数　值　分　析

梅立泉

School of Mathematics and Statistics, Xi'an Jiaotong University

要求

1. 熟练掌握求解常微分方程的基本数值解法：数值微分法、数值积分法、泰勒展开法
2. 了解求解常微分方程的线性多步法，掌握求解常微分方程的Runge-Kutta方法
3. 学习常微分方程的基本数值解法的收敛性和稳定性

本章介绍求解常微分方程初值问题和边值问题的数值解法.

一阶常微分方程初值问题为

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)), \quad a \leq x \leq b, \\ y(a) = y_0. \end{cases}$$

其中y_0是已知常数，$f(x, y(x))$是已知函数.

本章介绍求解常微分方程初值问题和边值问题的数值解法.

一阶常微分方程初值问题为

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)), & a \le x \le b, \\ y(a) = y_0. \end{cases}$$

其中y_0是已知常数，$f(x, y(x))$是已知函数.

常微分方程数值解法是求$y(x)$在一系列点x_i $(a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b)$ 处$y(x_i)$ 的近似值$y_i(i = 0, 1, \cdots, n)$ 的方法.

$y_i(i = 0, 1, \cdots, n)$ 称为**数值解**. 记$h_i = x_i - x_{i-1}$,

h_i称为x_{i-1} 到x_i 的**步长**, 通常步长取为常量h,

即取$h = (b - a)/n$, 这时$x_i = a + ih$ $(i = 0, 1, \cdots, n)$.

Theorem

设$f(x,y)$在区域$D=\{(x,y)|a\leq x\leq b,\ -\infty<y<\infty\}$上连续且关于$y$满足利普希茨(Lipschitz)条件，即存在常数L，使得

$$|f(x,y)-f(x,\bar{y})|\leq|\frac{\partial f}{\partial y}(y-\bar{y})|\leq L|y-\bar{y}|,$$

对于任意的$x\in[a,b]$及任意的$y,\bar{y}$都成立，则初值问题在区间$[a,b]$上存在唯一的连续可微解$y=y(x)$.

Theorem

设$f(x,y)$在区域$D=\{(x,y)|a\le x\le b,\ -\infty<y<\infty\}$上连续且关于$y$满足利普希茨(*Lipschitz*)条件，即存在常数L，使得

$$|f(x,y)-f(x,\bar{y})|\le|\frac{\partial f}{\partial y}(y-\bar{y})|\le L|y-\bar{y}|,$$

对于任意的$x\in[a,b]$及任意的$y,\bar{y}$都成立，则初值问题在区间$[a,b]$上存在唯一的连续可微解$y=y(x)$.

下面介绍导出初值问题数值解法的三种方法：数值微分法，数值积分法和泰勒展开法.

1. 数值微分法 数值微分法是用数值微分公式替代常微分方程中的导数所建立的方法.

1. 数值微分法 数值微分法是用数值微分公式替代常微分方程中的导数所建立的方法.

（1）欧拉（Euler）法

在$x = x_i$处，初值问题为

$$y'(x_i) = f(x_i, y(x_i)).$$

由数值微分公式有$y'(x_i) = \frac{y(x_{i+1}) - y(x_i)}{h} - \frac{h}{2}y''(\xi_i)$. 代入得

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + hf(x_i, y(x_i)) + \frac{h^2}{2}y''(\xi_i).$$

略去误差项$\frac{h^2}{2}y''(\xi_i)$，得求解初值问题数值解的欧拉法

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i).$$

Definition

（**局部截断误差**）设$y(x_{i+1})$是初值问题的准确解$y(x)$在x_{i+1}处的值，假定前面各步计算均无误差（称为局部化假定），即$y_i = y(x_i)$，$y_{i-1} = y(x_{i-1}), \cdots$. 而$y_{i+1}$是由某一数值解法求得的$y(x_{i+1})$的近似值，则$R[y] = y(x_{i+1}) - y_{i+1}$称为该数值解法在$x_{i+1}$处的局部截断误差.

Definition

（**局部截断误差**）设$y(x_{i+1})$是初值问题的准确解$y(x)$在x_{i+1}处的值，假定前面各步计算均无误差（称为局部化假定），即$y_i = y(x_i)$，$y_{i-1} = y(x_{i-1}), \cdots$. 而$y_{i+1}$是由某一数值解法求得的$y(x_{i+1})$的近似值，则$R[y] = y(x_{i+1}) - y_{i+1}$称为该数值解法在$x_{i+1}$处的局部截断误差.

由定义可知所谓局部截断误差即在局部化假定下当前一步计算所产生的截断误差. 可见欧拉法的局部截断误差

$$R[y] = y(x_{i+1}) - y_{i+1} = \frac{h^2}{2} y''(\xi_i).$$

（2）后退欧拉法

在$x=x_{i+1}$处，初值问题为$y'(x_{i+1})=f(x_{i+1},y(x_{i+1}))$. 由数值微分公式有

$$y'(x_{i+1})=\frac{y(x_{i+1})-y(x_i)}{h}+\frac{h}{2}y''(\xi_i).$$

将其代入得

$$y(x_{i+1})=y(x_i)+hf(x_{i+1},y(x_{i+1}))-\frac{h^2}{2}y''(\xi_i).$$

同理可得后退欧拉法及其局部截断误差

$$y_{i+1}=y_i+hf(x_{i+1},y_{i+1}),$$

（2）后退欧拉法

在$x = x_{i+1}$处，初值问题为$y'(x_{i+1}) = f(x_{i+1}, y(x_{i+1}))$. 由数值微分公式有

$$y'(x_{i+1}) = \frac{y(x_{i+1}) - y(x_i)}{h} + \frac{h}{2}y''(\xi_i).$$

将其代入得

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + hf(x_{i+1}, y(x_{i+1})) - \frac{h^2}{2}y''(\xi_i).$$

同理可得后退欧拉法及其局部截断误差

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_{i+1}, y_{i+1}),$$

$$R[y] = y(x_{i+1}) - y_{i+1} = -\frac{h^2}{2}y''(\xi_i).$$

（3）中点法

由数值微分公式有

$$y'(x_i) = \frac{y(x_{i+1}) - y(x_{i-1})}{2h} - \frac{h^2}{6} y'''(\xi_i).$$

代入得

$$y(x_{i+1}) = y(x_{i-1}) + 2hf(x_i, y(x_i)) + \frac{h^3}{3} y'''(\xi_i).$$

同理得中点法及其局部截断误差

$$y_{i+1} = y_{i-1} + 2hf(x_i, y_i),$$

(3)中点法

由数值微分公式有

$$y'(x_i) = \frac{y(x_{i+1}) - y(x_{i-1})}{2h} - \frac{h^2}{6} y'''(\xi_i).$$

代入得

$$y(x_{i+1}) = y(x_{i-1}) + 2hf(x_i, y(x_i)) + \frac{h^3}{3} y'''(\xi_i).$$

同理得中点法及其局部截断误差

$$y_{i+1} = y_{i-1} + 2hf(x_i, y_i),$$

$$R[y] = y(x_{i+1}) - y_{i+1} = -\frac{h^3}{3} y'''(\xi_i).$$

例9.1 取步长$h=0.02$，分别用欧拉法，后退欧拉法，求解初值问题

$$\begin{cases} y' = -\frac{0.9y}{1+2x} \quad 0 \le x \le 0.1 \ , \\ y(0) = 1 \ . \end{cases}$$

例9.1 取步长$h=0.02$，分别用欧拉法，后退欧拉法，求解初值问题

$$\begin{cases} y' = -\frac{0.9y}{1+2x} & 0 \le x \le 0.1\ , \\ y(0) = 1\ . \end{cases}$$

解 $x_i = ih = 0.02i\ (i=0,1,\cdots,5),\quad y_0 = 1.$

（1）欧拉法 由 $y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i)$ 有

$$y_{i+1} = y_i - 0.02\frac{0.9y_i}{1+2x_i}\ ,\ i = 0,1,2,3,4.$$

由此算得$y_0 = 1.0000,\ y_1 = 0.9820,$

$$y_2 = 0.9650,\ y_3 = 0.9489,\ y_4 = 0.9337,\ y_5 = 0.9192\ .$$

（2）后退欧拉法　　由 $y_{i+1} = y_i + hf(x_{i+1}, y_{i+1})$

（2）后退欧拉法　　由 $y_{i+1}=y_i+hf(x_{i+1},y_{i+1})$有

$$y_{i+1}=y_i-0.02\frac{0.9y_{i+1}}{1+2x_{i+1}}\ ,\ i=0,1,2,3,4.$$

解之得

$$y_{i+1}=\frac{1+2x_{i+1}}{1.018+2x_{i+1}}y_i\ ,\ i=0,1,2,3,4.$$

由此算得$y_0=1.0000$，$y_1=0.9830$,

$$y_2=0.9669,\ y_3=0.9516,\ y_4=0.9370\ ,\ y_5=0.9232\ .$$

（2）后退欧拉法　　由 $y_{i+1}=y_i+hf(x_{i+1},y_{i+1})$有

$$y_{i+1}=y_i-0.02\frac{0.9y_{i+1}}{1+2x_{i+1}}\ ,\ \ i=0,1,2,3,4.$$

解之得

$$y_{i+1}=\frac{1+2x_{i+1}}{1.018+2x_{i+1}}y_i\ ,\ \ i=0,1,2,3,4.$$

由此算得$y_0=1.000\,0,\ \ y_1=0.983\,0,$

$$y_2=0.966\,9,\ \ y_3=0.951\,6,\ \ y_4=0.937\,0\ ,\ \ y_5=0.923\,2\ .$$

（3）中点法　　由 $y_{i+1}=y_{i-1}+2hf(x_i,y_i)$

（2）后退欧拉法　　由 $y_{i+1}=y_i+hf(x_{i+1},y_{i+1})$有

$$y_{i+1}=y_i-0.02\frac{0.9y_{i+1}}{1+2x_{i+1}}\ ,\ i=0,1,2,3,4.$$

解之得

$$y_{i+1}=\frac{1+2x_{i+1}}{1.018+2x_{i+1}}y_i\ ,\ i=0,1,2,3,4.$$

由此算得$y_0=1.0000$，$y_1=0.9830$,

$$y_2=0.9669,\ y_3=0.9516,\ y_4=0.9370\ ,\ y_5=0.9232\ .$$

（3）中点法　　由 $y_{i+1}=y_{i-1}+2hf(x_i,y_i)$有

$$y_{i+1}=y_{i-1}-0.04\frac{0.9y_i}{1+2x_i}\ ,\ i=0,1,2,3,4.$$

已知$y_0=1$，按后退欧拉法取$y_1=0.9830$，由此算得

$$y_2=0.9660,\ y_3=0.9508,\ y_4=0.9354,\ y_5=0.9218\ .$$

1）梯形法

在区间$[x_i, x_{i+1}]$上对微分方程$y' = f(x, y)$ 两端积分，

1）梯形法

在区间$[x_i, x_{i+1}]$上对微分方程$y' = f(x, y)$ 两端积分，得

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} y'(x)dx = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x, y(x))dx.$$

对右端积分利用梯形求积公式计算，得

$$\begin{aligned} y(x_{i+1}) &= y(x_i) + \frac{h}{2}\left[f(x_i, y(x_i)) + f(x_{i+1}, y(x_{i+1}))\right] - \frac{h^3}{12} f''(\xi_i, y(\xi_i)) \\ &= y(x_i) + \frac{h}{2}\left[f(x_i, y(x_i)) + f(x_{i+1}, y(x_{i+1}))\right] - \frac{h^3}{12} y'''(\xi_i). \end{aligned}$$

由此得梯形法及其局部截断误差

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}\left[f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1})\right],$$

1）梯形法

在区间$[x_i, x_{i+1}]$上对微分方程$y' = f(x, y)$ 两端积分，得

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} y'(x)dx = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x, y(x))dx.$$

对右端积分利用梯形求积公式计算，得

$$\begin{aligned} y(x_{i+1}) &= y(x_i) + \frac{h}{2}\left[f(x_i, y(x_i)) + f(x_{i+1}, y(x_{i+1}))\right] - \frac{h^3}{12} f''(\xi_i, y(\xi_i)) \\ &= y(x_i) + \frac{h}{2}\left[f(x_i, y(x_i)) + f(x_{i+1}, y(x_{i+1}))\right] - \frac{h^3}{12} y'''(\xi_i). \end{aligned}$$

由此得梯形法及其局部截断误差

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}\left[f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1})\right],$$

$$R[y] = y(x_{i+1}) - y_{i+1} = -\frac{h^3}{12} y'''(\xi_i).$$

2）辛普生法

在区间$[x_{i-1}, x_{i+1}]$上对微分方程$y' = f(x,y)$ 两端积分，

2）辛普生法

在区间$[x_{i-1},x_{i+1}]$上对微分方程$y'=f(x,y)$ 两端积分，得

$$\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} y'(x)dx=\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} f(x,y(x))dx.$$

用辛普生求积公式计算右端积分，得

$$y(x_{i+1})=y(x_{i-1})+\frac{x_{i+1}-x_{i-1}}{6}\Big[f(x_{i-1},y(x_{i-1}))+4f(x_i,y(x_i)) +f(x_{i+1},y(x_{i+1}))\Big]-\frac{h^5}{90}f^{(4)}(\xi_i,y(\xi_i)).$$

由此得辛普生法及其局部截断误差

$$y_{i+1}=y_{i-1}+\frac{h}{3}[f(x_{i-1},y_{i-1})+4f(x_i,y_i)+f(x_{i+1},y_{i+1})],$$

$$R[y]=y(x_{i+1})-y_{i+1}=-\frac{h^5}{90}y^{(5)}(\xi_i).$$

3）阿达姆斯（Adams）显式法

给定$k+1$个数据点$(x_{i-j}, f_{i-j})(j=0,1,\cdots,k)$，其中节点$x_{i-j}$等距分布，$f_{i-j}=f(x_{i-j}, y_{i-j})$. 作$k$ 次拉格朗日插值多项式$L_k(x)$，则$f(x,y)=L_k(x)+R_k(x)$. 在区间$[x_i, x_{i+1}]$上对$y'=f(x,y)$ 两端积分得

