

Cours d'Equations aux Dérivées Partielles

Résolution des problèmes elliptiques

Séances 6 - 7 Approximation variationnelle théorique et Introduction à la Méthode des éléments finis - Deuxième Partie

CentraleSupélec - Cursus ingénieur

18-02-2020

1. Introduction

2. Rappels théoriques

3. Approximation Galerkin/interne-Partie théorique

4. Présentation à grosses mailles de la MEF

5. Brève histoire de la Méthode des Eléments Finis

6. Exemples

7. Résolution par Eléments Finis

La courte histoire du cours EDP

Vous avez vu :

- Comment **modéliser** un problème issu de la physique, la biologie, etc... par une EDO ou une EDP, avec des conditions initiales et/ou aux limites

La courte histoire du cours EDP

Vous avez vu :

- Comment **modéliser** un problème issu de la physique, la biologie, etc... par une EDO ou une EDP, avec des conditions initiales et/ou aux limites
- Comment **analyser mathématiquement les EDOs** (existence et unicité de la solution, stabilité, comportement asymptotique, etc...)

La courte histoire du cours EDP

Vous avez vu :

- Comment **modéliser** un problème issu de la physique, la biologie, etc... par une EDO ou une EDP, avec des conditions initiales et/ou aux limites
- Comment **analyser mathématiquement les EDOs** (existence et unicité de la solution, stabilité, comportement asymptotique, etc...)
- Comment **approcher la solution d'une EDO** par un schéma aux différences finies

La courte histoire du cours EDP

Vous avez vu :

- Comment **modéliser** un problème issu de la physique, la biologie, etc... par une EDO ou une EDP, avec des conditions initiales et/ou aux limites
- Comment **analyser mathématiquement les EDOs** (existence et unicité de la solution, stabilité, comportement asymptotique, etc...)
- Comment **approcher la solution d'une EDO** par un schéma aux différences finies
- Comment donner un sens faible aux EDP par la **théorie des distributions** (espace de Sobolev)

La courte histoire du cours EDP

Vous avez vu :

- Comment **modéliser** un problème issu de la physique, la biologie, etc... par une EDO ou une EDP, avec des conditions initiales et/ou aux limites
- Comment **analyser mathématiquement les EDOs** (existence et unicité de la solution, stabilité, comportement asymptotique, etc...)
- Comment **approcher la solution d'une EDO** par un schéma aux différences finies
- Comment donner un sens faible aux EDP par la **théorie des distributions** (espace de Sobolev)
- Montrer le **caractère bien posé** d'un problème elliptique aux limites (théorème de Lax-Milgram) et prévoir la **régularité de la solution**

La courte histoire du cours EDP

Vous avez vu :

- Comment **modéliser** un problème issu de la physique, la biologie, etc... par une EDO ou une EDP, avec des conditions initiales et/ou aux limites
- Comment **analyser mathématiquement les EDOs** (existence et unicité de la solution, stabilité, comportement asymptotique, etc...)
- Comment **approcher la solution d'une EDO** par un schéma aux différences finies
- Comment donner un sens faible aux EDP par la **théorie des distributions** (espace de Sobolev)
- Montrer le **caractère bien posé** d'un problème elliptique aux limites (théorème de Lax-Milgram) et prévoir la **régularité de la solution**
- Aujourd'hui : **Approximation numérique**

- 1.Introduction
- 2.Rappels théoriques
- 3.Approximation Galerkin/interne-Partie théorique
- 4.Présentation à grosses mailles de la MEF
- 5.Brève histoire de la Méthode des Eléments Finis
- 6.Exemples
- 7.Résolution par Eléments Finis

Un peu d'histoire maths-Numerics



Lord Rayleigh, 1842,1919

Quotient de Rayleigh, problème d'optimisation, Theory of sound, 1894 et 1896.

- 1.Introduction
- 2.Rappels théoriques
- 3.Approximation Galerkin/interne-Partie théorique
- 4.Présentation à grosses mailles de la MEF
- 5.Brève histoire de la Méthode des Éléments Finis
- 6.Exemples
- 7.Résolution par Éléments Finis

Un peu d'histoire maths-Numerics



Lord Rayleigh, 1842,1919

Quotient de Rayleigh, problème d'optimisation, Theory of sound, 1894 et 1896.



Méthode numérique de minimisation d'énergie mécanique (1908 et 1909)
2 limitations importantes

- 1.Introduction
- 2.Rappels théoriques
- 3.Approximation Galerkin/interne-Partie théorique
- 4.Présentation à grosses mailles de la MEF
- 5.Brève histoire de la Méthode des Eléments Finis
- 6.Exemples
- 7.Résolution par Eléments Finis

Un peu d'histoire des maths



Boris Galerkin, 1871-1945

Extension de Ritz : Formulation faible des EDP, principe des travaux virtuels (principe fondamental d'équilibre mécanique)
Approximation en dimension finie

- 1.Introduction
- 2.Rappels théoriques
- 3.Approximation Galerkin/interne-Partie théorique
- 4.Présentation à grosses mailles de la MEF
- 5.Brève histoire de la Méthode des Eléments Finis
- 6.Exemples
- 7.Résolution par Eléments Finis

Un peu d'histoire des maths



Boris Galerkin, 1871-1945

Extension de Ritz : Formulation faible des EDP, principe des travaux virtuels (principe fondamental d'équilibre mécanique)
Approximation en dimension finie

Naissance des méthodes d'approximation de... Rayleigh-Ritz-Galerkin...

1. Introduction

2. Rappels théoriques

- Problème de Dirichlet
- Résolution théorique

3. Approximation Galerkin/interne-Partie théorique

4. Présentation à grosses mailles de la MEF

5. Brève histoire de la Méthode des Eléments Finis

6. Exemples

7. Résolution par Eléments Finis

Problème de Dirichlet

Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^d , $d \geqslant 1$.

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases}$$

Problème de Dirichlet

Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^d , $d \geq 1$.

$$\begin{cases} -\Delta u = f \text{ dans } \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases}$$

Remarque 2.1

- (i) *Pas de résolution explicite en général!*
- (ii) *EDP de transport-diffusion stationnaires (voir TD) :*
$$-\Delta u + b \cdot \nabla u + cu = f \text{ dans } \Omega \text{ avec } b, c, f \text{ fonctions données}$$
- (iii) *Conditions au bord : Neumann, Dirichlet-Neumann, Robin*

Formulation variationnelle

Formulation **faible** à partir de la formule de Green :

$$(\text{FF}) \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega), \quad \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \phi = \int_{\Omega} f \phi$$

Formulation **variationnelle** dans H Hilbert :

$$(a) \text{ on définit } \begin{cases} \text{la forme bilinéaire : } & a : (u, v) \mapsto \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \\ \text{la forme linéaire : } & \ell : v \mapsto \int_{\Omega} f v \end{cases}$$

(b) a, ℓ définies : $H \subset H^1(\Omega)$

(c) u nulle au bord : $H = H_0^1(\Omega), (\cdot, \cdot)_{H_0^1} : (u, v) \mapsto \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v$

(FV) Trouver $u \in H$ tq $\forall v \in H, a(u, v) = \ell(v)$

Existence et unicité

Théorème 2.2

Soient Ω ouvert borné régulier de \mathbb{R}^d , $d \geq 1$ et $f \in L^2(\Omega)$.

(i) Il existe une unique solution $u \in H_0^1(\Omega)$ de **(FV)**. De plus, u vérifie

$$-\Delta u = f \quad p.p. \text{ dans } \Omega \quad \text{et} \quad u \in H_0^1(\Omega).$$

Il existe C_Ω indépendante de f telle que

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq C_\Omega \|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

(ii) Si Ω est de classe C^1 , alors u est solution de **(D)** au sens où

$$-\Delta u = f \quad p.p. \text{ dans } \Omega \quad \text{et} \quad u = 0 \quad p.p. \text{ sur } \partial\Omega.$$

Application du théorème de Lax-Milgram

(FV) Trouver $u \in H$ tq

$$\forall v \in H, \quad a(u, v) = \ell(v)$$

avec

- (i) H espace de Hilbert,
- (ii) $a : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ bilinéaire et $\ell : H \rightarrow \mathbb{R}$ linéaire, continues,
- (iii) a coercive.

Il existe un et un seul $u \in H$ tel que $\forall v \in H, \quad a(u, v) = \ell(v)$.

De plus $a(u, u) = \ell(u) \implies \|u\|_H \leq C_\Omega \|\ell\|_{H'}$.

u est la solution variationnelle (ou faible)

- 1. Introduction
- 2. Rappels théoriques
- 3. Approximation Galerkin/interne-Partie théorique
- 4. Présentation à grosses mailles de la MEF
- 5. Brève histoire de la Méthode des Eléments Finis
- 6. Exemples
- 7. Résolution par Eléments Finis

Problème de Dirichlet
Résolution théorique

Comment calculer la solution du problème-Quelle méthode ?

1. Introduction

2. Rappels théoriques

3. Approximation Galerkin/interne-Partie théorique

4. Présentation à grosses mailles de la MEF

5. Brève histoire de la Méthode des Eléments Finis

6. Exemples

7. Résolution par Eléments Finis

Principe général

(FV) Trouver $u \in H$ tq $\forall v \in H$, $a(u, v) = \ell(v)$

Définition 3.1

approximation interne : H remplacé par $H_h \subset H$ de dim finie

Remarque 3.2

(a) H_h sev de dim finie de H : Hilbert pour $(\cdot, \cdot)_H$.

