应用泛函分析，第一次作业. 欧阳鑫健 4121156012.

P9.

$\boxed{3}$ 设 $A_n=[0,1+\frac{1}{n}]$, $n=1,2,\cdots$, 求 $\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n$ 和 $\underline{\lim_{n\to\infty}} A_n$.

解: $\forall n\in N \Rightarrow \bigcup_{m=n}^{+\infty} A_m = [0,1+\frac{1}{n}]$, $\bigcap_{n=k}^{+\infty} A_n=[0,1]$

$\therefore \overline{\lim_{n\to+\infty}} A_n=[0,1]$, $\underline{\lim_{n\to+\infty}} A_n=[0,1]$. 且 $\overline{\lim_{n\to+\infty}} A_n=\underline{\lim_{n\to+\infty}} A_n$.

$\boxed{6}$. 设A为可列集，B是由A的全体有限子集构成的集合，证明：B是可列集.

证：A为可列集，则A和自然数集N对等，A可写为

$$A=\{x_1,x_2,\dots,x_n,\dots\}, \quad A\text{的势为}\aleph_0.$$

~~设A的某一有限子集为 $A_k=\{x_{k_1},x_{k_2},\dots,x_{k_m}\}$.~~

记 $\pi_k:\{1,2,\cdots,k\}\to N$ 为一个严格单调映射，即 $\pi_k(i)<\pi_k(j)$, $i<j$. 且记所有 π_k 的全体为 β_k，定义映射 $F:\beta_k\to \underbrace{N\times N\times\dots\times N}_{k个}$ 为 $F(\pi_k)=(\pi_k(1),\pi_k(2),\cdots,\pi_k(k))\in \underbrace{N\times N\times\dots\times N}_{k个}$，那么F是一对一映射，因此 β_k 是可列集。

记 $A_k=\{a_{\pi_k(1)},a_{\pi_k(2)},\cdots,a_{\pi_k(k)}:\pi_k\in\beta_k\}$，则 A_k 与 β_k 等势 $\Rightarrow A_k$ 可列，且 A_k 为A的有限子集. $B=\{\emptyset\}\cup(\bigcup_{k=1}^{\infty}\beta_k)$，可列个可列集之并仍为可列集 $\Rightarrow$ B是可列集.

$\boxed{9}$ 建立闭区间 $[a,b]$ 与开区间 (a,b) 的一一对应

解：令要使闭区间 $[a,b]$ 与开区间 (a,b) 一一对应，即对等.

令 $A=\{a,b,a+\frac{b-a}{n}\}$, $B=\{a+\frac{b-a}{n}\}$, $n\in N$ 且 $n\neq 0$, $n\neq 1$.

则 $[a,b]\backslash A=(a,b)\backslash B$, A和B为可列集.

只须建立A与B的一一对应：

$$\begin{array}{lccccc} A & a, & b, & a+\frac{b-a}{2}, & a+\frac{b-a}{3}, & \cdots \\ & | & | & | & / & \\ B & a+\frac{b-a}{2}, & a+\frac{b-a}{3}, & a+\frac{b-a}{4}, & a+\frac{b-a}{5} & ,\cdots \end{array}$$

可构造 $f:[0,1]\to(0,1)$.

$$f(x)=\begin{cases} x, & x\in[0,1]\backslash A \\ \frac{a+b}{2}, & x=a \\ \frac{b+2a}{3}, & x=b \\ a+\frac{b-a}{n+2}, & x=\cancel{a+\frac{b-a}{n}}\ a+\frac{b-a}{n},\ n\geq 2,\ n\in N. \end{cases}$$

P16.

$\boxed{1.}$ 设 A, B 为非空有界集，定义数集.

$$A+B=\{c=a+b \mid a\in A, b\in B\}.$$

证明：(1). $\sup(A+B)=\sup(A)+\sup(B)$,

(2) $\inf(A+B)=\inf(A)+\inf(B)$.

