

## 计算方法 第2章习题答案

2.1 用高斯消去法和列主元高斯消去法求解以下方程组

$$(1) \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 5 \\ -4x_1 + 2x_2 - 6x_3 = 14 \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 8 \end{cases} \quad (2) \begin{cases} 12x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 15 \\ -18x_1 + 3x_2 - x_3 = -15 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 6 \end{cases}$$

解 (i) 高斯消去法

$$(1) \begin{pmatrix} 2 & -3 & 2 & 5 \\ -4 & 2 & -6 & 14 \\ 2 & 2 & 4 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{第1次消元}} \begin{pmatrix} 2 & -3 & 2 & 5 \\ 0 & -4 & -2 & 24 \\ 0 & 5 & 2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{第2次消元}} \begin{pmatrix} 2 & -3 & 2 & 5 \\ 0 & -4 & -2 & 24 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{4} & 33 \end{pmatrix}.$$

逐步回代解得  $(x_1, x_2, x_3) = (109, 27, 66)$ .

$$(2) \begin{pmatrix} 12 & -3 & 3 & 15 \\ -18 & 3 & -1 & -15 \\ 1 & 1 & 1 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{第1次消元}} \begin{pmatrix} -12 & -3 & 3 & 15 \\ 0 & -\frac{3}{2} & \frac{7}{2} & \frac{15}{2} \\ 0 & \frac{5}{4} & \frac{3}{4} & \frac{19}{4} \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{第2次消元}} \begin{pmatrix} -12 & -3 & 3 & 15 \\ 0 & -\frac{3}{2} & \frac{7}{2} & \frac{15}{2} \\ 0 & 0 & \frac{44}{12} & \frac{132}{12} \end{pmatrix}$$

逐步回代解得  $(x_1, x_2, x_3) = (1, 2, 3)$ .

(ii) 列主元高斯消去法

$$(1) \begin{pmatrix} 2 & -3 & 2 & 5 \\ -4 & 2 & -6 & 14 \\ 2 & 2 & 4 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{选主元}} \begin{pmatrix} -4 & 2 & -6 & 14 \\ 2 & -3 & 2 & 5 \\ 2 & 2 & 4 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{第1次消元}} \begin{pmatrix} -4 & 2 & -6 & 14 \\ 0 & -2 & -1 & 12 \\ 0 & 3 & 1 & 15 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{选主元}} \begin{pmatrix} -4 & 2 & -6 & 14 \\ 0 & 3 & 1 & 15 \\ 0 & -2 & -1 & 12 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{第2次消元}} \begin{pmatrix} -4 & 2 & -6 & 14 \\ 0 & 3 & 1 & 15 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & 22 \end{pmatrix}.$$

逐步回代解得  $(x_1, x_2, x_3) = (109, 27, 66)$ .

$$(2) \begin{pmatrix} 12 & -3 & 3 & 15 \\ -18 & 3 & -1 & -15 \\ 1 & 1 & 1 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{选主元}} \begin{pmatrix} -18 & 3 & -1 & -15 \\ 12 & -3 & 3 & 15 \\ 1 & 1 & 1 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{第1次消元}} \begin{pmatrix} -18 & 3 & -1 & -15 \\ 0 & -1 & \frac{7}{3} & 5 \\ 0 & 7 & \frac{17}{18} & \frac{31}{6} \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{选主元}} \begin{pmatrix} -18 & 3 & -1 & -15 \\ 0 & 7 & \frac{17}{18} & \frac{31}{6} \\ 0 & -1 & \frac{7}{3} & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{第2次消元}} \begin{pmatrix} -18 & 3 & -1 & -15 \\ 0 & 7 & \frac{17}{18} & \frac{31}{6} \\ 0 & 0 & \frac{66}{21} & \frac{66}{7} \end{pmatrix}$$

逐步回代解得  $(x_1, x_2, x_3) = (1, 2, 3)$ .

2.3 作以下矩阵的  $A = LU$  分解

$$(1) \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 10 \end{pmatrix}; \quad (2) \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}; \quad (3) \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 9 & 8 & 12 \\ 6 & 27 & 38 \end{pmatrix}.$$

解 根据  $A = LU$  分解的计算公式可得

$$(1) A = LU = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad (2) A = LU = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & \frac{26}{3} \end{pmatrix};$$

$$(3) A = LU = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

2.4 试写出用  $A = LU$  分解求解下面方程组

$$\begin{pmatrix} b_1 & c_1 & & & a_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & a_{n-1} & b_{n-1} & c_{n-1} \\ c_n & & & a_n & b_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_{n-1} \\ d_n \end{pmatrix}$$

的计算公式.

解 由题设,  $A = LU$  分解如下

$$L = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ l_{21} & 1 & & & \\ & l_{32} & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & l_{n,n-1} & 1 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} u_{11} & c_1 & & & u_{1n} \\ & u_{22} & c_2 & & u_{2n} \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & u_{n-1,n-1} & c_{n-1} \\ & & & & u_{nn} \end{pmatrix}.$$

其中  $l_{i,i-1}$  ( $i = 2, \dots, n-1$ ),  $l_{nj}$  ( $j = 1, \dots, n-1$ ) 以及  $u_{ii}$  ( $i = 1, \dots, n$ ),  $u_{in}$  ( $i = 1, \dots, n-2$ ) 的具体计算公式可参见教材 P26.