(b) indice $_h$: notation liée à la taille des cellules du maillage

$$h \rightarrow 0 \iff \dim(H_h) \rightarrow \infty$$

Exemple : $h \sim 1/(J + 1) \iff \dim(H_h) = J^d$

- 1.Introduction
- 2.Rappels théoriques
- 3.Approximation Galerkin/interne-Partie théorique
 - 4.Présentation à grosses mailles de la MEF
- 5.Brève histoire de la Méthode des Eléments Finis
 - 6.Exemples
- 7.Résolution par Eléments Finis

Problème discret

Lemme

Problème discret

Lemme

Soient H Hilbert, a forme bilinéaire, continue et coercive ($\alpha > 0$) sur $H \times H$ et $\ell \in H'$. Soit H_h **sev de dim finie** de H . Alors

$$(\text{FV}_h) \quad \text{trouver } u_h \in H_h \text{ tq} \quad \forall v_h \in H_h, \quad a(u_h, v_h) = \ell(v_h)$$

Problème discret

Lemme

Soient H Hilbert, a forme bilinéaire, continue et coercive ($\alpha > 0$) sur $H \times H$ et $\ell \in H'$. Soit H_h **sev de dim finie** de H . Alors

$$(\text{FV}_h) \quad \text{trouver } u_h \in H_h \text{ tq} \quad \forall v_h \in H_h, \quad a(u_h, v_h) = \ell(v_h)$$

est **bien posé** dans H_h : il existe un et un seul $u_h \in H_h$ tel que

$$\forall v_h \in H_h, \quad a(u_h, v_h) = \ell(v_h)$$

Problème discret

Lemme

Soient H Hilbert, a forme bilinéaire, continue et coercive ($\alpha > 0$) sur $H \times H$ et $\ell \in H'$. Soit H_h **sev de dim finie** de H . Alors

$$(\text{FV}_h) \quad \text{trouver } u_h \in H_h \text{ tq} \quad \forall v_h \in H_h, \quad a(u_h, v_h) = \ell(v_h)$$

est **bien posé** dans H_h : il existe un et un seul $u_h \in H_h$ tel que

$$\forall v_h \in H_h, \quad a(u_h, v_h) = \ell(v_h) \quad \text{et} \quad \|u_h\|_H \leq \frac{\|\ell\|_{H'}}{\alpha}$$

Problème discret

Lemme

Soient H Hilbert, a forme bilinéaire, continue et coercive ($\alpha > 0$) sur $H \times H$ et $\ell \in H'$. Soit H_h **sev de dim finie** de H . Alors

$$(\text{FV}_h) \quad \text{trouver } u_h \in H_h \text{ tq} \quad \forall v_h \in H_h, \quad a(u_h, v_h) = \ell(v_h)$$

est **bien posé** dans H_h : il existe un et un seul $u_h \in H_h$ tel que

$$\forall v_h \in H_h, \quad a(u_h, v_h) = \ell(v_h) \quad \text{et} \quad \|u_h\|_H \leq \frac{\|\ell\|_{H'}}{\alpha}$$

De plus, $a(u - u_h, v_h) = 0, \quad \forall v_h \in H_h$

Ainsi, si $a(., .)$ symétrique, alors u_h **Projection Orthogonale de u sur H_h** , au sens de $a(., .)$

Problème discret

Lemme

Soient H Hilbert, a forme bilinéaire, continue et coercive ($\alpha > 0$) sur $H \times H$ et $\ell \in H'$. Soit H_h **sev de dim finie** de H . Alors

$$(\text{FV}_h) \quad \text{trouver } u_h \in H_h \text{ tq} \quad \forall v_h \in H_h, \quad a(u_h, v_h) = \ell(v_h)$$

est **bien posé** dans H_h : il existe un et un seul $u_h \in H_h$ tel que

$$\forall v_h \in H_h, \quad a(u_h, v_h) = \ell(v_h) \quad \text{et} \quad \|u_h\|_H \leq \frac{\|\ell\|_{H'}}{\alpha}$$

et, dans tous les cas, u_h est l'**unique solution de** : $A_h u_h = b_h$ (A_h **SDP si a symétrique**).

Problème discret

Lemme

Soient H Hilbert, a forme bilinéaire, continue et coercive ($\alpha > 0$) sur $H \times H$ et $\ell \in H'$. Soit H_h **sev de dim finie** de H . Alors

$$(\text{FV}_h) \quad \text{trouver } u_h \in H_h \text{ tq} \quad \forall v_h \in H_h, \quad a(u_h, v_h) = \ell(v_h)$$

est **bien posé** dans H_h : il existe un et un seul $u_h \in H_h$ tel que

$$\forall v_h \in H_h, \quad a(u_h, v_h) = \ell(v_h) \quad \text{et} \quad \|u_h\|_H \leq \frac{\|\ell\|_{H'}}{\alpha}$$

et, dans tous les cas, u_h est l'**unique solution de** : $A_h u_h = b_h$ (A_h **SDP si a symétrique**).

Définition 3.3

A_h : **matrice de rigidité** et b_h **second membre** (force ext en méca).

Problème discret

Proposition

Le problème discret (FV_h) est équivalent à la résolution d'un système linéaire de taille $n_h = \dim(H_h)$.

De plus, si $a(u, v)$ est symétrique, alors la matrice est symétrique définie positive (SDP).

Problème discret

Proposition

Le problème discret (FV_h) est équivalent à la résolution d'un système linéaire de taille $n_h = \dim(H_h)$.

De plus, si $a(u, v)$ est symétrique, alors la matrice est symétrique définie positive (SDP).

Preuve : Soit $(\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_{n_h})$ une base de H_h . Le problème (FV_h) est équivalent à trouver

$$u_h = \sum_{j=1}^{n_h} U_j \phi_j \quad \text{tel que} \quad a(u_h, \phi_i) = \ell(\phi_i) \quad 1 \leq i \leq n_h.$$

Par linéarité, on obtient un système de la forme

$$\mathbb{A}U = L \text{ où } \mathbb{A}_{ij} = a(\phi_j, \phi_i) \text{ et } L_i = \ell(\phi_i)$$

et réciproquement.

Problème discret

Proposition

Le problème discret (FV_h) est équivalent à la résolution d'un système linéaire de taille $n_h = \dim(H_h)$.

De plus, si $a(u, v)$ est symétrique, alors la matrice est symétrique définie positive (SDP).

Preuve : Soit $(\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_{n_h})$ une base de H_h . Le problème (FV_h) est équivalent à trouver

$$u_h = \sum_{j=1}^{n_h} U_j \phi_j \quad \text{tel que} \quad a(u_h, \phi_i) = \ell(\phi_i) \quad 1 \leq i \leq n_h.$$

Par linéarité, on obtient un système de la forme

$$\mathbb{A}U = L \text{ où } \mathbb{A}_{ij} = a(\phi_j, \phi_i) \text{ et } L_i = \ell(\phi_i)$$

et réciproquement.

\mathbb{A} est la **matrice de rigidité** et L l'effort externe (ref. à la Mécanique)

Estimation d'erreur

Lemme de Céa

Sous les hypothèses du lemme, soient $u \in H$ la solution de (FV) et u_h la solution de (FV_h) . Alors on a

$$\|u - u_h\|_H \leq \frac{M}{\alpha} \inf_{v_h \in H_h} \|u - v_h\|_H.$$

Estimation d'erreur

Lemme de Céa

Sous les hypothèses du lemme, soient $u \in H$ la solution de (FV) et u_h la solution de (FV_h) . Alors on a

$$\|u - u_h\|_H \leq \frac{M}{\alpha} \inf_{v_h \in H_h} \|u - v_h\|_H.$$

Preuve :

$$\begin{aligned} a(u - u_h, u - u_h) &= a(u - u_h, u - v_h + v_h - u_h) \\ &= a(u - u_h, u - v_h) + a(u - u_h, v_h - u_h) \end{aligned}$$

donc par coercivité et continuité :

$$\alpha \|u - u_h\|_H^2 \leq a(u - u_h, u - u_h) = a(u - u_h, u - v_h) \leq M \|u - u_h\|_H \|u - v_h\|_H$$

Estimation d'erreur

Lemme de Céa

Sous les hyp du lemme, soient $u \in H$ la solution de (FV) et u_h la solution de (FV_h) . Alors on a

$$\|u - u_h\|_H \leq \frac{M}{\alpha} \inf_{v_h \in H_h} \|u - v_h\|_H.$$

Estimation d'erreur

Lemme de Céa

Sous les hyp du lemme, soient $u \in H$ la solution de (FV) et u_h la solution de (FV_h) . Alors on a

$$\|u - u_h\|_H \leq \frac{M}{\alpha} \inf_{v_h \in H_h} \|u - v_h\|_H.$$

Infimum atteint par Projection Orthogonale de u sur V_h par rapport à $(.,.)_H$

Estimation d'erreur

Lemme de Céa

Sous les hyp du lemme, soient $u \in H$ la solution de (FV) et u_h la solution de (FV_h) . Alors on a

$$\|u - u_h\|_H \leq \frac{M}{\alpha} \inf_{v_h \in H_h} \|u - v_h\|_H.$$

Infimum atteint par Projection Orthogonale de u sur V_h par rapport à $(.,.)_H$

Remarque 3.4

Si a symétrique, $a(\cdot, \cdot)$ associé à une norme équivalente à $\|\cdot\|_H$. Alors u_h **projection orthogonale** de u sur H_h et

$$\|u - u_h\|_H \leq \sqrt{\frac{M}{\alpha}} \inf_{v_h \in H_h} \|u - v_h\|.$$

Estimation d'erreur

Lemme de Céa

Sous les hyp du lemme, soient $u \in H$ la solution de (FV) et u_h la solution de (FV_h) . Alors on a

$$\|u - u_h\|_H \leq \frac{M}{\alpha} \inf_{v_h \in H_h} \|u - v_h\|_H.$$

Infimum atteint par Projection Orthogonale de u sur V_h par rapport à $(.,.)_H$

Remarque 3.4

Si a symétrique, $a(\cdot, \cdot)$ associé à une norme équivalente à $\|\cdot\|_H$. Alors u_h **projection orthogonale** de u sur H_h et

$$\|u - u_h\|_H \leq \sqrt{\frac{M}{\alpha}} \inf_{v_h \in H_h} \|u - v_h\|.$$

Erreur pas explicite + Pertinence de H_h ?

Estimation d'erreur

Lemme de Céa

Sous les hyp du lemme, soient $u \in H$ la solution de (FV) et u_h la solution de (FV_h) . Alors on a

$$\|u - u_h\|_H \leq \frac{M}{\alpha} \inf_{v_h \in H_h} \|u - v_h\|_H.$$

Infimum atteint par Projection Orthogonale de u sur V_h par rapport à $(.,.)_H$

Remarque 3.4

Si a symétrique, $a(\cdot, \cdot)$ associé à une norme équivalente à $\|\cdot\|_H$. Alors u_h **projection orthogonale** de u sur H_h et

$$\|u - u_h\|_H \leq \sqrt{\frac{M}{\alpha}} \inf_{v_h \in H_h} \|u - v_h\|.$$

Erreur pas explicite + Pertinence de H_h ?

Manque : notion de densité !

Interpolation

Définition-théorème

Soit (H_h) famille emboîtée ($H_h \subset H_k$ si $k < h$), de dim. resp. N_h telle que
 $N_h \xrightarrow[h \rightarrow 0]{} +\infty$.

Interpolation

Définition-théorème

Soit (H_h) famille emboîtée ($H_h \subset H_k$ si $k < h$), de dim. resp. N_h telle que $N_h \xrightarrow[h \rightarrow 0]{} +\infty$.

Sous les hyp. du lemme et l'existence de \mathcal{H} **dense dans** H et de

$$r_h : \mathcal{H} \longrightarrow H_h$$

application linéaire appelée **opérateur d'interpolation** tq

$$\forall v \in \mathcal{H}, \quad \lim_{h \rightarrow 0} \|v - r_h(v)\|_H = 0.$$

Interpolation

Définition-théorème

Soit (H_h) famille emboîtée ($H_h \subset H_k$ si $k < h$), de dim. resp. N_h telle que $N_h \xrightarrow[h \rightarrow 0]{} +\infty$.

Sous les hyp. du lemme et l'existence de \mathcal{H} **dense dans** H et de

$$r_h : \mathcal{H} \longrightarrow H_h$$

application linéaire appelée **opérateur d'interpolation** tq

$$\forall v \in \mathcal{H}, \quad \lim_{h \rightarrow 0} \|v - r_h(v)\|_H = 0.$$

Alors la méthode d'approximation interne **converge**, càd

$$\|u - u_h\|_H \xrightarrow[h \rightarrow 0]{} 0.$$

Interpolation

Définition-théorème

Soit (H_h) famille emboîtée ($H_h \subset H_k$ si $k < h$), de dim. resp. N_h telle que $N_h \xrightarrow[h \rightarrow 0]{} +\infty$.