证明：

(1) 由确界的定义，对 $\forall \varepsilon_a>0$，$\exists a\in A$，使 $\sup(A)-\varepsilon_a<a\le\sup(A)$，

同理，$\forall\varepsilon_b>0$，$\exists b\in B$，使 $\sup(B)-\varepsilon_b<b\le\sup(B)$.

$\therefore \sup(A)+\sup(B)-(\varepsilon_a+\varepsilon_b)<a+b\le\sup(A)+\sup(B)$，由上确界定义，有 $\sup(A+B)=\sup(A)+\sup(B)$

(2). 类似(1)，有 $\inf(A)+\inf(B)\le a+b<\inf(A)+\inf(B)+(\varepsilon_a+\varepsilon_b)$

$\therefore \inf(A+B)=\inf(A)+\inf(B)$.

$\boxed{4}$. 设有两个函数列 $f_n(x)$ 与 $g_n(x)$. 求证对任一固定的 x，有

$$\inf_n[f_n(x)]+\inf_n[g_n(x)]\le\inf_n(f_n(x)+g_n(x))\le\inf_n(f_n(x))+\sup_n g_n(x)\le$$
$$\sup_n(f_n(x)+g_n(x))\le\sup_n f_n(x)+\sup_n g_n(x).$$

证：显然，$\inf_n f_n(x)+\inf_n g_n(x)\le\inf_n f_n(x)+\sup_n g_n(x)\le\sup_n f_n(x)+\sup_n g_n(x)$. 成立.

下证 $\inf_n(f_n(x)+g_n(x))\ge\inf_n f_n(x)+\inf_n g_n(x)$.

设 $f_n(x)$ 与 $g_n(x)$ 均有界. 则 $f_n(x)+g_n(x)\ge\inf_n f_n(x)+\inf_n g_n(x)$. $(\forall x)$.

$\Rightarrow$ $\inf_n(f_n(x)+g_n(x))\ge\inf_n f_n(x)+\inf_n g_n(x)$. $(\forall x)$.

同理，由于 $\inf_n(-f_n(x))=\sup_n f_n(x)$.

$\Rightarrow$ $\sup_n f_n(x)+\sup_n g_n(x)\ge\sup_n(f_n(x)+g_n(x))$

~~$\inf_n(f_n(x))+\inf_n\sup_n g_n(x)=\inf_n f_n(x)-\inf_n g_n(x)\ge\inf_n(f_n(x)$~~

~~又 $\inf_n(f_n(x)+g_n(x))+\text{in}$~~

又 $\inf_n(f_n(x)+g_n(x))-\inf(f_n(x))\le\inf_n(f_n(x)+g_n(x)-f_n(x))=\inf_n g_n(x)\le\sup_n g_n$

故 $\inf_n(f_n(x)+g_n(x))\le\sup_n g_n(x)+\inf_n f_n(x)$.

同理，有 $\sup_n(f_n(x)+g_n(x))\ge\inf_n(f_n(x))+\sup_n g_n(x)$.

综上，不等式得证.

6. 用有限覆盖定理证明聚点定理.

聚点定理：任一 $\mathbb{R}^n$ 中的有界序列 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 都至少包含一个收敛子列.

有限覆盖：对于 ~~S的开覆~~ $\mathbb{R}^n$ 的子集 S，所有 S 的开覆盖有有限子覆盖，则称 S 是紧致的.

证明：采用反证法，设 $S\subset[-M,M]$，~~S为R中有界数列~~，S 为 $\mathbb{R}$ 中一有界数列，M 为一大于零的实数. 若 S 中没有任何收敛子列，即 S 的聚点集合 $S'\neq 0$. 那则 $\forall x\in[-M,M]$，x 都不是聚点.

即 $\exists\,\delta_x>0$，有 $(x-\delta_x, x+\delta_x)\cap S=$ 有限集.

令 $H=\{(x-\delta_x, x+\delta_x)\mid x\in[-M,M],\ \delta_x>0,\ (x-\delta_x, x+\delta_x)\cap S=\text{有限集}\}$.

则 H 是闭区间 $[-M,M]$ 的一~~有~~组开区间覆盖.