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} y'(x)dx = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x,y(x))dx = \int_{x_i}^{x_{i+1}} L_k(x)dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} R_k(x)dx.$$

取$\int_{x_i}^{x_{i+1}} y'(x)dx \approx \int_{x_i}^{x_{i+1}} L_k(x)dx$. 可得求解初值问题的**阿达姆斯（Adams ）显式公式（也称为Adams-Bashforth公式）**

3）阿达姆斯（Adams）显式法

给定$k+1$个数据点$(x_{i-j}, f_{i-j})(j=0,1,\cdots,k)$，其中节点$x_{i-j}$等距分布，$f_{i-j}=f(x_{i-j}, y_{i-j})$. 作$k$ 次拉格朗日插值多项式$L_k(x)$，则$f(x,y)=L_k(x)+R_k(x)$. 在区间$[x_i, x_{i+1}]$上对$y'=f(x,y)$ 两端积分得

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} y'(x)dx = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x,y(x))dx = \int_{x_i}^{x_{i+1}} L_k(x)dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} R_k(x)dx.$$

取$\int_{x_i}^{x_{i+1}} y'(x)dx \approx \int_{x_i}^{x_{i+1}} L_k(x)dx$. 可得求解初值问题的**阿达姆斯（Adams ）显式公式（也称为Adams-Bashforth公式）**

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{A}(b_0 f_i + b_1 f_{i-1} + \cdots + b_k f_{i-k}), \quad i \geq k.$$

$$R[y] = B_k h^{k+2} y^{(k+2)}(\xi_i).$$

表9.1 阿达姆斯显式公式系数表

k	A	b_0	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	B_k
0	1	1						$1/2$
1	2	3	-1					$5/12$
2	12	23	-16	5				$3/8$
3	24	55	-59	37	-9			$251/720$
4	720	1 901	-2 774	2 616	-1 274	251		$95/288$

例如，当$k=0$时，

表9.1 阿达姆斯显式公式系数表

k	A	b_0	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	B_k
0	1	1						$1/2$
1	2	3	-1					$5/12$
2	12	23	-16	5				$3/8$
3	24	55	-59	37	-9			$251/720$
4	720	1 901	-2 774	2 616	-1 274	251		$95/288$

例如，当$k=0$时，$y_{i+1}=y_i+hf_i$ Euler法

当$k=1$时，

表9.1 阿达姆斯显式公式系数表

k	A	b_0	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	B_k
0	1	1						$1/2$
1	2	3	-1					$5/12$
2	12	23	-16	5				$3/8$
3	24	55	-59	37	-9			$251/720$
4	720	1 901	-2 774	2 616	-1 274	251		$95/288$

例如，当$k=0$时，$y_{i+1}=y_i+hf_i$ Euler法

当$k=1$时,$y_{i+1}=y_i+\frac{h}{2}(3f_i-f_{i-1})$

当$k=3$时,

表9.1 阿达姆斯显式公式系数表

k	A	b_0	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	B_k
0	1	1						1/2
1	2	3	-1					5/12
2	12	23	-16	5				3/8
3	24	55	-59	37	-9			251/720
4	720	1 901	-2 774	2 616	-1 274	251		95/288

例如， 当$k=0$时，$y_{i+1}=y_i+hf_i$ Euler法

当$k=1$时,$y_{i+1}=y_i+\frac{h}{2}(3f_i-f_{i-1})$

当$k=3$时,阿达姆斯显式公式及其局部截断误差为

$$y_{i+1}=y_i+\frac{h}{24}(55f_i-59f_{i-1}+37f_{i-2}-9f_{i-3}),$$
$$R[y]=\frac{251}{720}h^5y^{(5)}(\xi_i).$$

4) 阿达姆斯（Adams）隐式法

给定$k+1$个数据点$(x_{i-j}, f_{i-j})(j=-1,0,1,\cdots,k-1)$，可得阿达姆斯（Adams）隐式公式（也称为Adams-Monlton公式）

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{A^*}(b_0^* f_{i+1} + b_1^* f_i + \cdots + b_k^* f_{i-k+1}), \quad i \geq k-1.$$

$$R[y] = B_k^* h^{k+2} y^{(k+2)}(\xi_i).$$

4) 阿达姆斯（Adams）隐式法

给定$k+1$个数据点$(x_{i-j}, f_{i-j})(j=-1,0,1,\cdots,k-1)$，可得阿达姆斯（Adams）隐式公式（也称为Adams-Monlton公式）

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{A^*}(b_0^* f_{i+1} + b_1^* f_i + \cdots + b_k^* f_{i-k+1}), \quad i \geq k-1.$$

$$R[y] = B_k^* h^{k+2} y^{(k+2)}(\xi_i).$$

k	A^*	b_0^*	b_1^*	b_2^*	b_3^*	b_4^*	b_5^*	B_k^*
0	1	1						-1/2
1	2	1	1					-1/12
2	12	5	8	-1				-1/24
3	24	9	19	-5	1			-19/720
4	720	251	646	-264	106	-19		-3/160
5	1 440	475	1 427	-798	482	-173	27	-863/60 480

例如，当$k=0$时，

例如，当$k=0$时，$y_{i+1}=y_i+hf_{i+1}$　后退Euler法

当$k=1$时，

例如，当$k=0$时，$y_{i+1}=y_i+hf_{i+1}$　后退Euler法

当$k=1$时,$y_{i+1}=y_i+\frac{h}{2}(f_{i+1}+f_i)$　梯形法

当$k=2$时,

例如，当$k=0$时，$y_{i+1}=y_i+hf_{i+1}$ 后退Euler法

当$k=1$时,$y_{i+1}=y_i+\frac{h}{2}(f_{i+1}+f_i)$ 梯形法

当$k=2$时,$y_{i+1}=y_i+\frac{h}{12}(5f_{i+1}+8f_i-f_{i-1})$

当$k=3$时,

例如，当$k=0$时，$y_{i+1}=y_i+hf_{i+1}$　后退Euler法

当$k=1$时,$y_{i+1}=y_i+\frac{h}{2}(f_{i+1}+f_i)$　梯形法

当$k=2$时,$y_{i+1}=y_i+\frac{h}{12}(5f_{i+1}+8f_i-f_{i-1})$

当$k=3$时,阿达姆斯隐式公式为

$$
\begin{aligned}
y_{i+1} &= y_i+\frac{h}{24}(9f_{i+1}+19f_i-5f_{i-1}+f_{i-2}),\\
R[y] &= -\frac{19}{720}h^5y^{(5)}(\xi_i).
\end{aligned}
$$

比较表9.1与表9.2 中局部截断误差的系数可见$|B_k^*|<|B_k|$ $(k\geq 1)$，这说明隐式法的局部截断误差小于显式法的局部截断误差.

泰勒级数法

设函数f充分可导，将$y(x_{i+1})$在x_i处泰勒展开，有

$$y(x_{i+1}) = y(x_i + h) = y(x_i) + y'(x_i)h + \frac{1}{2}y''(x_i)h^2 + \frac{1}{3!}y'''(x_i)h^3 + \cdots$$
$$+ \frac{1}{p!}y^{(p)}(x_i)h^p + \frac{1}{(p+1)!}y^{(p+1)}(\xi_i)h^{p+1}, \quad x_i < \xi_i < x_{i+1}.$$

略去上式中的误差项，用$y_i^{(k)}$代替$y^{(k)}(x_i)$，则得p阶泰勒级数法

泰勒级数法

设函数f充分可导，将$y(x_{i+1})$在x_i处泰勒展开，有

$$y(x_{i+1}) = y(x_i + h) = y(x_i) + y'(x_i)h + \frac{1}{2}y''(x_i)h^2 + \frac{1}{3!}y'''(x_i)h^3 + \cdots$$
$$+\frac{1}{p!}y^{(p)}(x_i)h^p + \frac{1}{(p+1)!}y^{(p+1)}(\xi_i)h^{p+1}, \quad x_i < \xi_i < x_{i+1}.$$

略去上式中的误差项，用$y_i^{(k)}$代替$y^{(k)}(x_i)$，则得p阶泰勒级数法

$$y_{i+1} = y_i + y_i'h + \frac{1}{2}y_i''h^2 + \frac{1}{3!}y_i'''h^3 + \cdots + \frac{1}{p!}y_i^{(p)}h^p,$$

其中$y_i^{(k)}$的计算公式为：

$$\begin{cases} y_i' = f(x_i, y_i) \\ \\ \\ \end{cases}$$

泰勒级数法

设函数f充分可导，将$y(x_{i+1})$在x_i处泰勒展开，有

$$y(x_{i+1}) = y(x_i+h) = y(x_i) + y'(x_i)h + \frac{1}{2}y''(x_i)h^2 + \frac{1}{3!}y'''(x_i)h^3 + \cdots + \frac{1}{p!}y^{(p)}(x_i)h^p + \frac{1}{(p+1)!}y^{(p+1)}(\xi_i)h^{p+1}, \quad x_i < \xi_i < x_{i+1}.$$

略去上式中的误差项，用$y_i^{(k)}$代替$y^{(k)}(x_i)$，则得p阶泰勒级数法

$$y_{i+1} = y_i + y_i'h + \frac{1}{2}y_i''h^2 + \frac{1}{3!}y_i'''h^3 + \cdots + \frac{1}{p!}y_i^{(p)}h^p,$$

其中$y_i^{(k)}$的计算公式为：

$$\begin{cases} y_i' = f(x_i, y_i) \\ y_i'' = (f_x' + f_y' f)|_{(x_i,y_i)} \end{cases}$$

泰勒级数法

设函数f充分可导，将$y(x_{i+1})$在x_i处泰勒展开，有

$$y(x_{i+1}) = y(x_i+h) = y(x_i) + y'(x_i)h + \frac{1}{2}y''(x_i)h^2 + \frac{1}{3!}y'''(x_i)h^3 + \cdots$$
$$+\frac{1}{p!}y^{(p)}(x_i)h^p + \frac{1}{(p+1)!}y^{(p+1)}(\xi_i)h^{p+1}, \quad x_i < \xi_i < x_{i+1}.$$

略去上式中的误差项，用$y_i^{(k)}$代替$y^{(k)}(x_i)$，则得p阶泰勒级数法

$$y_{i+1} = y_i + y_i'h + \frac{1}{2}y_i''h^2 + \frac{1}{3!}y_i'''h^3 + \cdots + \frac{1}{p!}y_i^{(p)}h^p,$$

其中$y_i^{(k)}$的计算公式为：

$$\begin{cases} y_i' = f(x_i, y_i) \\ y_i'' = (f_x' + f_y' f)|_{(x_i,y_i)} \\ y_i''' = (f_{xx}'' + 2f_{xy}'' f + f_{yy}'' f^2 + f_x' f_y' + f_y'^2 f)|_{(x_i,y_i)} \\ \vdots \end{cases}$$

局部截断误差

$$R[y] = y(x_{i+1}) - y_{i+1} = \frac{h^{p+1}}{(p+1)!} y^{(p+1)}(\xi_i).$$

泰勒级数法

局部截断误差

$$R[y] = y(x_{i+1}) - y_{i+1} = \frac{h^{p+1}}{(p+1)!} y^{(p+1)}(\xi_i).$$

取$p = 1$，即欧拉法.

局部截断误差

$$R[y] = y(x_{i+1}) - y_{i+1} = \frac{h^{p+1}}{(p+1)!} y^{(p+1)}(\xi_i).$$

取$p=1$，即欧拉法. 取$p=2$得

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i) + \frac{h^2}{2}[f'_x(x_i, y_i) + f'_y(x_i, y_i) f(x_i, y_i)],$$

其局部截断误差

$$R[y] = y(x_{i+1}) - y_{i+1} = \frac{h^3}{6} y'''(\xi_i).$$

泰勒级数法

局部截断误差

$$R[y] = y(x_{i+1}) - y_{i+1} = \frac{h^{p+1}}{(p+1)!} y^{(p+1)}(\xi_i).$$

取$p = 1$，即欧拉法. 取$p = 2$得

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i) + \frac{h^2}{2}[f'_x(x_i, y_i) + f'_y(x_i, y_i) f(x_i, y_i)],$$

其局部截断误差

$$R[y] = y(x_{i+1}) - y_{i+1} = \frac{h^3}{6} y'''(\xi_i).$$

当$p > 2$时需要计算高阶导数，当$f(x, y)$的表达式比较复杂时，计算其高阶导数往往相当困难. 因而，泰勒级数法适用于求解比较简单的常微分方程.

Definition

p阶方法　若某一数值解法的局部截断误差$R[y]=O(h^{p+1})$，则称该法是p阶方法或称该法具有p阶精度. 例如，欧拉法，后退欧拉法是一阶方法，中点法、梯形法是二阶方法，辛普生法是四阶方法.

名词介绍

Definition

p阶方法 若某一数值解法的局部截断误差$R[y]=O(h^{p+1})$，则称该法是p阶方法或称该法具有p阶精度. 例如，欧拉法，后退欧拉法是一阶方法，中点法、梯形法是二阶方法，辛普生法是四阶方法.

显式法 由数值求解公式可以直接计算y_{i+1}的方法，即求解公式中的$f(x,y)$不含y_{i+1}的方法. 例如，欧拉法，中点法.

Definition

p阶方法 若某一数值解法的局部截断误差$R[y] = O(h^{p+1})$，则称该法是p阶方法或称该法具有p阶精度. 例如，欧拉法，后退欧拉法是一阶方法，中点法、梯形法是二阶方法，辛普生法是四阶方法.

显式法 由数值求解公式可以直接计算y_{i+1}的方法，即求解公式中的$f(x, y)$不含y_{i+1}的方法. 例如，欧拉法，中点法.

