Cours d'Equations aux Dérivées Partielles

Modélisation par des EDP

Séance 3 - Démarche. Notions théoriques. Classification. Problèmes approchés.

CentraleSupélec - Cursus ingénieur

7 janvier 2020

Amphi EDP 3 + TD

- Hervé MOUTARDE
  Institut de recherche sur les lois fondamentales de l'univers (IRFU), CEA, Université Paris-Saclay
  Orme des Merisiers, Bât. 703
  herve.moutarde@cea.fr

Des questions ?

- daskit.com/edp19-20 puis section "Amphi 3".

Support

- Support amphi 3 en version vierge disponible dès à présent sur edunao.
- Support amphi 3 en version annotée disponible ultérieurement.

Quelques éléments des CM précédents (y compris CIP)

- Problème = équations + conditions (ex : Cauchy).
- Régularité de la solution.
- Schéma numérique.
- Résolution d'un problème approché.
- Convergence de la solution du problème approché vers la solution exacte.
- Problème bien posé au sens d'Hadamard.

- Espaces L^p.
- Analyse hilbertienne.
- Transformée de Fourier.

Programme

Objectifs de la séance

- Je sais écrire l'équation de la chaleur.
- Je sais **adimensionner** un problème.
- Je sais déterminer de quel **type** est une équation aux dérivées partielles donnée.
- Je sais reconnaître les **conditions aux limites** d'un problème aux dérivées partielles.
- Je connais les propriétés fondamentales des équations **hyperboliques**, **elliptiques** et **paraboliques**.
- Je connais la définition d'un problème **bien posé**.

Généralités

EDO et EDP

Conditions d'égalité liant les dérivées des fonctions inconnues par rapport à leurs variables.

Généralités

EDO et EDP

Conditions d'égalité liant les dérivées des fonctions inconnues par rapport à leurs variables.

Exemple (EDO)

Equations du mouvement (principe fondamental de la dynamique)

$$m\,\ddot{x}(t) = \sum_{F\ \mathit{force}} F\,(t, x(t), \dot{x}(t))$$

$\longrightarrow$ *Beaucoup d'EDO d'ordre 2 !*

Généralités

EDO et EDP

Conditions d'égalité liant les dérivées des fonctions inconnues par rapport à leurs variables.

Exemple (EDO)

Equations du mouvement (principe fondamental de la dynamique)

$$m\ddot{x}(t) = -k\,x(t) - \gamma\dot{x}(t)$$

$\longrightarrow$ *Système oscillant avec frottement*

Généralités

EDO et EDP

Conditions d'égalité liant les dérivées des fonctions inconnues par rapport à leurs variables.

Exemple (EDO)

Equations du mouvement (principe fondamental de la dynamique)

$$m\,\ddot{x}(t) = -\,k\,x(t) - \gamma\dot{x}(t)$$

$\longrightarrow$ *Système oscillant avec frottement*

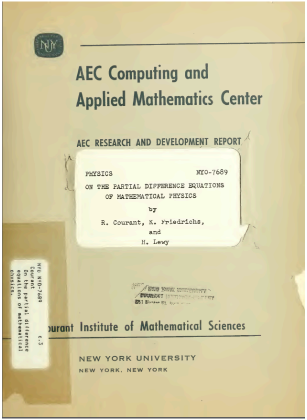
Exemple (EDP)

Equation de conduction instationnaire (transfert thermique)

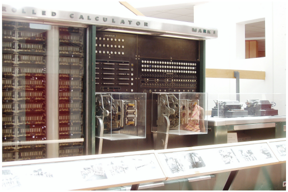
$$\rho c_p \partial_t \theta = \lambda(\partial^2_{xx}\theta + \partial^2_{yy}\theta) + f$$

Enjeux qualitatifs et quantitatifs

- **Qualitatifs :** Existence de la solution à différents problèmes ?

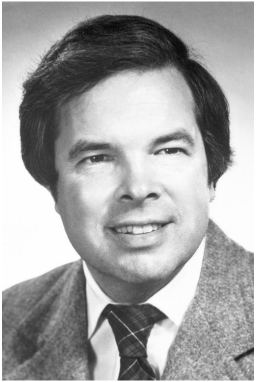


- Condition de convergence **CFL** de Courant-Friedrichs-Lewy, **Poly. Sec. 3.3.3**, *"Über die partiellen Differenzengleichungen der mathematischen Physik"* (**en 1928**, traduit en 1956).
- Le premier grand calculateur numérique n'a été construit qu'**en 1944**...



Enjeux qualitatifs et quantitatifs

- **Qualitatifs :** Existence de la solution à différents problèmes ?



Kenneth Wilson
Prix Nobel 1982

"In thinking and trying out ideas about 'what is a field theory' I found it very helpful to demand that a ***correctly formulated field theory should be soluble by computer****, the same way an ordinary differential equation can be solved on a computer, namely* ***with arbitrary accuracy in return for sufficient computing power****."*

Enjeux qualitatifs et quantitatifs

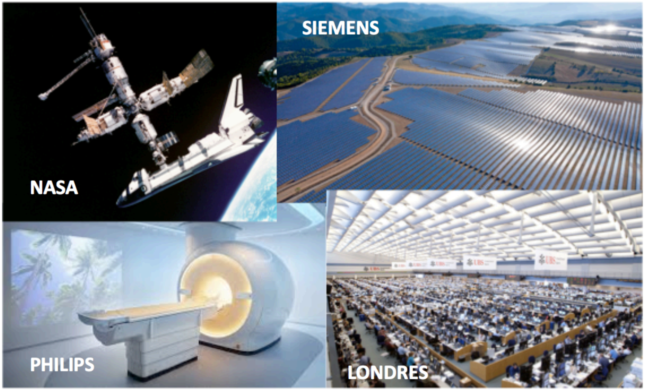
- **Qualitatifs :** Existence de la solution à différents problèmes ?
- **Quantitatifs :** Observation ou description de phénomènes en astronomie, physique, chimie, biologie, économie, finance...

Cédric Villani
Médaille Fields 2010

"La complexité qui nous entoure est absolument affolante si on essaie de se la représenter. La démarche mathématique consiste à en extraire des principes directeurs, qui nous permettront de ***décrire le monde environnant, puis de comprendre ce monde et enfin d'agir dessus****. Comprendre et agir. Ce sont deux motivations fondamentales de la démarche mathématique : l'une ne peut pas aller sans l'autre – et vice versa."*

Enjeux qualitatifs et quantitatifs

- **Qualitatifs :** Existence de la solution à différents problèmes ?
- **Quantitatifs :** Observation ou description de phénomènes en astronomie, physique, chimie, biologie, économie, finance...



Enjeux qualitatifs et quantitatifs

- **Qualitatifs :** Existence de la solution à différents problèmes ?
- **Quantitatifs :** Observation ou description de phénomènes en astronomie, physique, chimie, biologie, économie, finance...

...afin de prédire / concevoir **via la simulation numérique.**

Enjeux qualitatifs et quantitatifs

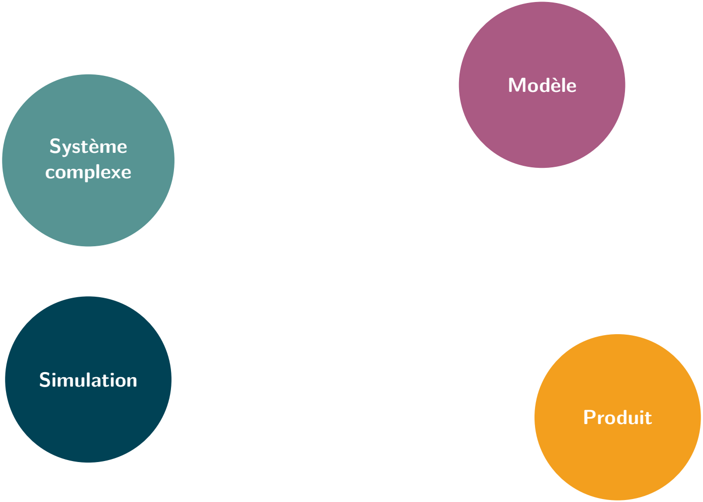
- **Qualitatifs :** Existence de la solution à différents problèmes ?
- **Quantitatifs :** Observation ou description de phénomènes en astronomie, physique, chimie, biologie, économie, finance...

