fourier dans L^2 et je connais la formule d'inversion;
- je sais exprimer le fait que la transformation de Fourier dans L^2 est une isométrie (Parseval);
- je connais le lien entre transformée de Fourier et dérivation, ainsi qu'entre transformée de Fourier et convolution;
- je suis capable de déterminer la fonction caractéristique d'une variable aléatoire.

B) Pour se familiariser avec les concepts (à traiter avant les séances de TD)

Les questions IX.1 et IX.2 sont à traiter avant la séance de TD. Les corrigés sont disponibles sur internet.

En cours, on a vu que la transformée de Fourier est une application linéaire de L^1 dans C^0 ou de L^2 dans L^2. Nous allons vérifier que l'espace d'arrivée dépend bien de l'espace de départ.

Question IX.1 (Transformée de Fourier dans L^1 et L^2)

Q. IX.1.1 (a) Calculer $\mathcal{F}\mathbf{1}_{[-1,1]}$.

(b) En déduire que $\mathcal{F}$ n'est pas une application de L^1 dans L^1.

Q. IX.1.2 (a) Prouver que $\mathcal{F}\frac{\sin(t)}{t}$ et $\bar{\mathcal{F}}\frac{\sin(t)}{t}$ existent.

(b) Utiliser 1)(a) pour calculer $\bar{\mathcal{F}}\frac{\sin(t)}{t}$, et en déduire $\mathcal{F}\frac{\sin(t)}{t}$.

(c) En déduire que $\mathcal{F}$ n'est pas une application de L^2 dans C^0.

Question IX.2

Soit X une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ et soit Y une loi de Poisson de paramètre $\mu > 0$.

Q. IX.2.1 Déterminer la fonction caractéristique de X.

Q. IX.2.2 Déterminer la fonction caractéristique de Y.

C) Exercices

Nous allons étudier l'exemple classique de la transformée d'un signal gaussien. Ceci permettra de mettre en oeuvre des méthodes usuelles de calcul de transformées.

Exercice IX.1 (Transformée de Fourier d'une gaussienne)

E. IX.1.1 Soit $f(x) = \exp(-cx^2)$ avec $c > 0$. Montrer que f admet une transformée de Fourier.

E. IX.1.2 (a) Trouver une équation différentielle simple vérifiée par f.

(b) En déduire une équation simple vérifiée par $\mathcal{F}f$.

(c) Déterminer $\mathcal{F}f$.

E. IX.1.3 Trouver un invariant pour la transformée de Fourier $\mathcal{F}$.

La transformée de Fourier d'une fonction de carré intégrable existe mais la formule usuelle

$$\mathcal{F}f(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x) \mathrm{e}^{-ixy}\, \lambda(dx)$$

n'est plus valable. Nous allons établir des formules adaptées à ce cas.

Exercice IX.2 (Transformée de Fourier-Plancherel)
Soit f une fonction de $L^2(\mathbb{R})$. On note $f_n = f\, \mathbf{1}_{[-n,n]}$.

E. IX.2.1 Etablir qu'on a dans L^2:

$$\mathcal{F}f(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{n\to+\infty} \int_{[-n,n]} f(x) \mathrm{e}^{-ixy}\, \lambda(dx).$$

E. IX.2.2 Montrer que pour toute fonction g de $L^2(\mathbb{R})$, on a:

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} g\, \mathcal{F}f_n\, d\lambda = \int_{\mathbb{R}} g\, \mathcal{F}f\, d\lambda.$$

E. IX.2.3 En prenant $g = \mathbf{1}_{[0,x]}$, montrer que:

$$\mathcal{F}f(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{d}{dy} \int_{\mathbb{R}} \frac{1 - \mathrm{e}^{-ixy}}{ix} f(x)\, \lambda(dx) \qquad \text{p.p.}$$

Soit $\mathcal{C}^0_\ell(\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ qui converge vers 0 en $\pm\infty$. On a vu en cours que $\mathcal{F}(L^1) \subseteq \mathcal{C}^0_\ell(\mathbb{R})$. Le but du prochain exercice est de démontrer la non-surjectivité de $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}) \to \mathcal{C}^0_\ell(\mathbb{R})$.

Exercice IX.3 (Non-surjectivité de la transformée de Fourier)
On considère la fonction $\theta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \theta(x) = \int_x^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\, du,$$

où l'intégrale est au sens de Riemann.

E. IX.3.1 Montrer que θ est bien définie, et qu'elle est continue et bornée sur $[0, +\infty[$.

E. IX.3.2 Soit f une fonction impaire et intégrable sur $\mathbb{R}$. On définit, pour tout $z \geq 1$,

$$\phi(z) = \int_1^z \frac{\mathcal{F}f(y)}{y}\, dy.$$

Montrer que $\phi(z)$ admet une limite finie lorsque $z \to +\infty$.

E. IX.3.3 Soit g la fonction (impaire) définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \frac{\arctan x}{\log(2 + x^2)}.$$

(a) Montrer que g est une fonction continue et tend vers 0 en $-\infty$ et $+\infty$ (i.e. $g \in \mathcal{C}^0_\ell(\mathbb{R})$).