隐式法 由数值求解公式不能直接计算y_{i+1}的方法，即求解公式中的$f(x, y)$含有y_{i+1}. 例如，后退欧拉法，梯形法，辛普生法. 一般地，$f(x, y)$是非线性函数，y_{i+1}不能显化，计算y_{i+1}需要解方程.

Definition

单步法 计算y_{i+1}只需要一个y_i值的方法. 例如, 欧拉法, 后退欧拉法, 梯形法.

名词介绍

Definition

单步法 计算y_{i+1}只需要一个y_i值的方法. 例如，欧拉法，后退欧拉法，梯形法.

多步法 计算y_{i+1}需要$y_i, y_{i-1}, \cdots$多个值的方法. 一般k步法要用到$y_i, y_{i-1}, \cdots, y_{i-k+1}$的值. 例如，中点法，辛普生法，阿达姆斯显（隐）式法$k > 0(k > 1)$.

隐式法的求解

隐式法的求解一般采用非线性方程求根的方法. 下面以梯形法

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}\left[f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1})\right]$$

为例来说明隐式法的求解.

隐式法的求解一般采用非线性方程求根的方法. 下面以梯形法

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}\left[f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1})\right]$$

为例来说明隐式法的求解.

(i) 简单迭代法

隐式法的求解

隐式法的求解一般采用非线性方程求根的方法. 下面以梯形法

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}\left[f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1})\right]$$

为例来说明隐式法的求解.

(i) 简单迭代法

记 $\phi(y_{i+1}) = y_i + \frac{h}{2}\left[f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1})\right]$, 则有$y_{i+1} = \phi(y_{i+1})$.
给定y_{i+1}的初始值$y_{i+1}^{(0)}$（例如，由欧拉法$y_{i+1}^{(0)} = y_i + hf(x_i, y_i)$给出$y_{i+1}^{(0)}$）后，由迭代公式

$$y_{i+1}^{(k+1)} = \phi(y_i^{(k)}) = y_i + \frac{h}{2}\left[f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1}^{(k)})\right], \quad k = 0, 1, 2, \cdots$$

计算y_{i+1}. 当h充分小, 且当$|y_{i+1}^{(k+1)} - y_{i+1}^{(k)}| \le \epsilon$时,
取$y_{i+1} \approx y_{i+1}^{(k+1)}$.

(ii) 牛顿法

记$F(y_{i+1}) = y_{i+1} - y_i - \frac{h}{2}\left[f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1})\right]$,

(ii) 牛顿法

记$F(y_{i+1}) = y_{i+1} - y_i - \frac{h}{2}\left[f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1})\right]$，

梯形法即解方程$F(y_{i+1}) = 0$. 由非线性方程求根的牛顿法有

$$y_{i+1}^{(k+1)} = y_{i+1}^{(k)} - \frac{F(y_{i+1}^{(k)})}{F'(y_{i+1}^{(k)})}, \quad k = 0, 1, 2, \cdots$$

(ii) 牛顿法

记$F(y_{i+1}) = y_{i+1} - y_i - \frac{h}{2}\left[f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1})\right]$，
梯形法即解方程$F(y_{i+1}) = 0$. 由非线性方程求根的牛顿法有

$$y_{i+1}^{(k+1)} = y_{i+1}^{(k)} - \frac{F(y_{i+1}^{(k)})}{F'(y_{i+1}^{(k)})}, \quad k = 0, 1, 2, \cdots$$

即

$$y_{i+1}^{(k+1)} = y_{i+1}^{(k)} - \frac{y_{i+1}^{(k)} - y_i - \frac{h}{2}\left[f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1}^{(k)})\right]}{1 - \frac{h}{2} f'_y(x_{i+1}, y_{i+1}^{(k)})}, \quad k = 0, 1, 2, \cdots$$

当 $|y_{i+1}^{(k+1)} - y_{i+1}^{(k)}| \le \epsilon$时，取$y_{i+1} \approx y_{i+1}^{(k+1)}$.

(iii) 改进欧拉法

所谓改进欧拉法就是用简单迭代法求解y_{i+1}，且只迭代一次即可.

只要步长h取得足够小，欧拉法就可以算出y_{i+1}较好的迭代初始值$y_{i+1}^{(0)}$，再用梯形法计算一次就可以得到y_{i+1}更好的近似值.

(iii) 改进欧拉法

所谓改进欧拉法就是用简单迭代法求解y_{i+1}，且只迭代一次即可.

只要步长h取得足够小，欧拉法就可以算出y_{i+1}较好的迭代初始值$y_{i+1}^{(0)}$，再用梯形法计算一次就可以得到y_{i+1} 更好的近似值. 即

$$
\begin{cases}
y_{i+1}^{(0)} = y_i + hf(x_i, y_i), \\
y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}\left[f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1}^{(0)})\right].
\end{cases}
$$

(iii) 改进欧拉法

所谓改进欧拉法就是用简单迭代法求解y_{i+1}，且只迭代一次即可.

只要步长h取得足够小，欧拉法就可以算出y_{i+1}较好的迭代初始值$y_{i+1}^{(0)}$，再用梯形法计算一次就可以得到y_{i+1} 更好的近似值. 即

$$\begin{cases} y_{i+1}^{(0)} = y_i + hf(x_i, y_i), \\ y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}\left[f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1}^{(0)})\right]. \end{cases}$$

或

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}\left[f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_i + hf(x_i, y_i))\right]$$

称为改进欧拉法. 式中的第一式称为**预测公式**，第二式称为**校正公式**. 一般地，由显式公式做预测，同阶的隐式公式做校正的两个公式组成的方法称为**预测-校正法**.

利用泰勒展开可以导出**龙格-库塔(Runge-Kutta)法**（简称**R-K方法**）. m级的龙格-库塔法的一般形式为:

$$\begin{cases} y_{i+1} = y_i + \lambda_1 K_1 + \lambda_2 K_2 + \cdots + \lambda_m K_m, \\ K_1 = hf(x_i, y_i), \\ K_2 = hf(x_i + \alpha_2 h, y_i + \beta_{21} K_1), \\ K_3 = hf(x_i + \alpha_3 h, y_i + \beta_{31} K_1 + \beta_{32} K_2), \\ \quad \vdots \\ K_m = hf(x_i + \alpha_m h, y_i + \beta_{m1} K_1 + \beta_{m2} K_2 + \cdots + \beta_{m,m-1} K_{m-1}). \end{cases}$$

其中 $\lambda_i, \alpha_i, \beta_{j,k}$均是常数，由待定系数法确定.

龙格-库塔法

利用泰勒展开可以导出**龙格-库塔(Runge-Kutta)法**（**简称R-K方法**）. m级的龙格-库塔法的一般形式为:

$$
\begin{cases}
y_{i+1} = y_i + \lambda_1 K_1 + \lambda_2 K_2 + \cdots + \lambda_m K_m, \\
K_1 = hf(x_i, y_i), \\
K_2 = hf(x_i + \alpha_2 h, y_i + \beta_{21} K_1), \\
K_3 = hf(x_i + \alpha_3 h, y_i + \beta_{31} K_1 + \beta_{32} K_2), \\
\quad \vdots \\
K_m = hf(x_i + \alpha_m h, y_i + \beta_{m1} K_1 + \beta_{m2} K_2 + \cdots + \beta_{m,m-1} K_{m-1}).
\end{cases}
$$

其中 $\lambda_i, \alpha_i, \beta_{j,k}$均是常数，由待定系数法确定.确定的原则是将局部截断误差$R[y] = y(x_{i+1}) - y_{i+1}$在$x_i$ 处泰勒展开，适当选取h的系数，使得局部截断误差$R[y]$的阶尽可能的高.

下面以$m=2$级R-K法为例来说明R-K法的导出思想.

$$\begin{cases} y_{i+1} = y_i + \lambda_1 K_1 + \lambda_2 K_2, \\ K_1 = hf(x_i, y_i), \\ K_2 = hf(x_i + \alpha h, y_i + \beta K_1). \end{cases}$$

下面以$m=2$级R-K法为例来说明R-K法的导出思想.

$$\begin{cases} y_{i+1} = y_i + \lambda_1 K_1 + \lambda_2 K_2, \\ K_1 = hf(x_i, y_i), \\ K_2 = hf(x_i + \alpha h, y_i + \beta K_1). \end{cases}$$

将$y(x_{i+1})$在x_i处泰勒展开，有

$$y(x_{i+1}) = y(x_i+h) = y(x_i)+y'(x_i)h+\frac{1}{2!}y''(x_i)h^2+\frac{1}{3!}y'''(x_i)h^3+O(h^4)$$

由$y'(x) = f(x, y(x))$知

$$\begin{aligned} y''(x) &= f_x' + f_y' y' = f_x' + f_y' f, \\ y'''(x) &= f_{xx}'' + 2f_{xy}'' f + f_{yy}'' f^2 + f_x' f_y' + f_y'^2 f. \end{aligned}$$

龙格-库塔法

所以，

$$y(x_{i+1}) = y(x_i)+fh+\frac{1}{2}(f'_x+f'_y f)h^2+\frac{1}{6}(f''_{xx}+2f''_{xy}f+f''_{yy}f^2+f'_x f'_y+f'^2_y f)h^3+O$$

上式中的f是$f(x_i, y(x_i))$的简写.

所以,

$$y(x_{i+1}) = y(x_i)+fh+\frac{1}{2}(f'_x+f'_y f)h^2+\frac{1}{6}(f''_{xx}+2f''_{xy}f+f''_{yy}f^2+f'_x f'_y+f'^2_y f)h^3+O$$

上式中的f是$f(x_i, y(x_i))$的简写.

又由二元函数的泰勒展开式有

$$\begin{aligned} K_2 &= hf(x_i+\alpha h, y_i+\beta K_1) \\ &= h(f+\alpha f'_x h+\beta f'_y fh+\tfrac{1}{2}\alpha^2 f''_{xx}h^2+\alpha\beta f''_{xy}fh^2+\tfrac{1}{2}\beta^2 f''_{yy}f^2h^2+\cdots) \end{aligned}$$

所以,

$$y(x_{i+1}) = y(x_i)+fh+\frac{1}{2}(f'_x+f'_y f)h^2+\frac{1}{6}(f''_{xx}+2f''_{xy}f+f''_{yy}f^2+f'_x f'_y+f'^2_y f)h^3+O$$

上式中的f是$f(x_i, y(x_i))$的简写.

又由二元函数的泰勒展开式有

$$\begin{aligned} K_2 &= hf(x_i+\alpha h, y_i+\beta K_1) \\ &= h(f+\alpha f'_x h+\beta f'_y fh+\tfrac{1}{2}\alpha^2 f''_{xx}h^2+\alpha\beta f''_{xy}fh^2+\tfrac{1}{2}\beta^2 f''_{yy}f^2h^2+\cdots) \end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned} y_{i+1} &= y_i+\lambda_1 K_1+\lambda_2 K_2 \\ &= y_i+\lambda_1 fh+\lambda_2 h(f+\alpha f'_x h+\beta f'_y fh+\tfrac{1}{2}\alpha^2 f''_{xx}h^2 \\ &\quad +\alpha\beta f''_{xy}fh^2+\tfrac{1}{2}\beta^2 f''_{yy}f^2h^2+\cdots) \\ &= y_i+(\lambda_1+\lambda_2)fh+\lambda_2(\alpha f'_x+\beta f'_y f)h^2 \\ &\quad +\lambda_2(\tfrac{1}{2}\alpha^2 f''_{xx}+\alpha\beta f''_{xy}f+\tfrac{1}{2}\beta^2 f''_{yy}f^2)h^3+O(h^4) \end{aligned}$$

得局部截断误差

$$\begin{aligned} R[y] = y(x_{i+1}) - y_{i+1} = (1-\lambda_1-\lambda_2)f \\ h + \left[(\tfrac{1}{2}-\alpha\lambda_2)f'_x + (\tfrac{1}{2}-\beta\lambda_2)f'_y f\right]h^2 + \left[(\tfrac{1}{6}-\tfrac{1}{2}\alpha^2\lambda_2)f''_{xx}\right. \\ \left. +(\tfrac{1}{3}-\alpha\beta\lambda_2)f''_{xy}f + (\tfrac{1}{6}-\tfrac{1}{2}\beta^2\lambda_2)f''_{yy}f^2 + \tfrac{1}{6}(f'_x f'_y + f'^2_y f)\right]h^3 + O(h^4) \end{aligned}$$

为使$R[y]$的阶尽可能的高，由于f的任意性，应选

取$\alpha, \beta, \lambda_1, \lambda_2$使$h, h^2$的系数为零，

得局部截断误差

$$
\begin{aligned}
R[y] = y(x_{i+1}) - y_{i+1} = (1-\lambda_1-\lambda_2)f \\
h + \left[(\tfrac{1}{2}-\alpha\lambda_2)f'_x + (\tfrac{1}{2}-\beta\lambda_2)f'_y f\right]h^2 + \left[(\tfrac{1}{6}-\tfrac{1}{2}\alpha^2\lambda_2)f''_{xx}\right. \\
\left.+(\tfrac{1}{3}-\alpha\beta\lambda_2)f''_{xy}f + (\tfrac{1}{6}-\tfrac{1}{2}\beta^2\lambda_2)f''_{yy}f^2 + \tfrac{1}{6}(f'_x f'_y + f'^2_y f)\right]h^3 + O(h^4)
\end{aligned}
$$

为使$R[y]$的阶尽可能的高，由于f的任意性，应选取$\alpha, \beta, \lambda_1, \lambda_2$使$h, h^2$的系数为零，即得方程组

$$
\begin{cases}
1-\lambda_1-\lambda_2 = 0, \\
\frac{1}{2}-\alpha\lambda_2 = 0, \\
\frac{1}{2}-\beta\lambda_2 = 0.
\end{cases}
$$

由此解出$\alpha, \beta, \lambda_1, \lambda_2$，便得到相应公式. 注意到$\alpha, \beta, \lambda_1, \lambda_2$无论怎样选取，$h^3$的系数中$f'_x f'_y + f'^2_y f \neq 0$，故$R[y] = O(h^3)$. 所以，通过解上方程组得到的方法均是二阶方法. 方程组含有三个方程，四个未知量，其解有无穷多个.