...afin de prédire / concevoir **via la simulation numérique.**

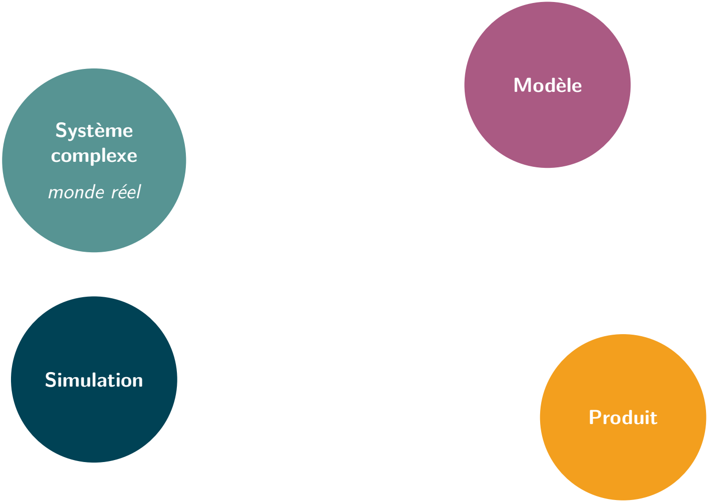
Formalisation mathématique d'un modèle

- Analyse mathématique et qualitative
  Existence et propriétés **qualitatives** de solutions en variables continues.
- Discrétisation et implémentation
  Résultats **quantitatifs** « concrets ».
- Analyse numérique
  Maîtrise de l'approximation, validation des simulations et convergence.

Simuler : quoi, quand, comment, pourquoi ?



Simuler : quoi, quand, comment, pourquoi ?



Simuler : quoi, quand, comment, pourquoi ?

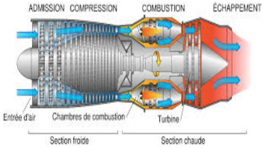
Environnement

Modèle

Simulation

Produit

Simuler : quoi, quand, comment, pourquoi ?



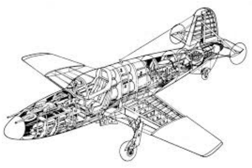
Propulsion

Modèle

Simulation

Produit

Simuler : quoi, quand, comment, pourquoi ?



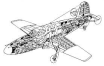
Structure

Modèle

Simulation

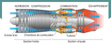
Produit

Simuler : quoi, quand, comment, pourquoi ?



Système complexe

monde réel



Modélisation physique →

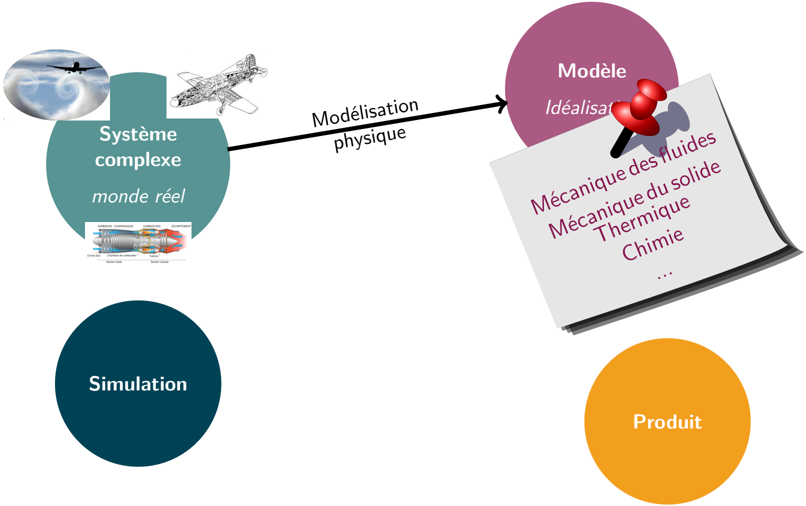
Modèle

Idéalisation

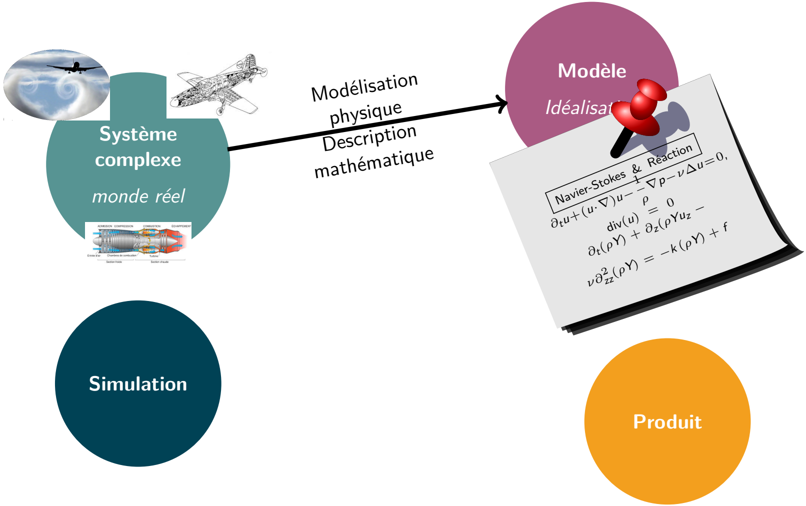
Simulation

Produit

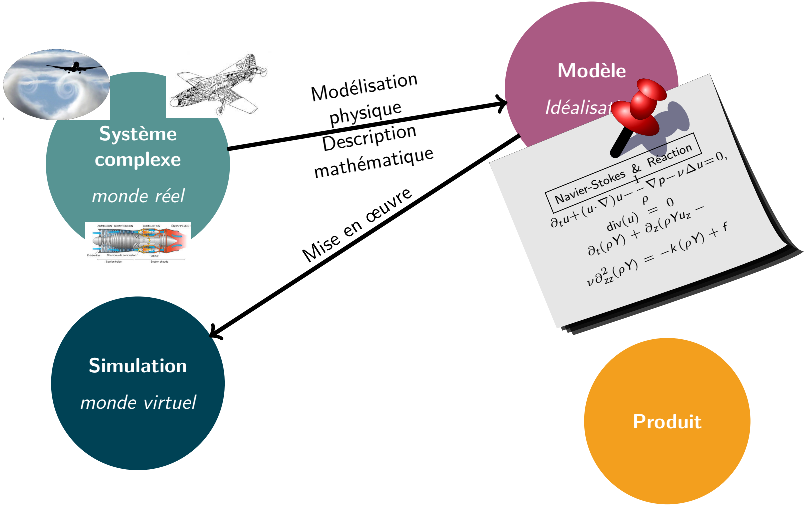
Simuler : quoi, quand, comment, pourquoi ?



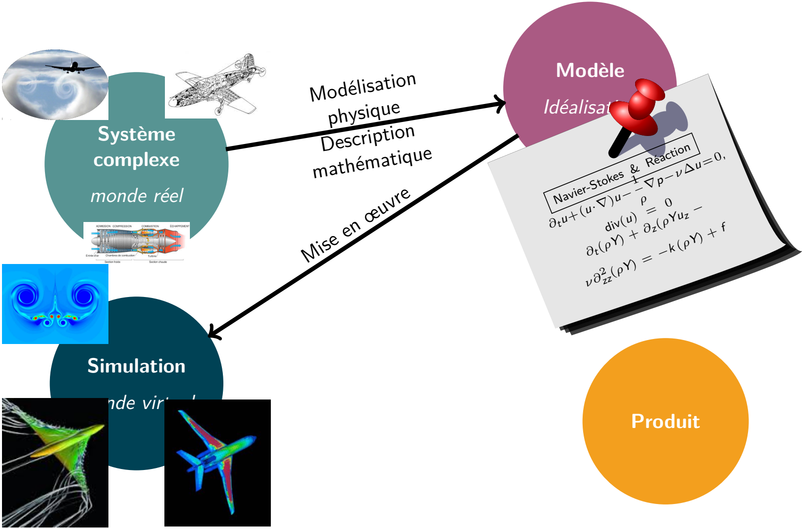
Simuler : quoi, quand, comment, pourquoi ?