(b) Montrer que si g est la transformée de Fourier d'une fonction f, alors nécessairement f est impaire. *[Indication: on pourra utiliser l'injectivité de la transformée de Fourier, en la démontrant.]*

(c) Montrer que g n'est pas la transformée de Fourier d'une fonction intégrable.

Exercice IX.4 (Transformée de Fourier dans L^1)
Dans cet exercice, L^1 désigne $L^1(\mathbb{R})$, $\mathcal{F}$ désigne la transformée de Fourier et $*$ désigne le produit de convolution.

E. IX.4.1 Montrer qu'il n'existe pas de fonction f de L^1 telle que $\mathcal{F}f = 1$.

E. IX.4.2 Trouver les fonctions f de L^1 telles que $f * f = f$. *[Indication: on pourra utiliser la transformée de Fourier.]*

E. IX.4.3 Montrer qu'il n'existe pas de fonction g de L^1 telle que, pour toute fonction f de L^1, $g * f = f$. *[Indication: on pourra utiliser la transformée de Fourier.]*

E. IX.4.4 Soit f une fonction de L^1 telle que la fonction $y \mapsto y\, \mathcal{F}f(y)$ est dans L^1.

(a) Montrer que $\mathcal{F}f$ appartient à L^1.

(b) En déduire que f admet un représentant dans $\mathcal{C}^1$.

D) Approfondissement

Exercice IX.5 (Une base de vecteurs propres pour $\mathcal{F}$)
On se place dans $L^2(\mathbb{R})$. On note $\mathcal{F}$ la transformée de Fourier et ψ_n la $n$ième fonction de Hermite. On rappelle que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\psi_n(x) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{2^n n! \sqrt{\pi}}} e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}.$$

E. IX.5.1 (a) Calculer $\mathcal{F}^4$.

(b) En déduire les valeurs propres possibles pour $\mathcal{F}$.

***E. IX.5.2** (a) Exprimer $\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{ixy}\psi_n(y)\,\lambda(dy)$ en fonction de $\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-y^2}\frac{d^n}{dy^n}\mathrm{e}^{y^2/2+ixy}\,\lambda(dy)$.

(b) En déduire $\bar{\mathcal{F}}\psi_n$ en fonction de $\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-y^2}\frac{d^n}{dx^n}\mathrm{e}^{(ix+y)^2/2}\,\lambda(dy)$.

(c) Montrer que $\bar{\mathcal{F}}\psi_n = i^n\psi_n$.

E. IX.5.3 (a) En déduire une base hilbertienne de vecteurs propres pour $\mathcal{F}$.

(b) Cette base est-elle aussi une base algébrique?

E. IX.5.4 Soit g une fonction de $L^2(\mathbb{R})$. Exprimer (en le justifiant) g puis $\mathcal{F}g$ en fonction des ψ_n.

La notion de fonction caractéristique est beaucoup manipulée en probabilités, en remarquant le lien avec la transformée de Fourier.

Exercice IX.6 (Loi de Cauchy)
Une v. a. X suit une loi de Cauchy de paramètre $c > 0$ si elle possède la densité

$$f : x \mapsto \frac{1}{\pi}\frac{c}{x^2+c^2}.$$

E. IX.6.1 Déterminer la fonction caractéristique de la loi exponentielle symétrique de paramètre $\lambda > 0$, définie par sa densité

$$g : x \mapsto \frac{\lambda}{2}e^{-\lambda|x|}.$$

E. IX.6.2 En déduire la fonction caractéristique de X.

E. IX.6.3 Montrer que si X et Y sont des v. a. indépendantes suivent des lois de Cauchy de paramètres c et c', alors $X+Y$ suit une loi de Cauchy de paramètre $c+c'$.

E. IX.6.4 Montrer que si X suit une loi de Cauchy de paramètre $c > 0$ et si $\alpha > 0$, alors αX suit une loi de Cauchy de paramètre αc. En particulier, montrer que $2X$ a la même loi que la somme de 2 v. a. de Cauchy indépendantes et de même paramètre.

E. IX.6.5 Montrer que si X et Y sont des v. a. i.i.d. suivant une loi de Cauchy, $\frac{X+Y}{2}$ a même loi que X.

E. IX.6.6 Montrer que si X et Y sont 2 v. a. i.i.d. qui ne sont pas constantes p.s. et de loi symétrique telles que

$$\forall \alpha, \alpha' > 0; \quad \alpha X + \alpha' Y \sim (\alpha+\alpha')X,$$

alors leur loi est une loi de Cauchy.

E) Trois problèmes en ouverture vers d'autres disciplines

Exercice IX.7 (Inégalité de Heisenberg)
Soit f une fonction dérivable en tout point de $\mathbb{R}$ telle que les fonctions f, f', $t \mapsto tf(t)$ et $t \mapsto tf'(t)$ soient de carré intégrable sur $\mathbb{R}$.

