Convergence, Intégration, Probabilités

Séance 4 - Construction de l'intégrale, espaces L^p, interversion limite-intégrale

CentraleSupélec

Cursus ingénieur

26 septembre 2019

Retours amphi 3

- Support amphi 3 disponible en versions vierge et annotée sur edunao
- Enregistrement vidéo de l'amphi 3 disponible sur la web tv
- Problème de positionnement du micro
- Questions d'ordre mathématique sur daskit/cip19-20 (même espace anglophone/francophone)
- Support amphi 4 vierge disponible dès à présent sur edunao

Rappels de la séance précédente

- Notion de tribu, espace mesurable $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$
- Notion de mesure, espace mesuré
- Cas particuliers des espaces de probabilités
- Notion de fonctions mesurables
- Notion de fonctions étagées

Programme

Intégrale d'une fonction étagée réelle positive

Intégrale des fonctions mesurables positives

Fonctions μ-intégrables

Théorème de convergence dominée

Espace L^p

Programme

Intégrale d'une fonction étagée réelle positive

Intégrale des fonctions mesurables positives

Fonctions μ-intégrables

Théorème de convergence dominée

Espace L^p

Intégrale d'une fonction étagée positive I

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré.

Définition 4.1 (Intégrale d'une fonction étagée réelle positive)

Soit $\varphi = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \mathbf{1}_{A_i}$ *une fonction étagée, positive, i.e.* $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}_+$, *avec* $\forall i \in \{1, \dots, N\}$, $\alpha_i \in \mathbb{R}_+$ *et les* $(A_i)_{i \in \{1,\dots,N\}}$ *forment une partition mesurable de* Ω. *On définit l'intégrale de* φ *par rapport à la mesure* μ *par*

$$\int_\Omega \varphi \, d\mu = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \mu(A_i).$$

- convention $0 \times \mu(A_i) = 0$ (même si $\mu(A_i) = +\infty$)
- définition bien posée : ne dépend pas des (A_i).
- $\in \overline{\mathbb{R}}_+$

Notation : $\int_\Omega \varphi \, d\mu = \int_\Omega \varphi(x) \mu(dx) = \int_\Omega \varphi(x) d\mu(x) = \int \varphi \, d\mu$

Intégrale d'une fonction étagée positive II

- $\int_\Omega \varphi \, d\delta_a = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \delta_a(A_i) = \alpha_{i_0} = \varphi(a)$

$(a \in \Omega)$

Propriétés de l'intégrale d'une fonction étagée I

Proposition 4.2 (Propriétés élémentaires)

Soient φ et ψ deux fonctions étagées réelles positives sur $(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$.

(a) $\int_\Omega (\varphi + \psi)\, d\mu = \int_\Omega \varphi\, d\mu + \int_\Omega \psi\, d\mu$. (additivité)

(b) $\forall \lambda \geq 0, \int_\Omega \lambda\varphi\, d\mu = \lambda \int_\Omega \varphi\, d\mu$.

(c) $\varphi \leq \psi \Longrightarrow \int_\Omega \varphi\, d\mu \leq \int_\Omega \psi\, d\mu$. (croissance)

(a) $\varphi = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbb{1}_{A_i}$ $\psi = \sum_{j=1}^{p} \beta_j \mathbb{1}_{B_j}$ $\varphi + \psi = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} (\alpha_i + \beta_j) \mathbb{1}_{A_i \cap B_j}$

$$\int_\Omega (\varphi + \psi)\, d\mu = \sum_i \sum_j (\alpha_i + \beta_j)\, \mu(A_i \cap B_j)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \underbrace{\sum_{j=1}^{p} \mu(A_i \cap B_j)}_{\mu(A_i)} + \sum_{j=1}^{p} \beta_j \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \mu(A_i \cap B_j)}_{\mu(B_j)}$$

$$= \int_\Omega \varphi\, d\mu + \int_\Omega \psi\, d\mu.$$

Propriétés de l'intégrale d'une fonction étagée II

(b) OK

(c) $\psi = \underbrace{\varphi}_{} + \underbrace{(\psi - \varphi)}_{}$

étagées, positives.