Sous les hyp. du lemme et l'existence de \mathcal{H} **dense dans** H et de

$$r_h : \mathcal{H} \longrightarrow H_h$$

application linéaire appelée **opérateur d'interpolation** tq

$$\forall v \in \mathcal{H}, \quad \lim_{h \rightarrow 0} \|v - r_h(v)\|_H = 0.$$

Alors la méthode d'approximation interne **converge**, càd

$$\|u - u_h\|_H \xrightarrow[h \rightarrow 0]{} 0.$$

Si de plus $\|u - u_h\|_H = O(h^p)$, la méthode converge à l'ordre p .

Un outil utile : Unicité

- En **discret et linéaire**, l'**unicité** de la solution assure son existence

Un outil utile : Unicité

- En **discret et linéaire**, l'**unicité** de la solution assure son existence
- En **continu, linéaire**, pour certains problèmes, l'unicité assure l'existence aussi !

Un outil utile : Unicité

- En **discret et linéaire**, l'**unicité** de la solution assure son existence
- En **continu, linéaire**, pour certains problèmes, l'unicité assure l'existence aussi !
- En **continu, linéaire**, l'unicité assure qu'il suffit de calculer une solution analytique pour l'EDP

Un outil utile : Unicité

- En **discret et linéaire**, l'**unicité** de la solution assure son existence
- En **continu, linéaire**, pour certains problèmes, l'unicité assure l'existence aussi !
- En **continu, linéaire**, l'unicité assure qu'il suffit de calculer une solution analytique pour l'EDP
- En **continu ou discret, linéaire, mais surtout nonlinéaire**, la **non-unicité est génératrice de complexités**

Application

Construction raisonnée :

- (a) construire une « bonne » famille emboîtée de sev (H_h) de dimension finie,
- (b) construire analytiquement une base, formant H_h
- (c) résoudre le système linéaire sur H_h « pour tout h », ce qui donne (u_h) ,
- (d) $\lim_{h \rightarrow 0} u_h$ donne la solution du problème variationnel continu.

Application

Construction raisonnée :

- (a) construire une « bonne » famille emboîtée de sev (H_h) de dimension finie,
- (b) construire analytiquement une base, formant H_h
- (c) résoudre le système linéaire sur H_h « pour tout h », ce qui donne (u_h) ,
- (d) $\lim_{h \rightarrow 0} u_h$ donne la solution du problème variationnel continu.

Attention, **conditions** sur les espaces H_h :

Application

Construction raisonnée :

- (a) construire une « bonne » famille emboîtée de sev (H_h) de dimension finie,
- (b) construire analytiquement une base, formant H_h
- (c) résoudre le système linéaire sur H_h « pour tout h », ce qui donne (u_h) ,
- (d) $\lim_{h \rightarrow 0} u_h$ donne la solution du problème variationnel continu.

Attention, **conditions** sur les espaces H_h :

- (i) construction de r_h opérateur d'interpolation de \mathcal{H} dans H_h tq

$$\forall v \in \mathcal{H}, \quad \|v - r_h(v)\|_H \xrightarrow[h \rightarrow 0]{} 0$$

Par exemple : si H Sobolev, \mathcal{H} espace de fonctions très régulières.

Application

Construction raisonnée :

- (a) construire une « bonne » famille emboîtée de sev (H_h) de dimension finie,
- (b) construire analytiquement une base, formant H_h
- (c) résoudre le système linéaire sur H_h « pour tout h », ce qui donne (u_h) ,
- (d) $\lim_{h \rightarrow 0} u_h$ donne la solution du problème variationnel continu.

Attention, **conditions** sur les espaces H_h :

- (i) construction de r_h opérateur d'interpolation de \mathcal{H} dans H_h tq

$$\forall v \in \mathcal{H}, \quad \|v - r_h(v)\|_H \xrightarrow[h \rightarrow 0]{} 0$$

Par exemple : si H Sobolev, \mathcal{H} espace de fonctions très régulières.

- (ii) résolution des systèmes linéaires peu coûteuse (matrices creuses)

En pratique

- Méthode de Galerkin (voir TD) :
si H Hilbert séparable, il a une base hilbertienne $(e_k)_{k \in \mathbb{N}}$.
 $h = 1/n$, $H_h = \text{vect}\{e_k, k \in \{1, \dots, n\}\}$ et r_h : proj. orth. de H sur H_h
- Problèmes :
 - calcul d'une base hilbertienne pas évident
 - si la base hilbertienne est mal choisie, A_h pleine
 - $\text{cond}(A_h) \rightarrow \infty$
- Méthode des Éléments finis (MEF) :
espaces de fonctions continues polynomiales par morceaux : Idée de maillage du domaine Ω

1. Introduction

2. Rappels théoriques

3. Approximation Galerkin/interne-Partie théorique

4. Présentation à grosses mailles de la MEF

- Maillage
- Interpolation Lagrangienne d'un sinus

5. Brève histoire de la Méthode des Eléments Finis

6. Exemples

7. Résolution par Eléments Finis

Définition 4.1

Un maillage est la discréétisation (spatiale) d'un milieu continu, ou, aussi, une modélisation géométrique d'un domaine par des éléments proportionnés finis et bien définis.

But : calcul d'un nombre fini de valeurs par projection

- qualitatif : simplification d'un système par un modèle
- quantitatif : simulations numériques et/ou visualisation

Maillages en 1D

- en 1D : $(x_j)_{j \in \{0, \dots, J+1\}}$ suite croissante ; $x_0 = 0$, $x_{J+1} = 1$

$$h = \max_{j \in \{0, \dots, J\}} (x_{j+1} - x_j)$$



- Attention : h et J n'ont pas la même dimension !

Maillages en 1D

- en 1D : $(x_j)_{j \in \{0, \dots, J+1\}}$ suite croissante ; $x_0 = 0$, $x_{J+1} = 1$

$$h = \max_{j \in \{0, \dots, J\}} (x_{j+1} - x_j)$$



- Maillage uniforme : $h = 1/(J + 1)$ et $x_j = jh$

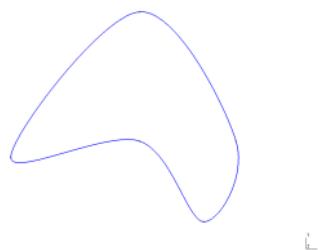


- Attention : h et J n'ont pas la même dimension !

- 1.Introduction
- 2.Rappels théoriques
- 3.Approximation Galerkin/interne-Partie théorique
- 4.Présentation à grosses mailles de la MEF**
- 5.Brève histoire de la Méthode des Eléments Finis
- 6.Exemples
- 7.Résolution par Eléments Finis

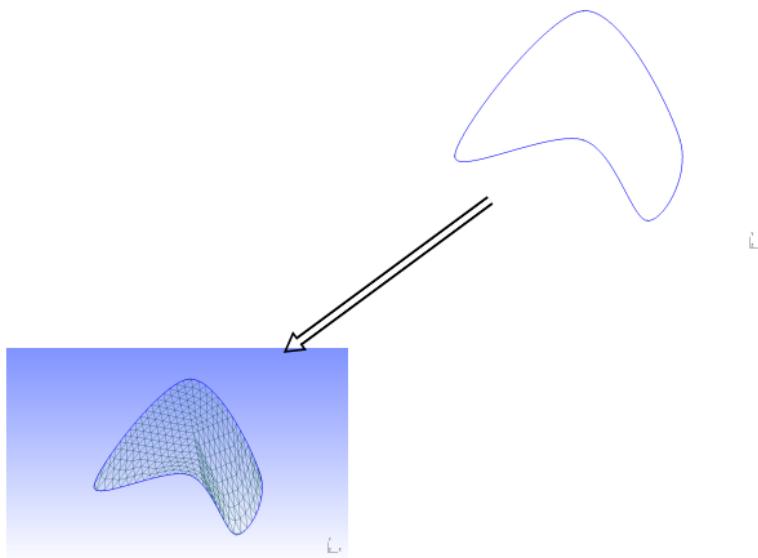
Maillage
Interpolation Lagrangienne d'un sinus

Maillages en 2D



1.

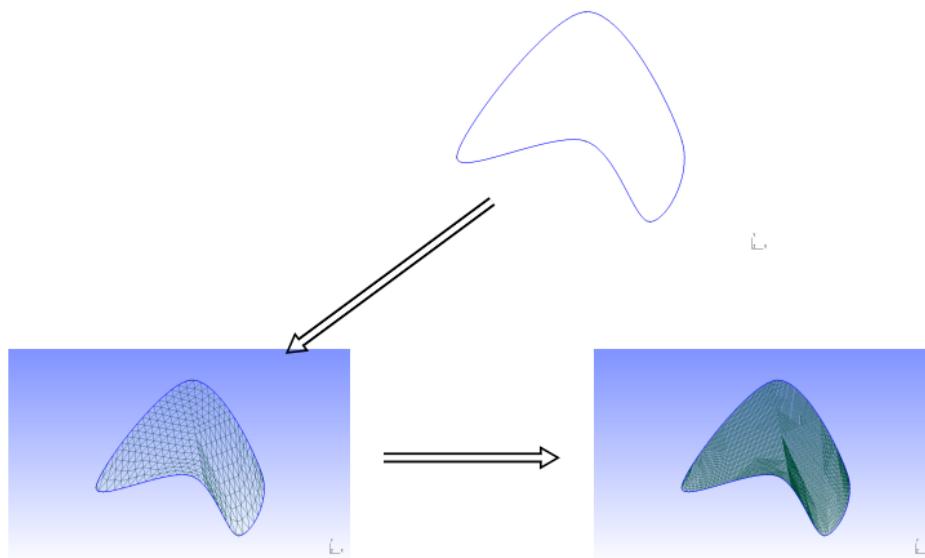
Maillages en 2D



- 1.Introduction
- 2.Rappels théoriques
- 3.Approximation Galerkin/interne-Partie théorique
- 4.Présentation à grosses mailles de la MEF**
- 5.Brève histoire de la Méthode des Eléments Finis
- 6.Exemples
- 7.Résolution par Eléments Finis

Maillage
Interpolation Lagrangienne d'un sinus

Maillages en 2D



- 1.Introduction
- 2.Rappels théoriques
- 3.Approximation Galerkin/interne-Partie théorique
- 4.Présentation à grosses mailles de la MEF
- 5.Brève histoire de la Méthode des Eléments Finis
- 6.Exemples
- 7.Résolution par Eléments Finis