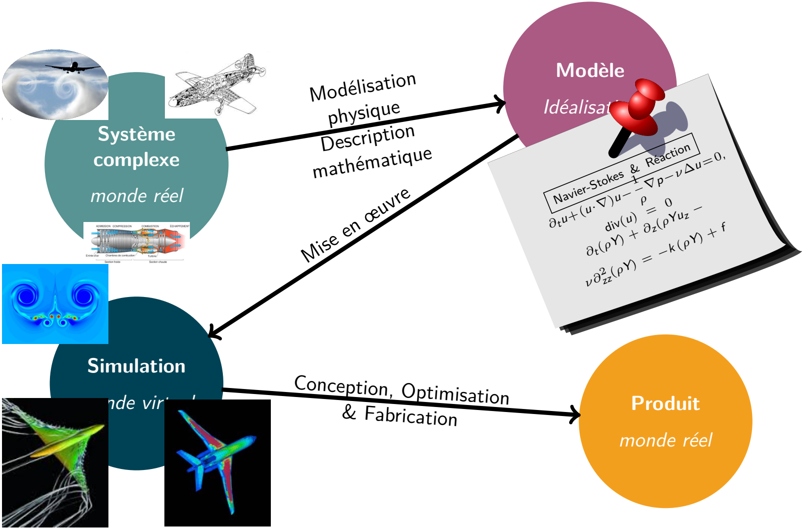
Simuler : quoi, quand, comment, pourquoi ?



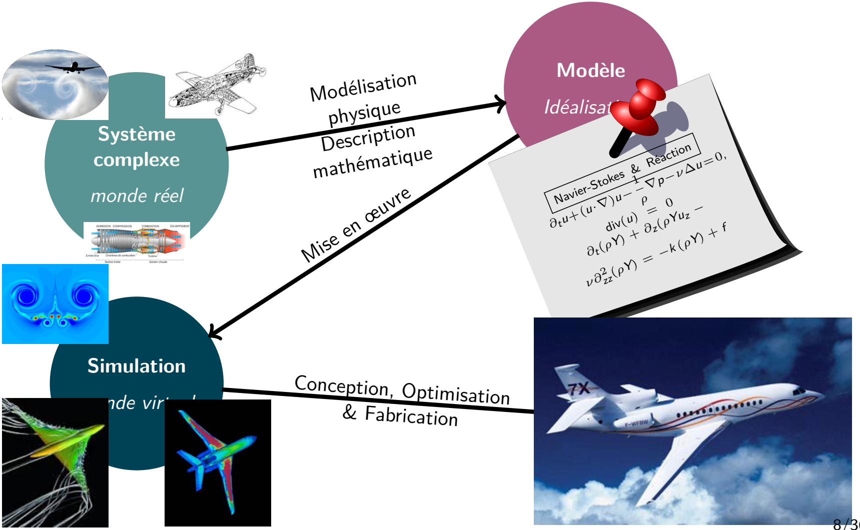
Simuler : quoi, quand, comment, pourquoi ?

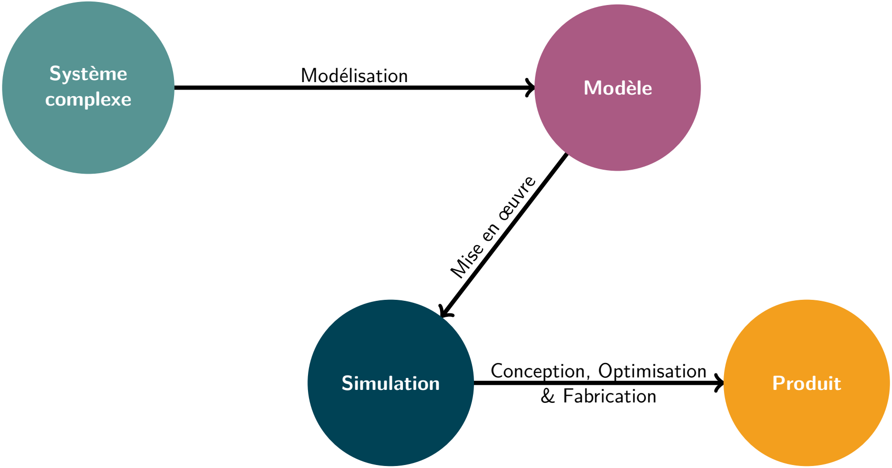


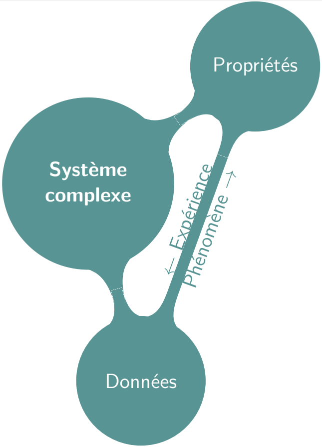
Simuler : quoi, quand, comment, pourquoi ?

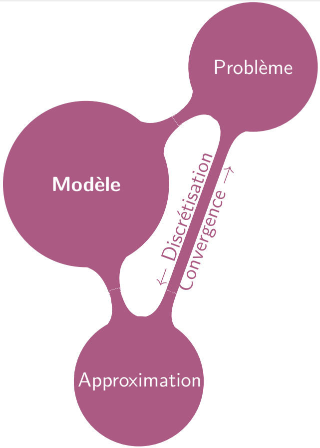


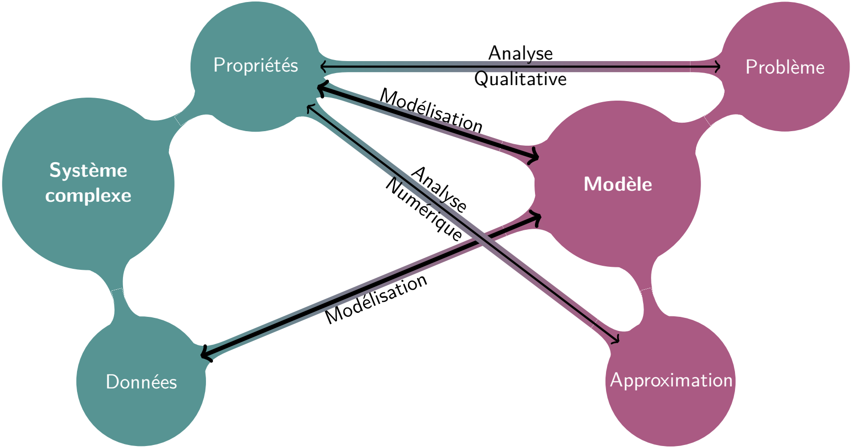
Simuler : quoi, quand, comment, pourquoi ?

