WIKIPEDIA

雅可比矩阵

维基百科，自由的百科全书

在向量分析中，**雅可比矩阵**(也稱作**Jacobi矩陣**)是函數的一阶偏导数以一定方式排列成的矩阵，當其為方陣(square matrix)時，其行列式称为**Jacobi行列式**。要注意的是，如果雅可比矩陣為方陣，那在英文中雅可比矩陣跟Jacobi行列式兩者都稱作 **Jacobian**。

其重要性在於，如果函數 $\mathbf{f}:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ 在點 $\mathbf{x}$ 可微的話，在點 $\mathbf{x}$ 的雅可比矩陣即為該函數在該點的最佳線性逼近，也代表雅可比矩陣是單變數實數函數的微分在向量值多變數函數的推廣，在這種情況下，雅可比矩陣也被稱作函數 $\mathbf{f}$ 在點 $\mathbf{x}$ 的微分或者導數。

在代数几何中，代数曲线的*可比行列式*表示雅可比簇：伴随该曲线的一个代數群，曲线可以嵌入其中。

它们全部都以普鲁士数学家卡爾·雅可比命名。

目录

雅可比矩阵

假設某函數從 $\mathbf{f}:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$，從 $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n$ 映射到 向量 $\mathbf{f}(\mathbf{x})\in\mathbb{R}^m$，其雅可比矩陣是一 $m\times n$ 的矩陣，換句話講也就是從 $\mathbb{R}^n$ 到 $\mathbb{R}^m$ 的線性映射，其重要意義在于它表現了一个多變數向量函數的最佳线性逼近。因此，雅可比矩阵类似于單變數函数的导数。

此函數 $\mathbf{f}$ 的雅可比矩陣 $\mathbf{J}$ 為 $m\times n$ 的矩陣，一般由以下方式定義

$$\mathbf{J}=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial\mathbf{f}}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial\mathbf{f}}{\partial x_n}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_n}\end{bmatrix}$$

矩陣的分量可表示成：

$$\mathbf{J}_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}.$$

雅可比矩陣的其他常用符號還有：

$$Df、\mathrm{D}\mathbf{f}、\mathbf{J}_{\mathbf{f}}(x_1,\ldots,x_n) \text{ 或者 } \frac{\partial(f_1,\ldots,f_m)}{\partial(x_1,\ldots,x_n)}.$$

此矩陣的第 i列是由函數 f_i 的梯度函數所表示的，$1 \le i \le m$。

如果 p是$\mathbb{R}^n$ 中的一点，f在 p点可微分，根據數學分析， $\mathbf{J}_{\mathbf{f}}(p)$是在这点的导数。在此情況下，$\mathbf{J}_{\mathbf{f}}(p)$這個线性映射即 f 在点 p附近的最优线性逼近，也就是說當 x足夠靠近點 p時，我們有

$$f(x) \approx f(p) + \mathbf{J}_{\mathbf{f}}(p) \cdot (x - p)$$

講更詳細點也就是：

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{p}) + \mathbf{J}_{\mathbf{f}}(\mathbf{p})(\mathbf{x} - \mathbf{p}) + o(\|\mathbf{x} - \mathbf{p}\|)$$

其中，o 代表小o符號(little-o notation)，$\|\mathbf{x} - \mathbf{p}\|$ 為 $\mathbf{x}$ 與 $\mathbf{p}$ 之間的距離。

例子

例一

由球坐标系到直角坐标系的转化由 $\mathbf{F}$: $\mathbb{R}^+ \times [0, \pi] \times [0, 2\pi) \to \mathbb{R}^3$ 函数给出，其分量為：

$$\begin{aligned} x &= r\sin\theta\cos\varphi; \\ y &= r\sin\theta\sin\varphi; \\ z &= r\cos\theta. \end{aligned}$$

此坐标变换的雅可比矩阵是

$$\mathbf{J}_{\mathbf{F}}(r,\theta,\varphi) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} & \dfrac{\partial x}{\partial \varphi} \\[1em] \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} & \dfrac{\partial y}{\partial \varphi} \\[1em] \dfrac{\partial z}{\partial r} & \dfrac{\partial z}{\partial \theta} & \dfrac{\partial z}{\partial \varphi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{bmatrix}.$$