Maillage
Interpolation Lagrangienne d'un sinus

Exemple de maillage FreeFem++

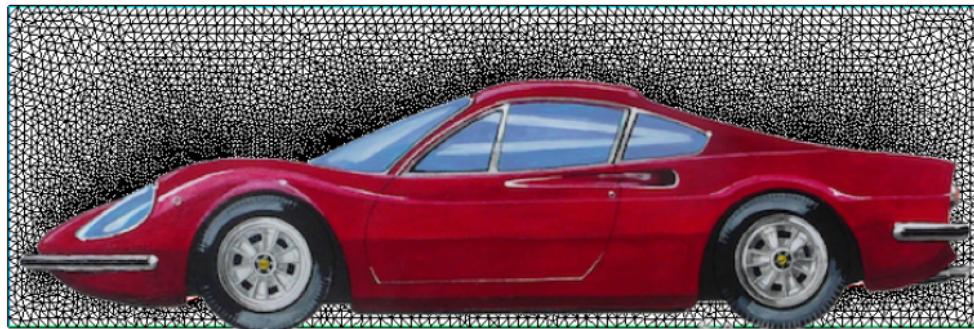
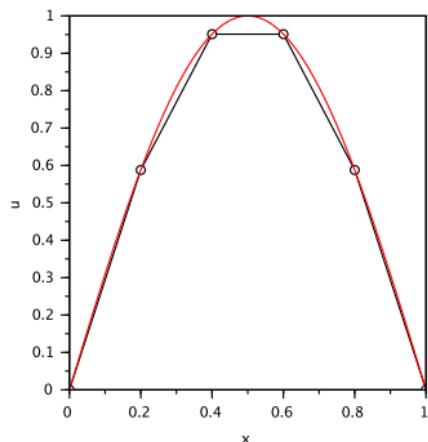
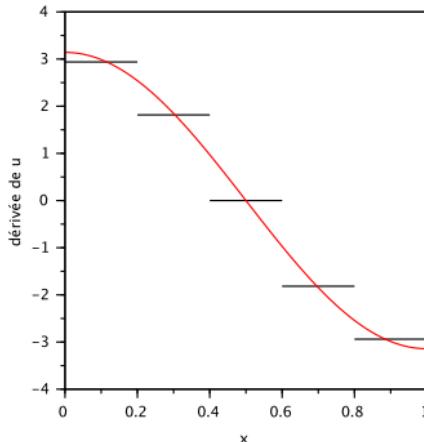


Figure: Maillage du domaine extérieur

Interpolation de $u : x \mapsto \sin(\pi x)$ sur une grille uniforme



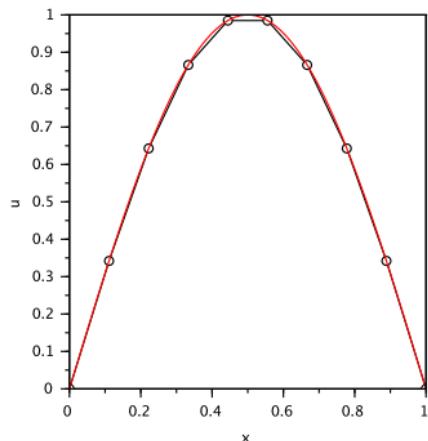
u (rouge) et u_{approx}



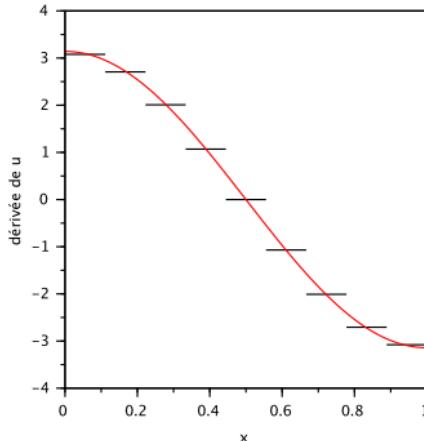
u' (rouge) et u'_{approx}

$$J = 4 \text{ et } h = 1/5$$

Interpolation de $u : x \mapsto \sin(\pi x)$ sur une grille uniforme



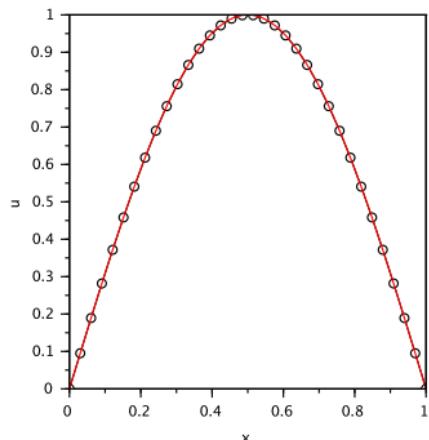
u (rouge) et u_{approx}



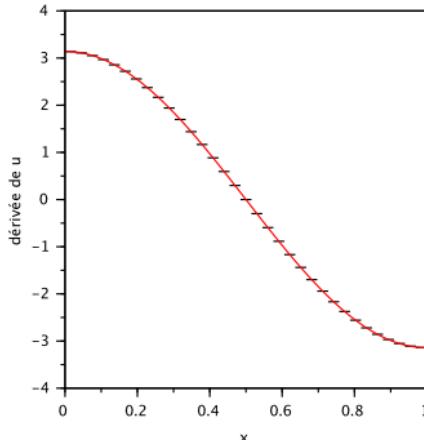
u' (rouge) et u'_{approx}

$$J = 8 \text{ et } h = 1/9$$

Interpolation de $u : x \mapsto \sin(\pi x)$ sur une grille uniforme



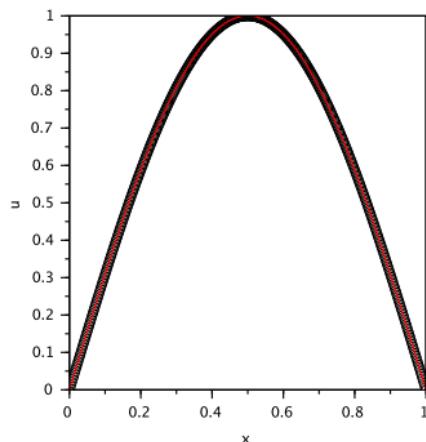
u (rouge) et u_{approx}



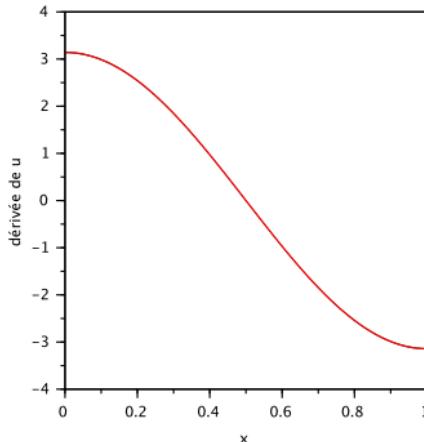
u' (rouge) et u'_{approx}

$$J = 32 \text{ et } h = 1/33$$

Interpolation de $u : x \mapsto \sin(\pi x)$ sur une grille uniforme



u (rouge) et u_{approx}



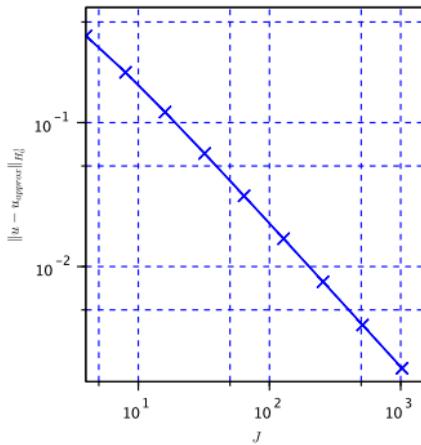
u' (rouge) et u'_{approx}

$$J = 512 \text{ et } h = 1/513$$

- 1.Introduction
- 2.Rappels théoriques
- 3.Approximation Galerkin/interne-Partie théorique
- 4.Présentation à grosses mailles de la MEF
- 5.Brève histoire de la Méthode des Éléments Finis
- 6.Exemples
- 7.Résolution par Eléments Finis

Maillage
Interpolation Lagrangienne d'un sinus

Interpolation de $u : x \mapsto \sin(\pi x)$ sur une grille uniforme

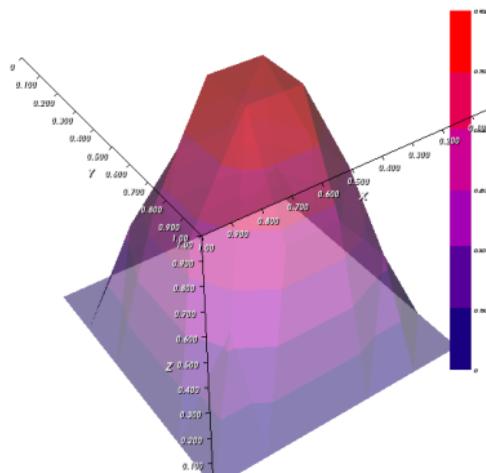
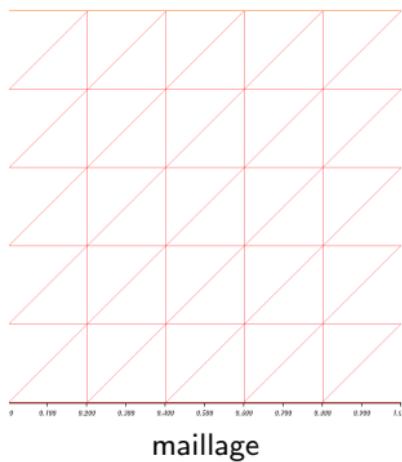


Erreur logarithmique $\|u - u_{approx}\|_{H_0^1}$

- 1.Introduction
- 2.Rappels théoriques
- 3.Approximation Galerkin/interne-Partie théorique
- 4.Présentation à grosses mailles de la MEF**
- 5.Brève histoire de la Méthode des Eléments Finis
- 6.Exemples
- 7.Résolution par Eléments Finis

Maillage
Interpolation Lagrangienne d'un sinus

Interpolation de $u : (x, y) \mapsto \sin(\pi x) \sin(\pi y)$

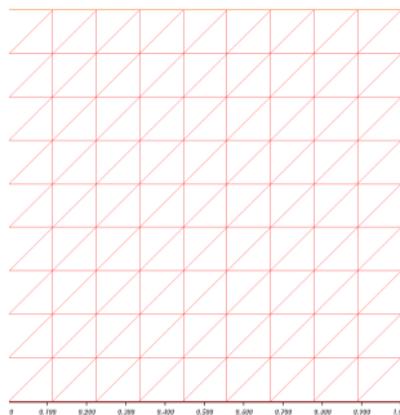


$J = 4 : 16$ degrés de liberté

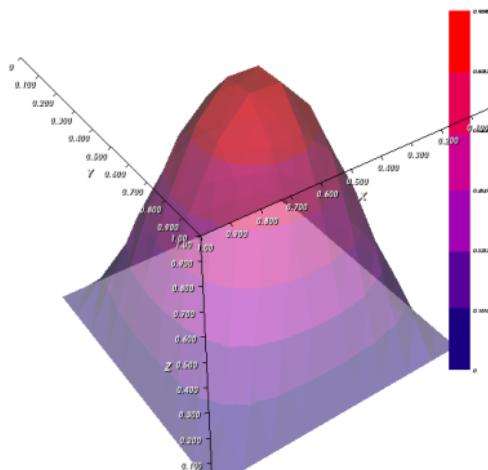
- 1.Introduction
- 2.Rappels théoriques
- 3.Approximation Galerkin/interne-Partie théorique
- 4.Présentation à grosses mailles de la MEF**
- 5.Brève histoire de la Méthode des Eléments Finis
- 6.Exemples
- 7.Résolution par Eléments Finis