（1）取$\lambda_1=\lambda_2=1/2, \alpha=\beta=1$，代入得

$$\begin{cases} y_{i+1}=y_i+h(\frac{1}{2}K_1+\frac{1}{2}K_2) \\ K_1=f(x_i,y_i) \\ K_2=f(x_i+h,y_i+hK_1) \end{cases}$$

即改进欧拉法.

（1）取$\lambda_1 = \lambda_2 = 1/2, \alpha = \beta = 1$，代入得

$$\begin{cases} y_{i+1} = y_i + h(\frac{1}{2}K_1 + \frac{1}{2}K_2) \\ K_1 = f(x_i, y_i) \\ K_2 = f(x_i + h, y_i + hK_1) \end{cases}$$

即改进欧拉法.

（2）取$\lambda_1 = 0$, 则$\lambda_2 = 1, \alpha = \beta = 1/2$，则得

$$\begin{cases} y_{i+1} = y_i + K_2 \\ K_1 = hf(x_i, y_i) \\ K_2 = hf(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}K_1). \end{cases}$$

称为变形欧拉法.

类似于上述二阶方法的推导，可得多种四级四阶R-K法. 应用最广泛的是如下**标准（经典）的四级四阶R-K法：**

$$\begin{cases} y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4), \\ K_1 = hf(x_i, y_i) \\ K_2 = hf(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}K_1), \\ K_3 = hf(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}K_2), \\ K_4 = hf(x_i + h, y_i + K_3). \end{cases}$$

R-K方法的优缺点：

优点 精度高，它是显式单步法，计算y_{i+1}只需要y_i一个值，每一步的步长可根据精度的要求单独考虑其大小.

R-K方法的优缺点：

优点 精度高，它是显式单步法，计算y_{i+1}只需要y_i一个值，每一步的步长可根据精度的要求单独考虑其大小.

缺点 需要计算多个函数值，当$f(x, y)$比较复杂时，计算量大.

R-K方法也常用于线性多步法开始值的计算.

除了以上介绍的显式R-K法以外，还有隐式R-K法.
由于隐式R-K法的计算比较复杂，故此处从略.

例9.2 用标准龙格-库塔法求解初值问题

$$\begin{cases} y' = -\frac{0.9y}{1+2x} & 0 \le x \le 0.1 \ , \\ y(0) = 1 \ . \end{cases}$$

例9.2 用标准龙格-库塔法求解初值问题

$$\begin{cases} y' = -\frac{0.9y}{1+2x} & 0 \le x \le 0.1 \ , \\ y(0) = 1 \ . \end{cases}$$

解 $f(x,y) = -\frac{0.9y}{1+2x}$ ，$y_0 = 1$ ，$h = 0.02$.

当$i = 0$时，

$$K_1 = hf(x_0, y_0) = -h\frac{0.9y_0}{1+2x_0} = -0.02 \times 0.9 = -0.018.$$

例9.2 用标准龙格-库塔法求解初值问题

$$\begin{cases} y' = -\frac{0.9y}{1+2x} & 0 \le x \le 0.1 \ , \\ y(0) = 1 \ . \end{cases}$$

解 $f(x,y) = -\frac{0.9y}{1+2x}$, $y_0 = 1$, $h = 0.02$.

当$i = 0$时,

$$K_1 = hf(x_0, y_0) = -h\frac{0.9y_0}{1+2x_0} = -0.02 \times 0.9 = -0.018.$$

$$\begin{aligned} K_2 = hf(x_0 + h/2, y_0 + K_1/2) &= hf(h/2, 1 - 0.018/2) \\ = 0.02f(0.01, 0.991) &= 0.02\left(-\frac{0.9 \times 0.991}{1+0.02}\right) \\ &= -0.017\,488\,235. \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
K_3 &= hf(x_0 + h/2, y_0 + K_2/2) = hf(h/2, 1 - 0.017\,488\,235/2) \\
&= 0.02f(0.01, 0.991\,255\,882) = 0.02\left(-\frac{0.9 \times 0.991\,255\,882}{1 + 0.02}\right) \\
&= -0.017\,492\,751.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
K_3 &= hf(x_0 + h/2, y_0 + K_2/2) = hf(h/2, 1 - 0.017\,488\,235/2) \\
&= 0.02f(0.01, 0.991\,255\,882) = 0.02\Big(-\frac{0.9 \times 0.991\,255\,882}{1 + 0.02}\Big) \\
&= -0.017\,492\,751.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
K_4 &= hf(x_0 + h, y_0 + K_3) = hf(0.02, 1 - 0.017\,492\,751) \\
&= 0.02f(0.02, 0.982\,507\,249) = 0.02\Big(-\frac{0.9 \times 0.982\,507\,249}{1 + 0.04}\Big) \\
&= -0.017\,004\,933.
\end{aligned}
$$

龙格-库塔法

$$K_3 = hf(x_0 + h/2, y_0 + K_2/2) = hf(h/2, 1 - 0.017\,488\,235/2)$$
$$= 0.02f(0.01, 0.991\,255\,882) = 0.02\Big(- \frac{0.9 \times 0.991\,255\,882}{1 + 0.02}\Big)$$
$$= -0.017\,492\,751.$$

$$K_4 = hf(x_0 + h, y_0 + K_3) = hf(0.02, 1 - 0.017\,492\,751)$$
$$= 0.02f(0.02, 0.982\,507\,249) = 0.02\Big(- \frac{0.9 \times 0.982\,507\,249}{1 + 0.04}\Big)$$
$$= -0.017\,004\,933.$$

$$y_1 = y_0 + \frac{1}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4) = 0.982\,505\,515.$$

$$y2 = \cdots$$

龙格-库塔法

另两个常用的四级四阶R-K法的计算公式为：

$$\begin{cases} y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(K_1 + 4K_3 + K_4), \\ K_1 = hf(x_i, y_i), \\ K_2 = hf(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}K_1), \\ K_3 = hf(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{4}K_1 + \frac{1}{4}K_2), \\ K_4 = hf(x_i + h, y_i - K_2 + 2K_3). \end{cases}$$

另两个常用的四级四阶R-K法的计算公式为：

$$\begin{cases} y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(K_1 + 4K_3 + K_4), \\ K_1 = hf(x_i, y_i), \\ K_2 = hf(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}K_1), \\ K_3 = hf(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{4}K_1 + \frac{1}{4}K_2), \\ K_4 = hf(x_i + h, y_i - K_2 + 2K_3). \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_{i+1} = y_i + \frac{1}{8}(K_1 + 3K_2 + 3K_3 + K_4), \\ K_1 = hf(x_i, y_i), \\ K_2 = hf(x_i + \frac{1}{3}h, y_i + \frac{1}{3}K_1), \\ K_3 = hf(x_i + \frac{2}{3}h, y_i - \frac{1}{3}K_1 + K_2), \\ K_4 = hf(x_i + h, y_i + K_1 - K_2 + K_3). \end{cases}$$

六级五阶**英格兰（England）公式：**

$$
\begin{cases}
y_{i+1} = y_i + \frac{1}{24}K_1 + \frac{5}{48}K_4 + \frac{27}{56}K_5 + \frac{125}{336}K_6, \\
K_1 = hf(x_i, y_i), \\
K_2 = hf(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}K_1), \\
K_3 = hf(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{4}K_1 + \frac{1}{4}K_2), \\
K_4 = hf(x_i + h, y_i - K_2 + 2K_3), \\
K_5 = hf\left(x_i + \frac{2}{3}h, y_i + \frac{7}{27}K_1 + \frac{10}{27}K_2 + \frac{1}{27}K_4\right), \\
K_6 = hf\left(x_i + \frac{1}{5}h, y_i + \frac{1}{625}(28K_1 - 125K_2 + 546K_3 + 54K_4 - 378K_5)\right)
\end{cases}
$$

1. 用待定系数法建立线性多步法

线性多步法一般形式如下

$$y_{i+1} = \sum_{j=0}^{k} \alpha_j y_{i-j} + h \sum_{j=-1}^{k} \beta_j f_{i-j},$$

其中α_j, β_j是常数，$f_{i-j} = f(x_{i-j}, y_{i-j})$. 当$\beta_{-1} = 0$时，是显式公式（法）；当$\beta_{-1} \neq 0$时，是隐式公式（法）.

1. 用待定系数法建立线性多步法

线性多步法一般形式如下

$$y_{i+1}=\sum_{j=0}^{k}\alpha_j y_{i-j}+h\sum_{j=-1}^{k}\beta_j f_{i-j},$$

其中α_j,β_j是常数，$f_{i-j}=f(x_{i-j},y_{i-j})$. **当$\beta_{-1}=0$时，是显式公式（法）；当$\beta_{-1}\neq 0$时，是隐式公式（法）**.局部截断误差为

$$\begin{aligned}R[y]&=y(x_{i+1})-y_{i+1}=y(x_{i+1})-\sum_{j=0}^{k}\alpha_j y_{i-j}-h\sum_{j=-1}^{k}\beta_j f_{i-j}\\&=y(x_{i+1})-\sum_{j=0}^{k}\alpha_j y(x_{i-j})-h\sum_{j=-1}^{k}\beta_j y'(x_{i-j}).\end{aligned}$$

1. 用待定系数法建立线性多步法

线性多步法一般形式如下

$$y_{i+1} = \sum_{j=0}^{k} \alpha_j y_{i-j} + h \sum_{j=-1}^{k} \beta_j f_{i-j},$$

其中α_j, β_j是常数，$f_{i-j} = f(x_{i-j}, y_{i-j})$. 当$\beta_{-1} = 0$时，是显式公式（法）；当$\beta_{-1} \neq 0$时，是隐式公式（法）.局部截断误差为

$$R[y] = y(x_{i+1}) - y_{i+1} = y(x_{i+1}) - \sum_{j=0}^{k} \alpha_j y_{i-j} - h \sum_{j=-1}^{k} \beta_j f_{i-j}$$

$$= y(x_{i+1}) - \sum_{j=0}^{k} \alpha_j y(x_{i-j}) - h \sum_{j=-1}^{k} \beta_j y'(x_{i-j}).$$

待定系数法建立线性多步法的思想是：用待定系数法确定局部截断误差$R[y]$中的系数α_j, β_j, 应使它的阶尽可能的高，然后用广义佩亚诺定理确定其误差项 .

例9.3 确定以下求解公式的系数和局部截断误差.

$$y_{i+1} = \alpha_0 y_i + \alpha_1 y_{i-1} + \alpha_2 y_{i-2} + h(\beta_{-1} f_{i+1} + \beta_0 f_i + \beta_1 f_{i-1}).$$

例9.3 确定以下求解公式的系数和局部截断误差.

$$y_{i+1} = \alpha_0 y_i + \alpha_1 y_{i-1} + \alpha_2 y_{i-2} + h(\beta_{-1} f_{i+1} + \beta_0 f_i + \beta_1 f_{i-1}).$$

解

$$\begin{aligned} R[y] &= y(x_{i+1}) - y_{i+1} \\ &= y(x_i + h) - \alpha_0 y(x_i) - \alpha_1 y(x_i - h) - \alpha_2 y(x_i - 2h) \\ &\quad - h\big[\beta_{-1} y'(x_i + h) + \beta_0 y'(x_i) + \beta_1 y'(x_i - h)\big]. \end{aligned}$$

取 $x_i = 0$, 令 $R[x^k] = 0, \quad k = 0, 1, 2, 3, 4.$

例9.3 确定以下求解公式的系数和局部截断误差.

$$y_{i+1}=\alpha_0 y_i+\alpha_1 y_{i-1}+\alpha_2 y_{i-2}+h(\beta_{-1}f_{i+1}+\beta_0 f_i+\beta_1 f_{i-1}).$$

解

$$\begin{aligned}R[y]&=y(x_{i+1})-y_{i+1}\\&=y(x_i+h)-\alpha_0 y(x_i)-\alpha_1 y(x_i-h)-\alpha_2 y(x_i-2h)\\&-h\big[\beta_{-1}y'(x_i+h)+\beta_0 y'(x_i)+\beta_1 y'(x_i-h)\big].\end{aligned}$$

取 $x_i=0$, 令 $R[x^k]=0,\quad k=0,1,2,3,4.$ 得

$$\begin{cases}1-\alpha_0-\alpha_1-\alpha_2=0,\\ h\big[1+\alpha_1+2\alpha_2-(\beta_{-1}+\beta_0+\beta_1)\big]=0,\\ h^2\big[1-\alpha_1-4\alpha_2-2(\beta_{-1}-\beta_1)\big]=0,\\ h^3\big[1+\alpha_1+8\alpha_2-3(\beta_{-1}+\beta_1)\big]=0,\\ h^4\big[1-\alpha_1-16\alpha_2-4(\beta_{-1}-\beta_1)\big]=0.\end{cases}$$

方程组含有五个方程，六个未知量，故有一个未知量可以任意选取. 设α_1任意，则可解得

方程组含有五个方程，六个未知量，故有一个未知量可以任意选取. 设α_1任意，则可解得

$$\alpha_0 = \frac{9}{8}(1-\alpha_1),\ \alpha_2 = -\frac{1}{8}(1-\alpha_1),\ \beta_{-1} = \frac{1}{24}(9-\alpha_1),$$
$$\beta_0 = \frac{1}{12}(9+7\alpha_1),\ \beta_2 = \frac{1}{24}(-9+17\alpha_1).$$

方程组含有五个方程，六个未知量，故有一个未知量可以任意选取. 设α_1任意，则可解得

$$\alpha_0=\tfrac{9}{8}(1-\alpha_1),\ \alpha_2=-\tfrac{1}{8}(1-\alpha_1),\ \beta_{-1}=\tfrac{1}{24}(9-\alpha_1),$$
$$\beta_0=\tfrac{1}{12}(9+7\alpha_1),\ \beta_2=\tfrac{1}{24}(-9+17\alpha_1).$$