由有限覆盖定理，$\exists H$ 中的有限个子集

$$H_1=\{(x_i-\delta_i, x_i+\delta_i)\mid i=1,2,\dots,n\}$$

覆盖了闭区间 $[-M,M]$. 由 H 的构造，$(x_i-\delta_i, x_i+\delta_i)\cap S=$ 有限集，

$\therefore\ S=[-M,M]\cap S\subset\bigcup_{i=1}^{n}(x_i-\delta_i, x_i+\delta_i)\cap S=$ 有限集.

与 S 是一无限集矛盾.

故聚点定理是有限覆盖定理的必要条件.

8. 对于点列 $\{x_n\}\subset\mathbb{R}$，若 $|x_{n+1}-x_n|\leq\frac{1}{2^n}$，$n=1,2,\dots$，求证 $\{x_n\}$ 是 Cauchy 列.
又若 $\lim\limits_{n\to\infty}|x_{n+1}-x_n|=0$，问 $\{x_n\}$ 是否一定为柯西列.

证：1). $|x_{n+1}-x_n|\leq\frac{1}{2^n}$.

不妨令 $m,n\in\mathbb{N}^*$，$n>m$. 则

$$\begin{aligned}|a_n-a_m|&=|a_n-a_{n-1}+a_{n-1}-a_{n-2}+\dots+a_{m+1}-a_m|\\&\leq|a_n-a_{n-1}|+|a_{n-1}-a_{n-2}|+\dots+|a_{m+1}-a_m|\\&\leq\frac{1}{2^{n-1}}+\frac{1}{2^{n-2}}+\dots+\frac{1}{2^m}\\&=2\left(\frac{1}{2^m}-\frac{1}{2^n}\right)\end{aligned}$$

则 $\forall\varepsilon>0$，$\exists M\in\mathbb{N}$，使得 $n,m>M$ 时，$|a_n-a_m|\leq\left|2\left(\frac{1}{2^m}-\frac{1}{2^n}\right)\right|\leq\varepsilon$.

$\therefore\ \{x_n\}$ 是 Cauchy 列

2). $\lim\limits_{n\to\infty}|x_{n+1}-x_n|=0$

$\{x_n\}$不一定是Cauchy列.

构造反例: $x_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$, $\lim\limits_{n\to\infty}|x_{n+1}-x_n|=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0$.

但$\{x_n\}$不收敛.

$\boxed{10}$ 用有限覆盖定理, 区间套定理, 聚点原理之一证明闭区间$[a,b]$上的连续函数一定有界.

证: 应用聚点原理, 采用反证法.

设$f(x)$在$[a,b]$上无界, 则$\exists x_n\in[a,b]$, 使得 $f(x_n)>n$, $n=1,2,\ldots$

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=+\infty$.

又$\{x_n\}\subset[a,b]$是有界序列, 由致密性(聚点)定理, $\{x_n\}$存在一收敛子列$\{x_{n_k}\}$, 设$\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}=x_0$. $a\le x_{n_k}\le b \Rightarrow a\le x_0\le b$.

由于$f(x)$在x_0点处连续, 有

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n)=+\infty$$

$$\text{而}\ \lim_{n\to\infty} f(x_n)=\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k})=\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0).$$

两式矛盾, 故$f(x)$有界.

P_{23}.

$\boxed{2}$ 证明 $f(x)=x^{\frac{1}{3}}$ 在$[0,+\infty)$上一致连续.

证: 不妨设$x_1,x_2\in[0,+\infty)$, $x_1<x_2$.

则 $|x_1-x_2|=|x_1^{\frac{1}{3}}-x_2^{\frac{1}{3}}||x_1^{\frac{2}{3}}+x_1^{\frac{1}{3}}x_2^{\frac{1}{3}}+x_2^{\frac{1}{3}}|$

$\qquad\ge|x_1^{\frac{1}{3}}-x_2^{\frac{1}{3}}||x_1^{\frac{2}{3}}-2x_1^{\frac{1}{3}}x_2^{\frac{1}{3}}+x_2^{\frac{1}{3}}|$

$\qquad=|x_1^{\frac{1}{3}}-x_2^{\frac{1}{3}}|^3$.