***E. IX.7.1** On note $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions infiniment dérivables sur $\mathbb{R}$ et à support compact. Cet espace ainsi que le résultat qui suit seront présentés plus en détails dans le cours d'EDP. Démontrer l'injectivité de l'application linéaire $\mathcal{T} : L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}) \to \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ qui à $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ associe la distribution régulière $\mathcal{T}_f : \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \mapsto \int_{\mathbb{R}} f\phi$. *[Indication: On pourra utiliser le résultat de la Question E.VIII.7.2].*

E. IX.7.2 $**$(a) Exprimer $\mathcal{F}(f')$ en fonction de $\mathcal{F}(f)$.

(b) Montrer que:

$$\left| \int_{\mathbb{R}} tf(t)\overline{f'(t)}\,\lambda(dt) \right|^2 \leq \langle tf(t), tf(t) \rangle_{L^2} \, \langle y\mathcal{F}f(y), y\mathcal{F}f(y) \rangle_{L^2},$$

où dans le précédent produit scalaire, "$tf(t)$" dénote abusivement la fonction $t \mapsto tf(t)$.

E. IX.7.3 (a) Soit $g(t) = tf(t)\bar{f}(t)$.

Montrer que g admet des limites en $\pm\infty$ puis que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} g'(t)\,\lambda(dt) = 0$.

(b) En utilisant g', montrer que

$$\int_{\mathbb{R}} f(t)\overline{f(t)}\,\lambda(dt) = -\int_{\mathbb{R}} tf(t)\overline{f'(t)}\,\lambda(dt) - \int_{\mathbb{R}} tf'(t)\overline{f(t)}\,\lambda(dt).$$

E. IX.7.4 (a) En déduire que si l'on pose $E = \|f\|^2_{L^2} = \|\mathcal{F}f\|^2_{L^2}$ alors

$$\|tf(t)\|^2_{L^2}\,\|y\mathcal{F}f(y)\|^2_{L^2} \geq \frac{E^2}{4}.$$

$*$(b) Montrer, en considérant la fonction $t \mapsto g(t) = \exp(-t^2/2)$, que $1/4$ est le coefficient optimal.

E. IX.7.5 (a) Soit $g(t) = f(t+t_0)\exp(-ity_0)$ pour t_0 et y_0 fixés dans $\mathbb{R}$. Calculer $\mathcal{F}g$.

(b) En déduire

$$\left(\int_{\mathbb{R}} (t-t_0)^2 \frac{|f(t)|^2}{E}\,\lambda(dt) \right) \left(\int_{\mathbb{R}} (y-y_0)^2 \frac{|\mathcal{F}f(y)|^2}{E}\,\lambda(dy) \right) \geq \frac{1}{4}.$$

(c) Trouver les valeurs de t_0 et y_0 qui minimisent les intégrales du membre de gauche de l'inégalité précédente.

Interpréter les valeurs obtenues t_m et y_m comme des valeurs moyennes.

En déduire que les intégrales représentent les variances de t et y.

On en déduit **l'inégalité de Heisenberg** : il existe une constante C telle que

$$\mathit{Variance}(\text{temps}).\mathit{Variance}(\text{energie}) \geq C$$

ou encore, il existe une constante K telle que

$$\mathit{Variance}(\text{temps}).\mathit{Variance}(\text{frequence}) \geq K.$$

Interprétation :
Les fonctions α et β peuvent être interprétées comme des densités (≥ 0, L^1, $\int \alpha\, d\lambda = \int \beta\, d\lambda = 1$).

Ainsi t_m est la valeur moyenne de t et y_m est la valeur moyenne de y et l'inégalité de 5b) fait apparaître des **variances** : $\mathbb{V}\mathrm{ar}(t)$ et $\mathbb{V}\mathrm{ar}(y)$.

Comme y s'interprète comme une pulsation ω, en multipliant par $\hbar^2$ et en remarquant que $E = \hbar\omega$ est une énergie, l'inégalité de 5b) peut s'écrire:

$$\mathbb{V}\mathrm{ar}(\text{temps})\ \mathbb{V}\mathrm{ar}(\text{energie}) \geq C = \frac{\hbar^2}{4}.$$

De même, en remarquant que la fréquence est donnée par $f = \omega/2\pi$, on trouve :

$$\mathbb{V}\mathrm{ar}(\text{temps})\ \mathbb{V}\mathrm{ar}(\text{frequence}) \geq K = \frac{1}{16\pi^2}.$$

Comme ces variances sont des précisions, on peut en déduire l'interprétation en traitement du signal :

Un signal localisé en temps ne peut pas l'être en fréquence (ou en énergie) et réciproquement.

Nous allons maintenant établir un résultat fondamental en traitement du signal:

> Tout signal borné en fréquence peut être reconstitué à partir d'un échantillonage de fréquence adapté.

Exercice IX.8 (Echantillonnage de Shannon)
Soit f un élément de $L^2(\mathbb{R})$ dont la transformée de Fourier est à support compact. Soit $a > 0$ tel que $[-a, a]$ contienne le support de $\mathcal{F}f$.