Maillage
Interpolation Lagrangienne d'un sinus

Interpolation de $u : (x, y) \mapsto \sin(\pi x) \sin(\pi y)$



maillage



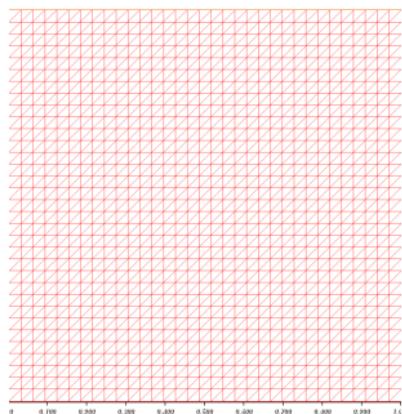
u

$J = 8 : 64$ degrés de liberté

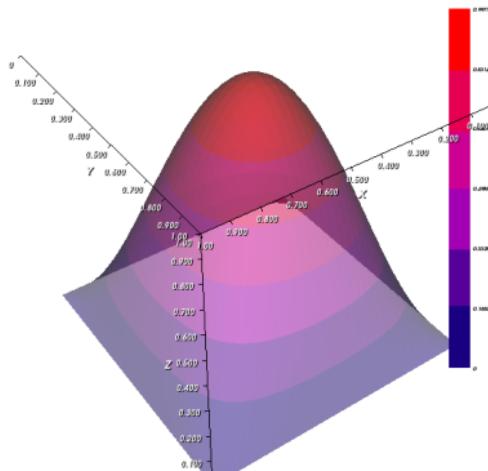
- 1.Introduction
- 2.Rappels théoriques
- 3.Approximation Galerkin/interne-Partie théorique
- 4.Présentation à grosses mailles de la MEF**
- 5.Brève histoire de la Méthode des Eléments Finis
- 6.Exemples
- 7.Résolution par Eléments Finis

Maillage
Interpolation Lagrangienne d'un sinus

Interpolation de $u : (x, y) \mapsto \sin(\pi x) \sin(\pi y)$



maillage



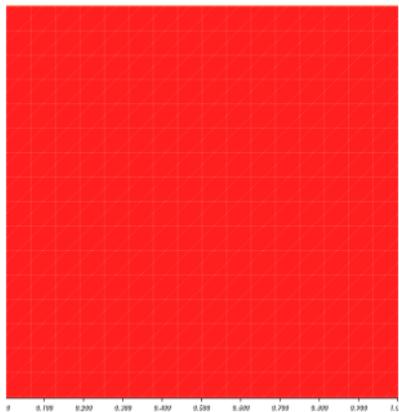
u

$$J = 32 : 1024 \text{ degrés de liberté}$$

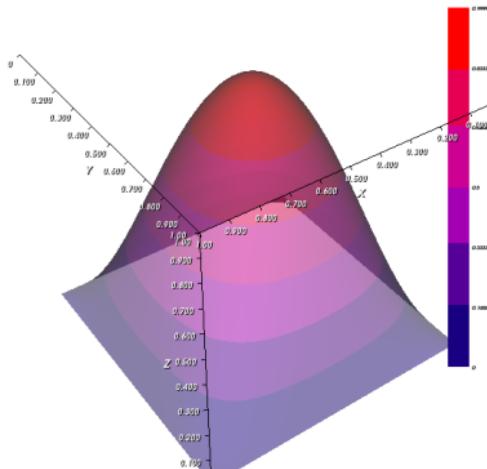
- 1.Introduction
- 2.Rappels théoriques
- 3.Approximation Galerkin/interne-Partie théorique
- 4.Présentation à grosses mailles de la MEF**
- 5.Brève histoire de la Méthode des Eléments Finis
- 6.Exemples
- 7.Résolution par Eléments Finis

Maillage
Interpolation Lagrangienne d'un sinus

Interpolation de $u : (x, y) \mapsto \sin(\pi x) \sin(\pi y)$



maillage



u

$J = 512 : 262144$ degrés de liberté

1. Introduction

2. Rappels théoriques

3. Approximation Galerkin/interne-Partie théorique

4. Présentation à grosses mailles de la MEF

5. Brève histoire de la Méthode des Eléments Finis

6. Exemples

7. Résolution par Eléments Finis

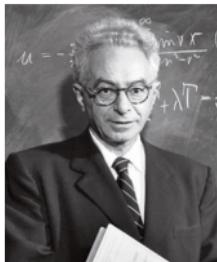
- 1.Introduction
- 2.Rappels théoriques
- 3.Approximation Galerkin/interne-Partie théorique
- 4.Présentation à grosses mailles de la MEF
- 5.Brève histoire de la Méthode des Eléments Finis**
- 6.Exemples
- 7.Résolution par Eléments Finis

Naissance de la MEF

Premières idées développées en **Analyse des Structures** (réponses des structures physiques et de leurs composants aux chargements) : ...**Léonard de Vinci**...**Maxwell, Mohr, Castiglano**,...

- 1.Introduction
- 2.Rappels théoriques
- 3.Approximation Galerkin/interne-Partie théorique
- 4.Présentation à grosses mailles de la MEF
- 5.Brève histoire de la Méthode des Éléments Finis
- 6.Exemples
- 7.Résolution par Eléments Finis

Naissance de la MEF

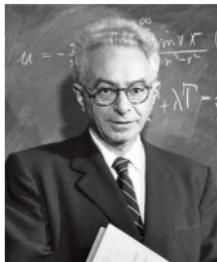


Richard Courant (1888-1972)

R. Courant, Variational methods for the solution of problems of equilibrium and vibration, Bull. Amer. Math. Soc. 49 (1943), 1-23, MR 4, 200.

- 1.Introduction
- 2.Rappels théoriques
- 3.Approximation Galerkin/interne-Partie théorique
- 4.Présentation à grosses mailles de la MEF
- 5.Brève histoire de la Méthode des Éléments Finis
- 6.Exemples
- 7.Résolution par Eléments Finis

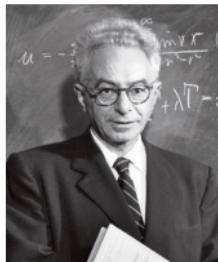
Naissance de la MEF



Richard Courant (1888-1972)
Histoire à méditer...

R. Courant, Variational methods for the solution of problems of equilibrium and vibration, Bull. Amer. Math. Soc. 49 (1943), 1-23, MR 4, 200.

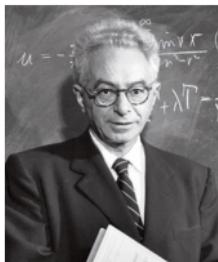
Naissance de la MEF



Richard Courant (1888-1972)

- (Motivation première) Modélisation : meilleure représentation des conditions essentielles (Dirichlet)
- **Approx Num (motiv secondaire) : MDF inappropriée sur domaines irréguliers !**
- **Idée fondamentale : Approximation par polynômes P_1 par maille d'un maillage triangulaire de Ω + Continuité aux interfaces. Soit régularité \mathcal{H}^1**
- **Méthode plus féconde que MDF en 2D**

Naissance de la MEF



Richard Courant (1888-1972)



Alexander Hrennikoff (1896-1984)

- Hrennikoff, A., "Solution of Problems in Elasticity by **the Framework Method**", 1941
- Mc Henry, **A Lattice Analogy** for the Solution of Plain Strain Problems", 1943

- 1.Introduction
- 2.Rappels théoriques
- 3.Approximation Galerkin/interne-Partie théorique
- 4.Présentation à grosses mailles de la MEF
- 5.Brève histoire de la Méthode des Eléments Finis
- 6.Exemples
- 7.Résolution par Eléments Finis

10 ans plus tard : Re-naissance de la MEF

Oubli des Travaux de Courant : G. Polya, Sur une interprétation de la méthode des différences finies qui peut fournir des bornes supérieures ou inférieures, CRAS, 1952 ([travaux similaires à ceux de R. Courant...sans le citer !](#))

- 1.Introduction
- 2.Rappels théoriques
- 3.Approximation Galerkin/interne-Partie théorique
- 4.Présentation à grosses mailles de la MEF
- 5.Brève histoire de la Méthode des Eléments Finis
- 6.Exemples
- 7.Résolution par Eléments Finis

10 ans plus tard : Re-naissance de la MEF



Ray William Klough (1920-2016)

1952 : Travail dans Unité de
Dynamique Structurale, (Dir :
Turner), chez Boeing Airplane
Company

10 ans plus tard : Re-naissance de la MEF



Ray William Clough (1920-2016)

- 1943-Master-Degree à MIT
- Turner, M., R. W. Clough et al., «Stiffness and Deflection Analysis of Complex Structures », 1956
- Clough, R. W., « **The Finite Element Method** in Plane Stress Analysis », Proc. Conf. On Electronic Computation, 1960.

10 ans plus tard : Re-naissance de la MEF



Ray William Klough (1920-2016)

- **Un contexte favorable porteur**
- **Période chez (Boeing)**
- **Analyse des contraintes sur des ailes d'avions**
- **Avénement des premiers ordinateurs IBM**
- **De + en + de puissance de calculs (dans secteurs divers),
Res de + en + convaincants par comparaison à l'expérience**
- **Nouvelle Ere d'Aide à la Conception par la MEF**

1. Introduction

2. Rappels théoriques

3. Approximation Galerkin/interne-Partie théorique

4. Présentation à grosses mailles de la MEF

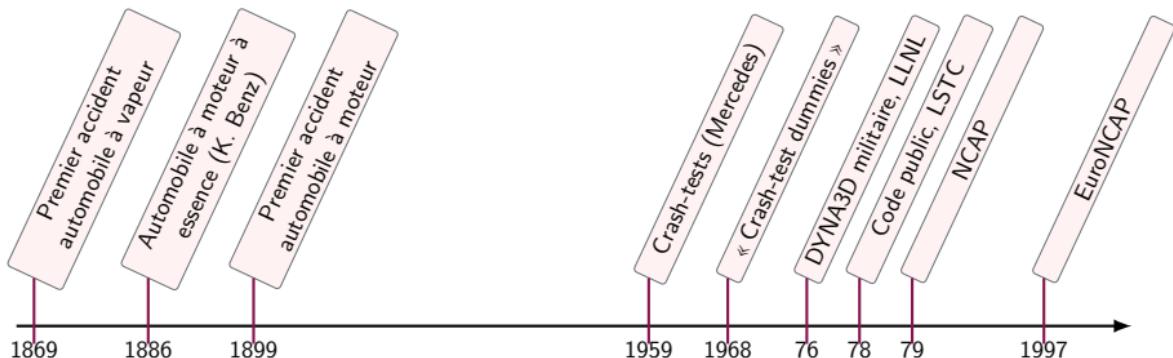
5. Brève histoire de la Méthode des Eléments Finis