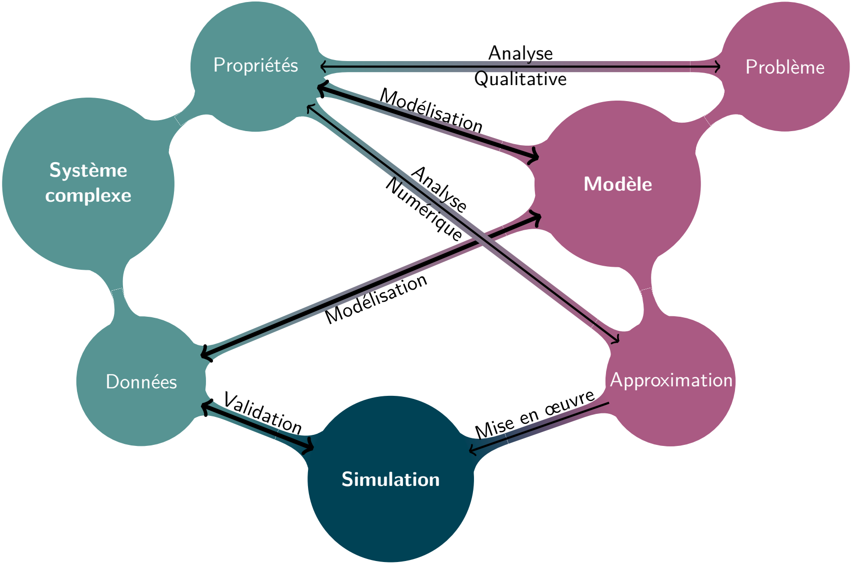


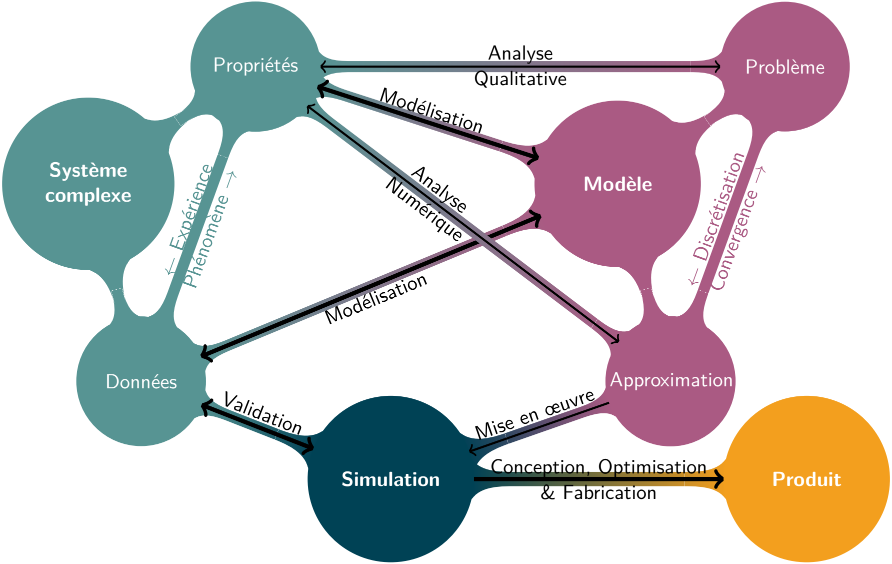

Système complexe
Modélisation
Modèle
Mise en œuvre
Simulation
Conception, Optimisation & Fabrication
Produit


Propriétés
Système complexe
← Expérience
Phénomène →
Données

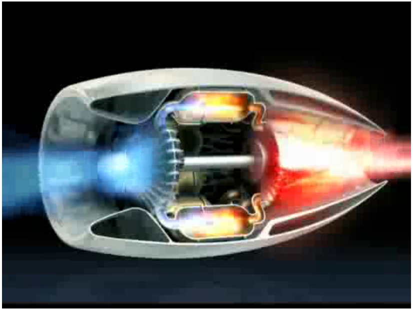

Problème
Modèle
Approximation
← Discrétisation
Convergence →


Propriétés
Analyse
Qualitative
Problème
Système
complexe
Modélisation
Modèle
Analyse
Numérique
Modélisation
Données
Approximation


Propriétés
Problème
Analyse
Qualitative
Système complexe
Modélisation
Modèle
Analyse
Numérique
Modélisation
Données
Approximation
Validation
Mise en œuvre
Simulation


Propriétés
Analyse
Qualitative
Problème
Modélisation
Système complexe
← Expérience
Phénomène →
Analyse
Numérique
Modèle
← Discrétisation
Convergence →
Modélisation
Données
Approximation
Validation
Mise en œuvre
Simulation
Conception, Optimisation
& Fabrication
Produit

Combustion du kérosène : réaction et aérothermie



$$2C_{12}H_{26} + 37O_2 \longrightarrow 24CO_2 + 26H_2O + \text{ chaleur}$$

Réaction : cinétique chimique

Equation de combustion

Variable : $t \geq 0$ (temps) – **Inconnues** : $t \mapsto Y(t) \in \mathbb{R}^5$

avec $Y = (Y_{C_{12}H_{26}}, Y_{O_2}, Y_{CO_2}, Y_{H_2O})$

Données : Y^0 , $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ **non-linéaire**

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}t}(t) = f(t, Y(t)) \\ Y(0) = Y^0 \end{cases}$$

Réaction : cinétique chimique

Equation de combustion

Variable : $t \geq 0$ (temps) – **Inconnues** : $t \mapsto Y(t) \in \mathbb{R}^5$

avec $Y = (Y_{C_{12}H_{26}}, Y_{O_2}, Y_{CO_2}, Y_{H_2O})$

Données : Y^0 , $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ **non-linéaire**

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}t}(t) = f(t, Y(t)) \\ Y(0) = Y^0 \end{cases}$$

Pas de solution explicite !

Réaction : cinétique chimique

Equation de combustion

Variable : $t \geq 0$ (temps) – **Inconnues** : $t \mapsto Y(t) \in \mathbb{R}^5$

avec $Y = (Y_{C_{12}H_{26}}, Y_{O_2}, Y_{CO_2}, Y_{H_2O})$

Données : Y^0 , $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ **non-linéaire**

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}t}(t) = f(t, Y(t)) \\ Y(0) = Y^0 \end{cases}$$

Mais des solutions numériques...

Réaction : cinétique chimique

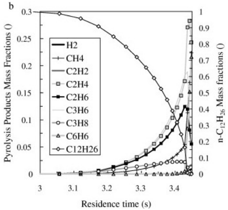
Equation de combustion

Variable : $t \geq 0$ (temps) – **Inconnues** : $t \mapsto Y(t) \in \mathbb{R}^5$

avec $Y = (Y_{C_{12}H_{26}}, Y_{O_2}, Y_{CO_2}, Y_{H_2O})$

Données : Y^0 , $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ **non-linéaire**

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}t}(t) = f(t, Y(t)) \\ Y(0) = Y^0 \end{cases}$$



Réaction : cinétique chimique

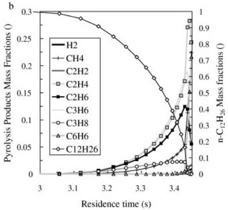
Equation de combustion

Variable : $t \geq 0$ (temps) – **Inconnues** : $t \mapsto Y(t) \in \mathbb{R}^5$

avec $Y = (Y_{C_{12}H_{26}}, Y_{O_2}, Y_{CO_2}, Y_{H_2O})$

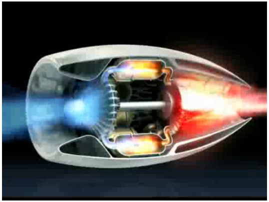
Données : Y^0 , $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ **non-linéaire**

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}t}(t) = f(t, Y(t)) \\ Y(0) = Y^0 \end{cases}$$



- **Equation :** système de 4 équations différentielles d'ordre 1
- **Conditions :** initiales
- **Nomenclature : problème de Cauchy**

Obtention de l'équation de la chaleur en 4 variables

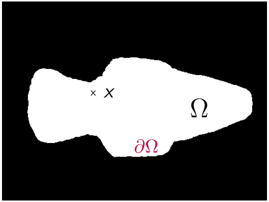


Obtention de l'équation de la chaleur en 4 variables

On cherche à décrire la température θ dans le réacteur par une équation :

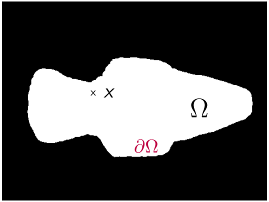
Obtention de l'équation de la chaleur en 4 variables

On cherche à décrire la température θ dans le réacteur par une équation :



Obtention de l'équation de la chaleur en 4 variables

On cherche à décrire la température θ dans le réacteur par une équation :



Variables : $t \geq 0$, $x \in \Omega$

Inconnue : $(t, x) \mapsto \theta(t, x)$

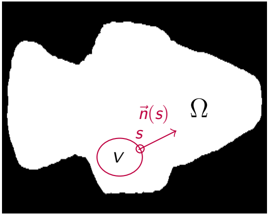
Données : ρ (densité), $\overrightarrow{u}$ (vitesse), f (source)

