CentraleSupélec - Cursus ingénieur CentraleSupélec

CIPEDP - 1ère année

Examen partiel

Mercredi 7 novembre 2018

Epreuve 1h30 sans document (3 pages)

L'usage de tout ordinateur, calculatrice ou téléphone est interdit

— *Chacune des affirmations doit être justifiée par une démonstration.*

— *Les 2 exercices peuvent être abordés de manière indépendante.*

Exercice 1

Soit μ une mesure sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Pour un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}$, on note $x + I = \{x + y,\ y \in I\}$. On suppose que pour tout intervalle $I \subset \mathbb{R}$ et tout $x \in \mathbb{R}$, μ vérifie $\mu(x + I) = \mu(I)$ et $\mu([0, 1]) = 1$.

Q. 1.1 Montrer que pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, $\mu(\{x\}) = \mu(\{y\})$ et en déduire que $\mu(\{x\}) = 0$ (on dit que μ est *diffuse*).

Q. 1.2 (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\mu([0, \frac{1}{n}[)$.

(b) En déduire la valeur de $\mu([x, x + \frac{m}{n}[)$ pour tous $x \in \mathbb{R}, m \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

(c) Montrer que pour tous $x < y \in \mathbb{R}$, $\mu([x, y[) = y - x$. Conclure.

Exercice 2 (Théorème fondamental de l'analyse)

Soient $a < b \in \mathbb{R}$. On note $I = [a, b]$. Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est *absolument continue* si $\forall \varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que si $\{]a_k, b_k[\}_{k=1\ldots n}$ est une collection d'intervalles ouverts 2 à 2 disjoints,

$$\sum_{k=1}^{n}(b_k - a_k) < \delta \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} |f(b_k) - f(a_k)| < \varepsilon. \qquad (1)$$

Voici quelques résultats utiles pour la suite, qu'on admettra :

— Toute fonction absolument continue sur $[a, b]$ est dérivable λ-p.p. et sa dérivée f' est intégrable ($f' \in L^1(I)$) ;

— Pour toute fonction $f \in L^1(I)$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que

$$\forall J \in \mathcal{B}(I), \quad \lambda(J) \leq \delta \Rightarrow \int_J |f| \, d\lambda \leq \varepsilon. \tag{2}$$

Dans tout cet exercice, f est une fonction absolument continue sur $I = [0,1]$. En tout point $x \in I$ où f est dérivable, on note $f'(x)$ sa dérivée. En tout autre point x, on pose $f'(x) = 0$. On a ainsi défini une fonction f' sur I.

Nous allons démontrer le résultat suivant, dit “théorème fondamental de l'analyse” :

$$\int_I f'(x) \, \lambda(dx) = f(1) - f(0). \tag{3}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit $x_k^n = k2^{-n}$ pour $k \in \{0, \dots, 2^n\}$, ainsi que $I_n = \{x_0^n, x_1^n, \dots, x_{2^n}^n\}$ de sorte que pour tout n, $I_n \subset I_{n+1}$.

Ensuite, définissons

$$g_n = \sum_{k=0}^{2^n - 1} 2^n (f(x_{k+1}^n) - f(x_k^n)) \, \mathbb{1}_{[x_k^n, x_{k+1}^n[}.$$

Q. 2.1 Montrer qu'il existe un ensemble $N \subset I$ tel que $\lambda(N) = 0$ et

$$\forall x \in I \setminus N, \quad \lim_{n \to +\infty} g_n(x) = f'(x).$$

Q. 2.2 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer $\int_I g_n \, d\lambda$ et en déduire $\lim_{n\to\infty} \int_I g_n \, d\lambda$.

Dans la deuxième partie de cet exercice, l'objectif est de démontrer la relation suivante :

$$\lim_{n\to\infty} \int_I |g_n(x) - f'(x)| \, \lambda(dx) = 0.$$

Pour tout couple $(m, \varphi(m)) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$, on définit l'ensemble $E_m = \left\{x \in I : \ \sup_{n \geq \varphi(m)} |g_n(x)| \geq m\right\}$. On admet la propriété suivante vérifiée par $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$: pour tout $\eta > 0$, il existe un couple d'entiers $(m, \varphi(m)) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$ tels que

$$m\lambda\left(E_m\right) < \eta. \tag{4}$$

Soit $\varepsilon > 0$, fixé pour la suite de l'exercice.