（1）取$\alpha_1=1$，则

$$\alpha_0=0,\ \alpha_2=0,\ \beta_{-1}=1/3,\ \beta_0=4/3,\ \beta_1=1/3$$

得辛普生公式

$$y_{i+1}=y_{i-1}+\frac{h}{3}(f_{i+1}+4f_i+f_{i-1}).$$

$$R[y]=y(x_{i+1})-y_{i+1}=-\frac{h^5}{90}y^{(5)}(\xi_i).$$

（2）取$\alpha_1 = 0$，则

$$\alpha_0 = 9/8,\ \alpha_2 = -1/8,\ \beta_{-1} = 3/8,\ \beta_0 = 6/8,\ \beta_1 = -3/8.$$

则得哈明（**Hamming**）公式

$$y_{i+1} = \frac{1}{8}\left[9y_i - y_{i-2} + 3h(f_{i+1} + 2f_i - f_{i-1})\right].$$

（2）取$\alpha_1 = 0$，则

$$\alpha_0 = 9/8,\ \alpha_2 = -1/8,\ \beta_{-1} = 3/8,\ \beta_0 = 6/8,\ \beta_1 = -3/8.$$

则得**哈明（Hamming）公式**

$$y_{i+1} = \frac{1}{8}\left[9y_i - y_{i-2} + 3h(f_{i+1} + 2f_i - f_{i-1})\right].$$

下面估计哈明公式的局部截断误差.

$$\begin{aligned} R[y] &= y(x_{i+1}) - y_{i+1} \\ &= y(x_{i+1}) - \tfrac{1}{8}\Big\{9y(x_i) - y(x_{i-2}) + 3h\big[y'(x_{i+1}) + 2y'(x_i) - y'(x_{i-1})\big]\Big\} \\ &= y(x_i + h) - \tfrac{1}{8}\Big\{9y(x_i) - y(x_i - 2h) + 3h\big[y'(x_i + h) + 2y'(x_i) \\ &\quad - y'(x_i - h)\big]\Big\}. \end{aligned}$$

取$x_i = 0$，令$y = x^5$，则$R[y] = -3h^5 \neq 0$. 所以哈明公式的代数精度$m = 4$.

取$e(x)=\frac{1}{5!}y^{(5)}(\xi)(x-x_{i-1})^2(x-x_i)(x-x_{i+1})^2$. 注意到$e(x_{i-1})=e'(x_{i-1})=e(x_i)=e(x_{i+1})=e'(x_{i+1})=0$. 根据广义佩亚诺定理,

取$e(x)=\frac{1}{5!}y^{(5)}(\xi)(x-x_{i-1})^2(x-x_i)(x-x_{i+1})^2$. 注意到$e(x_{i-1})=e'(x_{i-1})=e(x_i)=e(x_{i+1})=e'(x_{i+1})=0$. 根据广义佩亚诺定理,

$$
\begin{aligned}
R[y] &= R[e(x)] \\
&= e(x_{i+1})-\frac{1}{8}\{9e(x_i)-e(x_{i-2})+3h[e'(x_{i+1})+2e'(x_i)-e'(x_{i-1})]\} \\
&= \frac{1}{8}e(x_{i-2})-\frac{3}{4}he'(x_i) \\
&= \frac{1}{8}\times\frac{1}{5!}y^{(5)}(\xi)h^2(-2h)(-3h)^2-\frac{3}{4}\times\frac{1}{5!}y^{(5)}(\xi)h^5 \\
&= -\frac{h^5}{40}y^{(5)}(\xi).
\end{aligned}
$$

取$e(x)=\frac{1}{5!}y^{(5)}(\xi)(x-x_{i-1})^2(x-x_i)(x-x_{i+1})^2$. 注意到$e(x_{i-1})=e'(x_{i-1})=e(x_i)=e(x_{i+1})=e'(x_{i+1})=0$. 根据广义佩亚诺定理,

$$
\begin{aligned}
R[y] &= R[e(x)] \\
&= e(x_{i+1})-\tfrac{1}{8}\{9e(x_i)-e(x_{i-2})+3h[e'(x_{i+1})+2e'(x_i)-e'(x_{i-1})]\} \\
&= \tfrac{1}{8}e(x_{i-2})-\tfrac{3}{4}he'(x_i) \\
&= \tfrac{1}{8}\times\tfrac{1}{5!}y^{(5)}(\xi)h^2(-2h)(-3h)^2-\tfrac{3}{4}\times\tfrac{1}{5!}y^{(5)}(\xi)h^5 \\
&= -\tfrac{h^5}{40}y^{(5)}(\xi).
\end{aligned}
$$

同样，用待定系数法可以导出**米尔恩（Milne）公式**

$$y_{i+1}=y_{i-3}+\frac{4}{3}h(2f_i-f_{i-1}+2f_{i-2}).$$

$$R[y]=\frac{14}{45}h^5y^{(5)}(\xi).$$

待定系数法、预测-校正公式

实际应用中常将显式公式与同阶的隐式公式联合使用，用显式公式计算的结果作出y_{i+1} 的估计（称为预测），将其代入隐式法的等式右端后算出y_{i+1}的值（称为校正）. 通常，将Adams显式公式与同阶的adams隐式公式联合使用，构成预测-校正公式.

实际应用中常将显式公式与同阶的隐式公式联合使用，用显式公式计算的结果作出y_{i+1} 的估计（称为预测），将其代入隐式法的等式右端后算出y_{i+1}的值（称为校正）．通常，将Adams显式公式与同阶的adams隐式公式联合使用，构成预测-校正公式.

如取$k=1$，得预测-校正公式

$$\begin{cases} y_{i+1}^{(0)} = y_i + \frac{h}{2}(3f_i - f_{i-1}), \\ y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}\left[f(x_{i+1}, y_{i+1}^{(0)}) + f_i\right]. \end{cases}$$

实际应用中常将显式公式与同阶的隐式公式联合使用，用显式公式计算的结果作出y_{i+1} 的估计（称为预测），将其代入隐式法的等式右端后算出y_{i+1}的值（称为校正）. 通常，将Adams显式公式与同阶的adams隐式公式联合使用，构成预测-校正公式.

如取$k=1$，得预测-校正公式

$$\begin{cases} y_{i+1}^{(0)} = y_i + \frac{h}{2}(3f_i - f_{i-1}), \\ y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}\left[f(x_{i+1}, y_{i+1}^{(0)}) + f_i\right]. \end{cases}$$

取$k=2$，则得预测-校正公式

$$\begin{cases} y_{i+1}^{(0)} = y_i + \frac{h}{12}(23f_i - 16f_{i-1} + 5f_{i-2}), \\ y_{i+1} = y_i + \frac{h}{12}\left[5f(x_{i+1}, y_{i+1}^{(0)}) + 8f_i - f_{i-1}\right]. \end{cases}$$

$k=3$，则得预测-校正公式

$$\begin{cases} y_{i+1}^{(0)} = y_i + \frac{h}{24}(55f_i - 59f_{i-1} + 37f_{i-2} - 9f_{i-3}), \\ y_{i+1} = y_i + \frac{h}{24}\left[9f(x_{i+1}, y_{i+1}^{(0)}) + 19f_i - 5f_{i-1} + f_{i-2}\right]. \end{cases}$$

$k=3$，则得预测-校正公式

$$\begin{cases} y_{i+1}^{(0)} = y_i + \frac{h}{24}(55f_i - 59f_{i-1} + 37f_{i-2} - 9f_{i-3}), \\ y_{i+1} = y_i + \frac{h}{24}\left[9f(x_{i+1}, y_{i+1}^{(0)}) + 19f_i - 5f_{i-1} + f_{i-2}\right]. \end{cases}$$

又如用米尔恩公式作预测，用哈明公式作校正，构成最常用的一个预测-校正公式

$$\begin{cases} y_{i+1}^{(0)} = y_{i-3} + \frac{4}{3}h(2f_i - f_{i-1} + 2f_{i-2}), \\ y_{i+1} = \frac{1}{8}(9y_i - y_{i-2}) + \frac{3}{8}h\left[f(x_{i+1}, y_{i+1}^{(0)}) + 2f_i - f_{i-1}\right]. \end{cases}$$

3. 预测-修正-校正-修正公式

修正哈明预测-校正公式:

$$\begin{cases} p_{i+1} = y_{i-3} + \frac{4}{3}h(2f_i - f_{i-1} + 2f_{i-2}), \\ \\ \\ \end{cases}$$

3. 预测-修正-校正-修正公式

修正哈明预测-校正公式:

$$\begin{cases} p_{i+1} = y_{i-3} + \frac{4}{3}h(2f_i - f_{i-1} + 2f_{i-2}), \\ m_{i+1} = p_{i+1} + \frac{112}{121}(c_i - p_i), \\ \\ \\ \end{cases}$$

3. 预测-修正-校正-修正公式

修正哈明预测-校正公式：

$$\begin{cases} p_{i+1} = y_{i-3} + \frac{4}{3}h(2f_i - f_{i-1} + 2f_{i-2}), \\ m_{i+1} = p_{i+1} + \frac{112}{121}(c_i - p_i), \\ c_{i+1} = \frac{1}{8}(9y_i - y_{i-2}) + \frac{3}{8}h\left[f(x_{i+1}, m_{i+1}) + 2f_i - f_{i-1}\right], \end{cases}$$

3. 预测-修正-校正-修正公式

修正哈明预测-校正公式:

$$\begin{cases} p_{i+1} = y_{i-3} + \frac{4}{3}h(2f_i - f_{i-1} + 2f_{i-2}), \\ m_{i+1} = p_{i+1} + \frac{112}{121}(c_i - p_i), \\ c_{i+1} = \frac{1}{8}(9y_i - y_{i-2}) + \frac{3}{8}h\left[f(x_{i+1}, m_{i+1}) + 2f_i - f_{i-1}\right], \\ y_{i+1} = c_{i+1} - \frac{9}{121}(c_{i+1} - p_{i+1}). \end{cases}$$

其中m_{i+1}为p_{i+1}的修正值，c_{i+1}为校正值，y_{i+1}为c_{i+1}的修正值.

显式单步法可以写为如下的一般形式：

$$y_{i+1} = y_i + h\phi(x_i, y_i, h).$$

假设该法是p阶方法，即局部截断误差$R[y] = O(h^{p+1})$．则

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + h\phi(x_i, y(x_i), h) + R[y].$$

并假设$\max\limits_{a\leq x\leq b}|y^{(p+1)}(x)| \leq M_{p+1}$，则$|R[y]| \leq cM_{p+1}h^{p+1}$.

显式单步法可以写为如下的一般形式：

$$y_{i+1} = y_i + h\phi(x_i, y_i, h).$$

假设该法是p阶方法，即局部截断误差$R[y] = O(h^{p+1})$．则

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + h\phi(x_i, y(x_i), h) + R[y].$$

并假设$\max\limits_{a\le x\le b} |y^{(p+1)}(x)| \le M_{p+1}$，则$|R[y]| \le cM_{p+1}h^{p+1}$.在实际计算中由于存在舍入误差，$\tilde{y}_{i+1}$不是理论上的数值解$y_{i+1}$，而是$y_{i+1}$ 的近似值，它应满足

$$\tilde{y}_{i+1} = \tilde{y}_i + h\phi(x_i, \tilde{y}_i, h) + \eta_i.$$

其中η_i表示第i步计算所产生的舍入误差.

Definition

设初值问题(9.0.1)满足定理9.0.1的条件，其准确解（真解）为$y(x)$. 对于任一固定的$x \in [a, b]$，令$h = \frac{x-a}{n}$，$x = a + ih$. 若由某一数值解法产生的近似解y_i，当$h \to 0$（即$n \to \infty$）时，一致地有

$$\lim_{h\to 0} y_i = y(x).$$

则称该法是收敛的，或者说数值解y_i一致地收敛于初值问题的真解$y(x)$在点x_i处的值$y(x_i)$.

Definition

设初值问题(9.0.1)满足定理9.0.1的条件，其准确解（真解）为$y(x)$. 对于任一固定的$x \in [a, b]$，令$h = \frac{x-a}{n}$, $x = a + ih$. 若由某一数值解法产生的近似解y_i，当$h \to 0$（即$n \to \infty$）时，一致地有

$$\lim_{h \to 0} y_i = y(x).$$

则称该法是收敛的，或者说数值解y_i一致地收敛于初值问题的真解$y(x)$在点x_i处的值$y(x_i)$.

Theorem

在定理9.2.1的条件下并假设计算中不存在舍入误差，则显式单步法收敛.

$y(x_i)-y_i$称为**全程（或整体）截断误差**. 由定理可知，若一个方法的局部截断误差为$O(h^{p+1})$，则它的全程截断误差为$O(h^p)$.
欧拉法的全程截断误差为

$$|y(x_i)-y_i| \leq \begin{cases} \frac{1}{2}(b-a)M_2h, & L=0, \\ (e^{L(b-a)}-1)\frac{M_2h}{2L}, & L\neq 0. \end{cases}$$

显然它是收敛的.

Theorem

设求常微分方程初值问题的显式单步法$y_{i+1} = y_i + h\phi(x_i, y_i, h)$，其中$\phi(x, y, h)$在区域$D = \{(x, y)|a \leq x \leq b,\ -\infty < y < \infty\}$上关于$y$满足利普希茨(*Lipschitz*)条件，即存在常数L，使得

$$|\phi(x, y, h) - \phi(x, \bar{y}, h)| \leq |\frac{\partial \phi}{\partial y}(y - \bar{y})| \leq L|y - \bar{y}|$$

对于任意的$x \in [a, b]$及任意的$y, \bar{y}$都成立，则显式单步法的全程误差$e_i = y(x_i) - \tilde{y}_i (i = 0, 1, 2, \cdots, n)$估计式如下：

$$|e_i| \leq \begin{cases} |e_0| + (x_i - a)(cM_{p+1}h^p + \eta/h), & L = 0, \\ |e_0|e^{L(x_i - a)} + (e^{L(x_i - a)} - 1)(\frac{cM_{p+1}h^p}{L} + \frac{\eta}{hL}), & L \neq 0. \end{cases}$$

其中η是η_i的上界.