$\int \psi \, d\mu = \int \varphi \, d\mu + \underbrace{\int (\psi - \varphi) \, d\mu}_{\geq 0}$

Programme

Intégrale d'une fonction étagée réelle positive

Intégrale des fonctions mesurables positives

Fonctions μ-intégrables

Théorème de convergence dominée

Espace L^p

Intégrale d'une fonction mesurable positive

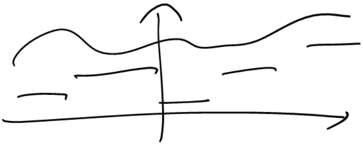
Définition 4.3 (Intégrale d'une fonction mesurable positive)

Soit $f : (\Omega, \mathcal{T}) \to (\overline{\mathbb{R}}_+, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}_+))$ *une fonction mesurable, à valeurs réelles positives, éventuellement infinies. On définit l'intégrale de* f *par rapport à la mesure* μ *par*

$$\int_\Omega f \, d\mu = \sup \left\{ \int_\Omega \varphi \, d\mu : \varphi \text{ fonction étagée positive}, \varphi \leq f \right\}.$$

→ fonction nulle : étagée, positive, $\leq f$

$$\int_\Omega 0 \, d\mu = 0$$



Propriétés de l'intégrale d'une fonction mesurable positive

Proposition 4.4 (Propriétés)

Soit $f, g : (\Omega, \mathcal{T}) \to (\overline{\mathbb{R}}_+, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}_+))$.

(a) $\int_\Omega f \, d\mu \geq 0$; (positivité)

(b) $f \leq g \Longrightarrow \int_\Omega f \, d\mu \leq \int_\Omega g \, d\mu$. (Croissance)

(a) OK

(b) $\{\varphi$, étagée, ≥ 0, $\leq f\} \subset \{\varphi$ étagée, ≥ 0, $\leq g\}$

$\sup\{\int_\Omega \varphi \, d\mu : \text{———}\} \leq \sup\{\int_\Omega \varphi \, d\mu : \text{———}\}$

$\int_\Omega f \, d\mu \leq \int_\Omega g \, d\mu.$

Théorème de convergence monotone I

Théorème 4.5 (Théorème de convergence monotone)

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante de fonctions mesurables sur $(\Omega, \mathcal{T})$ à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}_+$. Alors $\lim_n f_n$ est une fonction mesurable sur $(\Omega, \mathcal{T})$ à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}_+$ et

$$\int_\Omega \lim_n f_n \, d\mu \overset{\geq}{=} \lim_n \int_\Omega f_n \, d\mu. \in \overline{\mathbb{R}}_+$$

→ mesurabilité de $f = \lim_n f_n$; $f \geq 0$

→ 1ère inégalité : (f_n) suite ↑ $f_n \leq f_{n+1} \leq f$

$$\int_\Omega f_n \, d\mu \leq \int_\Omega f \, d\mu$$

$$\lim \int_\Omega f_n \, d\mu \leq \int_\Omega f \, d\mu.$$

Théorème de convergence monotone II

Lemme 4.6 (Lemme de démonstration)

Soit φ une fonction étagée à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}_+$. Soit $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante de parties mesurables de Ω, vérifiant $\Omega = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$. Alors, $\lim_n \int_\Omega \varphi \mathbf{1}_{E_n}\, d\mu = \int_\Omega \varphi\, d\mu$.

Démo : $\varphi = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \mathbb{1}_{A_i}$ $\quad \varphi \mathbb{1}_{E_n} = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \mathbb{1}_{A_i \cap E_n}$

$$\int_\Omega \varphi \mathbb{1}_{E_n}\, d\mu = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \, \mu(\underbrace{A_i \cap E_n}_{}) \uparrow$$

$$\xrightarrow[n\to+\infty]{} \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \, \mu\Big(\overset{\text{suite}}{\bigcup_{n\in\mathbb{N}}} A_i \cap E_n\Big) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \mu(A_i)$$

$$= \int_\Omega \varphi\, d\mu.$$

Théorème de convergence monotone III

→ Retour au TCM : soit $\lambda \in]0,1[$. Soit φ étagée ≥ 0, $\leq f$.

$$E_n = \{x \in \Omega : f_n(x) \geq \lambda \varphi(x)\}$$

(E_n) suite ↑ $\Omega = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n$ → c° du lemme.