Q. 2.3 En utilisant la propriété (2), montrer qu'il existe $m \in \mathbb{N}^*$ et $\varphi(m) \in \mathbb{N}$ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_I |g_n(x) - f'(x)| \, \lambda(dx) \leq \int_{I \setminus E_m} |g_n(x) - f'(x)| \, \lambda(dx) + \int_{E_m} |g_n(x)| \, \lambda(dx) + \frac{\varepsilon}{4}.$$

Q. 2.4 Pour tout $(m, \varphi(m)) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$, montrer que

$$\lim_{n\to\infty} \int_{I\setminus E_m} |g_n(x) - f'(x)| \, \lambda(dx) = 0.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout couple $(m, \varphi(m)) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$, on définit $E^{(1)}_{m,n} := \{x \in E_m \,:\, |g_n(x)| < m\}$ et $E^{(2)}_{m,n} = E_m \setminus E^{(1)}_{m,n}$. On remarque que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $E_m = E^{(1)}_{m,n} \cup E^{(2)}_{m,n}$, où l'union est disjointe.

Q. 2.5 Montrer qu'il existe $(m, \varphi(m)) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\int_{E^{(1)}_{m,n}} |g_n(x)| \, \lambda(dx) \leq \frac{\varepsilon}{4}$.

Q. 2.6 Montrer que soit $E^{(2)}_{m,n} = \emptyset$, soit il existe un entier $J \leq 2^n$ et des indices $k_1, \ldots, k_J$ (où chaque $k_j \in \{0, \ldots, 2^n - 1\}$) tels que

$$E^{(2)}_{m,n} = \bigcup_{j=1}^{J} [x^n_{k_j}, x^n_{k_j+1}[.$$

En déduire que

$$\int_{E^{(2)}_{m,n}} |g_n| \, d\lambda = \sum_{j=1}^{J} |f(x^n_{k_j+1}) - f(x^n_{k_j})|.$$

Q. 2.7 Déduire de la question précédente qu'il existe $(m, \varphi(m)) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\int_{E^{(2)}_{m,n}} |g_n| \, d\lambda \leq \frac{\varepsilon}{4}.$$

Q. 2.8 Démontrer le théorème fondamental de l'analyse dans le cas d'une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ absolument continue, i.e. démontrer que (3) est vérifiée. *(On justifiera précisément l'enchaînement des arguments, en portant une attention particulière à l'utilisation des quantificateurs).*

Q. 2.9 (Question bonus) Montrer (2).

Remarque : La démonstration de (4) vous est tout à fait accessible mais ne constitue pas une question de ce partiel, car elle nécessite un peu plus de temps et de réflection que le reste des questions.

Correction

Pour vous aider à comprendre certaines erreurs fréquemment commises, nous avons ajouté à la fin de la correction de certaines questions un paragraphe commençant par la mention "Commentaire".

Solution de Q. 1.1 On observe que $I = \{0\}$ est un intervalle et donc que $\mu(\{x\}) = \mu(x+I) = \mu(I) = \mu(\{0\})$. Ainsi, on a par exemple

$$1 = \mu([0,1]) \geq \mu(\mathbb{Q} \cap [0,1]) = \sum_{x \in \mathbb{Q}\cap[0,1]} \mu(\{x\}) = \sum_{x \in \mathbb{Q}\cap[0,1]} \mu(\{0\})$$

et cette dernière quantité ne peut être finie que si $\mu(\{0\}) = 0$, auquel cas $\mu(\{x\}) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$ grâce à la propriété établie précédemment.

Commentaire : Attention à l'erreur suivante qui a féquemment été commise. A partir de la définition donnée dans l'énoncé, $x + \emptyset = \{x + y,\ y \in \emptyset\} = \emptyset$, et non $\{x\}$. En d'autres termes, l'intervalle vide translaté de x est toujours l'intervalle vide.

Solution de Q. 1.2

(a) En utilisant la question précédente et l'invariance par translation de la mesure, on a

$$\begin{aligned} 1 = \mu([0,1]) &= \sum_{k=0}^{n-1} \mu\left([\tfrac{k}{n}, \tfrac{k+1}{n}]\right) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \mu\left([0, \tfrac{1}{n}]\right) = n\mu\left([0, \tfrac{1}{n}]\right). \end{aligned}$$

Ainsi, $\mu\left([0, \frac{1}{n}[\right) = \mu\left([0, \frac{1}{n}]\right) = \frac{1}{n}$.

(b) On en déduit facilement que pour tous $m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}^*$, $\mu\left([x, x + \frac{m}{n}[\right) = \frac{m}{n}$.

(c) On a $\mu([x, y[) = \mu([0, y - x])$. Soit $(q_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ telle que $q_n \searrow y - x$. On a alors $\mu([0, q_n]) = q_n$, par la question précédente. Ainsi, par continuité de la mesure, on obtient

$$y - x = \lim q_n = \lim \mu([0, q_n]) = \mu\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} [0, q_n]\right) = \mu([0, y - x]).$$

μ est donc une mesure sur $\mathbb{R}$ telle que pour tous $x \leq y \in \mathbb{R}$, $\mu([x, y]) = y - x$, donc par un résultat du cours (que nous avions admis car il provient de l'unicité dans le théorème de Carathéodory), μ est la mesure de Lebesgue.