由定理可得以下两个结论：

1) 局部截断误差和舍入误差均对计算结果产生影响. **局部截断误差（含$cM_{p+1}h^p$的项）随h的减小而减小**，**而舍入误差（含e_0和η的项）随h的减小而增大**. 因此，为减少计算解$\tilde{y}_i$的误差，h应选择合适，既不能取得太大，也不能取得太小.

由定理可得以下两个结论：

1) 局部截断误差和舍入误差均对计算结果产生影响. **局部截断误差（含$cM_{p+1}h^p$的项）随h的减小而减小**，而**舍入误差（含e_0和η的项）随h的减小而增大**. 因此，为减少计算解$\tilde{y}_i$的误差，h应选择合适，既不能取得太大，也不能取得太小.

2) 全程误差与解法的阶数p、真解的$p+1$阶导数$y^{(p+1)}(x)$有关.
为保证计算解的精度，一般应选取阶数p较大的解法，
但对于一些真解不够光滑，即$p+1$ 阶导数不存在或者虽然存在但上界很大的问题，则应采用低阶解法.

数值方法的收敛性和绝对稳定性

欧拉法中的$\phi(x,y,h)=f(x,y)$满足莱布尼茨条件，它的局部截断误差$R[y]=\frac{1}{2}y''(\xi_i)h^2$，则$|R[y]|\le\frac{1}{2}M_2h^2$. 由上述定理可知，其全程误差估计式为

$$|e_i|\le\begin{cases}|e_0|+(x_i-a)(\frac{1}{2}M_2h+\eta/h), & L=0,\\ |e_0|e^{L(x_i-a)}+(e^{L(x_i-a)}-1)(\frac{M_2h}{2L}+\frac{\eta}{hL}), & L\neq 0.\end{cases}$$

下面利用定理讨论标准（经典）的四级四阶龙格-库塔法的收敛性.

设函数$f(x,y)$在区域$D=\{(x,y)|a\leq x\leq b,\ -\infty<y<+\infty\}$上关于$y$满足利普希茨条件，且步长$h$满足$0\leq h\leq h_0$.

$$
\begin{aligned}
K_1(x,y,h) &= hf(x,y),\\
K_2(x,y,h) &= hf(x+\tfrac{h}{2},y+\tfrac{1}{2}K_1(x,y,h)),\\
K_3(x,y,h) &= hf(x+\tfrac{h}{2},y+\tfrac{1}{2}K_2(x,y,h)),\\
K_4(x,y,h) &= hf(x+h,y+K_3(x,y,h)).
\end{aligned}
$$

记

$$\phi(x,y,h)=\frac{1}{6h}\big[K_1(x,y,h)+2K_2(x,y,h)+2K_3(x,y,h)+K_4(x,y,h)\big].$$

显然，$K_1(x,y,h)=hf(x,y)$ 满足不等式

$$|K_1(x,y,h)-K_1(x,\tilde{y},h)|\le hL|y-\tilde{y}|.$$

利用上述不等式可得

$$|K_2(x,y,h)-K_2(x,\tilde{y},h)|\le hL|y-\tilde{y}+\tfrac{1}{2}K_1(x,y,h)-\tfrac{1}{2}K_1(x,\tilde{y},h)|$$

$$\le hL(1+\tfrac{hL}{2})|y-\tilde{y}|.$$

同理，容易得到下述不等式

$$|K_3(x,y,h)-K_3(x,\tilde{y},h)|\le hL\left[1+\frac{hL}{2}+\frac{1}{4}(hL)^2\right]|y-\tilde{y}|,$$

$$|K_4(x,y,h)-K_4(x,\tilde{y},h)|\le hL\left[1+hL+\frac{1}{2}(hL)^2+\frac{1}{4}(hL)^3\right]|y-\tilde{y}|.$$

于是，关于有

$$|\phi(x,y,h)-\phi(x,\tilde{y},h)|\le L\left(1+\frac{1}{2}hL+\frac{1}{6}(hL)^2+\frac{1}{24}(hL)^3\right)|y-\tilde{y}|$$

$$\le L\left(1+\frac{1}{2}h_0L+\frac{1}{6}(h_0L)^2+\frac{1}{24}(h_0L)^3\right)|y-\tilde{y}|.$$

同理，容易得到下述不等式

$$|K_3(x,y,h)-K_3(x,\tilde{y},h)|\le hL\Big[1+\frac{hL}{2}+\frac{1}{4}(hL)^2\Big]|y-\tilde{y}|,$$

$$|K_4(x,y,h)-K_4(x,\tilde{y},h)|\le hL\Big[1+hL+\frac{1}{2}(hL)^2+\frac{1}{4}(hL)^3\Big]|y-\tilde{y}|.$$

于是，关于有

$$|\phi(x,y,h)-\phi(x,\tilde{y},h)|\le L\Big(1+\frac{1}{2}hL+\frac{1}{6}(hL)^2+\frac{1}{24}(hL)^3\Big)|y-\tilde{y}|$$

$$\le L\Big(1+\frac{1}{2}h_0L+\frac{1}{6}(h_0L)^2+\frac{1}{24}(h_0L)^3\Big)|y-\tilde{y}|.$$

因此，$\phi(x,y,h)$关于y满足利普西茨条件，根据定理9-2知标准（经典）的四级四阶龙格-库塔法是收敛的.

绝对稳定性

前面介绍的算法的收敛性是在假定数值计算过程中的每一步计算都是准确的. 在实际计算中每一步计算不可避免地存在舍入误差. 如果每一步计算中的舍入误差不能得到控制，必然会形成舍入误差的积累. 这种误差的积累甚至于"淹没"了真解，致使计算出的$y_1, y_2, \cdots$ 不是初值问题的近似解. 数值稳定性问题是研究数值方法在计算中各步产生的舍入误差是否能得到控制的问题.

绝对稳定性

前面介绍的算法的收敛性是在假定数值计算过程中的每一步计算都是准确的. 在实际计算中每一步计算不可避免地存在舍入误差. 如果每一步计算中的舍入误差不能得到控制，必然会形成舍入误差的积累. 这种误差的积累甚至于"淹没"了真解，致使计算出的$y_1, y_2, \cdots$ 不是初值问题的近似解. 数值稳定性问题是研究数值方法在计算中各步产生的舍入误差是否能得到控制的问题.

Definition

若某个数值方法在计算y_i时有误差e_i，如果在计算以后各步y_j $(j > i)$时由e_i引起的误差e_j都满足

$$|e_j| < |e_i|, \quad (j > i).$$

则称该算法是绝对稳定的方法.

为简单起见，考察数值方法用于求解下面满足利普希茨条件的典型常微分方程（称为试验方程）

$$y' = \lambda y \quad (Re(\lambda) < 0)$$

(其中λ是常数，可以是复数.) 时数值方法的绝对稳定性.

绝对稳定性

为简单起见，考察数值方法用于求解下面满足利普希茨条件的典型常微分方程（称为试验方程）

$$y' = \lambda y \quad (Re(\lambda) < 0)$$

(其中λ是常数，可以是复数.) 时数值方法的绝对稳定性.

若用某种方法求解方程，取步长为h，如果计算开始时产生的误差在以后的计算中能逐步削弱，则称这个解法相对于$\bar{h} = \lambda h$ 是绝对稳定的，$\bar{h}$的全体称为绝对稳定区域.

若一个算法绝对稳定区域越大，则称这个算法的绝对稳定性越好.

欧拉法的稳定性

用欧拉法求解方程，数值解

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i) = y_i + \lambda h y_i.$$

当y_i因计算中的舍入误差变为$\tilde{y}_i$时，y_{i+1}变为$\tilde{y}_{i+1}$，则

$$\tilde{y}_{i+1} = \tilde{y}_i + \lambda h \tilde{y}_i.$$

以上两式相减，得

$$e_{i+1} = e_i + \lambda h e_i = (1 + \bar{h})e_i.$$

欲使欧拉法稳定，$|e_{i+1}| < |e_i|$.

这时$\bar{h}$应满足$|1 + \bar{h}| < 1$. 由于$\bar{h}$可能是复数，在$\bar{h}$的复平面上，得以实轴上点-1为圆心，半径为1的单位圆的内部. 所以，欧拉法的绝对稳定区域是圆域.

欧拉法的稳定性

用欧拉法求解方程，数值解

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i) = y_i + \lambda h y_i.$$

当y_i因计算中的舍入误差变为$\tilde{y}_i$时，y_{i+1}变为$\tilde{y}_{i+1}$，则

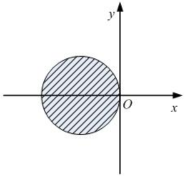
$$\tilde{y}_{i+1} = \tilde{y}_i + \lambda h \tilde{y}_i.$$

以上两式相减，得

$$e_{i+1} = e_i + \lambda h e_i = (1 + \bar{h}) e_i.$$

欲使欧拉法稳定，$|e_{i+1}| < |e_i|$.

这时$\bar{h}$应满足$|1 + \bar{h}| < 1$. 由于$\bar{h}$可能是复数，在$\bar{h}$的复平面上，得以实轴上点-1为圆心，半径为1的单位圆的内部. 所以，欧拉法的绝对稳定区域是圆域. 其绝对稳定区间为$-2 < \lambda h < 0$.



后退欧拉法的稳定性

用后退欧拉法

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_{i+1}, y_{i+1})$$

$$= y_i + \lambda h y_{i+1}.$$

与欧拉法同理可得

$$e_{i+1} = e_i + \lambda h e_{i+1} = e_i + \bar{h} e_{i+1}.$$

由此可得$e_{i+1} = \frac{e_i}{1-\bar{h}}$．其绝对稳定区域是$\left|\frac{1}{1-\bar{h}}\right| < 1$，即

$$|1-\bar{h}| > 1.$$

用后退欧拉法

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_{i+1}, y_{i+1})$$

$$= y_i + \lambda h y_{i+1}.$$

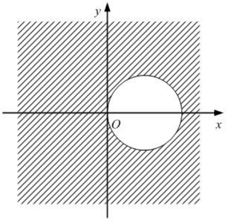
与欧拉法同理可得

$$e_{i+1} = e_i + \lambda h e_{i+1} = e_i + \bar{h} e_{i+1}.$$

由此可得$e_{i+1} = \frac{e_i}{1-\bar{h}}$．其绝对稳定区域是$\left|\frac{1}{1-\bar{h}}\right| < 1$，即

$$|1 - \bar{h}| > 1.$$

这是复平面上以实轴上点1为圆心，半径为1的单位圆的外部. 后退欧拉法的局部稳定区域比欧拉法的大的多. 一般地，隐式法的绝对稳定区域（性）都比同阶的显式法大（好）.



由标准四级四阶龙格-库塔法得　所确定.

$$y_{i+1}=\left(1+\bar{h}+\frac{\bar{h}^2}{2}+\frac{\bar{h}^3}{6}+\frac{\bar{h}^4}{24}\right)y_i.$$

若计算y_0时有舍入误差e_0，而

在以后的计算中无误差存在,

则在y_{i+1}处的误差为：

$$e_{i+1}=\left(1+\bar{h}+\frac{\bar{h}^2}{2}+\frac{\bar{h}^3}{6}+\frac{\bar{h}^4}{24}\right)e_i.$$

因此，在复平面上绝对稳定区

域由不等式

$$\left|1+\bar{h}+\frac{\bar{h}^2}{2}+\frac{\bar{h}^3}{6}+\frac{\bar{h}^4}{24}\right|<1$$

标准四级四阶龙格-库塔法的稳定性

由标准四级四阶龙格-库塔法得

$$y_{i+1} = (1+\bar{h}+\frac{\bar{h}^2}{2}+\frac{\bar{h}^3}{6}+\frac{\bar{h}^4}{24})y_i.$$

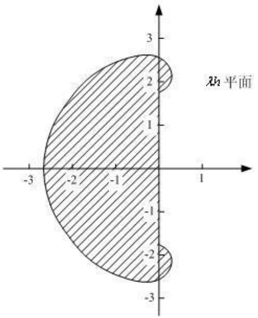
若计算y_0时有舍入误差e_0，而在以后的计算中无误差存在，则在y_{i+1}处的误差为：

$$e_{i+1} = (1+\bar{h}+\frac{\bar{h}^2}{2}+\frac{\bar{h}^3}{6}+\frac{\bar{h}^4}{24})e_i.$$

因此，在复平面上绝对稳定区域由不等式

$$|1+\bar{h}+\frac{\bar{h}^2}{2}+\frac{\bar{h}^3}{6}+\frac{\bar{h}^4}{24}| < 1$$

所确定. 其绝对稳定区间为$-2.78 < \lambda h < 0$,即$0 < h < -2.78/\lambda$.



稳定性

- 算法的稳定性与步长h密切相关，某个算法在一种步长下是稳定的计算方法，取大一点的步长就可能不稳定. 在计算时应选取步长h使得$\bar{h} = \lambda h$在绝对稳定区域以内，只有既收敛又稳定的方法才能在实际计算中使用.

稳定性

- 算法的稳定性与步长h密切相关，某个算法在一种步长下是稳定的计算方法，取大一点的步长就可能不稳定. 在计算时应选取步长h使得$\bar{h} = \lambda h$在绝对稳定区域以内，只有既收敛又稳定的方法才能在实际计算中使用.
- 由于多步法的绝对稳定域比较复杂，在此不予以讨论，但给出两个不稳定的方法的例子. 通过较为复杂的推导可知，中点法和辛普生法的绝对稳定区域不存在，即它们都不是绝对稳定的方法，故不能使用.