→ $\lim_n \int_\Omega f_n \, d\mu \geq \lim_n \int_\Omega f_n \mathbb{1}_{E_n} \, d\mu$

$\geq \lim_n \int_\Omega \lambda \varphi \mathbb{1}_{E_n} \, d\mu = \int_\Omega \lambda \varphi \, d\mu$.

$\lambda \to 1$: $\lim \int_\Omega f_n \, d\mu \geq \int_\Omega \varphi \, d\mu$

$$\geq \underbrace{\sup \left\{ \int_\Omega \varphi \, d\mu : \varphi \text{ étagée } \geq 0, \leq f \right\}}_{= \int_\Omega f \, d\mu}$$

Propriétés de l'intégrale des fonctions mesurables positives

Proposition 4.7 (Propriétés élémentaires)

Soient f et g deux fonctions mesurables sur $(\Omega, \mathcal{T})$ à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}_+$.

(a) $\int_\Omega (f+g)\, d\mu = \int_\Omega f\, d\mu + \int_\Omega g\, d\mu.$ (additivité)

(b) $\forall \lambda \geq 0, \int_\Omega \lambda f\, d\mu = \lambda \int_\Omega f\, d\mu.$

(a) $\begin{cases} f \text{ limite de } (f_n) \text{ suite } \uparrow \text{ de f° étagées positives} \\ g \text{ ——— } (g_n) \text{ ——— } \end{cases}$

$$\int_\Omega (f+g)\, d\mu = \int_\Omega \lim (f_n+g_n)\, d\mu \overset{\boxed{TCM}}{=} \lim \underbrace{\int_\Omega (f_n+g_n)\, d\mu}$$

$$= \dots = \int_\Omega f\, d\mu + \int_\Omega g\, d\mu$$

Propriétés de l'intégrale des fonctions mesurables positives

Définition 4.8 (Propriétés vraies presque-partout)

μ.a.s.

Une propriété $P(x)$ est dite vraie μ-presque partout (noté μ-p.p.) s'il existe un ensemble $N \in \mathcal{T}$ tel que $\mu(N) = 0$ et $P(x)$ est vraie pour tout $x \in \Omega \setminus N$.

Ex : $f = g$ μ.p.p ? $\mu(\{x \in \Omega : f(x) \neq g(x)\}) = 0$

Proposition 4.9 (Propriétés (suite))

Soient f et g deux fonctions mesurables sur $(\Omega, \mathcal{T})$ à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}_+$.

(a) $\int_\Omega f \, d\mu = 0 \iff f = 0 \;\; \mu - p.p.$

(b) $f = g \;\; \mu - p.p. \implies \int_\Omega f \, d\mu = \int_\Omega g \, d\mu$.

(a) f limite de (f_n) suite ↑ de fct étagées positives

$0 = \int_\Omega f \, d\mu \Rightarrow \forall n, \int_\Omega f_n \, d\mu = 0$.

Propriétés de l'intégrale des fonctions mesurables positives

$$\mu(\underbrace{\{x\in\Omega : f_n(x)>0\}}_{E_n \text{ croissante}\ \uparrow}) = 0$$

$$\bigcup_n E_n = \{x\in\Omega : f(x)>0\}.$$

$$\mu(\{x\in\Omega : f(x)>0\}) = \mu(\bigcup_n E_n) = \lim_n \mu(E_n) = 0.$$

Propriétés de l'intégrale des fonctions mesurables positives

Proposition 4.10 (Propriétés (suite))

Soit f une fonction mesurable sur $(\Omega, \mathcal{T})$ à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}_+$.

(a) $\forall a > 0, \mu(\{x \in \Omega : f(x) \geq a\}) \leq \dfrac{1}{a} \displaystyle\int_\Omega f \, d\mu$;

(b) $\int_\Omega f \, d\mu < \infty \Longrightarrow f < \infty \;\; \mu - p.p.$

- **TD Exercice IV.2** (Inégalité de Markov)

Exemple de l'intégration sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mathrm{Card})$

- **TD Exercice IV.1**

Programme

$\int_\Omega f \, d\mu$

Intégrale d'une fonction étagée réelle positive

Intégrale des fonctions mesurables positives

Fonctions μ-intégrables

Théorème de convergence dominée

Espace L^p

Intégrale d'une fonction μ-intégrable

Définition 4.11 (Fonction μ-intégrable)

Une fonction $f : (\Omega, \mathcal{T}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ mesurable est dite μ-intégrable (ou s'il n'y a pas d'ambiguïté intégrable), si $\int_\Omega |f| \, d\mu < +\infty$. On note $\mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ l'ensemble des fonctions μ-intégrables.