E. IX.8.1 (a) Montrer que f admet un représentant continu.

$*$(b) Montrer que f admet un représentant indéfiniment dérivable.

E. IX.8.2 Soit $b > a$ et g la fonction $2b$-périodique valant $\mathcal{F}f$ sur $[-a, a]$ et 0 sur $[-b, -a[\cup]a, b]$.

(a) Trouver le développement en série de Fourier de g.

(b) La série de Fourier de g converge-t-elle vers g dans $L^2([-b, b])$?

E. IX.8.3 En déduire que:

$$\int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2\, \lambda(dt) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{\pi}{b} |f(\frac{n\pi}{b})|^2.$$

E. IX.8.4 En notant $\sin_c(u) = \sin(u)/u$ le sinus cardinal, montrer que la série

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(\frac{n\pi}{b}) \sin_c(tb - n\pi)$$

converge vers f dans $L^2(\mathbb{R})$.

****E. IX.8.5** Montrer que la convergence est uniforme.

E. IX.8.6 Enoncer précisément le théorème de Shannon que nous venons de démontrer.

Exercice IX.9 (Formule sommatoire de Poisson)
Soit f une fonction intégrable sur $\mathbb{R}$. On utilisera temporairement ici la variante suivante de la transformée de Fourier:

$$\hat{f}(x) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-2i\pi xt} f(t)\ \lambda(dt).$$

On suppose en outre:

- f continue sur $\mathbb{R}$.
- $\exists M > 0,\ \exists \alpha > 1 :\ \forall x \in \mathbb{R}, \quad |f(x)| \leq \frac{M}{(1+|x|)^\alpha}$.
- $\sum_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(n)| < \infty$.

On considère $F(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} f(x+n)$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.
E. IX.9.1 $*$(a) Montrer que la fonction F est continue.

(b) Montrer que la fonction F admet 1 pour période.

E. IX.9.2 Trouver le développement en série de Fourier de F.

***E. IX.9.2** Montrer que la série de Fourier de F converge simplement vers F. *[Indication : on pourra utiliser le théorème de Féjer.]*

E. IX.9.4 En déduire la formule sommatoire de Poisson:

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} f(n) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(n).$$

E. IX.9.5 En déduire la formule valable pour la définition usuelle (en mathématiques) de la transformée de Fourier:

$$\sqrt{2\pi} \sum_{-\infty}^{+\infty} f(2\pi n) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}f(n).$$

E. IX.9.6 Soit $a > 0$. Calculer la transformée de Fourier de $\exp(-2\pi a|t|)$. En déduire $\sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{n^2+a^2}$.

Séance X : Fonctions caractéristiques et vecteurs gaussiens

A) Objectifs de la séance

A la fin de cette séance,

- je suis capable d'exprimer une condition nécessaire et suffisante d'indépendance de variables aléatoires en terme de fonctions caractéristiques;
- je comprends la définition d'un vecteur gaussien et je ne le confonds pas avec un vecteur composé de variables réelles de loi normale;
- je sais reconnaître qu'un vecteur est gaussien, à partir de la forme de sa fonction caractéristique ou de sa densité;
- je sais exprimer la condition nécessaire et suffisante d'indépendance des composantes d'un vecteur gaussien en terme de matrice de covariance;
- je maîtrise les changements de variables impliquant des vecteurs gaussiens.

B) Pour se familiariser avec les concepts (à traiter avant les séances de TD)

Les questions X.1 et X.2 sont à traiter avant la séance de TD. Les corrigés sont disponibles sur internet.

Question X.1

Q. X.1.1 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient $X_1, X_2, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes avec $X_j \sim \mathcal{P}(j)$ (loi de Poisson de paramètre j) pour $j = 1, \ldots, n$.
En utilisant la fonction caractéristique, déterminer la loi de $\sum_{j=1}^{n} X_j$.
Q. X.1.2 Soient $Y \sim \mathcal{P}(1)$ et $Z \sim \mathcal{P}(2)$ des variables aléatoires de Poisson. On suppose que pour tous $(t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2$,

$$\varphi_{(Y,Z)}(t_1, t_2) = \exp\left\{e^{it_1} + 2e^{it_2} - 3\right\}.$$

Que peut-on dire de Y et Z?

Question X.2

Q. X.2.1 Pour chaque matrice Σ ci-dessous, dire (et justifier) s'il existe un vecteur gaussien de moyenne nulle et de matrice de covariance Σ:

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \Sigma = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}; \quad \Sigma = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}; \quad \Sigma = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

C) Exercices

Exercice X.1
Soient $\rho \in]-1,1[$ et (X,Y) un couple de variables aléatoires réelles, dont la loi admet la densité $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_+$ définie par

$$\forall x,y \in \mathbb{R}, \quad f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left(-\frac{1}{2(1-\rho^2)}(x^2 - 2\rho xy + y^2)\right).$$

E. X.1.1 Montrer que les variables aléatoires X et $Z = \dfrac{Y-\rho X}{\sqrt{1-\rho^2}}$ sont indépendantes et de même loi $\mathcal{N}(0,1)$. En déduire la valeur de $\mathbb{P}(X > 0, Y > 0)$.