Paramètres : $x \mapsto c_v(x)$, $x \mapsto \kappa(x) > 0$

Équation de la chaleur

$$\rho c_v \partial_t \theta + \mathrm{div}_x(\rho c_v\, \theta\, \overrightarrow{u}) - \mathrm{div}_x(\kappa\, \overrightarrow{\mathrm{grad}}_x(\theta)) = f \text{ dans } \mathbb{R}^{+*} \times \Omega.$$

Bilan d'énergie



Bilan d'énergie dans un volume V à $t \geq 0$:

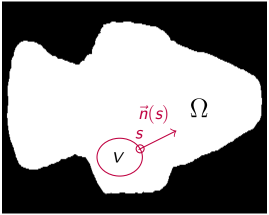
Énergie volumique dans V : $(t, x) \mapsto \rho c_v(x)\theta(t, x)$

Énergie dans V : $t \mapsto \iiint_V \rho c_v(x)\theta(t, x)\mathrm{d}x$

Flux d'énergie à travers ∂V : $(t, s) \mapsto \overrightarrow{q}(t, s)$

Source / puits d'énergie dans V : $(t, x) \mapsto f(t, x)$

Bilan d'énergie



Bilan d'énergie dans un volume V à $t \geq 0$:

Énergie volumique dans V : $(t,x) \mapsto \rho c_v(x)\theta(t,x)$

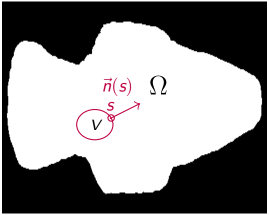
Énergie dans V : $t \mapsto \iiint_V \rho c_v(x)\theta(t,x)\mathrm{d}x$

Flux d'énergie à travers ∂V : $(t,s) \mapsto \overrightarrow{q}(t,s)$

Source / puits d'énergie dans V : $(t,x) \mapsto f(t,x)$

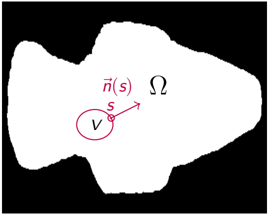
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iiint_V \rho c_v(x)\theta(t,x)\mathrm{d}x = -\iint_{\partial V} \overrightarrow{q}(t,s)\cdot\overrightarrow{n}(s)\mathrm{d}s + \iiint_V f(t,x)\mathrm{d}x$$

Fluide au repos : $\overrightarrow{u} = 0$ (V immobile)



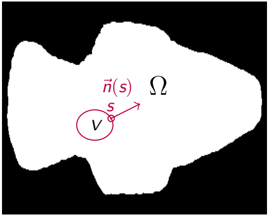
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iiint_V \rho c_v(x)\theta(t,x)\mathrm{d}x = -\iint_{\partial V} \overrightarrow{q}(t,s)\cdot\overrightarrow{n}(s)\mathrm{d}s + \iiint_V f(t,x)\mathrm{d}x$$

Fluide au repos : $\overrightarrow{u} = 0$ (V immobile)



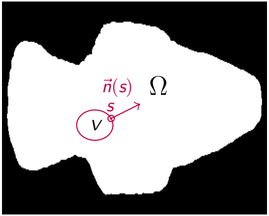
$$\underbrace{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iiint_V \rho c_v(x)\theta(t,x)\mathrm{d}x}_{=\iiint_V \partial_t(\rho c_v\theta)(t,x)\mathrm{d}x} = -\iint_{\partial V} \overrightarrow{q}(t,s)\cdot\overrightarrow{n}(s)\mathrm{d}s + \iiint_V f(t,x)\mathrm{d}x$$

Fluide au repos : $\overrightarrow{u} = 0$ (V immobile)



$$\iiint_V \partial_t(\rho c_v \theta)(t,x)\mathrm{d}x = -\iint_{\partial V} \overrightarrow{q}(t,s)\cdot\overrightarrow{n}(s)\mathrm{d}s + \iiint_V f(t,x)\mathrm{d}x$$

Fluide au repos : $\overrightarrow{u} = 0$ (V immobile)

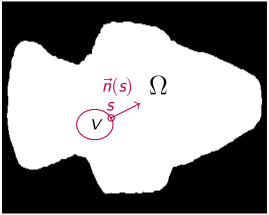


$$\iiint_V \partial_t(\rho c_v \theta)(t,x)\mathrm{d}x = -\iint_{\partial V} \overrightarrow{q}(t,s)\cdot\overrightarrow{n}(s)\mathrm{d}s + \iiint_V f(t,x)\mathrm{d}x$$

Formule de Green pour $\overrightarrow{w} \in (C^1(\overline{\Omega}))^3$

$$\iint_{\partial V} \overrightarrow{w}(s)\cdot\overrightarrow{n}(s)\mathrm{d}s = \iiint_V \mathrm{div}_x(\overrightarrow{w})(x)\mathrm{d}x$$

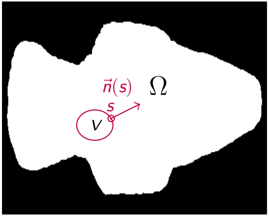
Fluide au repos : $\overrightarrow{u} = 0$ (V immobile)



$$\iiint_V \partial_t(\rho c_v \theta)(t,x)\mathrm{d}x = -\iint_{\partial V} \overrightarrow{q}(t,s)\cdot\overrightarrow{n}(s)\mathrm{d}s + \iiint_V f(t,x)\mathrm{d}x$$

$$\forall V,\ \iiint_V (\rho c_v)(x)\partial_t\theta(t,x)\mathrm{d}x + \iiint_V \mathrm{div}_x(\overrightarrow{q})(t,x)\mathrm{d}x = \iiint_V f(t,x)\mathrm{d}x$$

Fluide au repos : $\overrightarrow{u} = 0$ (V immobile)



$$\iiint_V \partial_t(\rho c_v \theta)(t,x)\mathrm{d}x = -\iint_{\partial V} \overrightarrow{q}(t,s)\cdot\overrightarrow{n}(s)\mathrm{d}s + \iiint_V f(t,x)\mathrm{d}x$$

$$\forall V,\ \iiint_V (\rho c_v)(x)\partial_t\theta(t,x)\mathrm{d}x + \iiint_V \mathrm{div}_x(\overrightarrow{q})(t,x)\mathrm{d}x = \iiint_V f(t,x)\mathrm{d}x$$

Alors $\forall t>0,\ \forall x\in\Omega,\ (\rho c_v)(x)\,\partial_t\theta(t,x) + \mathrm{div}_x(\overrightarrow{q})(t,x) = f(t,x)$

Equation de la chaleur

Attention, ce n'est pas une EDP !

$$\forall t > 0,\ \forall x \in \Omega, \quad \rho c_v(x)\partial_t\theta(t,x) + \mathrm{div}_x(\overrightarrow{q})(t,x) = f(t,x)$$

En effet, il faut lier $\overrightarrow{q}$ à θ !

Loi de Fourier

On postule : $\overrightarrow{q} = -\kappa \overrightarrow{\mathrm{grad}}_x(\theta)$

EDP : $\rho c_v\partial_t\theta - \mathrm{div}_x(\kappa \overrightarrow{\mathrm{grad}}_x(\theta)) = f$ dans $\mathbb{R}^{+*} \times \Omega$

Equation de la chaleur

Attention, ce n'est pas une EDP !

$$\forall t > 0,\ \forall x \in \Omega, \quad \rho c_v(x)\partial_t\theta(t,x) + \mathrm{div}_x(\overrightarrow{q})(t,x) = f(t,x)$$

En effet, il faut lier $\overrightarrow{q}$ à θ !