6. Exemples

7. Résolution par Eléments Finis

- 1.Introduction
- 2.Rappels théoriques
- 3.Approximation Galerkin/interne-Partie théorique
- 4.Présentation à grosses mailles de la MEF
- 5.Brève histoire de la Méthode des Éléments Finis
- 6.Exemples
- 7.Résolution par Eléments Finis

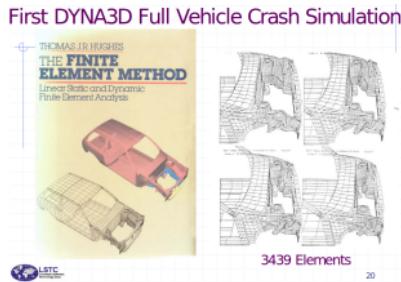
Développement du crash-test



1. Introduction
2. Rappels théoriques
3. Approximation Galerkin/interne-Partie théorique
4. Présentation à grosses mailles de la MEF
5. Brève histoire de la Méthode des Eléments Finis
6. Exemples
7. Résolution par Eléments Finis

Utilisation des éléments finis : DYN3D et LS-DYNA

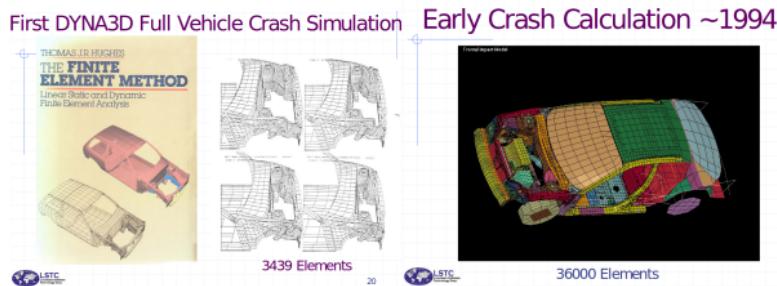
Source : D. Benson, Dept. of Mech. & Aero. Eng., UCSD



1. Introduction
2. Rappels théoriques
3. Approximation Galerkin/interne-Partie théorique
4. Présentation à grosses mailles de la MEF
5. Brève histoire de la Méthode des Eléments Finis
6. Exemples
7. Résolution par Eléments Finis

Utilisation des éléments finis : DYN3D et LS-DYNA

Source : D. Benson, Dept. of Mech. & Aero. Eng., UCSD



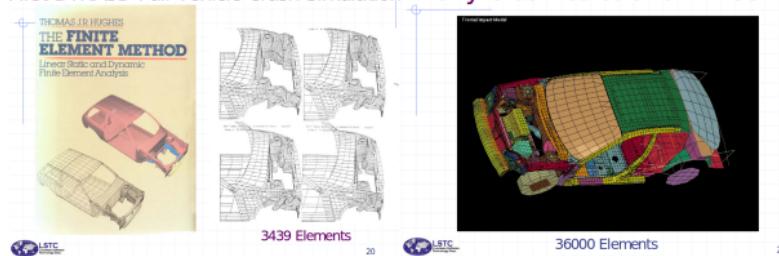
O.C. Zienkiewicz, 1921-2009, Acteur Eléments Finis de 1er plan, 1er ouvrage MEF...

- 1.Introduction
- 2.Rappels théoriques
- 3.Approximation Galerkin/interne-Partie théorique
- 4.Présentation à grosses mailles de la MEF
- 5.Brève histoire de la Méthode des Eléments Finis
- 6.Exemples
- 7.Résolution par Eléments Finis

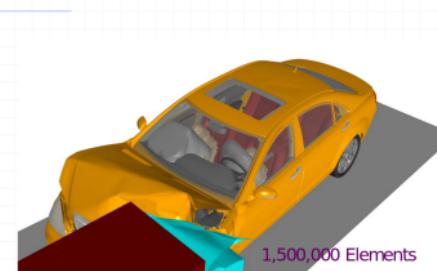
Utilisation des éléments finis : DYNA3D et LS-DYNA

Source : D. Benson, Dept. of Mech. & Aero. Eng., UCSD

First DYNA3D Full Vehicle Crash Simulation Early Crash Calculation ~1994



Current Crash Calculation 2005



1. Introduction

2. Rappels théoriques

3. Approximation Galerkin/interne-Partie théorique

4. Présentation à grosses mailles de la MEF

5. Brève histoire de la Méthode des Eléments Finis

6. Exemples

7. Résolution par Eléments Finis

- Approximation interne
- Méthode numérique

Application

Raisonnement :

- (i) trouver une « bonne » famille emboîtée de sev (H_h) de dimension finie,
- (ii) résoudre le système linéaire sur H_h « pour tout $h > 0$ », ce qui donne (u_h) ,
- (iii) $\lim_{h \rightarrow 0} u_h$ donne la solution du problème variationnel continu.

Attention, **conditions** sur les espaces H_h :

- (a) construction de r_h opérateur d'interpolation de \mathcal{H} dans H_h tq

$$\forall v \in \mathcal{H}, \quad \|v - r_h(v)\|_H \xrightarrow[h \rightarrow 0]{} 0$$

Par ex. si H Sobolev, \mathcal{H} espace de fonctions très régulières.

- (b) résolution du système linéaire peu coûteuse (matrices creuses)

En pratique

- Méthode de Galerkin (voir TD) :
si H Hilbert séparable, il a une base hilbertienne $(e_k)_{k \in \mathbb{N}}$.

$h = 1/n$, $H_h = \text{vect}\{e_k, k \in \{1, \dots, n\}\}$ et r_h : proj. orth. de H sur H_h

Problèmes :

- calcul d'une base hilbertienne pas évident
- si la base hilbertienne est mal choisie, A_h pleine
- $\text{cond}(A_h) \rightarrow \infty$

- **Éléments finis (FEM)**

Généralités

- Maillage : cellules (intervalles, surfaces, volumes), sommets ou nœuds

Généralités

- Maillage : cellules (intervalles, surfaces, volumes), sommets ou nœuds
- Fonctions sur les cellules : (**autant que faire se peut :**)

$$\mathbb{P}_q := \text{Vect} \left(X_1^{\alpha_1} \dots X_d^{\alpha_d} : \sum_{k=1}^d \alpha_k \leq q \right)$$

Généralités

- Maillage : cellules (intervalles, surfaces, volumes), sommets ou nœuds
- Fonctions sur les cellules : (**autant que faire se peut :**)

$$\mathbb{P}_q := \text{Vect} \left(X_1^{\alpha_1} \dots X_d^{\alpha_d} : \sum_{k=1}^d \alpha_k \leq q \right)$$

- En 1D

- Détermination des fonctions aux sommets : treillis

Généralités

- Maillage : cellules (intervalles, surfaces, volumes), sommets ou nœuds
- Fonctions sur les cellules : (**autant que faire se peut :**)

$$\mathbb{P}_q := \text{Vect} \left(X_1^{\alpha_1} \dots X_d^{\alpha_d} : \sum_{k=1}^d \alpha_k \leq q \right)$$

- En 2D
- Détermination des fonctions aux sommets : treillis

Généralités

- Maillage : cellules (intervalles, surfaces, volumes), sommets ou nœuds
- Fonctions sur les cellules : (**autant que faire se peut :**)

$$\mathbb{P}_q := \text{Vect} \left(X_1^{\alpha_1} \dots X_d^{\alpha_d} : \sum_{k=1}^d \alpha_k \leq q \right)$$

- En 1D
- En 2D

- Détermination des fonctions aux sommets : treillis

Éléments finis en dimension 1

Maillage :

$$0 = x_0 \xrightarrow{} x_1 \xrightarrow{} x_2 \xrightarrow{} \dots \xrightarrow{} x_{J+1} = 1$$

Définition 7.20

Eléments finis \mathbb{P}_1 : approximation sur l'espace de dimension finie des fonctions continues et affines sur chaque maille :

$$H_h := \left\{ v \in C^0([0, 1]) : v|_{[x_j, x_{j+1}]} \in \mathbb{P}_1, j \in \{0, \dots, J\} \right\}$$

Éléments finis en dimension 1

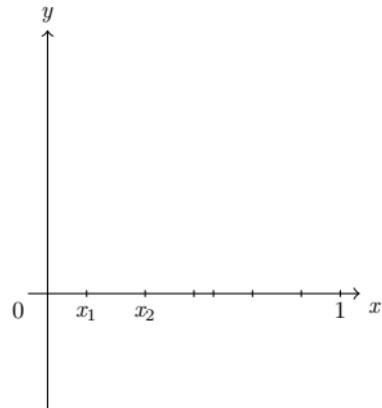
Maillage :

$$0 = x_0 \xrightarrow{} x_1 \xrightarrow{} x_2 \xrightarrow{} \dots \xrightarrow{} x_{J+1} = 1$$

Définition 7.20

Eléments finis \mathbb{P}_1 : approximation sur l'espace de dimension finie des fonctions continues et affines sur chaque maille :

$$H_h := \left\{ v \in C^0([0, 1]) : v|_{[x_j, x_{j+1}]} \in \mathbb{P}_1, j \in \{0, \dots, J\} \right\}$$



Éléments finis en dimension 1

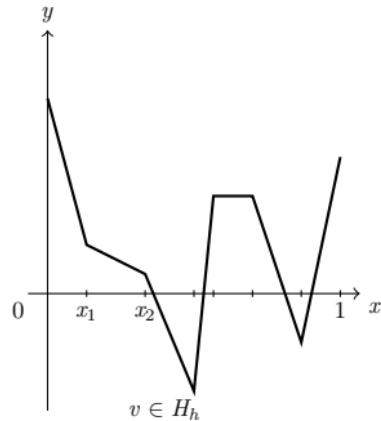
Maillage :

$$0 = x_0 \quad x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_{J+1} = 1$$

Définition 7.20

Eléments finis \mathbb{P}_1 : approximation sur l'espace de dimension finie des fonctions continues et affines sur chaque maille :

$$H_h := \left\{ v \in C^0([0, 1]) : v|_{[x_j, x_{j+1}]} \in \mathbb{P}_1, j \in \{0, \dots, J\} \right\}$$



Éléments finis en dimension 1

Maillage :

$$0 = x_0 \quad x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_{J+1} = 1$$

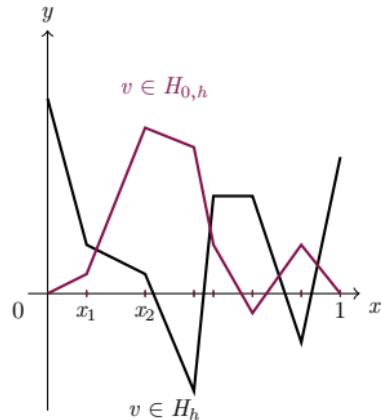
Définition 7.20

Éléments finis \mathbb{P}_1 : approximation sur l'espace de dimension finie des fonctions continues et affines sur chaque maille :

$$H_h := \left\{ v \in C^0([0, 1]) : v|_{[x_j, x_{j+1}]} \in \mathbb{P}_1, \quad j \in \{0, \dots, J\} \right\}$$

et sur son sous-espace

$$H_{0,h} := \{v \in H_h, \quad v(0) = v(1) = 0\}.$$



Éléments finis en dimension 1

Maillage :

$$0 = x_0 \xrightarrow{} x_1 \xrightarrow{} x_2 \xrightarrow{} \dots \xrightarrow{} x_{J+1} = 1$$