L'exercice suivant fournit une méthode pour simuler des variables aléatoires gaussiennes à partir du tirage de variables uniformes. Ce procédé constitue une alternative à la méthode vue en cours pour simuler des variables continues en utilisant leurs fonctions de répartition. Contrairement à cette dernière, la méthode permet de simuler des vecteurs gaussiens à valeurs dans $\mathbb{R}^N$ avec $N > 1$.

Exercice X.2 (Méthode de Box-Muller)
Soit (U,V) un couple de variables aléatoires réelles indépendantes dont la loi de chacune des composantes est la loi uniforme sur $[0,1]$.
E. X.2.1 Montrer que les expressions

$$X = (-2\ln U)^{1/2}\cos(2\pi V)$$
$$Y = (-2\ln U)^{1/2}\sin(2\pi V)$$

définissent deux variables aléatoires réelles.

E. X.2.2 Soit $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une application mesurable positive.

(a) Exprimer $\mathbb{E}[h(X,Y)]$ comme une intégrale par rapport à la mesure de Lebesgue de $\mathbb{R}^2$.

(b) A l'aide d'un changement de variable, en déduire que la loi du vecteur aléatoire (X,Y) est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue. Déterminer sa densité.

(c) En déduire que X et Y sont indépendantes et de même loi normale $\mathcal{N}(0,1)$.

Dans le cours, on a vu un exemple de deux v.a. non-corrélées mais qui ne sont cependant pas indépendantes. Il constitue un contre-exemple à l'équivalence entre les notions de non-corrélation et d'indépendance. L'exercice suivant fournit un autre contre-exemple.

Exercice X.3
Soit X une variable aléatoire réelle de loi $\mathcal{N}(0,1)$. Pour tout $a > 0$, on considère

$$Y^a = X\mathbb{1}_{\{|X|<a\}} - X\mathbb{1}_{\{|X|\geq a\}}.$$

E. X.3.1 Exprimer $\mathbb{E}[f(Y^a)]$ pour toute fonction f borélienne bornée. En déduire que la v.a. Y^a est gaussienne.

E. X.3.2 Le couple (X, Y^a) est-il gaussien? (On étudiera la v.a. $X + Y^a$.)

E. X.3.3 Montrer qu'il existe $b > 0$ tel que

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^b t^2 e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \frac{1}{4}.$$

Calculer $\mathrm{Cov}(X, Y^b)$.
Les v.a. X et Y^b sont-elles indépendantes?

L'exercice suivant étudie l'indépendance entre des transformations linéaires d'un vecteur gaussien.

Exercice X.4
Soit X un vecteur aléatoire gaussien à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, de matrice de covariances K.
E. X.4.1 Soient T_1 et T_2 des matrices de dimensions respectives $n_1 \times n$ et $n_2 \times n$. On considère des vecteurs aléatoires $Y_1 = T_1 X$ et $Y_2 = T_2 X$.

(a) Montrer que (Y_1, Y_2) est un vecteur gaussien.

(b) Soit $\Sigma_{Y_1 Y_2} = [\mathrm{Cov}((Y_1)_i, (Y_2)_j)]_{i,j}$. A quelle condition sur $\Sigma_{Y_1 Y_2}$ les vecteurs aléatoires Y_1 et Y_2 sont-ils indépendants?

(c) Montrer que Y_1 et Y_2 sont indépendants si et seulement si $T_1 K T_2^* = 0$. Généraliser à k vecteurs $Y_i = T_i X$ $(1 \leq i \leq k)$.

E. X.4.2 On suppose maintenant que X suit la loi $\mathcal{N}(0, I_n)$. Soient E un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ et $E^\perp$ son supplémentaire orthogonal. On note A et B les matrices représentant les projections orthogonales p_E et $p_{E^\perp}$ sur E et $E^\perp$ respectivement.
Montrer que les vecteurs aléatoires AX et BX sont indépendants.

E. X.4.3 Déduire de la question précédente l'indépendance des variables aléatoires

$$\overline{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \quad \text{et} \quad (X_1 - \overline{X}, \ldots, X_n - \overline{X}),$$

où $X = (X_1, \ldots, X_n)$.

D) Approfondissement

Exercice X.5
Sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, soit $X_1, \ldots, X_n$ une famille de variables aléatoires réelles indépendantes de loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$. Soient $a_1, \ldots, a_n$ et $b_1, \ldots, b_n$ des nombres réels.
Le but de cet exercice est de trouver une condition nécessaire et suffisante d'indépendance des variables aléatoires $Y = \sum_{i=1}^n a_i X_i$ et $Z = \sum_{i=1}^n b_i X_i$.
E. X.5.1 Le vecteur $(X_1, \ldots, X_n)$ est-il un vecteur gaussien?

E. X.5.2 Le vecteur (Y, Z) est-il un vecteur gaussien?

E. X.5.3 En déduire une condition nécessaire et suffisante sur les $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$ d'indépendance entre Y et Z.