Loi de Fourier

On postule : $\overrightarrow{q} = -\kappa\, \overrightarrow{\mathrm{grad}}_x(\theta)$

EDP : $\rho c_v \partial_t\theta - \mathrm{div}_x(\kappa\, \overrightarrow{\mathrm{grad}}_x(\theta)) = f$ dans $\mathbb{R}^{+*} \times \Omega$

$\vec{u} \neq 0$ annexe : $\rho c_v \partial_t\theta + \mathrm{div}_x(\rho c_v \theta \vec{u}) - \mathrm{div}_x(\kappa\, \overrightarrow{\mathrm{grad}}_x(\theta)) = f$

Conditions au bord pour obtenir un problème (fermé)

Problème très délicat : en domaine borné, les conditions au bord apparaissent dans les formulations intégrales par formules de Green

- Condition à $t = 0$: θ^0 donnée, problème de Cauchy

  condition initiale

- Condition au bord $\partial\Omega$:
  - valeur imposée : $\theta|_{\partial\Omega} = g$ donnée — **condition de Dirichlet**
  - flux imposé : $\overrightarrow{\mathrm{grad}}_x(\theta)|_{\partial\Omega} \cdot \vec{n} = h$ donnée

    condition de Neumann
  - les deux - $\partial\Omega = \partial\Omega_D \sqcup \partial\Omega_N$: $\theta|_{\partial\Omega_D} = g$ et $\overrightarrow{\mathrm{grad}}_x(\theta)|_{\partial\Omega_N} \cdot \vec{n} = h$

    conditions mêlées

Du modèle physique au problème mathématique

En mathématiques, les **quantités sont sans dimension** (nombres !).

Étape indispensable aux mathématiques appliquées : l'**adimensionnement**.

Du modèle physique au problème mathématique

En mathématiques, les **quantités sont sans dimension** (nombres !).

Étape indispensable aux mathématiques appliquées : l'**adimensionnement**.

C'est aussi une étape indispensable à la physique !

- Les lois physiques **ne dépendent pas** d'un système d'unités de mesure arbitrairement choisi.

Théorème de Vaschy-Buckingham

Si une équation physique met en jeu n variables dimensionnées liées à k unités dimensionellement indépendantes, alors il existe une relation équivalente mettant en jeu $n-k$ variables adimensionnées construites à partir des variables originelles.

- Réduction de complexité : Nb de quantités adimensionnées $\leq$ Nb total de quantités dimensionnées mises en jeu.
- Dans certains cas : autosimilarité.

Du modèle physique au problème mathématique

En mathématiques, les **quantités sont sans dimension** (nombres !).

Étape indispensable aux mathématiques appliquées : l'**adimensionnement**.

Dans le cas de l'équation de la chaleur :

Nom	Quantité	Unité	Adimensionnement
temps (s)	t	T	$t = Tt^*$
longueur (m)	x	L	$x = Lx^*$
température (K)	θ	Θ	$\theta = \Theta\theta^*$
vitesse ($m.s^{-1}$)	u	U	$u = Uu^*$
cond. th. ($kg.m.s^{-2}.K^{-1}$)	κ	$\mathcal{K}$	$\kappa = \mathcal{K}\kappa^*$
source ($kg.m^2.s^{-3}$)	f	F	$f = Ff^*$

Equations adimensionnées

Adimensionnement des opérateurs physiques : $\begin{cases} \partial_t \theta = \dfrac{1}{T} \partial_{t^*} \theta \\ \partial_{x_i} \theta = \dfrac{1}{L} \partial_{x_i^*} \theta \\ \mathrm{div}_x \theta = \dfrac{1}{L} \mathrm{div}_{x^*} \theta \end{cases}$

Dans l'équation (ρc_v, κ constants) :

$$\frac{\rho c_v \Theta}{T} \partial_{t^*} \theta^* + \frac{\rho c_v \Theta U}{L} \mathrm{div}_{x^*} (\theta^* \overrightarrow{u^*}) - \frac{\Theta \mathcal{K}}{L^2} \Delta_{x^*} \theta^* = F f^*$$

ou encore

$$1\, \partial_{t^*} \theta^* + \frac{T}{T_C} \mathrm{div}_{x^*} (\theta^* \overrightarrow{u^*}) - \frac{T}{T_D} \Delta_{x^*} \theta^* = \frac{T}{T_S} f^*$$

avec les temps caractéristiques

$$T_C = \frac{L}{U}, \qquad T_D = \frac{\rho c_v L^2}{\mathcal{K}} \qquad \text{et} \qquad T_S = \frac{\rho c_v \Theta}{F}.$$

Identification des régimes

Art de l'ingénieur : maîtrise des approximations dans les modèles

$$\partial_t\theta + \frac{T}{T_C}\mathrm{div}_x(\theta\,\vec{u}) - \frac{T}{T_D}\Delta_x\theta = \frac{T}{T_S}f$$

régime	équation mathématique	nomenclature
$T << T_D, T_C$	$\partial_t\theta = f$	**EDO**
$T >> T_C >> T_D$	$-\Delta_x\theta = f$	**diffusion stationnaire**
$T \sim T_D << T_C$	$\partial_t\theta - \Delta_x\theta = f$	**diffusion instationnaire**
$T \sim T_C << T_D$	$\partial_t\theta + \mathrm{div}_x(\theta\,\vec{u}) = f$	**transport**
$T_D \sim T \sim T_C$	$\partial_t\theta + \mathrm{div}_x(\theta\,\vec{u}) - \Delta_x\theta = f$	**transport-diffusion instationnaire**

Identification des régimes

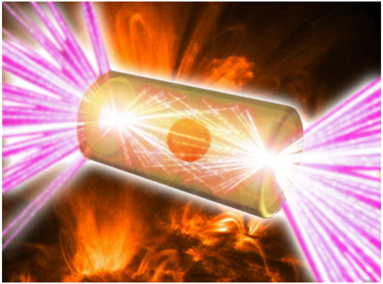
Art de l'ingénieur : maîtrise des approximations dans les modèles

L'adimensionnement sous-entend que les phénomènes considérés dépendent d'échelles caractéristiques dimensionnées...

Identification des régimes

Art de l'ingénieur : maîtrise des approximations dans les modèles

L'adimensionnement sous-entend que les phénomènes considérés dépendent d'échelles caractéristiques dimensionnées...



- Parfois les quantités dimensionnées peuvent varier sur plusieurs ordres de grandeur !
- Exemple : fusion par confinement inertiel (de $300\ K$ à $10^6\ K$).

Vocabulaire

- **Ordre** d'une EDP : plus grand ordre de dérivation par variable
- **Equation stationnaire** : pas de dérivée en temps
- **Equation d'évolution** : le temps est une variable de dérivation

Exemple

- $-\Delta_x\theta = f$: *équation stationnaire d'ordre 2 (en espace).*
- $\partial_t\theta + u\partial_x\theta = 0$: *équation d'évolution d'ordre 1 en temps, 1 en espace.*
- $\partial_t\theta - \Delta_x\theta = 0$: *équation d'évolution d'ordre 1 en temps, 2 en espace.*

Classification des EDP linéaires

Prenons une EDP linéaire générale en 2 dimensions sous la forme

$$a\,\partial^2_{xx}\theta + b\,\partial^2_{xy}\theta + c\,\partial^2_{yy}\theta + d\,\partial_x\theta + e\,\partial_y\theta + f\theta = 0$$

avec $(a, b, c, d, e, f) \in \mathbb{R}^6$.

Définition 1

$$a\,\xi^2 + b\,\xi\zeta + c\,\zeta^2 + d\,\xi + e\,\zeta + f = 0$$

on dit que

- *si* $4ac - b^2 > 0$, *l'équation est* **elliptique**,
- *si* $4ac - b^2 < 0$, *l'équation est* **hyperbolique**,
- *si* $4ac = b^2$ *et* $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$, *l'équation est* **parabolique**.

Si $a = b = c = 0$, *on dit encore que l'équation est* **hyperbolique**.

