Séance V : Méthode des éléments finis II

A) Objectifs de la séance

A la fin de cette séance,

- Je sais comment obtenir avec un logiciel un maillage d'un domaine en dimension 2.
- Je sais définir la méthode des éléments finis $\mathbb{P}_1$ en dimension 2.
- Je sais assembler la matrice de rigidité.
- Je sais programmer en FEniCS la résolution d'un problème elliptique en dimension 2.

B) Pour se familiariser avec les concepts (à traiter avant les séances de TD)

La question V.1 est à traiter avant la séance de TD 7. Le corrigé est disponible sur internet.

Attention ! Vous devez apporter votre ordinateur en TD.

Question V.1
Soit Ω un ouvert polyédrique borné de $\mathbb{R}^2$. On veut résoudre de manière approchée le problème de Dirichlet sur Ω.

Q. V.1.1 Rappeler l'énoncé du problème de Dirichlet en dimension 2.

Q. V.1.2 Pour un maillage $\mathcal{T}$ triangulaire de Ω donné, décrire la méthode des éléments finis $\mathbb{P}_1$: type de problème, polynômes utilisés, etc...

On considère un triangle donné K et on appelle ses sommets a_1, a_2, a_3. Pour $j \in \{1, 2, 3\}$, on note λ_j la coordonnée barycentrique associée au sommet a_j. On sait que les trois fonctions $(\lambda_j)_{j \in \{a,b,c\}}$ constituent une base de l'espace vectoriel de polynômes $\mathbb{P}_1$.

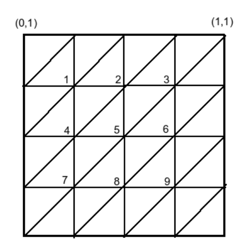
Q. V.1.3 Soit $M \in K$ de coordonnées (x, y). Pour $j \in \{a, b, c\}$, donner l'expression de la coordonnée barycentrique λ_j en fonction de x et de y.

On définit la matrice d'assemblage élémentaire $\mathcal{A}$ associée au triangle K comme étant la matrice symétrique à 9 éléments de terme général : $\quad a_{ij} = \int_K \nabla\lambda_i \cdot \nabla\lambda_j \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$

Q. V.1.4 Soit $h > 0$. Calculer $\mathcal{A}$ pour le triangle de sommets $(0, 0)$, $(0, -h)$, $(h, 0)$.

Q. V.1.5 Soit $h > 0$. Calculer $\mathcal{A}$ pour le triangle de sommets $(0, 0)$, $(-h, -h)$, $(0, -h)$.

Q. V.1.6 Calculer la matrice de rigidité pour le problème de Dirichlet dans le carré $]0, 1[\times]0, 1[$ muni du maillage suivant.



C) Exercices

Les exercices sont disponibles sous forme de Jupyter notebooks sur edunao.

Chapitre VII : Corrections des exercices

Solution de Q. V.1.3 Les coordonnées barycentriques $(\lambda_j)_{j\in\{a,b,c\}}$ vérifient

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda_a \begin{pmatrix} x_a \\ y_a \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_b \begin{pmatrix} x_b \\ y_b \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_c \begin{pmatrix} x_c \\ y_c \\ 1 \end{pmatrix}$$

c'est-à-dire le système linéaire

$$\begin{pmatrix} x_a & x_b & x_c \\ y_a & y_b & y_c \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_a \\ \lambda_b \\ \lambda_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On trouve alors

$$\begin{aligned} \lambda_a &= \frac{(x-x_c)(y_b-y_c)-(x_b-x_c)(y-y_c)}{(x_a-x_c)(y_b-y_c)-(x_b-x_c)(y_a-y_c)} \\ \lambda_b &= \frac{(x_a-x_c)(y-y_c)-(x-x_c)(y_a-y_c)}{(x_a-x_c)(y_b-y_c)-(x_b-x_c)(y_a-y_c)} \\ \lambda_c &= 1-\lambda_a-\lambda_b. \end{aligned}$$

Solution de Q. V.1.4 En numérotant les sommets $S_1 = (0,0)$, $S_4 = (0,-h)$, $S_2 = (h,0)$ et en notant $T^I = (S_1, S_4, S_2)$,

$$\begin{aligned} \lambda_1^I &= 1-(x-y)/h, & \nabla\lambda_1^I &= (1/h)(-1,1)^T \\ \lambda_4^I &= -y/h, & \nabla\lambda_4^I &= (1/h)(0,-1)^T \\ \lambda_2^I &= x/h, & \nabla\lambda_2^I &= (1/h)(1,0)^T \end{aligned}$$

La matrice s'écrit donc

$$\mathcal{A}^I = \frac{1}{h^2}\frac{h^2}{2}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Solution de Q. V.1.5 En numérotant les sommets $S_2 = (0,0)$, $S_4 = (-h,-h)$, $S_5 = (0,-h)$ et en notant $T^{II} = (S_2, S_4, S_5)$,

$$\begin{aligned} \lambda_2^{II} &= 1+y/h, & \nabla\lambda_2^{II} &= (1/h)(0,1)^T \\ \lambda_4^{II} &= -x/h, & \nabla\lambda_4^{II} &= (1/h)(-1,0)^T \\ \lambda_5^{II} &= (x-y)/h, & \nabla\lambda_5^{II} &= (1/h)(1,-1)^T \end{aligned}$$

La matrice s'écrit donc

$$\mathcal{A}^{II} = \frac{1}{h^2}\frac{h^2}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Solution de Q. V.1.6 Caractérisons les fonctions de base aux sommets **intérieurs** :

$$\Phi_1 = \lambda_1^{(142)}, \nabla\Phi_1 = (1/h)(-1,1)^T \mathbf{1}_{(142)}$$

$$\Phi_2 = \lambda_2^{(142)}\mathbf{1}_{(142)} + \lambda_2^{(245)}\mathbf{1}_{(245)} + \lambda_2^{(253)}\mathbf{1}_{(253)}, \nabla\Phi_2 = (1/h)((1,0)^T\mathbf{1}_{(142)} + (0,1)^T\mathbf{1}_{(245)} + (-1,1)^T\mathbf{1}_{(253)})$$

$$etc.$$

Comme indiqué dans le cours, on procède par triangle pour additionner les termes. La matrice de rigidité complète est donc

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$