Exercice X.6 (Forme canonique d'un vecteur gaussien)

E. X.6.1 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la famille de matrices $n \times n$ $(J_{k,n})_{1 \leq k \leq n}$ définies par $J_{n,n} = I_n$, et pour $1 \leq k \leq n-1$,

$$J_{k,n} = \begin{pmatrix} I_k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Montrer que si K est une matrice symétrique positive de rang k, il existe une matrice inversible A telle que $K = AJ_{k,n}A^t$.

E. X.6.2 Soit Y un vecteur aléatoire de $\mathbb{R}^n$, $\mu \in \mathbb{R}^n$ et K une matrice symétrique positive de taille $n \times n$. Montrer que Y suit la loi normale $\mathcal{N}(\mu, K)$ si et seulement si Y peut s'écrire

$$Y = AJ_{k,n}X + \mu$$

where X is an $\mathbb{R}^n$-valued Gaussian vector $\mathcal{N}(0, I_n)$, and A is an invertible matrix satisfying $K = AJ_{k,n}A^t$.

Séance XI : Convergence de variables aléatoires

A) Objectifs de la séance

A la fin de cette séance,

- je connais les différentes définitions de convergence d'une suite de v.a. : en probabilité, presque sûre, dans L^p;
- je suis capable de montrer qu'une suite de variables aléatoires converge;
- je suis capable d'appliquer la Loi des Grands Nombres, en vérifiant ses hypothèses précises;
- je connais la notion de convergence en loi;
- je suis capable d'appliquer le Théorème Central Limite, en vérifiant ses hypothèses précises;
- je sais exprimer la différence entre les conclusions de la Loi des Grands Nombres et celles du Théorème Central Limite.

B) Pour se familiariser avec les concepts (à traiter avant les séances de TD)

Les questions XI.1 et XI.2 sont à traiter avant la séance de TD. Les corrigés sont disponibles sur internet.

Question XI.1
Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires dans $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, qui converge vers une variable aléatoire X dans $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, lorsque $n \to \infty$.
Q. XI.1.1 Montrer que $\mathbb{V}\mathrm{ar}(X_n)$ tend vers $\mathbb{V}\mathrm{ar}(X)$ lorsque $n \to \infty$.

Question XI.2
Soient $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variable aléatoires réelles de lois gaussiennes $\mathcal{N}(\mu_n, \sigma_n^2)$. On suppose que $\lim_n \mu_n = \mu$ et $\lim_n \sigma_n = \sigma$.
Q. XI.2.1 Montrer que la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers une v.a. X de loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

C) Exercices

Exercice XI.1
Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires de densités $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \frac{n}{\pi(1+n^2x^2)},$$

pour tout $n \geq 1$.
E. XI.1.1 Quels sont les modes de convergence de X_n, lorsque n tend vers l'infini?

Exercice XI.2 (Théorème de Weierstrass)
Soient $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une application continue et $x \in [0,1]$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère une variable aléatoire réelle S_n de loi binomiale $B(n,x)$.

Dans cet exercice, on utilise la convergence de la v.a. S_n/n pour démontrer le théorème de Weierstrass.
E. XI.2.1 Montrer que $p_n : x \mapsto \mathbb{E}[f(\frac{S_n}{n})]$ est un polynôme en x appelé polynôme de Bernstein de f.

E. XI.2.2 En utilisant la continuité uniforme de f, montrer que pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in [0,1]$,

$$\begin{aligned}|p_n(x) - f(x)| &\leq \mathbb{E}\left[\left|f(\frac{S_n}{n}) - f(x)\right|\right] \\ &\leq \epsilon\, \mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - x\right| < \delta\right) + 2\,\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - x\right| \geq \delta\right) \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|.\end{aligned}$$

En déduire que pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in [0,1]$,

$$|p_n(x) - f(x)| \leq \epsilon + 2\frac{x(1-x)}{n\delta^2} \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|.$$

E. XI.2.3 Démontrer le théorème de Weierstrass : Toute application continue de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ est limite uniforme d'une suite de polynômes.

Exercice XI.3 (Formule de Stirling)
Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. distribuées suivant la loi de Poisson $\mathcal{P}(1)$. On note

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k \quad \text{et} \quad T_n = \frac{S_n - n}{\sqrt{n}}.$$

Soit $a > 0$ un réel quelconque. On note $f_a : x \mapsto \inf(|x|, a)$.
E. XI.3.1 Montrer que si X est une v.a. réelle de $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$,

$$\mathbb{E}[|X - \inf(X,a)|] \leq \mathbb{E}[X\mathbb{1}_{\{X\geq a\}}] \leq \left(\mathbb{E}[X^2]\,\mathbb{P}(X \geq a)\right)^{1/2}.$$

E. XI.3.2 Pour tout $n \geq 1$, préciser la loi de S_n et calculer $\mathbb{E}[T_n^2]$.

E. XI.3.3 Montrer que la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire Y dont on précisera la loi. En déduire que $\mathbb{E}[f_a(T_n)]$ admet une limite lorsque $n \to \infty$.