Commentaire : Il ne suffit pas de choisir $q_n \to x$ pour que $\mu([0,q_n]) \to \mu([0,x])$, il n'y a pas de telle propriété de "continuité" pour une mesure en général. D'où l'importance de choisir une suite croissante, ou décroissante, pour pouvoir appliquer la Proposition III*.2.2 du cours.*

Solution de Q. 2.1 L'énoncé fait remarquer que f est dérivable presque partout sur $[0,1]$. Soit donc $N \in \mathcal{B}([0,1])$ tel que $\lambda(N) = 0$ et f dérivable partout sur $[0,1] \setminus N$. De plus, on ajoute 0 et 1 à N, qui sont les bords du domaine sur lesquels on ne cherche pas à dériver f. Ceci ne modifie pas les propriétés de N.
Soit $x \in I \setminus N$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique $k_n \in \{0, \ldots, 2^n - 1\}$ tel que $x \in [x^n_{k_n}, x^n_{k_n+1}[$. On a alors $g_n(x) = 2^n(f(x^n_{k_n+1}) - f(x^n_{k_n})) \to f'(x)$. En effet, soit il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $x = x^n_{k_n}$, et dans ce cas pour tout $n' \geq n$, x est de la forme $x^{n'}_{k_{n'}}$ et donc $g_{n'}(x)$ est un taux d'accroissement, d'où la convergence. Soit x n'est pas de cette forme, et dans ce cas (i.e. $x \neq x^n_k, \forall k, n \in \mathbb{N}$),

$$\begin{aligned}
2^n(f(x^n_{k_n+1}) - f(x^n_{k_n})) &= 2^n(x^n_{k_n+1} - x)\frac{f(x^n_{k_n+1}) - f(x)}{x^n_{k_n+1} - x} + 2^n(x - x^n_{k_n})\frac{f(x) - f(x^n_{k_n})}{x - x^n_{k_n}} \\
&= 2^n(x^n_{k_n+1} - x)\left(f'(x) + o(1)\right) + 2^n(x - x^n_{k_n})\left(f'(x) + o(1)\right) \\
&= f'(x) + 2^n\left(o(x^n_{k_n+1} - x) + o(x^n_{k_n} - x)\right),
\end{aligned}$$

où les "o" sont pour $n \to \infty$, et on a à la fois $2^n o(x^n_{k_n+1} - x) \to 0$ et $2^n o(x^n_{k_n} - x) \to 0$ lorsque $n \to \infty$.

Commentaire : 1) Il a souvent été lu que $N = \{x \in [0,1] :\ f$ n'est pas dérivable en $x\}$ sans jamais justifier qu'un tel ensemble était Borel-mesurable. En fait, il n'est même pas évident qu'il le soit, notamment dans le cas où il serait non-dénombrable.
2) Le dernier calcul est important. En effet, on peut trouver (exercice) relativement simplement une fonction dérivable en x et des suites (a_n) et (b_n) telles que $a_n < b_n < x$ et $\frac{f(b_n)-f(a_n)}{b_n-a_n}$ qui ne tend pas vers $f'(x)$.

Solution de Q. 2.2 On remarque que g_n est une fonction en escalier, il est donc possible de l'intégrer :

$$\begin{aligned}\int_I g_n \, d\lambda &= \sum_{k=0}^{2^n-1} 2^n (f(x_{k+1}^n) - f(x_k^n))\lambda\left([x_k^n, x_{k+1}^n[\right)\\ &= \sum_{k=0}^{2^n-1} (f(x_{k+1}^n) - f(x_k^n))\\ &= f(1) - f(0).\end{aligned}$$

En particulier, cette intégrale ne dépend pas de n, donc $\lim_{n\to\infty} \int_I g_n \, d\lambda = f(1) - f(0)$.

Commentaire : Pensez à justifier que g_n est mesurable ET intégrable. Ici c'est bien le cas car elle est en escalier sur un intervalle borné.

Solution de Q. 2.3 On commence par remarquer (justifier) que E_m est un borélien de $\mathbb{R}$ et donc $I \setminus E_m$ également. On a

$$\begin{aligned}\int_I |g_n - f'| \, d\lambda &= \int_{I\setminus E_m} |g_n - f'| \, d\lambda + \int_{E_m} |g_n - f'| \, d\lambda\\ &\leq \int_{I\setminus E_m} |g_n - f'| \, d\lambda + \int_{E_m} |g_n| \, d\lambda + \int_{E_m} |f'| \, d\lambda.\end{aligned}$$

On va utiliser l'uniforme continuité de l'intérale de Lebesgue (propriété (2)) : $f' \in L^1(I)$, donc il existe $\delta > 0$ tel que $\forall J \in \mathcal{B}(I)$, $\int_J |f'| \, d\lambda < \frac{\varepsilon}{4}$. D'après (4), il existe $m \in \mathbb{N}^*$ et $\varphi(m)$ tels que :

$$m\lambda\left(\left\{x \in I : \sup_{n\geq\varphi(m)} |g_n(x)| \geq m\right\}\right) < \delta.$$

Ainsi $\lambda(E_m) < \delta$ et donc $\int_{E_m} |f'| \, d\lambda < \frac{\varepsilon}{4}$.