一阶微分方程组

一阶常微分方程组的初值问题：

$$
\begin{cases}
y_1'(x) = f_1\big(x, y_1(x), y_2(x), \cdots, y_n(x)\big), \\
y_2'(x) = f_2\big(x, y_1(x), y_2(x), \cdots, y_n(x)\big), \\
\vdots \\
y_n'(x) = f_n\big(x, y_1(x), y_2(x), \cdots, y_n(x)\big), \\
y_1(x_0) = y_{10},\ y_2(x_0) = y_{20},\ \cdots,\ y_n(x_0) = y_{n0}.
\end{cases}
$$

其中$a \le x \le b$.

若记

$$\mathbf{y}(x) = \left(y_1(x), y_2(x), \cdots, y_n(x)\right)^T, \quad \mathbf{y}_0 = \left(y_{10}, y_{20}, \cdots, y_{n0}\right)^T,$$

$$\mathbf{f}(x,\mathbf{y}) = (f_1(x,\mathbf{y}), f_2(x,\mathbf{y}), \cdots, f_n(x,\mathbf{y}))^T.$$

则微分方程组可以写成向量形式

$$\begin{cases} \mathbf{y}'(x) = \mathbf{f}(x,\mathbf{y}(x)), \quad a \le x \le b, \\ \mathbf{y}(a) = \mathbf{y}_0. \end{cases}$$

一阶微分方程组

若记

$$\mathbf{y}(x)=\left(y_1(x),y_2(x),\cdots,y_n(x)\right)^T,\quad \mathbf{y}_0=\left(y_{10},y_{20},\cdots,y_{n0}\right)^T,$$

$$\mathbf{f}(x,\mathbf{y})=(f_1(x,\mathbf{y}),f_2(x,\mathbf{y}),\cdots,f_n(x,\mathbf{y}))^T.$$

则微分方程组可以写成向量形式

$$\begin{cases} \mathbf{y}'(x)=\mathbf{f}(x,\mathbf{y}(x)), & a\le x\le b,\\ \mathbf{y}(a)=\mathbf{y}_0. \end{cases}$$

微分方程组初值问题在形式上与单个微分方程初值问题完全相同，只是数量函数在此变成了向量函数. 因此，求解单个一阶微分方程初值问题的数值方法，可以完全平移到求解一阶微分方程组的初值问题中，只不过是将单个方程中的函数换为向量函数即可.

m阶常微分方程初值问题为

$$\begin{cases} y^{(m)} = f(x, y, y', y'', \cdots, y^{(m-1)}), \quad a \le x \le b, \\ y(a) = y_0,\ y'(a) = y_0', \cdots,\ y^{(m-1)}(a) = y_0{}^{(m-1)}. \end{cases}$$

m阶常微分方程初值问题为

$$\begin{cases} y^{(m)} = f(x, y, y', y'', \cdots, y^{(m-1)}), \quad a \leq x \leq b, \\ y(a) = y_0,\ y'(a) = y_0', \cdots,\ y^{(m-1)}(a) = y_0{}^{(m-1)}. \end{cases}$$

求解高阶微分方程初值问题是将其转化为一阶微分方程组来求解. 为此引进新的变量$y_1 = y$, $y_2 = y'$, $\cdots$, $y_m = y^{(m-1)}$, 即可将m 阶微分方程转化为如下的一阶微分方程组.

$$\begin{cases} y_1' = y_2, \\ y_2' = y_3, \\ \cdots \\ y_{m-1}' = y_m, \\ y_m' = f(x, y_1, y_2, \cdots, y_m), \\ y_1(a) = y_0, y_2(a) = y_0', \cdots, y_m(a) = y_0^{(m-1)}. \end{cases}$$

二阶常微分方程

$$y'' = f(x, y, y'), \quad a < x < b.$$

二阶常微分方程

$$y'' = f(x, y, y'), \quad a < x < b.$$

第一边值条件 $\quad y(a) = \alpha, \quad y(b) = \beta.$

边值问题的数值解法

二阶常微分方程

$$y'' = f(x, y, y'), \quad a < x < b.$$

第一边值条件 $y(a) = \alpha, \quad y(b) = \beta.$

第二边值条件 $y'(a) = \alpha, \quad y'(b) = \beta.$

边值问题的数值解法

二阶常微分方程

$$y'' = f(x, y, y'), \quad a < x < b.$$

第一边值条件 $\quad y(a) = \alpha, \quad y(b) = \beta.$

第二边值条件 $\quad y'(a) = \alpha, \quad y'(b) = \beta.$

第三边值条件 $\quad y'(a) - \alpha_0 y(a) = \alpha_1, \quad y'(b) + \beta_0 y(b) = \beta_1.$

其中$\alpha_0 \geq 0$, $\beta_0 \geq 0$, $\alpha_0 + \beta_0 > 0$.
微分方程分别结合第一、第二、第三边值条件，则称其为第一、第二、第三边值问题.

有限差分法

有限差分法是求解常微分方程边值问题的一种基本数值方法，该法用数值微分公式替代微分方程和边界条件中的导数，略去误差项，把微分方程离散化成一个差分方程组．求解这个差分方程组，将差分方程组的解作为微分方程边值问题的近似解．这种解称为差分解．

有限差分法是求解常微分方程边值问题的一种基本数值方法，该法用数值微分公式替代微分方程和边界条件中的导数，略去误差项，把微分方程离散化成一个差分方程组. 求解这个差分方程组，将差分方程组的解作为微分方程边值问题的近似解. 这种解称为差分解.

求解第一边值问题

$$\begin{cases} y''(x) - q(x)y(x) = f(x), & a < x < b, \\ y(a) = \alpha, \quad y(b) = \beta. \end{cases}$$

其中$q(x), f(x)$是已知函数且$q(x) \geq 0, \alpha, \beta$是已知常数.

将求解区间$[a,b]$分成n等份，即取步长$h=(b-a)/n$,令节点$x_i=a+ih(i=0,1,2,\cdots,n)$. 在内节点$x_i(i=1,2,\cdots,n-1)$处微分方程为

$$y''(x_i)-q(x_i)y(x_i)=f(x_i),\quad i=1,2,\cdots,n-1.$$

代入数值微分公式

$$y''(x_i)=\frac{y(x_{i-1})-2y(x_i)+y(x_{i+1})}{h^2}-\frac{h^2}{12}y^{(4)}(\xi_i)$$

得

有限差分法

将求解区间$[a,b]$分成n等份，即取步长$h=(b-a)/n$,令节点$x_i=a+ih(i=0,1,2,\cdots,n)$. 在内节点$x_i(i=1,2,\cdots,n-1)$处微分方程为

$$y''(x_i)-q(x_i)y(x_i)=f(x_i),\quad i=1,2,\cdots,n-1.$$

代入数值微分公式

$$y''(x_i)=\frac{y(x_{i-1})-2y(x_i)+y(x_{i+1})}{h^2}-\frac{h^2}{12}y^{(4)}(\xi_i)$$

得

$$\frac{y(x_{i-1})-2y(x_i)+y(x_{i+1})}{h^2}-q(x_i)y(x_i)=f(x_i)+\frac{h^2}{12}y^{(4)}(\xi_i),\quad i=1,2,$$

略去误差项，并记$q_i=q(x_i),f_i=f(x_i)$，令$\{y_i\}$满足方程

有限差分法

$$\frac{y_{i-1}-2y_i+y_{i+1}}{h^2}-q_iy_i=f_i,\quad i=1,2,\cdots,n-1.$$

上式即

$$y_{i-1}-(2+h^2q_i)y_i+y_{i+1}=h^2f_i,\quad i=1,2,\cdots,n-1.\quad (9.4.6')$$

称为**差分方程组**，略去的项

$$R[x_i]=\frac{h^2}{12}y^{(4)}(\xi_i)$$

称为差分方程逼近微分方程的**截断误差**.
$(9.4.6')$式是一个含有$n+1$个未知量$y_i\,(i=0,1,\cdots,n)$，而只有$n-1$个方程的线性方程组. 要使该方程组有唯一解，这需要根据边值条件或者减少两个未知量或者增补两个方程.

对于第一边值问题，由于边值条件$y_0 = \alpha, y_n = \beta$已知，则其差分方程组为

$$
\begin{cases}
-(2 + h^2 q_1)y_1 + y_2 = h^2 f_1 - \alpha, \\
y_{i-1} - (2 + h^2 q_i)y_i + y_{i+1} = h^2 f_i, \quad i = 2, 3, \cdots, n-2, \\
y_{n-2} - (2 + h^2 q_{n-1})y_{n-1} = h^2 f_{n-1} - \beta.
\end{cases}
$$

注意到 $q_i \geq 0 \, (q(x) \geq 0)$，这是一个严格主对角占优的三对角方程组，其解存在且唯一，用追赶法解之.

有限差分法

对于第一边值问题，由于边值条件$y_0=\alpha, y_n=\beta$已知，则其差分方程组为

$$\begin{cases} -(2+h^2q_1)y_1+y_2=h^2f_1-\alpha, \\ y_{i-1}-(2+h^2q_i)y_i+y_{i+1}=h^2f_i, \quad i=2,3,\cdots,n-2, \\ y_{n-2}-(2+h^2q_{n-1})y_{n-1}=h^2f_{n-1}-\beta. \end{cases}$$

注意到 $q_i \geq 0\,(q(x)\geq 0)$，这是一个严格主对角占优的三对角方程组，其解存在且唯一，用追赶法解之.

对于第二边值问题，为保证略去的截断误差为$O(h^2)$，在边界处的一阶导数用三点数值微分公式替代，即

$$\begin{cases} y'(x_0)=\frac{-3y(x_0)+4y(x_1)-y(x_2)}{2h}+\frac{h^2}{3}y'''(\xi_0), \\ y'(x_n)=\frac{y(x_{n-2})-4y(x_{n-1})+3y(x_n)}{2h}+\frac{h^2}{3}y'''(\xi_n). \end{cases}$$

与方程组(9.4.6′)联立，可得第二边值问题的差分方程组:

$$\begin{cases} -3y_0+4y_1-y_2=2h\alpha, \\ y_{i-1}-(2+h^2q_i)y_i+y_{i+1}=h^2f_i, \quad i=1,2,\cdots,n-1, \\ y_{n-2}-4y_{n-1}+3y_n=2h\beta. \end{cases}$$

消去以上方程中的y_0和y_n，得

$$\begin{cases} -(\frac{2}{3}+h^2q_1)y_1+\frac{2}{3}y_2=h^2f_1+\frac{2}{3}h\alpha, \\ y_{i-1}-(2+h^2q_i)y_i+y_{i+1}=h^2f_i, \quad i=2,\cdots,n-2, \\ \frac{2}{3}y_{n-2}-(\frac{2}{3}+h^2q_{n-1})y_{n-1}=h^2f_{n-1}-\frac{2}{3}h\beta. \end{cases}$$

显然，这也是一个严格主对角占优的三对角方程组，其解存在且唯一，用追赶法解之.

对于第三边值问题，用与第二边值问题同样的方法可以建立其差分方程组为

$$\begin{cases} -(3+2h\alpha_0)y_0 + 4y_1 - y_2 = 2h\alpha_1, \\ y_{i-1} - (2+h^2q_i)y_i + y_{i+1} = h^2 f_i, \quad i = 1, 2, \cdots, n-1, \\ y_{n-2} - 4y_{n-1} + (3+2h\beta_0)y_n = 2h\beta_1. \end{cases}$$

可以证明这个差分方程组的解存在且唯一.但用追赶法求解这个线性方程组时，不能保证计算过程中的数值稳定性.

对于第三边值问题，用与第二边值问题同样的方法可以建立其差分方程组为

$$\begin{cases} -(3+2h\alpha_0)y_0+4y_1-y_2=2h\alpha_1, \\ y_{i-1}-(2+h^2q_i)y_i+y_{i+1}=h^2f_i, \quad i=1,2,\cdots,n-1, \\ y_{n-2}-4y_{n-1}+(3+2h\beta_0)y_n=2h\beta_1. \end{cases}$$

可以证明这个差分方程组的解存在且唯一.但用追赶法求解这个线性方程组时，不能保证计算过程中的数值稳定性.为了使离散化后得到的差分方程组求解是数值稳定的，采用一种新的节点划分方法. 即令

$$h=(b-a)/n,\ x_i=a+(i-1/2)h, \quad i=0,1,\cdots,n+1.$$

在内点$x_i(i=1,2,\cdots,n)$上的差分方程仍然为(9.4.6′)

有限差分法

而对在边界点a, b处的$y'(a)$、$y'(b)$和$y(a)$、$y(b)$分别利用公式

$$\begin{cases} y'(x) = \frac{y(x+h)-y(x-h)}{2h} - \frac{h^2}{6}y'''(\xi), \\ y(x) = \frac{y(x-h)+y(x+h)}{2} - \frac{h^2}{2}y''(\xi). \end{cases}$$

近似计算. 于是由第三边值条件得两个方程

$$\frac{y_1 - y_0}{h} - \alpha_0 \frac{y_0 + y_1}{2} = \alpha_1, \quad \frac{y_{n+1} - y_n}{h} + \beta_0 \frac{y_n + y_{n+1}}{2} = \beta_1.$$

即

$$-\frac{1 + h\alpha_0/2}{1 - h\alpha_0/2} y_0 + y_1 = \frac{h\alpha_1}{1 - h\alpha_0/2},$$

$$y_n - \frac{1 + h\beta_0/2}{1 - h\beta_0/2} y_{n+1} = -\frac{h\beta_1}{1 - h\beta_0/2}.$$

将以上两方程与方程(9.4.6′)联立，则得第三边值条件的另一种差分方程组

$$\begin{cases} -\frac{1+h\alpha_0/2}{1-h\alpha_0/2}y_0 + y_1 = \frac{h\alpha_1}{1-h\alpha_0/2}, \\ y_{i-1} - (2+h^2q_i)y_i + y_{i+1} = h^2 f_i, \quad i = 1, 2, \cdots, n. \\ y_n - \frac{1+h\beta_0/2}{1-h\beta_0/2}y_{n+1} = -\frac{h\beta_1}{1-h\beta_0/2}. \end{cases}$$

这是一个严格对角占优的三对角方程组，可用追赶法求解.