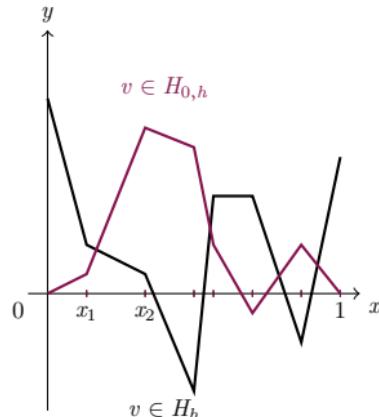
Définition 7.20

Eléments finis \mathbb{P}_1 : approximation sur l'espace de dimension finie des fonctions continues et affines sur chaque maille :

$$H_h := \left\{ v \in C^0([0, 1]) : v|_{[x_j, x_{j+1}]} \in \mathbb{P}_1, \quad j \in \{0, \dots, J\} \right\}$$

et sur son sous-espace

$$H_{0,h} := \{v \in H_h, \quad v(0) = v(1) = 0\}.$$



$$\text{EF} = (E_j, \mathcal{P}_j, \Sigma_j)$$

$$\begin{aligned} E_j &= [X_j^1 = x_j, X_j^2 = x_{j+1}], \\ \mathcal{P}_j &= \mathbb{P}_1(E_j), \\ \Sigma_j &= \{\varphi(X_j^1), \varphi(X_j^2)\} \end{aligned}$$

- 1. Introduction
- 2. Rappels théoriques
- 3. Approximation Galerkin/interne-Partie théorique
- 4. Présentation à grosses mailles de la MEF
- 5. Brève histoire de la Méthode des Eléments Finis
- 6. Exemples
- 7. Résolution par Eléments Finis

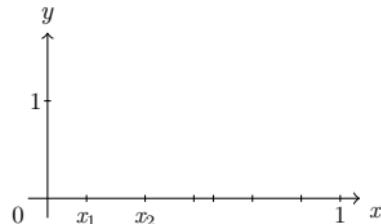
Approximation interne
Méthode numérique

Dimension et base

Lemme 7.21

H_h sous-espace vectoriel de $H^1(0, 1)$ de dimension $J + 2$.

$H_{0,h}$ sous-espace vectoriel de $H_0^1(0, 1)$ de dimension J .

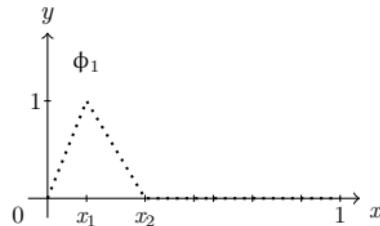


Dimension et base

Lemme 7.21

H_h sous-espace vectoriel de $H^1(0,1)$ de dimension $J + 2$.

$H_{0,h}$ sous-espace vectoriel de $H_0^1(0,1)$ de dimension J .

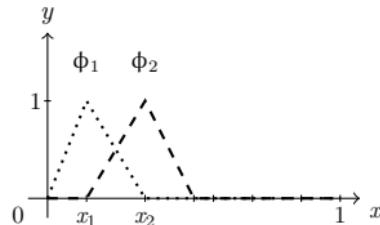


Dimension et base

Lemme 7.21

H_h sous-espace vectoriel de $H^1(0,1)$ de dimension $J + 2$.

$H_{0,h}$ sous-espace vectoriel de $H_0^1(0,1)$ de dimension J .



- 1. Introduction
- 2. Rappels théoriques
- 3. Approximation Galerkin/interne-Partie théorique
- 4. Présentation à grosses mailles de la MEF
- 5. Brève histoire de la Méthode des Eléments Finis
- 6. Exemples
- 7. Résolution par Eléments Finis

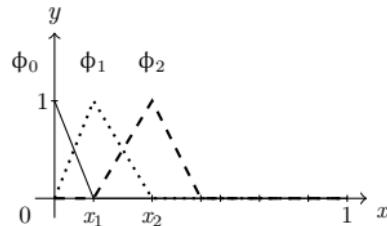
Approximation interne
Méthode numérique

Dimension et base

Lemme 7.21

H_h sous-espace vectoriel de $H^1(0, 1)$ de dimension $J + 2$.

$H_{0,h}$ sous-espace vectoriel de $H_0^1(0, 1)$ de dimension J .



- 1.Introduction
- 2.Rappels théoriques
- 3.Approximation Galerkin/interne-Partie théorique
- 4.Présentation à grosses mailles de la MEF
- 5.Brève histoire de la Méthode des Eléments Finis
- 6.Exemples
- 7.Résolution par Eléments Finis

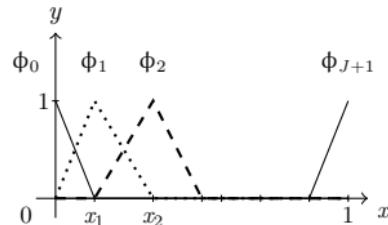
Approximation interne
Méthode numérique

Dimension et base

Lemme 7.21

H_h sous-espace vectoriel de $H^1(0, 1)$ de dimension $J + 2$.

$H_{0,h}$ sous-espace vectoriel de $H_0^1(0, 1)$ de dimension J .



Dimension et base

Lemme 7.21

H_h sous-espace vectoriel de $H^1(0, 1)$ de dimension $J + 2$.

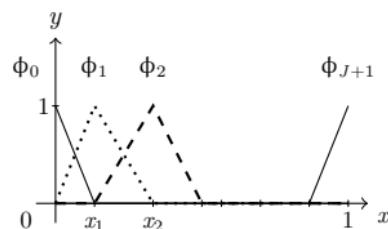
$H_{0,h}$ sous-espace vectoriel de $H_0^1(0, 1)$ de dimension J .

Soit la famille $(\phi_j)_{j \in \{0, \dots, J+1\}}$ tq

$\forall j \in \{0, \dots, J+1\}, \phi_j \in H_h$

et

$\forall i \in \{0, \dots, J+1\}, \phi_j(x_i) = \delta_{ij}.$



Dimension et base

Lemme 7.21

H_h sous-espace vectoriel de $H^1(0, 1)$ de dimension $J + 2$.

$H_{0,h}$ sous-espace vectoriel de $H_0^1(0, 1)$ de dimension J .

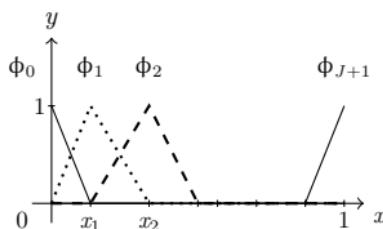
Soit la famille $(\phi_j)_{j \in \{0, \dots, J+1\}}$ tq

$\forall j \in \{0, \dots, J+1\}, \phi_j \in H_h$

et

$\forall i \in \{0, \dots, J+1\}, \phi_j(x_i) = \delta_{ij}.$

Propriété importante, parfois dite
d'orthogonalité (au sens des
Eléments Finis)



Lemme 7.22

La famille $(\phi_j)_{j \in \{0, \dots, J+1\}}$ (resp. $(\phi_j)_{j \in \{1, \dots, J\}}$) est une base de H_h (resp. $H_{0,h}$).

En pratique

Sur le problème de Dirichlet : on suppose a et ℓ données

- (a) Maillage : $(x_j)_{j \in \{0, \dots, J+1\}}$, $J \geq 1$, $h = \max_{j \in \{0, \dots, J\}} (x_{j+1} - x_j)$.
- (b) $H_{0,h} \subset H_0^1(0,1)$, de base $(\phi_j)_{j \in \{1, \dots, J\}}$.
- (c) Approximation variationnelle :

$$\text{trouver } u_h \in H_{0,h} \text{ tq} \quad \forall v_h \in H_{0,h}, \quad \int_{]0,1[} u'_h v'_h = \int_{]0,1[} f v_h.$$

- (d) Approximation variationnelle sur la base $(\phi_j)_{j \in \{1, \dots, J\}}$:
- (e) Système linéaire de matrice de rigidité $A_h \in \mathcal{M}_J(\mathbb{R})$ et de vecteur de force $b_h \in \mathbb{R}^J$

$$\forall (i,j) \in \{1, \dots, J\}^2, \quad [A_h](i,j) = \int_{]0,1[} \phi'_i \phi'_j, \quad \text{et} \quad [b_h](i) = \int_{]0,1[} f \phi_i$$

Calcul du second membre

Hypothèse : f fonction régulière

- formule des rectangles à gauche

$$\int_{x_j}^{x_{j+1}} f \Phi = (x_{j+1} - x_j) f(x_j) \Phi(x_j) + O((x_{j+1} - x_j)^2)$$

- formule des rectangles à droite

$$\int_{x_j}^{x_{j+1}} f \Phi = (x_{j+1} - x_j) f(x_{j+1}) \Phi(x_{j+1}) + O((x_{j+1} - x_j)^2)$$

Calcul du second membre

Hypothèse : f fonction régulière

- formule des rectangles à gauche

$$\int_{x_j}^{x_{j+1}} f \phi = (x_{j+1} - x_j) f(x_j) \phi(x_j) + O((x_{j+1} - x_j)^2)$$

- formule des rectangles à droite

$$\int_{x_j}^{x_{j+1}} f \phi = (x_{j+1} - x_j) f(x_{j+1}) \phi(x_{j+1}) + O((x_{j+1} - x_j)^2)$$

- formule du point-milieu

$$\int_{x_j}^{x_{j+1}} f \phi = (x_{j+1} - x_j) f\left(\frac{x_j + x_{j+1}}{2}\right) \phi\left(\frac{x_j + x_{j+1}}{2}\right) + O((x_{j+1} - x_j)^3)$$

- formule des trapèzes

$$\int_{x_j}^{x_{j+1}} f \phi = (x_{j+1} - x_j) \frac{f(x_j) \phi(x_j) + f(x_{j+1}) \phi(x_{j+1})}{2} + O((x_{j+1} - x_j)^3)$$

Calcul du second membre

Hypothèse : f fonction régulière

- formule des rectangles à gauche

$$\int_{x_j}^{x_{j+1}} f \phi = (x_{j+1} - x_j) f(x_j) \phi(x_j) + O((x_{j+1} - x_j)^2)$$

- formule des rectangles à droite

$$\int_{x_j}^{x_{j+1}} f \phi = (x_{j+1} - x_j) f(x_{j+1}) \phi(x_{j+1}) + O((x_{j+1} - x_j)^2)$$

- formule du point-milieu

$$\int_{x_j}^{x_{j+1}} f \phi = (x_{j+1} - x_j) f\left(\frac{x_j + x_{j+1}}{2}\right) \phi\left(\frac{x_j + x_{j+1}}{2}\right) + O((x_{j+1} - x_j)^3)$$

- formule des trapèzes

$$\int_{x_j}^{x_{j+1}} f \phi = (x_{j+1} - x_j) \frac{f(x_j) \phi(x_j) + f(x_{j+1}) \phi(x_{j+1})}{2} + O((x_{j+1} - x_j)^3)$$