Solution de Q. 2.4 Pour tout $x \in I \setminus E_m$, et pour tout $n \geq \varphi(m)$,

$$|g_n(x) - f'(x)| \leq m + |f'(x)|.$$

On peut donc appliquer le théorème de convergence dominée, d'où le résultat.

Solution de Q. 2.5 Il existe $m \in \mathbb{N}^*$ et $\varphi(m) \in \mathbb{N}$ tels que $m\lambda(E_m) < \frac{\varepsilon}{4}$. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a alors $|g_n(x)| < m, \forall x \in E_{m,n}^{(1)}$ ce qui implique que

$$\int_{E_{m,n}^{(1)}} |g_n(x)| \, \lambda(dx) \leq m \int_{E_{m,n}^{(1)}} \lambda(dx) = m\lambda\left(E_{m,n}^{(1)}\right) \leq m\lambda(E_m) < \tfrac{\varepsilon}{4}.$$

Solution de Q. 2.6 Si $E^{(2)}_{m,n} \neq \emptyset$, soit $x \in E^{(2)}_{m,n} = \{y \in E_m : \ |g_n(x)| \geq m\}$. **Il aurait dû être précisé dans l'énoncé qu'on supposait $n \geq \varphi(m)$. Le barême tient compte de cette inexactitude et valorisera les copies l'ayant relevée.**

Alors, puisque g_n est constante sur tous les intervalles $[x^n_k, x^n_{k+1}[$, on a $[x^n_k, x^n_{k+1}[\subset E^{(2)}_{m,n}$ et il existe donc $J \leq 2^n$ tel que $E^{(2)}_{m,n} = \bigcup_{j=1}^J [x^n_{k_j}, x^n_{k_j+1}[$. Ensuite,

$$\begin{aligned}
\int_{E^{(2)}_{m,n}} |g_n| \, d\lambda &= \sum_{j=1}^J \int_{[x^n_{k_j}, x^n_{k_j+1}[} |g_n| \, d\lambda \\
&= \sum_{j=1}^J \int_{[x^n_{k_j}, x^n_{k_j+1}[} 2^n |f(x^n_{k_j+1}) - f(x^n_{k_j})| \, d\lambda \\
&= \sum_{j=1}^J |f(x^n_{k_j+1}) - f(x^n_{k_j})|.
\end{aligned}$$

Solution de Q. 2.7 On utilise désormais l'absolue continuité de f : soit $\delta' > 0$ tel que pour toute suite finie d'intervalles disjoints $]a_k, b_k[$, $\lambda(\cup_k]a_k, b_k[) < \delta' \Rightarrow \sum_k |f(b_k) - f(a_k)| < \frac{\varepsilon}{4}$. Grâce à (4), soit maintenant m et $\varphi(m)$ tels que $m\lambda(E_m) < \delta'$. Puisque $\lambda(E^{(2)}_{k,n}) \leq \lambda(E_m)$, on obtient donc le résultat en utilisant l'égalité de la question précédente.

Solution de Q. 2.8 Soit $\varepsilon > 0$. On choisit $\delta, \delta' > 0$ comme aux questions 2.3 et 2.7. La propriété (4) garantit maintenant l'existence de $m \in \mathbb{N}^*$ et $\varphi(m) \in \mathbb{N}$ tels que

$$m\lambda\left(\left\{x \in I : \sup_{n \geq \varphi(m)} |g_n(x)| \geq m\right\}\right) < \min(\tfrac{\varepsilon}{4}, \delta, \delta').$$

Avec ces deux entiers m et $\varphi(m)$, on peut désormais combiner le résultat des questions précédentes pour obtenir que pour n suffisamment grand (... à préciser),

$$\int_I |g_n - f'| \, d\lambda \leq \varepsilon.$$

On a donc prouver que $\lim_{n\to\infty} \int_I g_n \, d\lambda = \int_I f' \, d\lambda$. Grâce à la question 2.2, on obtient le résultat final.

Commentaire : Il ne suffit pas de "choisir m suffisamment grand" de sorte que toutes les conditions des questions précédentes sur $m\lambda(E_m)$ soit vérifiées. En effet, nous n'avons pas vérifié que $m \mapsto m\lambda(E_m)$ est décroissante, et cette propriété ne semble pas évidente.

Solution de Q. 2.9 Voir Exercice III.23 du TD.