En utilisant la question 1., montrer que la suite $(\mathbb{E}[|T_n|])_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $\mathbb{E}[|Y|]$.

E. XI.3.4 Montrer que $(\mathbb{E}[T_n^+])_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $\mathbb{E}[Y^+]$, où $x^+ = \max(x, 0)$.

E. XI.3.5 Calculer $\mathbb{E}[Y^+]$ et $\mathbb{E}[T_n^+]$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. En déduire la formule de Stirling

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

D) Approfondissement

Exercice XI.4 (Convergence en loi et densité)
Soient $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et X des v.a. à valeurs dans $\mathbb{R}^N$ et admettant les densités respectives $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et f. On suppose que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers f.

E. XI.4.1 Etant donnée une fonction quelconque $h : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ mesurable bornée, on considère les fonctions h_1 et h_2 définies par

$$\forall x \in \mathbb{R}^d; \quad h_1(x) = h(x) + M_h; \qquad h_2(x) = M_h - h(x)$$

où $M_h = \sup_x |h(x)|$.

Montrer que pour $i = 1, 2$

$$\mathbb{E}[h_i(X)] \le \liminf_{n\to\infty} \mathbb{E}[h_i(X_n)].$$

E. XI.4.2 En écrivant $\mathbb{E}[h(X)]$ et $\mathbb{E}[h(X_n)]$ en fonction de $\mathbb{E}[h_1(X)]$ et $\mathbb{E}[h_1(X_n)]$ d'une part et en fonction de $\mathbb{E}[h_2(X)]$ et $\mathbb{E}[h_2(X_n)]$ d'autre part, montrer que

$$\mathbb{E}[h(X)] \le \liminf_{n\to\infty} \mathbb{E}[h(X_n)]$$

et

$$\limsup_{n\to\infty} \mathbb{E}[h(X_n)] \le \mathbb{E}[h(X)].$$

E. XI.4.3 En déduire que $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$.

E. XI.4.4 Que se passe-t-il si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge que presque partout?

Exercice XI.5
Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $(E, \mathcal{E})$. On considère $A \in \mathcal{E}$ et on cherche à "estimer" la probabilité $\mathbb{P}(X \in A)$.

Pour cela, on considère une suite de v.a. $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ i.i.d. de même loi que X, et on étudie pour tout $n \ge 1$

$$R_n = \mathrm{Card}\,\{1 \le i \le n : X_i \in A\}.$$

E. XI.5.1 Montrer que pour tout $n \ge 1$, R_n définit une variable aléatoire réelle.

E. XI.5.2 Calculer $\mathbb{E}[R_n]$ et $\mathbb{V}\mathrm{ar}(R_n)$.

E. XI.5.3 Etudier la convergence en loi de la suite $(R_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

E. XI.5.4 Application : Une étude préalable a montré que dans une production en grande série, 3% des pièces usinées par une certaine machine sont mauvaises. Un client reçoit une caisse de 500 pièces en provenance de cette machine.

(a) Quelle est la probabilité pour qu'il trouve moins de 1% de pièces mauvaises à l'intérieur de sa caisse?

(b) Un contrat avec l'usine de production lui permet de renvoyer la caisse s'il trouve plus de 5% de pièces mauvaises. Quelle est la probabilité qu'il renvoie la caisse?

Séance XII : Espérance conditionnelle et introduction aux processus stochastiques

A) Objectifs de la séance

A la fin de cette séance,

- je maîtrise la caractérisation de l'espérance conditionnelle d'une v.a. dans L^1 par rapport à une sous-tribu;
- je suis capable d'exprimer l'espérance conditionnelle dans L^2 comme une projection orthogonale;
- je suis capable de déterminer l'espérance conditionnelle d'une variable aléatoire;
- je connais les propriétés de l'espérance conditionnelle et je suis capable de manipuler cet objet.

B) Pour se familiariser avec les concepts (à traiter avant les séances de TD)

Les questions XII.1 et XII.2 sont à traiter avant la séance de TD. Les corrigés sont disponibles sur internet.

Question XII.1
Soient X une variable aléatoire réelle dans $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et $\mathcal{G}$ une sous-tribu de $\mathcal{F}$. On pose $\mathbb{V}\mathrm{ar}(X \mid \mathcal{G}) = \mathbb{E}\big[(X - \mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}])^2 \mid \mathcal{G}\big]$.
Q. XII.1.1 Montrer que

$$\mathbb{V}\mathrm{ar}(X) = \mathbb{E}\big[\mathbb{V}\mathrm{ar}(X \mid \mathcal{G})\big] + \mathbb{V}\mathrm{ar}\big(\mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}]\big).$$

Question XII.2 (Conditionnement par rapport à une variable discrète)
Dans l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, soit X une variable aléatoire réelle dans $L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et soit Y une variable aléatoire prenant ses valeurs dans l'ensemble dénombrable $\{y_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ telle que $\mathbb{P}(Y = y_n) > 0$ pour tout n.
Q. XII.2.1 Déterminer $\mathbb{E}[X \mid Y]$.