于是有

$$Ax = d \implies LUx = d \implies \begin{cases} Ly = d, \\ Ux = y. \end{cases}$$

$$\text{先从 } Ly = d \text{ 解出 } y \implies \begin{cases} y_1 = d_1 \\ y_i = d_1 - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij}y_j, \quad i = 2, 3, \dots, n \end{cases}$$

$$\text{再从 } Ux = y \text{ 解出 } x \implies \begin{cases} x_n = y_n/u_{nn} \\ x_i = \left( y_i - \sum_{j=i+1}^n u_{ij}x_j \right) / u_{ii}, \quad i = n-1, n-2, \dots, 2, 1 \end{cases}$$

2.6 用平方根法和改进平方根法求解以下方程组：

$$(1) \begin{pmatrix} 4 & -2 & -4 \\ -2 & 17 & 10 \\ -4 & 10 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 3 \\ -7 \end{pmatrix}; \quad (2) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 20 & 26 \\ 3 & 26 & 70 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

解 先用平方根法求解.

$$(1) Ax = GG^T x = b \implies \begin{cases} Gy = b, \\ G^T x = y. \end{cases} \quad \text{其中 } G = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{因此有 } \begin{cases} y = (5, 2, -1)^T, \\ x = (2, 1, -1)^T. \end{cases}$$

$$(2) Ax = GG^T x = b \implies \begin{cases} Gy = b, \\ G^T x = y. \end{cases} \quad \text{其中 } G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad \text{因此有 } \begin{cases} y = (2, 1, -2)^T, \\ x = (\frac{5}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3})^T. \end{cases}$$

再用改进平方根法 ( $A = LDL^T$ ) 求解.

$$(1) \begin{cases} Ly = b, \\ Dz = y, \\ L^T x = z. \end{cases} \quad \text{其中 } L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -1 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 4 & & \\ & 16 & \\ & & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{因此有 } \begin{cases} y = (10, 8, -1)^T, \\ z = (\frac{5}{2}, \frac{1}{2}, -1)^T, \\ x = (2, 1, -1)^T. \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} Ly = b, \\ Dz = y, \\ L^T x = z. \end{cases} \quad \text{其中 } L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & \frac{5}{4} & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 16 & \\ & & 36 \end{pmatrix}, \quad \text{因此有 } \begin{cases} y = (2, 4, -12)^T, \\ z = (2, \frac{1}{4}, -\frac{1}{3})^T, \\ x = (\frac{5}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3})^T. \end{cases}$$

2.7 用追赶法求解方程组  $Ax = b$ , 其中

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

解 对于三对角矩阵  $A$ , 有如下的 Doolittle 分解

$$A = LU = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{4} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{5}{4} \end{pmatrix}.$$

于是求解三对角方程组的追赶法可写为

$$\text{求解 } Ax = b \implies LUx = b \implies \begin{cases} Ly = b, \\ Ux = y. \end{cases} \implies \begin{cases} y = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{5}{4})^T \\ x = (1, 1, 1, 1)^T. \end{cases}$$

## 2.8 计算矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -4 & -7 \\ -4 & 2 & -4 \\ -7 & -4 & 5 \end{pmatrix}$$

的 1 范数、2 范数、 $\infty$  范数和相应的条件数.

解 注意到  $A$  是对称矩阵且 3 个特征值为 -6, 6, 12. 另外

$$A^{-1} = \frac{1}{72} \begin{pmatrix} 1 & -8 & -5 \\ -8 & 4 & -8 \\ -5 & -8 & 1 \end{pmatrix}.$$

故可得

$$\|A\|_1 = \max\{16, 10, 16\} = 16, \quad \|A^{-1}\|_1 = \frac{1}{72} \max\{14, 20, 14\} = \frac{5}{18}, \quad \text{Cond}_1(A) = \|A\|_1 \|A^{-1}\|_1 = \frac{40}{9}.$$

$$\|A\|_2 = \sqrt{\lambda_1(A^T A)} = \sqrt{\lambda_1^2(A)} = |\lambda_1| = 12, \quad \text{Cond}_2(A) = \frac{|\lambda_1|}{|\lambda_3|} = 2,$$

其中  $\lambda_1, \lambda_3$  分别是矩阵  $A$  的绝对值最大和绝对值最小的特征值.

$$\|A\|_\infty = \max\{16, 10, 16\} = 16, \quad \|A^{-1}\|_\infty = \frac{1}{72} \max\{14, 20, 14\} = \frac{5}{18}, \quad \text{Cond}_\infty(A) = \|A\|_\infty \|A^{-1}\|_\infty = \frac{40}{9}.$$

**2.10** 证明对于任何实数  $p \geq 1$ ,  $\|x\|_p = \left( \sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p}$  定义了  $\mathbf{R}^n$  上的一种向量范数.

证 按照向量范数的定义分别验证正定性、齐次性和三角不等式.

(1) **正定性**: 显然有

$$\|x\|_p = \left( \sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p} \geq 0 \quad \text{且} \quad \|x\|_p = 0 \iff x_i = 0 \quad \text{即} \quad x = 0.$$

(2) **齐次性**:

$$\|\alpha x\|_p = \left( \sum_{i=1}^n |\alpha x_i|^p \right)^{1/p} = \left( \sum_{i=1}^n |\alpha|^p |x_i|^p \right)^{1/p} = |\alpha| \|x\|_p.$$

(3) **三角不等式**: 由于

$$\|x + y\|_p = \left( \sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^p \right)^{1/p},$$

根据闵可夫斯基 (Minkowski) 不等式, 有

$$\|x + y\|_p = \left( \sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^p \right)^{1/p} \leq \left( \sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p} + \left( \sum_{i=1}^n |y_i|^p \right)^{1/p} = \|x\|_p + \|y\|_p.$$