即 $|f(x_1)-f(x_2)|\le|x_1-x_2|^{\frac{1}{3}}$. 取 $\cancel{\varepsilon>\delta^{\frac{1}{3}}}$ $\delta<\varepsilon^3$

则 $\forall\varepsilon>0$, 存在$\delta<\varepsilon^3$, 当$x_1,x_2\in[0,+\infty)$,

$|x_1-x_2|<\delta\Rightarrow|f(x_1)-f(x_2)|\le\delta^{\frac{1}{3}}<\varepsilon$. 故$f(x)=x^{\frac{1}{3}}$在$[0,+\infty)$上一致连续

$\boxed{3}$. 证明 $f(x)=x^2$ 在 $\mathbb{R}$ 上不一致连续.

证：要证 $f(x)=x^2$ 在 $\mathbb{R}$ 上不一致连续.

$\Leftrightarrow$ $\exists \varepsilon_0>0$, $\forall \delta>0$, 当 $x_1, x_2\in\mathbb{R}$ 时, $|x_1-x_2|<\delta \Rightarrow |f(x_1)-f(x_2)|\geq \varepsilon_0$.

$\cancel{|f(x_1)-f(x_2)| = |x_1^2-x_2^2| = |(x_1-x_2)(x_1+x_2)|}$

$\cancel{= |x_1-x_2||x_1-x_2+2x_2| \geq |x_1-x_2|^2}$

~~取~~ $\cancel{x_1=\frac{1}{n},\ x_2=\frac{1}{n+1}}$, ~~则~~ $\cancel{|x_1^2-x_2^2| = \left|\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}\right| =}$

取 $x_1=n$, $x_2=n+\frac{1}{n}$. $(n=1,2,\dots)$, 当 n 充分大时, $|x_1-x_2|$ 可任意小,

但 $|f(x_1)-f(x_2)| = |n^2-(n+\frac{1}{n})^2| = 2+\frac{1}{n^2}>2$.

故当 $\varepsilon_0=2$ 时, $\forall\delta>0$, $x_1, x_2\in\mathbb{R}$ 时, $|x_1-x_2|<\delta \Rightarrow |f(x_1)-f(x_2)|\geq\varepsilon_0$.

$\therefore$ $f(x)=x^2$ 在 $\mathbb{R}$ 上不一致连续.

$\boxed{5}$. 证明函数列 $\left\{\frac{x}{1+n^2x^2}\right\}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致收敛.

证：~~Weienstran M-判别法，和证明该函数列一致收敛于 S(x)=0~~

~~①. 当 x=0 时，函数列显然在 ℝ 上一致收敛，且一致收敛于 S(x)=0.~~

②. ~~当~~ $\cancel{x\neq 0}$ ~~时~~, $\cancel{|u_n(x)| = \left|\frac{x}{1+n^2x^2}\right| = \left|\frac{1}{\frac{1}{x}+n^2x}\right| \leq \left|\frac{1}{2n}\right|}$.

$\cancel{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n}}$ ~~收敛，由一致收敛的定义.~~

通过 Cauchy 收敛准则判断.

①. 当 $x=0$ 时, 函数列显然在 $\mathbb{R}$ 上一致收敛.

②. 当 $x\neq 0$ 时, $|f_n(x)-f_m(x)| = \left|\frac{x}{1+n^2x^2}-\frac{x}{1+m^2x^2}\right| = \left|\frac{(m^2-n^2)x^3}{(1+m^2x^2)(1+n^2x^2)}\right|$

$$=\left|\frac{m^2-n^2}{(\frac{1}{x}+m^2x)(\frac{1}{x}+n^2x)}\right| < \frac{|m^2-n^2|}{m^2\cdot 2|n|}$$

故 $\forall\varepsilon>0$, $\exists N$, 当 $m,n>N$ 时, $\forall x\in\mathbb{R}/\{0\}$, 恒有 $|f_n(x)-f_m(x)|<\varepsilon$.

$\therefore$ 函数列 $\left\{\frac{x}{1+n^2x^2}\right\}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致收敛.