西安交通大学研究生课程考试试题标准答案与评分标准

课程名称：计算方法 B　课时：　考试时间：2020 年 1 月 10 日

一、　填空题（每空 2 分）

1. 截断，舍入 （两空顺序无关）　　2. 0.44933284×10^{2}，舍入

3. $\frac{(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_4)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\cdots(x_0-x_4)}$，0，　$2019x^4+x^2+10$　　4. 15，$\sqrt{55}$，5

5. $\rho(G)<1$　，　$\|A\|_\infty\|A^{-1}\|_\infty$　　6. $2(\beta-1)\beta^{t-1}(U-L+1)$

7. 0， 2020， 520

8. $\frac{b-a}{2}\left[f(a)+f(b)\right]$， 一， $-\frac{(b-a)^3}{12}f''(\xi),\xi\in[a,b]$ ，

$$\frac{h}{2}\left[f(a)+2\sum_{i=1}^{n-1}f(x_i)+f(b)\right],x_i=a+ih$$

9, $x-\frac{\int_a^b\rho(x)xdx}{\int_a^b\rho(x)dx}$（也可以写为 $x-\frac{(x\varphi_0,\varphi_0)}{(\varphi_0,\varphi_0)}$），　0，　0

10. $y_{i+1}=y_i+hf(t_{i+1},y_{i+1})$，$-\frac{1}{2}h^2y''(\xi_i)$，$\pi(\xi,\bar{h})=\xi$-1-$\bar{h}\xi$

11. $\varphi(x)$属于该区间，且$|f'(x)|<1$　，　线性

二、　简答题

1. 第一个：$fl(x)=fl(\sqrt{9000+1})-fl(\sqrt{9000})=0.94874\times10^2-0.94868\times10^2=0.6\times10^{-2}$（1 分）

由于$|0.6\times10^{-2}-0.005270316|=0.073\times10^{-2}<0.5\times10^{-2-0}$，所以没有有效数字；（1 分）

第二个，

$$fl(x)=fl\left(\frac{1}{fl(\sqrt{9000+1})-fl(\sqrt{9000})}\right)=fl\left(\frac{1}{0.94874\times10^2+0.94868\times10^2}\right)=0.52704\times10^{-2}$$

由于$|0.0052704-0.005270316|=0.84\times10^{-6}<0.5\times10^{-2-4}$，具有 4 位有效数字。（1 分）

第二个公式比较准确，避免了相近数相减有效位数减少的问题。（1 分）

2.作差商表

x	$y[.]$	$y[.,.]$	$y[.,.,.]$	$y[.,.,.,.]$
0	1			
1	2	1		
1	2	2	1	
3	4	1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$

（2 分）

插值式多项式为 $f(x)=1+1(x-0)+1(x-0)(x-1)-\frac{1}{2}(x-0)(x-1)^2$ （2 分）

3,设 $g_1(x)=1, g_2(x)=x^2$，（1 分）

则 G 矩阵为$G=\begin{pmatrix}1&1\\1&0\\1&1\\1&4\\1&9\\1&16\end{pmatrix}$

法方程为$\begin{pmatrix}1&1&1&1&1&1\\1&0&1&4&9&16\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\1&0\\1&1\\1&4\\1&9\\1&16\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&1&1&1&1\\1&0&1&4&9&16\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\2\\6\\9\\18\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}6&31\\31&355\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}36\\396\end{pmatrix}$,（2 分）解得 $a=\frac{504}{1169}\approx 0.43$ $a=\frac{1260}{1169}\approx 1.08$（1 分）

所以 $o(x)=0.43+1.08x^2$

4.(1) $A=\begin{pmatrix}1&2&-2\\1&1&1\\2&2&1\end{pmatrix}=LU=\begin{pmatrix}1&&\\1&1&1\\2&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&-2\\&-1&3\\&&-1\end{pmatrix}\quad x=\begin{pmatrix}-7\\11\\6\end{pmatrix}$

（L 矩阵和 U 矩阵写对各 2 分，X 解出 2 分）

(2)对于 Jacobi 迭代格式 $\begin{pmatrix} x_1^{(k+1)} \\ x_2^{(k+1)} \\ x_3^{(k+1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-2x_2^{(k)}+2x_3^{(k)} \\ 10-x_1^{(k)}-x_3^{(k)} \\ 14-2x_1^{(k)}+2x_2^{(k)} \end{pmatrix}$ （1 分）

对于 Gauss-Seldeil 迭代格式 $\begin{pmatrix} x_1^{(k+1)} \\ x_2^{(k+1)} \\ x_3^{(k+1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-2x_2^{(k)}+2x_3^{(k)} \\ 10-x_1^{(k+1)}-x_3^{(k)} \\ 14-2x_1^{(k+1)}+2x_2^{(k+1)} \end{pmatrix}$ （1 分）