将以上两方程与方程(9.4.6′)联立，则得第三边值条件的另一种差分方程组

$$\begin{cases} -\frac{1+h\alpha_0/2}{1-h\alpha_0/2}y_0 + y_1 = \frac{h\alpha_1}{1-h\alpha_0/2}, \\ y_{i-1} - (2+h^2q_i)y_i + y_{i+1} = h^2 f_i, \quad i = 1, 2, \cdots, n. \\ y_n - \frac{1+h\beta_0/2}{1-h\beta_0/2}y_{n+1} = -\frac{h\beta_1}{1-h\beta_0/2}. \end{cases}$$

这是一个严格对角占优的三对角方程组，可用追赶法求解.

对于更一般的线性常微分方程边值问题

$$\begin{cases} y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = f(x), \quad a < x < b, \\ \alpha_0 y'(a) + \alpha_1 y(a) = \alpha_2, \\ \beta_0 y'(b) + \beta_1 y(b) = \beta_2. \end{cases}$$

（其中$|\alpha_0| + |\alpha_1| \neq 0, |\beta_0| + |\beta_1| \neq 0.$）的离散化，
令$h = \frac{b-a}{n}, x_i = a + ih \ (i = 0, 1, 2, \cdots, n)$.

为保证略去的截断误差为$O(h^2)$，二阶导数用(9.4.4)式，在端点处的一阶导数用(9.4.8)，方程中的一阶导数用

$$y'(x_i) = \frac{y(x_{i+1}) - y(x_{i-1})}{2h} - \frac{h^2}{6}y'''(\xi_i)$$

代替，略去误差项后得到差分方程组

有限差分法

为保证略去的截断误差为$O(h^2)$，二阶导数用(9.4.4)式，在端点处的一阶导数用(9.4.8)，方程中的一阶导数用

$$y'(x_i) = \frac{y(x_{i+1}) - y(x_{i-1})}{2h} - \frac{h^2}{6} y'''(\xi_i)$$

代替，略去误差项后得到差分方程组

$$\begin{cases} \frac{\alpha_0(-3y_0+4y_1-y_2)}{2h} + \alpha_1 y_0 = \alpha_2, \\ \frac{y_{i-1}-2y_i+y_{i+1}}{h^2} + \frac{p_i(y_{i+1}-y_{i-1})}{2h} + q_i y_i = f_i, \quad i = 1, 2, \cdots, n-1, \\ \frac{\beta_0(y_{n-2}-4y_{n-1}+3y_n)}{2h} + \beta_1 y_n = \beta_2. \end{cases}$$

解此方程组可得差分解$y_i(i = 0, 1, \cdots, n)$.

例9.5 取$h = 0.25$，用差分法解

$$\begin{cases} y'' - y = -x, & 0 < x < 1, \\ y(0) = 0,\ y(1) = 0. \end{cases}$$

例9.5 取$h=0.25$，用差分法解

$$\begin{cases} y''-y=-x, & 0<x<1, \\ y(0)=0,\ y(1)=0. \end{cases}$$

解 $n=1/h=4$, $x_i=ih=0.25i$ $(i=0,1,2,3,4)$. 有

$$\begin{cases} -2.0625y_1+y_2=-0.015625, \\ y_1-2.0625y_2+y_3=-0.03125, \\ y_2-2.0625y_3=-0.046875. \end{cases}$$

解之，得 $y_1=0.0348852$, $y_2=0.0563258$, $y_3=0.0500365$.

理论解是

$$y(x)=x-\frac{e^x-e^{-x}}{e-e^{-1}}.$$

$y(x)$在x_1,x_2,x_3处的值分别为

0.0350476, 0.0565908, 0.0502758.

Lemma

（极值原理） 设$y_i(i=0,1,,\cdots,n)$ 是一组不全相等的数，且满足$l(y_i)\triangleq\frac{y_{i-1}-2y_i+y_{i+1}}{h^2}-q_iy_i\geq 0\quad(i=1,2,\cdots,n-1)$，其中$q_i\geq 0$, 则非负$y_i$ 的最大值必为y_0 或y_n，即

$$\max_{y_i\geq 0}\{y_i\}=\max\{y_0,y_n\}.$$

证明 用反证法 假定存在$k\in\{1,2,\cdots,n-1\}$ 使得$y_k=\underset{y_i\geq 0}{max}\{y_i\}=M>y_{k-1}$ 或 y_{k+1}, 则

$$l(y_k)=\frac{y_{k-1}-2M+y_{k+1}}{h^2}-q_kM<\frac{M-2M+M}{h^2}-q_kM\leq 0.$$

这与$l(y_i)\geq 0$矛盾. 故结论成立.

Corollary

设两组数$\{y_i\},\{z_i\}(i=0,1,\cdots,n)$满足以下关系：

$$|l(y_i)| \leq -l(z_i), \quad i=1,2,\cdots,n-1,$$

$$|y_0| \leq z_0, \quad |y_n| \leq z_n.$$

则 $|y_i| \leq z_i \quad (i=0,1,\cdots,n)$.

证明 已知条件可以改写为

$$l(z_i) \leq l(y_i) \leq -l(z_i), \quad i=1,2,\cdots,n-1,$$

$$-z_0 \leq y_0 \leq z_0, \quad -z_n \leq y_n \leq z_n.$$

由此可知

$$\begin{cases} l(y_i - z_i) = l(y_i) - l(z_i) \geq 0, & i = 1, 2, \cdots, n-1, \\ y_0 - z_0 \leq 0, \ y_n - z_n \leq 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} l(-y_i - z_i) = -l(y_i) - l(z_i) \geq 0, & i = 1, 2, \cdots, n-1, \\ -y_0 - z_0 \leq 0, \quad -y_n - z_n \leq 0. \end{cases}$$

根据极值原理知

$$\max_{y_i - z_i \geq 0} \{y_i - z_i\} = \max\{y_0 - z_0, y_n - z_n\} \leq 0,$$

$$\max_{-y_i - z_i \geq 0} \{-y_i - z_i\} = \max\{-y_0 - z_0, -y_n - z_n\} \leq 0.$$

故有 $y_i \leq z_i, \quad -z_i \leq y_i, \quad i = 0, 1, \cdots, n.$

即 $|y_i| \leq z_i, \quad i = 0, 1, \cdots, n.$

Theorem

设$y(x)$是第一边值问题的解且$y(x)$在区间$[a,b]$ 上四阶连续可微，$y_i(i=0,1,\cdots,n)$是差分方程(9.4.7)的解. 则有误差估计式：

$$|y(x_i)-y_i| \leq \frac{h^2}{24}M_4(x_i-a)(b-x_i) \leq \frac{h^2}{96}M_4(b-a)^2,$$

其中$M_4 = \max\limits_{a\leq x\leq b}|y^{(4)}(x)|$.

证明 记 $\epsilon_i = y(x_i)-y_i$ ，则$\epsilon_0=\epsilon_n=0$. 得

$$\frac{\epsilon_{i-1}-2\epsilon_i+\epsilon_{i+1}}{h^2}-q_i\epsilon_i = \frac{h^2}{12}y^{(4)}(\xi_i), \quad i=1,2,\cdots,n-1.$$

即 $l(\epsilon_i)=\frac{h^2}{12}y^{(4)}(\xi_i), \quad i=1,2,\cdots,n-1.$

于是有

$$\begin{cases} l(\epsilon_i) = \frac{h^2}{12} y^{(4)}(\xi_i), & i = 1, 2, \cdots, n-1. \\ \epsilon_0 = 0, \ \epsilon_n = 0. \end{cases}$$

令数 $\rho_i(i = 0, 1, \cdots, n)$ 满足差分方程

$$\begin{cases} l(\rho_i) = -\frac{h^2}{12} M_4, & i = 1, 2, \cdots, n-1. \\ \rho_0 = 0, \ \rho_n = 0. \end{cases}$$

则有

$$\begin{cases} |l(\epsilon_i)| \le -l(\rho_i), & i = 1, 2, \cdots, n-1. \\ |\epsilon_0| \le \rho_0, \ |\epsilon_n| \le \rho_n. \end{cases}$$

根据推论9.4.1有

$$|\epsilon_i| \le \rho_i, \quad i = 0, 1, \cdots, n.$$

若记 $L(\rho_i)=\frac{\rho_{i-1}-2\rho_i+\rho_{i+1}}{h^2}$.

则 $\rho_i(i=0,1,\cdots,n)$ 满足的差分方程可写为

$$\begin{cases} L(\rho_i)=-\frac{h^2}{12}M_4+q_i\rho_i, & i=1,2,\cdots,n-1, \\ \rho_0=0,\ \rho_n=0. \end{cases}$$

令$\eta_i(i=0,1,\cdots,n)$ 满足

$$\begin{cases} L(\eta_i)=-\frac{h^2}{12}M_4, & i=1,2,\cdots,n-1, \\ \eta_0=0,\ \eta_n=0. \end{cases}$$

以上两式相减，得

$$\begin{cases} L(\rho_i-\eta_i)=q_i\rho_i\geq 0, & i=1,2,\cdots,n-1, \\ \rho_0-\eta_0=0,\ \rho_n-\eta_n=0. \end{cases}$$

根据极值原理知

$$\max_{\rho_i-\eta_i\geq 0}\{\rho_i-\eta_i\}=\max\{\rho_0-\eta_0,\rho_n-\eta_n\}=0.$$

由此即得 $\rho_i - \eta_i \le 0, \quad i = 0, 1, \cdots, n$. 从而有

$$|\epsilon_i| \le \rho_i \le \eta_i, \quad i = 0, 1, \cdots, n.$$

求解差分方程(9.4.12)得

$$\eta_i = \frac{h^4}{24} M_4 i(n-i) = \frac{h^2}{24} M_4 ih(nh-ih) = \frac{h^2}{24} M_4 (x_i - a)(b - x_i), \quad i = 0, 1, \cdots$$

所以,

$$\begin{aligned} & |y(x_i) - y_i| = |\epsilon_i| \le \eta_i = \frac{h^2}{24} M_4 (x_i - a)(b - x_i) \\ & \le \frac{h^2}{24} M_4 \max_{a \le x \le b} (x - a)(b - x) = \frac{h^2}{24} M_4 (\frac{a+b}{2} - a)(b - \frac{a+b}{2}) \\ & = \frac{h^2}{96} M_4 (b - a)^2. \end{aligned}$$

小　结

1. 对于初值问题，介绍了数值微分法、数值积分法、基于泰勒展开的龙格-库塔法、待定系数法.

小　结

1. 对于初值问题，介绍了数值微分法、数值积分法、基于泰勒展开的龙格-库塔法、待定系数法.
2. 讨论了显式单步法的收敛性和稳定性. 通常隐式法的绝对稳定性都比同类同阶的显式法好.

小　结

1. 对于初值问题，介绍了数值微分法、数值积分法、基于泰勒展开的龙格-库塔法、待定系数法.
2. 讨论了显式单步法的收敛性和稳定性. 通常隐式法的绝对稳定性都比同类同阶的显式法好.
3. 四级四阶龙格-库塔法的精度高，是显式单步法，易于调节步长，计算过程稳定. 但它计算$f(x,y)$ 函数值的次数较多. 因此，适用于求解函数$f(x,y)$ 的表达式较简单的问题.

小　结

1. 对于初值问题，介绍了数值微分法、数值积分法、基于泰勒展开的龙格-库塔法、待定系数法.
2. 讨论了显式单步法的收敛性和稳定性. 通常隐式法的绝对稳定性都比同类同阶的显式法好.
3. 四级四阶龙格-库塔法的精度高，是显式单步法，易于调节步长，计算过程稳定. 但它计算$f(x, y)$ 函数值的次数较多. 因此，适用于求解函数$f(x, y)$ 的表达式较简单的问题.
4. 线性多步法和由它构成的预测-校正公式，每一步计算函数值的次数少，但它需借助于其他方法提供开始值

小　结

1. 对于初值问题，介绍了数值微分法、数值积分法、基于泰勒展开的龙格-库塔法、待定系数法.
2. 讨论了显式单步法的收敛性和稳定性. 通常隐式法的绝对稳定性都比同类同阶的显式法好.
3. 四级四阶龙格-库塔法的精度高，是显式单步法，易于调节步长，计算过程稳定. 但它计算$f(x, y)$ 函数值的次数较多. 因此，适用于求解函数$f(x, y)$ 的表达式较简单的问题.
4. 线性多步法和由它构成的预测-校正公式，每一步计算函数值的次数少，但它需借助于其他方法提供开始值
5. 选取步长h，既要考虑到节省计算量，又要减少局部截断误差以保证计算结果的精度. 选取h应使$\bar{h}$ 落在绝对稳定区域.

小　结

1. 对于初值问题，介绍了数值微分法、数值积分法、基于泰勒展开的龙格-库塔法、待定系数法.
2. 讨论了显式单步法的收敛性和稳定性. 通常隐式法的绝对稳定性都比同类同阶的显式法好.
3. 四级四阶龙格-库塔法的精度高，是显式单步法，易于调节步长，计算过程稳定. 但它计算$f(x,y)$函数值的次数较多. 因此，适用于求解函数$f(x,y)$的表达式较简单的问题.
4. 线性多步法和由它构成的预测-校正公式，每一步计算函数值的次数少，但它需借助于其他方法提供开始值
5. 选取步长h，既要考虑到节省计算量，又要减少局部截断误差以保证计算结果的精度. 选取h应使$\bar{h}$落在绝对稳定区域.
6. 有限差分法用导数的近似式替代导数求解边值问题将边值问题，最终归结为求解一个三对角线性方程组.