Archétypes

équation mathématique	nomenclature	type
$\partial_t \theta = f(t, \theta)$	**EDO**	EDO
$-\Delta_x \theta = f$	**diffusion stationnaire**	elliptique
$\partial_t \theta - \Delta_x \theta = f$	**diffusion instationnaire**	parabolique
$\partial_t \theta + u \cdot \overrightarrow{\mathrm{grad}}_x(\theta) = f$	**transport**	hyperbolique
$\partial_t \theta + \vec{u} \cdot \overrightarrow{\mathrm{grad}}_x(\theta) - \Delta_x \theta = f$	**transport-diffusion instationnaire**	parabolique
$\partial_{tt} \rho - c^2 \partial_{xx} \rho = f$	**ondes**	hyperbolique

Problème bien posé

EDP : infinité de solutions $\Longrightarrow$ **Problème** : EDP + conditions

- **Problème aux limites** : EDP + conditions aux limites sur $\partial\Omega$ (ex : Pb de Dirichlet)
- **Problème de Cauchy** : équation d'évolution + conditions initiales

Problème bien posé

EDP : infinité de solutions $\Longrightarrow$ **Problème** : EDP + conditions

- **Problème aux limites** : EDP + conditions aux limites sur $\partial\Omega$ (ex : Pb de Dirichlet)
- **Problème de Cauchy** : équation d'évolution + conditions initiales

Définition 2

Soient E et F deux espaces. Soient $f \in F$ les données et $\mathcal{A} : E \to F$ le problème dont on cherche une solution $u \in E$:

$$\mathcal{A}(u) = f \text{ avec } u \in E.$$

Ce problème est **bien posé (au sens de Hadamard)** *si pour toute donnée $f \in F$ il existe* **une unique solution** *$u_f \in E$ et qu'elle dépend continûment de f.*

Ouverture : les problèmes peuvent être mal posés...

"The stipulations [...] about existence, uniqueness, and stability of solutions dominate classical mathematical physics. They are deeply inherent in the ideal of a unique, complete, and stable determination of physical events by appropriate conditions at the boundaries, at infinity, at time $t = 0$, or in the past. Laplace's vision of the possibility of calculating the whole future of the physical world from complete data of the present state is an extreme expression of this attitude. However, this rational ideal of causal-mathematical determination was gradually eroded by confrontation with physical reality. ***Nonlinear phenomena, quantum theory, and the advent of powerful numerical methods have shown that 'properly posed' problems are by far not the only ones which appropriately reflect real phenomena****."* *(Courant & Hilbert)*

...Mais cela nécessite des outils mathématiques supplémentaires !

Equation parabolique

Équation de diffusion : $\begin{cases} \partial_t \theta - \kappa\, \partial^2_{xx}\theta = 0 \text{ dans } \mathbb{R}, \\ \theta(0,\cdot) = \theta^0 \text{ dans } \mathbb{R} \end{cases}$

Équation linéaire... **Outil :** Transformée de Fourier !

Résolution « explicite » :

$$\theta : (t,x) \in \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R} \mapsto \frac{1}{\sqrt{4\pi\kappa t}} \int_{\mathbb{R}} e^{-(x-y)^2/4\kappa t}\, \theta^0(y)\mathrm{d}y.$$

Propriétés :

- Equation régularisante : θ plus régulière que θ^0 !
- Propagation de l'énergie à vitesse infinie.
- Principe du maximum : $\theta(t,x) \leq \max_x \theta^0(x)$

Equation de transport : caractéristiques

En 1D : $x \in \mathbb{R}$, $u \in \mathbb{R}$ supposée constante

$$\begin{cases} \partial_t \theta + u \partial_x \theta = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}, \\ \\ \theta(0, \cdot) = \theta^0 & \text{sur } \mathbb{R} \end{cases}$$

Courbes caractéristiques :

Equation de transport : caractéristiques

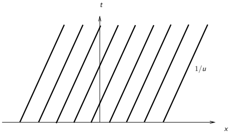
En 1D : $x \in \mathbb{R}$, $u \in \mathbb{R}$ supposée constante

$$\begin{cases} \partial_t \theta + u \partial_x \theta = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}, \\ \\ \theta(0, \cdot) = \theta^0 & \text{sur } \mathbb{R} \end{cases}$$

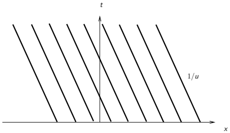
Courbes caractéristiques :
Cherchons $t \mapsto X(t)$ tq $w : t \mapsto \theta(t, X(t))$ fonction constante.

On a $\quad \dfrac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t} = \partial_t \theta + \partial_x \theta \, \dfrac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t}. \qquad$ Si $\quad \dfrac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t} = u, \quad \dfrac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t} = 0\,!$

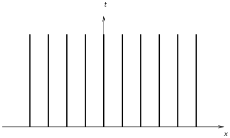
Alors $X(s) = us + X(0)$ et $\theta(t, X(t)) = \theta^0(X(0))$.



(a) $u > 0$



(b) $u < 0$



(c) $u = 0$

Propriétés :

- Propagation des singularités : θ a même régularité que θ^0 !
- Propagation de l'information à vitesse finie.
- Principe du maximum.

Discrétisation

Soit un problème (d'évolution ou non) posé dans un domaine Ω.

- Étape 1 : discrétisation du **domaine** (géométrie)

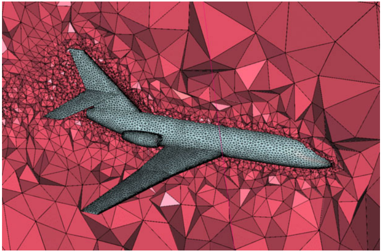


FIGURE : Maillage d'un avion

- en 1D : sous-intervalles
- en 2D : polygones (triangles, quadrangles,...)
- en 3D : polyèdres (tétraèdres, pyramides,...)

Discrétisation

Soit un problème (d'évolution ou non) posé dans un domaine Ω.

- Étape 1 : discrétisation du **domaine** (géométrie)

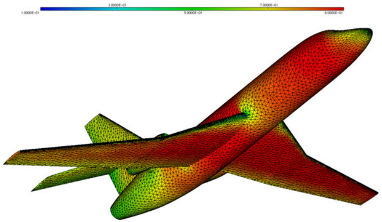


FIGURE : Champ de vitesse autour d'un avion

- en 1D : sous-intervalles
- en 2D : polygones (triangles, quadrangles,...)
- en 3D : polyèdres (tétraèdres, pyramides,...)

Discrétisation et convergence

- Étape 2 : discrétisation du **problème** (analyse numérique)

Théorie	variables continues ($x \in [0,1]$)	$\longleftrightarrow$	variables discrètes ($(x_j)_{1\leq j\leq J}$)
	fonctions ($f : x \mapsto f(x)$)	$\longleftrightarrow$	vecteurs ($(v_j)_{1\leq j\leq J}$)
	opérateurs	$\longleftrightarrow$	matrices (par ex. de différences)
	équation	$\longleftrightarrow$	récurrence, système (non-)linéaire
Exemple	$\partial_x f(x)$	$\longleftrightarrow$	$\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$, $h>0$
Conséquences	dimension infinie	$\longleftrightarrow$	dimension finie **variable**
	problème continu	$\longleftrightarrow$	problème approché
	solution du pb continu	?	solution du pb approché
	QUESTION DE LA CONVERGENCE		
Mathématiques	analyse fonctionnelle	$\longleftrightarrow$	analyse numérique

Approximation

- Étape 3 : principe fondamental de discrétisation & convergence

  L'analyse numérique doit montrer que la solution du problème approché est bien une approximation de la solution exacte du problème continu

  Pour savoir cela, il faut :
  - montrer que le problème continu est bien posé,
  - le discrétiser,
  - montrer que le problème discret est bien posé,
  - (respecter des propriétés qualitatives),
  - montrer la convergence de la solution approchée vers la solution exacte.

Analyse fonctionnelle

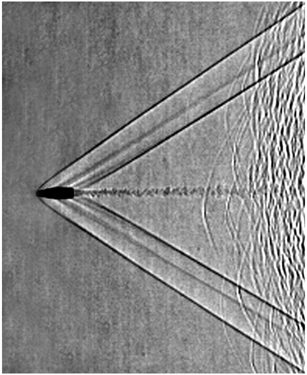
Aparté sur les espaces de fonctions :

- Les équations de l'hydrodynamique reposent sur : conservation de la masse, de la quantité de mouvement, et de l'énergie.