其Jacobi行列式為 $r^2 \sin\theta$，由於 $dV = dx\ dy\ dz$，如果做變數變換的話其體積元(Volume element)，dV，會變成：$dV = r^2 \sin\theta\ dr\ d\theta\ d\varphi$。

例二

$\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$，其各分量為

$$y_1 = x_1$$
$$y_2 = 5x_3$$
$$y_3 = 4x_2^2 - 2x_3$$
$$y_4 = x_3 \sin x_1$$

其雅可比矩阵为:

$$J_F(x_1, x_2, x_3) = \begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \frac{\partial y_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} & \frac{\partial y_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial y_3}{\partial x_1} & \frac{\partial y_3}{\partial x_2} & \frac{\partial y_3}{\partial x_3} \\ \frac{\partial y_4}{\partial x_1} & \frac{\partial y_4}{\partial x_2} & \frac{\partial y_4}{\partial x_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 8x_2 & -2 \\ x_3 \cos x_1 & 0 & \sin x_1 \end{bmatrix}.$$

此例子说明雅可比矩阵不一定为方阵。

在动力系统中

考虑形为$x' = F(x)$的动力系统，$F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$。如果 $F(x_0) = 0$，那么x_0是一个臨界點。系統接近臨界點时的行為跟 $J_F(x_0)$的特征值相關。

Jacobi行列式

如果 $m = n$，那么 F 是从 $\mathbb{R}^n$ 映射到 $\mathbb{R}^n$ 的函数，且它的雅可比矩阵是一个方陣。于是我们可以取它的行列式，称为**Jacobi行列式**。

在某个给定点的雅可比行列式提供了 F 在接近该点时的表现的重要資訊。例如，如果连续可微函数 F 在 p 点的Jacobi行列式不等於零，那么它在该点附近有 F 的反函数。这称为反函数定理。更进一步，如果 p 点的Jacobi行列式是正数，则 F 在 p 点保持定向(preserves orientation)；如果是负数，则 F 逆轉定向(reverses orientation)。而从Jacobi行列式的绝对值，就可以知道函数 F 在 p 點附近是放大或縮小體積；这就是它出现在换元积分法中的原因。

例子

设有函数 $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$，其分量为：

$$y_1 = 5x_2$$
$$y_2 = 4x_1^2 - 2\sin(x_2 x_3)$$
$$y_3 = x_2 x_3$$

则它的Jacobi行列式为：

$$\begin{vmatrix} 0 & 5 & 0 \\ 8x_1 & -2x_3 \cos(x_2 x_3) & -2x_2 \cos(x_2 x_3) \\ 0 & x_3 & x_2 \end{vmatrix} = -8x_1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ x_3 & x_2 \end{vmatrix} = -40x_1 x_2.$$

从中我们可以看到，當 x_1 和 x_2 同号时，F 逆轉定向；该函数处处具有反函数，除了在 $x_1 = 0$ 或 $x_2 = 0$ 的點。

逆矩陣

根據反函數定理，一個*可逆函數*（*存在*反函數的函數）的雅可比矩陣的逆矩陣即為該函數的*反函數*的雅可比矩陣。即，若函數 $F:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 在點 $p \in \mathbb{R}^n$ 的雅可比矩陣是連續且可逆的，則 F在點p的某一鄰域內也是可逆的，且有

$$J_{F^{-1}} \circ f = J_F^{-1}$$

成立。相反，倘若雅可比行列式在某一個點**不為**零，那麼該函數在這個點的某一鄰域內*可逆*（存在反函數）。

一個多項式函數的可逆性與非經證明的雅可比猜想有關。其斷言，如果函數的雅可比行列式為一個非零實數（相當於其不存在**複零點**），則該函數可逆且其反函數也為一個多項式。

参看

- 前推
- 黑塞矩阵

外部链接

- Ian Craw的本科教学网页 (https://web.archive.org/web/20060421002832/http://www.maths.abdn.ac.uk/~igc/tch/ma2001/notes/node77.html) 雅可比行列式的通俗解释
- Mathworld (http://mathworld.wolfram.com/Jacobian.html) 更技术型的雅可比行列式的解释