$\mathcal{L}$

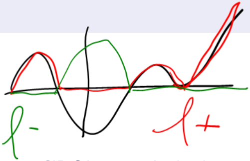
Définition 4.12 (Intégrale d'une fonction $\mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$)

Soit f une fonction de $\mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$. Alors f^+ et f^- sont des fonctions mesurables positives, et on définit l'intégrale de f par rapport à μ par

$$\int_\Omega f \, d\mu = \int_\Omega f^+ \, d\mu - \int_\Omega f^- \, d\mu.$$

$f^+ = \max(f, 0)$

$f^- = \underset{\text{max}}{\cancel{\min}}(-f, 0)$



$|f| = f^+ + f^-$

$f = f^+ - f^-$

Propriétés de l'intégrale des fonctions $\mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$

Proposition 4.13 (Propriétés élémentaires)

Soient f et g deux fonctions de $\mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$.

(a) *(linéarité)* $\int_\Omega (\lambda f + g)\, d\mu = \lambda \int_\Omega f\, d\mu + \int_\Omega g\, d\mu$.

(b) *(croissance)* $f \leq g \Longrightarrow \int_\Omega f\, d\mu \leq \int_\Omega g\, d\mu$.

(c) $f = g \quad \mu - p.p. \Longrightarrow \int_\Omega f\, d\mu = \int_\Omega g\, d\mu$.

(d) *(inégalité triangulaire)* $\left|\int_\Omega f\, d\mu\right| \leq \int_\Omega |f|\, d\mu$.

- $\mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
- $f \to \int_\Omega f\, d\mu$ est une forme linéaire sur $\mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$.

(c) $\begin{cases} f+g = (f+g)^+ - (f+g)^- \\ f+g = f^+ - f^- + g^+ - g^- \end{cases}$ $\quad |f+g| \leq |f| + |g| \in \mathcal{L}^1$

$\int (f+g)^+ + \int f^- + \int g^- = \int (f+g)^- + \int f^+ + \int g^+ < +\infty$

Propriétés de l'intégrale des fonctions $\mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$

(c) $\lambda \int_\Omega f d\mu = \left| \int_\Omega f d\mu \right| \qquad \lambda = \pm 1$

$$\left| \int_\Omega f d\mu \right| = \lambda \int_\Omega f d\mu = \int_\Omega \lambda f d\mu \leq \int_\Omega |\lambda| |f| d\mu$$

Programme

$$\boxed{\int_\Omega f\,d\mu}$$

Intégrale d'une fonction étagée réelle positive

Intégrale des fonctions mesurables positives

TCM

Fonctions μ-intégrables

$$\int_\Omega |f|\,d\mu < +\infty$$

Théorème de convergence dominée

$$f \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{Q})$$

Espace L^p

Lemme de Fatou

Proposition 4.14 (Lemme de Fatou)

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de fonctions mesurables sur* $(\Omega, \mathcal{T})$ *à valeurs dans* $\overline{\mathbb{R}}_+$. *Alors :* $0 \leq \int_\Omega \liminf_n f_n \, d\mu \leq \liminf_n \int_\Omega f_n \, d\mu \leq +\infty$.

