应用泛函分析，第二次作业，欧阳鑫健 . 4121156012.

P12.

$\boxed{8}$. 证明 $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty} ne^{-nx}$ 在 $(0,+\infty)$ 内连续.

证：对 $\forall x_0\in(0,+\infty)$，$\exists a>0$，使 $x_0\in(a,+\infty)$，由 Weierstrass M-判别法，

$$u_n(x)=ne^{-nx}\le ne^{-na}$$

由于级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} ne^{-na}$ 收敛，$\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} ne^{-nx}$ 在 $(a,+\infty)$ 上一致收敛，

故 $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty} ne^{-nx}$ 在 x_0 处连续. 由于 x_0 的任意性

$\Rightarrow f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内连续.

$\boxed{10}$ 求级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}$ 的和.

令 $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}$，$u(x)=(-1)^n\dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}$.

$u(x)$ 在 R 上有连续导函数 $u'(x)=(-1)^n x^{2n}=(-x^2)^n$.

且 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}u'(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-x^2)^n=\dfrac{1}{1-(-x^2)}=\dfrac{1}{1+x^2}$ $\cancel{=f'(x)}$.

即 $f'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$.

又 $f(0)=0$. $\Rightarrow f(x)=\int_0^x\dfrac{1}{1+t^2}dt=\arctan x$.

P37.

$\boxed{1}$ 设 E_1,E_2 是可测集，$E_1\subset E_2$，试证 $m(E_2-E_1)=mE_2-mE_1$.

证：E_1,E_2 可测，则 E_2-E_1 也可测，且 $(E_2-E_1)\cap E_1=\phi$.

由测度的可数可加性，

$\Rightarrow m(E_2-E_1)+m(E_1)=m((E_2-E_1)\cup E_1)$

即 $m(E_2-E_1)=m(E_2)-m(E_1)$.

$\boxed{3}$. 设 E 是可测集，$\{f_n\}$ 是 E 上的可测函数列，f,g 是 E 上的可测函数，若 $f_n\overset{m}{\Rightarrow}f$，

$f_n\overset{m}{\Rightarrow}g\ (n\to\infty)$，证明：$f\sim g$.

证：由依测度收敛的性质，$f_n\overset{m}{\Rightarrow}f$，$f_n\overset{m}{\Rightarrow}g$，

则有 $\forall\delta_f>0$，$\forall\delta_g>0$，$\lim\limits_{n\to\infty}mE(|f_n-f|\ge\delta_f)=0$，$\lim\limits_{n\to\infty}mE(|f_n-g|\ge\delta_g)=0$.

又 $E(|f-g|\ge\delta_f+\delta_g)\subset E(|f_n-f|\ge\delta_f)+E(|f_n-g|\ge\delta_g)$.

$\Rightarrow mE(|f-g|\ge\delta_f+\delta_g)\le E(|f_n-f|\ge\delta_f)+E(|f_n-g|\ge\delta_g)$

由 δ_f,δ_g 的任意性，故 $n\to\infty$ 时.

$mE(|f-g|>0)\le\lim\limits_{n\to\infty}(E|f_n-f|\ge\delta_f)+\lim\limits_{n\to\infty}E(|f_n-g|\ge\delta_g)=0$，

又由测度的非负性，$mE(|f-g|>0$，

故 $f\sim g$.

4. 设E是$[0,1]$中的一个不可测集，令

$$f(x)=\begin{cases} x, & x\in E \\ -x, & x\notin E. \end{cases}$$

问 f 在$[0,1]$上是否可测？$|f|$ 在$[0,1]$上是否可测？

解：由可测函数的定义，

① $E(f>0)=E$，E不可测，故 f 在$[0,1]$上不可测。

② $|f|=x$，$x\in[0,1]$.

$[0,1]$是可测集，故 $|f|$ 在$[0,1]$上可测。