- On s'attend naïvement à :
  - densité $\in L^1(\Omega)$ (masse totale finie),
  - vitesse $\in L^2(\Omega)$ (énergie cinétique finie),

  pour un écoulement dans un domaine Ω.

- Quelle est la notion de dérivée pour un écoulement sous choc (propagation d'une discontinuité) ?!



Analyse fonctionnelle

Il faut montrer que le problème continu est bien posé :

- Problème de Cauchy $\begin{cases} Y'(t) = f(t, Y(t)), \quad t \in I, \\ Y(0) = Y^0 \text{ donnée} \end{cases}$
- Problème de Dirichlet $\begin{cases} -\Delta_x \theta = f \text{ dans } \Omega \\ \theta|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$
    - Régularité de θ (distributions).
    - IPP - Formulation faible / variationnelle.
    - Espaces fonctionnels adaptés (espaces de Sobolev).
    - Etude de formes bilinéaires dans des espaces de Hilbert.

Analyse fonctionnelle

Il faut montrer que le problème continu est bien posé :

- Problème de Cauchy $\begin{cases} Y'(t) = f(t, Y(t)), & t \in I, \\ Y(0) = Y^0 \text{ donnée} \end{cases}$
- Problème de Dirichlet $\begin{cases} -\Delta_x \theta = f \text{ dans } \Omega \\ \theta|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$
  - Régularité de θ (distributions).
  - IPP - Formulation faible / variationnelle.
  - Espaces fonctionnels adaptés (espaces de Sobolev).
  - Etude de formes bilinéaires dans des espaces de Hilbert.

Outils fonctionnels

- Théorèmes de Cauchy-Lipschitz.
- Analyse hilbertienne.
- Distributions.
- Espaces de Sobolev.

Analyse fonctionnelle

Il faut montrer que le problème continu est bien posé :

- Problème de Cauchy $\begin{cases} Y'(t) = f(t, Y(t)), \quad t \in I, \\ Y(0) = Y^0 \text{ donnée} \end{cases}$
- Problème de Dirichlet $\begin{cases} -\Delta_x \theta = f \text{ dans } \Omega \\ \theta|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$
    - Régularité de θ (distributions).
    - IPP - Formulation faible / variationnelle.
    - Espaces fonctionnels adaptés (espaces de Sobolev).
    - Etude de formes bilinéaires dans des espaces de Hilbert.

Outils fonctionnels

- Théorèmes de Cauchy-Lipschitz.
- Analyse hilbertienne.
- Distributions. (Amphis 4 et 5)
- Espaces de Sobolev. (Amphis 4 et 5)

Analyse numérique classique

Techniques de discrétisation

- différences finies (temps et/ou espace)
  - Description des fonctions par les valeurs aux nœuds.
  - Taux d'accroissement ; formules de Taylor.
  - Obtention de suites (vectorielles) déf. par récurrence en temps.
  - Obtention de systèmes linéaires en espace de très grande taille.
- éléments finis (espace)
  - Description des fonctions par des polynômes définis par maille.
  - Utilisation de la formulation variationnelle.
  - Obtention de systèmes linéaires en espace de très grande taille.

Analyse numérique classique

Techniques de discrétisation

- différences finies (temps et/ou espace) (Amphi 9)
  - Description des fonctions par les valeurs aux nœuds.
  - Taux d'accroissement ; formules de Taylor.
  - Obtention de suites (vectorielles) déf. par récurrence en temps.
  - Obtention de systèmes linéaires en espace de très grande taille.
- éléments finis (espace) (Amphis 6 et 7)
  - Description des fonctions par des polynômes définis par maille.
  - Utilisation de la formulation variationnelle.
  - Obtention de systèmes linéaires en espace de très grande taille.

Analyse numérique classique

Techniques de discrétisation

- différences finies (temps et/ou espace)
  - Description des fonctions par les valeurs aux nœuds.
  - Taux d'accroissement ; formules de Taylor.
  - Obtention de suites (vectorielles) déf. par récurrence en temps.
  - Obtention de systèmes linéaires en espace de très grande taille.
- éléments finis (espace)
  - Description des fonctions par des polynômes définis par maille.
  - Utilisation de la formulation variationnelle.
  - Obtention de systèmes linéaires en espace de très grande taille.

Outils numériques indispensables :

- Analyse spectrale des matrices.
- Résolution de grands systèmes linéaires.

Analyse numérique classique

Techniques de discrétisation

- différences finies (temps et/ou espace)
  - Description des fonctions par les valeurs aux nœuds.
  - Taux d'accroissement ; formules de Taylor.
  - Obtention de suites (vectorielles) déf. par récurrence en temps.
  - Obtention de systèmes linéaires en espace de très grande taille.
- éléments finis (espace)
  - Description des fonctions par des polynômes définis par maille.
  - Utilisation de la formulation variationnelle.
  - Obtention de systèmes linéaires en espace de très grande taille.

Outils numériques indispensables :

- Analyse spectrale des matrices. (Amphi 8)
- Résolution de grands systèmes linéaires. (Amphi 8)

Objectifs de la séance

- Je sais écrire l'équation de la chaleur (**p. 12-15/36**).
- Je sais **adimensionner** un problème (**p. 17-18/36**).
- Je sais déterminer de quel **type** est une équation aux dérivées partielles donnée (**p. 20-22/36**).
- Je sais reconnaître les **conditions aux limites** d'un problème aux dérivées partielles (**p. 16/36**).
- Je connais les propriétés fondamentales des équations **hyperboliques**, **elliptiques** et **paraboliques** (**p. 25-27/36**).
- Je connais la définition d'un problème **bien posé** (**p. 23/36**).

Fluide en mouvement : $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$

Bilan + Formule de Green :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iiint_V \rho c_v(x)\theta(t,x)\mathrm{d}x + \iiint_V \mathrm{div}_x(\overrightarrow{q})(t,x)\mathrm{d}x = \iiint_V f(t,x)\mathrm{d}x$$

Si V_t bouge au cours du temps car $\overrightarrow{u} \neq 0$, on a pour $C, \overrightarrow{u} \in C^1$,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iiint_{V_t} C(t,x)\mathrm{d}x = \iiint_{V_t} \partial_t C(t,x)\mathrm{d}x + \iiint_{V_t} \mathrm{div}_x(C\overrightarrow{u})(t,x)\mathrm{d}x$$

d'où, pour $C = \rho c_v \theta$,

$$\boxed{\rho c_v \partial_t \theta + \mathrm{div}_x(\rho c_v \theta \overrightarrow{u}) - \mathrm{div}_x(\kappa \overrightarrow{\mathrm{grad}}_x(\theta)) = f \text{ dans } \mathbb{R}^{+*} \times \Omega}$$

Attention, il faudra adapter les conditions au bord ! (Robin-Fourier)

Conditions au bord pour obtenir un problème (fermé)

Problème très délicat : en domaine borné, les conditions au bord apparaissent dans les formulations intégrales par formules de Green

- Condition à $t = 0$: θ^0 donnée, problème de Cauchy

condition initiale

- Condition au bord $\partial\Omega$:
  - valeur imposée : $\theta|_{\partial\Omega} = g$ donnée **condition de Dirichlet**
  - flux imposé : $\overrightarrow{\mathrm{grad}}_x(\theta)|_{\partial\Omega} \cdot \vec{n} = h$ donnée

condition de Neumann

  - les deux - $\partial\Omega = \partial\Omega_D \sqcup \partial\Omega_N$: $\theta|_{\partial\Omega_D} = g$ et $\overrightarrow{\mathrm{grad}}_x(\theta)|_{\partial\Omega_N} \cdot \vec{n} = h$

conditions mêlées

  - flux mobile : $\left(-\rho C_v \theta \vec{u} + \kappa \overrightarrow{\mathrm{grad}}_x(\theta)\right)|_{\partial\Omega} \cdot \vec{n} = h$ **conditions de Robin/Fourier**

Retour à l'équation de la chaleur