收敛性:使用谱半径进行判断

Jacobi 迭代格式特征方程 $\begin{vmatrix} \lambda & 2 & -2 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 2 & 2 & \lambda \end{vmatrix} = 0, \lambda^3 = 0, \rho(G) = 0 < 1$，收敛 （2 分）

Gauss-Seidel 迭代格式特征方程 $\begin{vmatrix} \lambda & 2 & -2 \\ \lambda & \lambda & 1 \\ 2\lambda & 2\lambda & \lambda \end{vmatrix} = 0, \lambda(\lambda-2)^2 = 0, \rho(G) = 2 > 1$，不收敛 （2 分）

5.期望代数精度为 2,

令 $f(x)=1$代入，得 $2h = A_0 + A_1 + A_2$

令 $f(x)=x$代入，得 $0 = -\frac{h}{2}A_0 + \frac{h}{2}A_2$

令 $f(x)=x^2$代入，得 $\frac{2h^3}{3} = \frac{h^2}{4}A_0 + \frac{h^2}{4}A_2$ （2 分）

联立后解得：$A_0 = \frac{4}{3}h, A_1 = -\frac{2}{3}h, A_2 = \frac{4}{3}h$ （2 分）

得 $\int_{-h}^{h} f(x)dx \approx \frac{h}{3}\left[4(-\frac{h}{2}) - 2f(0) + 4f(\frac{h}{2})\right]$

令$f(x)=x^3$代入，得左=$\int_{-h}^{h} x^3 dx = 0 =$ 右=$\frac{h}{3}\left[4\left(-\frac{h}{2}\right)^3 - 0 + 4\left(\frac{h}{2}\right)^3\right] = 0$

令$f(x)=x^4$代入，得左=$\int_{-h}^{h} x^4 dx = \frac{2}{5}h^5 \neq$ 右=$\frac{h}{3}\left[4\left(-\frac{h}{2}\right)^4 - 0 + 4\left(\frac{h}{2}\right)^4\right] = \frac{h^5}{6}$

所以代数精度为 m=3 （2 分）

设误差为 $E(f) = I(f) - Q(f) = kf^{(4)}(\xi)$

将$f(x)=x^4$代入，得 $\dfrac{2}{5}h^5-\dfrac{h^5}{6}=24k$, $k=\dfrac{7}{720}h^5$

$\therefore E(f)=\dfrac{7}{720}h^5 f^{(4)}(\xi)$ $\quad\xi\in[-h,h]$ （2 分） （不写ξ的范围扣 1 分）

6.取区间$[1.4,1.6]$,有 $f(1.4)=-0.216, f(1.6)=0.536$，所以在此区间上有根

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{x-1}},\varphi'(x)=-\frac{1}{2}(x-1)^{-\frac{3}{2}},\varphi''(x)=\frac{3}{4}(x-1)^{-\frac{5}{2}}$$

由于$\varphi''(x)>0$，所以$\varphi'(x)$单调增，$\varphi'(1.4)=-1.95,\varphi'(1.6)=-1.02$，因此$|\varphi'(x)|>1$ （2 分）

可知，$|x^{(k+1)}-x^*|=|\varphi(x^{(k)})-\varphi(x^*)|=|\varphi'(\xi_k)||x^{(k)}-x^*|>|x^{(k)}-x^*|$迭代后的点将远离$x^*$,所以迭代格式不收敛（2 分）

使用松驰因子迭代法进行改进 $\lambda=\phi(x^*)\approx\phi(1.5)$ 1.,（1 分）构造$\psi(x)=\dfrac{\varphi(x)-\lambda x}{1-\lambda}$，迭代格式收敛（1 分）

7.（1） $f[x,a_0]=\dfrac{f(x)-f(a_0)}{x-a_0}$,（1 分）

记$g(x)=f(x)-f(a_0)$,则有$g(a_0)=f(a_0)-f(a_0)=0$ （1 分）

所以$g(x)=(x-a_0)q(x)$，其中$q(x)$为 n-1 次多项式

$$f[x,a_0]=\frac{f(x)-f(a_0)}{x-a_0}=\frac{g(x)}{x-a_0}=\frac{(x-a_0)q(x)}{x-a_0}=q(x)$$ 为 n-1 次多项式 （1 分）

（2）对$a_0,a_1,a_2,...,a_n$各点做插值多项式，则有

Langra插值多项式为$L_n(x)=\sum_{i=0}^{n}f(a_i)\dfrac{\omega(x)}{(x-x_i)\omega'(x_i)}$ （1 分）

Newtc插值多项式为

$$\mathrm{N}_n(x)=f(a_0)+f[a_0,a_1](x-a_0)+\cdots+f[a_0,a_1\cdots,a_n](x-x_0)(x-x_1)...(x-x_{n-1})$$ （1 分）

由 TH3,1 知，最高次项的系数对应相等，则有

$$f[a_0,a_1\cdots,a_n]=\sum_{i=0}^{n}\frac{f(a_i)}{\omega'(x_i)}$$ （1 分）