$\rightarrow \forall n, \ g_n = \inf_{k\geq n} f_k$ $\quad (g_n)_n$ suite $\uparrow$ mesurable positive $\quad g_n \leq f_n$

$$\int_\Omega \liminf_n f_n \, d\mu = \int_\Omega \lim g_n \, d\mu \overset{TCM}{=} \lim \int_\Omega g_n \, d\mu$$
$$= \liminf \int_\Omega g_n \, d\mu$$
$$\leq \liminf \int_\Omega f_n \, d\mu$$

Théorème de convergence dominée I

Théorème 4.15 (Théorème de convergence dominée)

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de fonctions de* $\mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$. *Si :*

(i) *la suite* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge* $\mu - p.p.$ *vers une fonction* $f : \Omega \to \mathbb{R}$ *mesurable ;*

(ii) *il existe une fonction* $g : \Omega \to \mathbb{R}_+$ *mesurable telle que* $\int_\Omega g\, d\mu < \infty$ *et* $\forall n \in \mathbb{N}, |f_n| \leq g \;\; \mu - p.p.$ *;*

hypothèse de domination

Alors $f \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ *et* $\displaystyle\int_\Omega f\, d\mu = \lim_n \int_\Omega f_n\, d\mu$.

On a de plus $\displaystyle\lim_n \int_\Omega |f_n - f|\, d\mu = 0$.

$$\boxed{h_n = 2g - |f_n - f| \geq 0}$$

Théorème de convergence dominée II

Théorème de convergence dominée III

Programme

Intégrale d'une fonction étagée réelle positive

Intégrale des fonctions mesurables positives

Fonctions μ-intégrables

Théorème de convergence dominée

Espace L^p

$\mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$.

Espaces $\mathcal{L}^p$

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré. Pour $p \geq 1$, on définit l'ensemble des fonctions mesurables sur Ω et à valeurs dans $\mathbb{R}$ dont la p-ième puissance est μ-intégrable :

$$\mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{T}, \mu) = \left\{ f : (\Omega, \mathcal{T}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})) \text{ mesurables } : \int_\Omega |f|^p d\mu < +\infty \right\}.$$

Proposition 4.16 (Structure)

$\mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Application $\|\cdot\|_p$

Pour une fonction f mesurable, on définit $\|\cdot\|_p$ à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}_+$ par :

$$\|f\|_p = \left(\int_\Omega |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Proposition 4.17 (Inégalité de Hölder)

Soient p et q deux exposants conjugués, i.e. deux réels de $]1, +\infty[$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

(a) *Soient deux fonctions f et g mesurables positives. Alors :*

$$0 \leq \|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q \leq +\infty.$$

(b) *Soient deux fonctions $f \in \mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ et $g \in \mathcal{L}^q(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$. Alors $fg \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ et $\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q$.*

- Démonstration **TD Exercice IV.4**

Inégalité de Minkowski

Définition 4.18 (Inégalité de Minkowski)

Soit $p \in [1, +\infty[$. *Soient* f *et* g *deux fonctions de* $\mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$. *Alors*

$$\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

Semi-norme

Proposition 4.19 (Espace vectoriel semi-normé)

L'application $\|\cdot\|_p$ *est une semi-norme sur l'espace* $\mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$.

- On définit sur $\mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ la relation $\mathtt{R}$ par :

$$f \mathtt{R} g \iff \|f-g\|_p = 0.$$

- $\mathtt{R}$ est une relation d'équivalence, et deux fonctions appartiennent à la même classe d'équivalence si et seulement elles sont égales $\mu - p.p.$.
- On note $L^p(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ l'espace quotient de $\mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ par $\mathtt{R}$.

Proposition 4.20 (Espace vectoriel normé)

L'application $\|\cdot\|_p$ *est une norme sur* $L^p(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$.

Cas $p = 2$: l'espace de Hilbert $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$

Pour $f : \Omega \to \mathbb{R}$ mesurable,

$$f \in L^2(\Omega, \mathcal{T}, \mu) \Leftrightarrow \|f\|_2 = \left(\int |f|^2.d\mu\right)^{1/2} < +\infty.$$

L'application

$$\begin{array}{rcl} L^2(\Omega, \mathcal{T}, \mu) \times L^2(\Omega, \mathcal{T}, \mu) & \to & \mathbb{R} \\ (f, g) & \mapsto & \langle f, g \rangle = \int fg.d\mu \end{array}$$

définit un produit scalaire, pour lequel $\| \cdot \|_2$ est la norme associée.
L'espace $L^2(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ muni du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un espace de Hilbert.
En général $L^2(\Omega, \mathcal{T}, \mu) \not\subset L^1(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ sauf si $\mu(\Omega) < +\infty$.