C) Exercices

Dans le cas de variables aléatoires gaussiennes, l'espérance conditionnelle peut s'exprimer directement à partir des matrices de covariances. Cette relation est importante en statistiques pour les problèmes de régression linéaire.

Exercice XII.1 (Cas gaussien)
Soient X et Y des vecteurs aléatoires à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^p$ respectivement, tels que (X, Y) soit un vecteur gaussien. On suppose le vecteur gaussien X non-dégénéré.

E. XII.1.1 Dans cette question, on suppose $\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[Y] = 0$. On pose

$$U = Y - \Sigma_{YX} K_X^{-1} X,$$

où $K_X = [\mathrm{Cov}(X_i, X_j)]_{i,j}$ et $\Sigma_{YX} = [\mathrm{Cov}(Y_i, X_j)]_{i,j}$.

(a) Montrer que (U, X) est gaussien.

(b) Montrer que X et U sont indépendants.

(c) En déduire que

$$\mathbb{E}[Y \mid X] = \Sigma_{YX} K_X^{-1} X.$$

E. XII.1.2 Montrer que $\mathbb{E}[Y \mid X]$ peut s'écrire sous la forme

$$\mathbb{E}[Y \mid X] = \mathbb{E}[Y] + \Sigma_{YX} K_X^{-1}(X - \mathbb{E}[X]).$$

E. XII.1.3 Montrer que $Y - \mathbb{E}[Y \mid X]$ et X sont indépendants.

L'espérance conditionnelle permet de caractériser l'indépendance entre variables aléatoires.

Exercice XII.2

E. XII.2.1 Soient X et Y deux variables aléatoires réelles. Montrer que X et Y sont indépendantes si et seulement si pour toute application $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ borélienne bornée, on a

$$\mathbb{E}[g(Y) \mid X] = \mathbb{E}[g(Y)] \quad \mathbb{P} - \text{p.s.}$$

E. XII.2.2 Application : soit (X, Y) un couple de variables aléatoires admettant pour densité $p : (x, y) \mapsto e^{-y} \mathbb{1}_{\{0<x<y\}}(x, y)$. Calculer la loi conditionnelle de Y sachant $X = x$. En déduire que X et $Y - X$ sont indépendantes.

Exercice XII.3 (Somme d'un nombre aléatoire de v.a.)
Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de v.a. réelles i.i.d. et soit N une v. a. à valeurs dans $\mathbb{N}$ indépendante des X_n. On suppose que les variables N et les X_n possèdent des moments d'ordre 1.

On définit

$$Y(\omega) = \sum_{i=1}^{N(\omega)} X_i(\omega).$$

E. XII.3.1 Montrer que Y est une variable aléatoire. Calculer $\mathbb{E}[Y]$.

D) Approfondissement

Exercice XII.4 (Dérivée de Radon-Nikodym)
Dans l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, soit X une varable aléatoire réelle admettant une densité f continue. Soit $A \in \mathcal{F}$ un événement fixé.

On suppose qu'il existe une fonction continue g telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\frac{\mathbb{P}(A \cap \{X \in [x, x+h[\})}{\mathbb{P}(X \in [x, x+h[)} \underset{h \to 0}{\longrightarrow} g(x).$$

E. XII.4.1 Montrer que $\mathbb{P}(A \mid X) = g(X)$ $\mathbb{P}$-p.s.

Exercice XII.5
Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de v.a. et $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une filtration. On suppose que pour tout n, X_n est $\mathcal{F}_n$-mesurable et $\mathbb{E}[X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] = 0$. On pose $S_n = X_0 + \cdots + X_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
E. XII.5.1 Montrer que $\{S_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ est une $\mathcal{F}_n$-martingale.

Exercice XII.6 (Décomposition de Doob)
Soit $\{X_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ une martingale pour la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$, de carré intégrable.
E. XII.6.1 Montrer qu'il existe un processus croissant prévisible $\{A_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ et une $\mathcal{F}_n$-martingale $\{Y_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ tels que $\mathbb{E}(X_0^2) = A_0$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}; \quad X_n^2 = A_n + Y_n.$$

E. XII.6.2 Application. Soit $(T_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de v.a. réelles i.i.d. de carré intégrable et telle que $\mathbb{E}[T_n] = 0$ et $\mathbb{E}[T_n^2] = \sigma^2$. On pose $S_0 = 0$ et $S_n = T_1 + \cdots + T_n$ pour $n \geq 1$.

Montrer que $\{S_n^2 - n\sigma^2;\ n \in \mathbb{N}\}$ est une martingale.

Exercice XII.7
Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. définies sur l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, et à valeurs dans l'espace mesurable $(E, \mathcal{E})$. On note μ la loi des X_n.

Soient N_1 et N_2 deux v.a. à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telles que $1 \leq N_1 < N_2$. On suppose que pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, l'événement $\{N_i = m\}$ ne dépend que de $X_0, X_1, \ldots, X_{m-1}$.
E. XII.7.1 Montrer que les v.a. X_{N_1} et X_{N_2} sont i.i.d.