- formule de Simpson

$$\int_{x_j}^{x_{j+1}} f \phi = (x_{j+1} - x_j) \frac{f(x_j) \phi(x_j) + 4f\left(\frac{x_j + x_{j+1}}{2}\right) \phi\left(\frac{x_j + x_{j+1}}{2}\right) + f(x_{j+1}) \phi(x_{j+1})}{6} + O((x_{j+1} - x_j)^5)$$

Convergence et estimation d'erreur

Définition 7.23

On appelle *opérateur d'interpolation* \mathbb{P}_1 l'application linéaire $r_h : H^1(0, 1) \rightarrow H_h$ définie par

$$r_h : v \longmapsto \sum_{j=0}^{J+1} v(x_j) \phi_j.$$

Théorème 7.24

Soient $u \in H_0^1(0, 1)$ et $u_h \in H_{0,h}$ solutions de (FV) et (FV_h) . Alors la méthode des éléments finis \mathbb{P}_1 converge, càd

$$\|u - u_h\|_{H^1} \xrightarrow[h \rightarrow 0]{} 0.$$

De plus, il existe une constante $C > 0$ telle que, si $u \in H^2(0, 1)$,

$$\|u - u_h\|_{H^1} \leq C h \|f\|_{L^2}.$$

Éléments de démonstration

Lemme 7.25

Il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\begin{aligned}\forall v \in H^2(0,1), \quad \|v - r_h v\|_{L^2} &\leqslant Ch^2 \|v''\|_{L^2}, \\ \|(v - r_h v)'\|_{L^2} &\leqslant Ch \|v''\|_{L^2}.\end{aligned}$$

Lemme 7.26

Il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\begin{aligned}\forall v \in H^1(0,1), \quad \|r_h v\|_{H^1} &\leqslant C \|v\|_{H^1}, \\ \|v - r_h v\|_{L^2} &\leqslant Ch \|v'\|_{L^2}, \\ \|(v - r_h v)'\|_{L^2} &\xrightarrow{h \rightarrow 0} 0.\end{aligned}$$

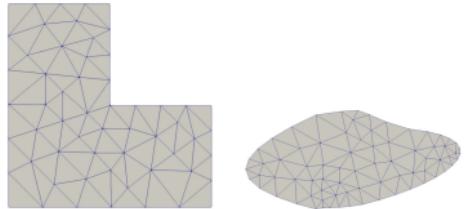
- 1.Introduction
- 2.Rappels théoriques
- 3.Approximation Galerkin/interne-Partie théorique
- 4.Présentation à grosses mailles de la MEF
- 5.Brève histoire de la Méthode des Éléments Finis
- 6.Exemples
- 7.Résolution par Éléments Finis

Approximation interne
Méthode numérique

Elément de Courant pour Problème de Dirichlet en dimension 2

$$f \in L^2(\Omega), \begin{cases} -\Delta u = f \text{ dans } \Omega \\ u = 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{cases}$$

$$(FV) \exists! u \in H_0^1(\Omega) \text{ tq } \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v = \int_{\Omega} f v$$



<https://doc.freefem.org/examples/>

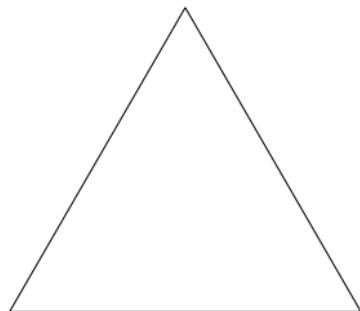
- 1.Introduction
- 2.Rappels théoriques
- 3.Approximation Galerkin/interne-Partie théorique
- 4.Présentation à grosses mailles de la MEF
- 5.Brève histoire de la Méthode des Eléments Finis
- 6.Exemples
- 7.Résolution par Eléments Finis

Approximation interne
Méthode numérique

Elément de Courant pour Problème de Dirichlet en dimension 2

$$f \in L^2(\Omega), \begin{cases} -\Delta u = f \text{ dans } \Omega \\ u = 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{cases}$$

$$(FV) \exists! u \in H_0^1(\Omega) \text{ tq } \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v = \int_{\Omega} f v$$



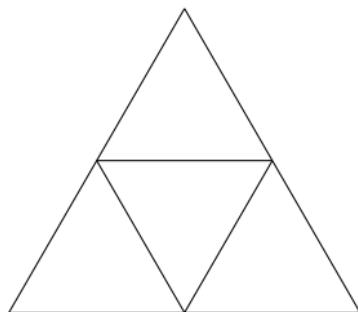
- 1.Introduction
- 2.Rappels théoriques
- 3.Approximation Galerkin/interne-Partie théorique
- 4.Présentation à grosses mailles de la MEF
- 5.Brève histoire de la Méthode des Eléments Finis
- 6.Exemples
- 7.Résolution par Eléments Finis

Approximation interne
Méthode numérique

Elément de Courant pour Problème de Dirichlet en dimension 2

$$f \in L^2(\Omega), \begin{cases} -\Delta u = f \text{ dans } \Omega \\ u = 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{cases}$$

$$(FV) \exists! u \in H_0^1(\Omega) \text{ tq } \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v = \int_{\Omega} f v$$



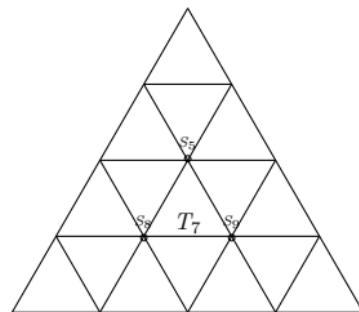
- 1.Introduction
- 2.Rappels théoriques
- 3.Approximation Galerkin/interne-Partie théorique
- 4.Présentation à grosses mailles de la MEF
- 5.Brève histoire de la Méthode des Eléments Finis
- 6.Exemples
- 7.Résolution par Eléments Finis

Approximation interne
Méthode numérique

Elément de Courant pour Problème de Dirichlet en dimension 2

$$f \in L^2(\Omega), \begin{cases} -\Delta u = f \text{ dans } \Omega \\ u = 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{cases}$$

$$(FV) \exists! u \in H_0^1(\Omega) \text{ tq } \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v = \int_{\Omega} f v$$



$$(FV_h) \exists! u_h \in H_{0,h} \text{ tq } \forall i \in J_3, \quad \sum_{j \in J_3} \int_{\Omega} u(S_j) \nabla \phi_j \cdot \nabla \phi_i = \int_{\Omega} f \phi_i$$

Elément de Courant pour Problème de Dirichlet en dimension 2

$$f \in L^2(\Omega), \begin{cases} -\Delta u = f \text{ dans } \Omega \\ u = 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{cases}$$

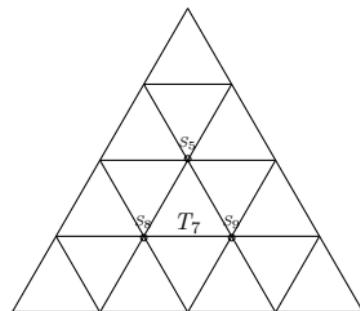
$$(FV) \exists! u \in H_0^1(\Omega) \text{ tq } \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v = \int_{\Omega} f v$$

$$\text{EF} = (T_k, \mathbb{P}_1(T_k), (\varphi(S_1^{T_k}), \varphi(S_2^{T_k}), \varphi(S_3 T_k)))$$

Degrés de liberté :

dimension de $H_h = 15$

dimension de $H_{0,h} = 3$



$$(FV_h) \exists! u_h \in H_{0,h} \text{ tq } \forall i \in J_3, \quad \sum_{j \in J_3} \int_{\Omega} u(S_j) \nabla \phi_j \cdot \nabla \phi_i = \int_{\Omega} f \phi_i$$

Elément de Courant pour Problème de Dirichlet en dimension 2

$$f \in L^2(\Omega), \begin{cases} -\Delta u = f \text{ dans } \Omega \\ u = 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{cases}$$

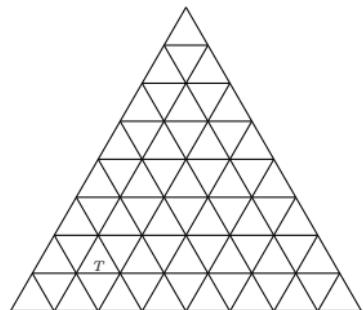
$$(FV) \exists! u \in H_0^1(\Omega) \text{ tq } \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v = \int_{\Omega} f v$$

$$\begin{aligned} \text{EF} = \\ (T_k, \mathbb{P}_1(T_k), (\varphi(S_1^{T_k}), \varphi(S_2^{T_k}), \varphi(S_3 T_k))) \end{aligned}$$

Degrés de liberté :

dimension de $H_h = 36$

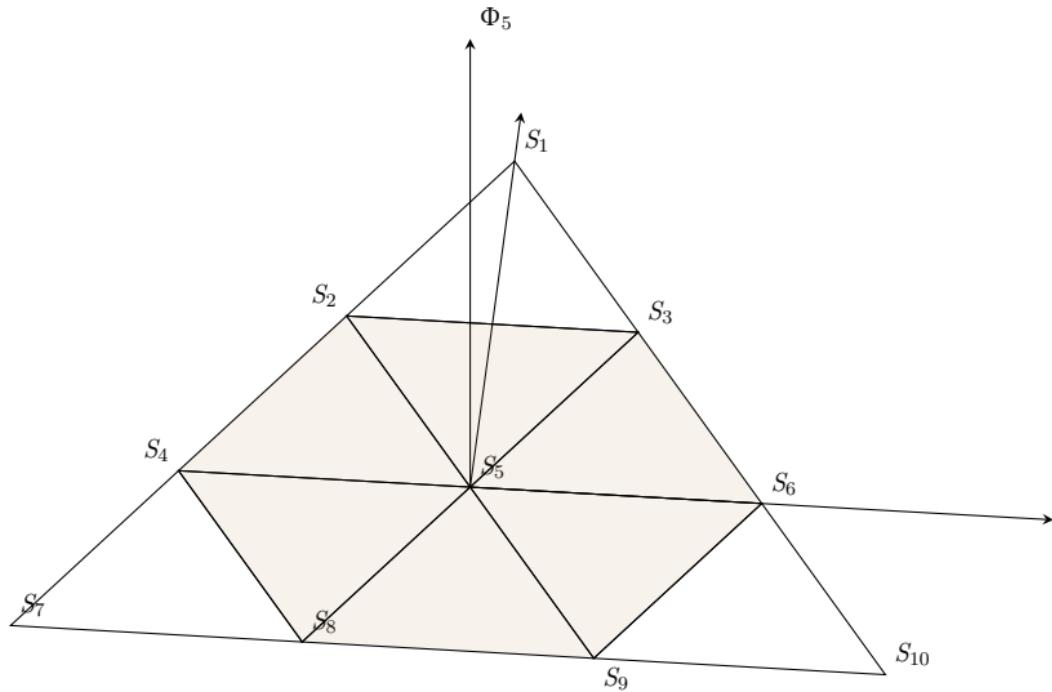
dimension de $H_{0,h} = 21$

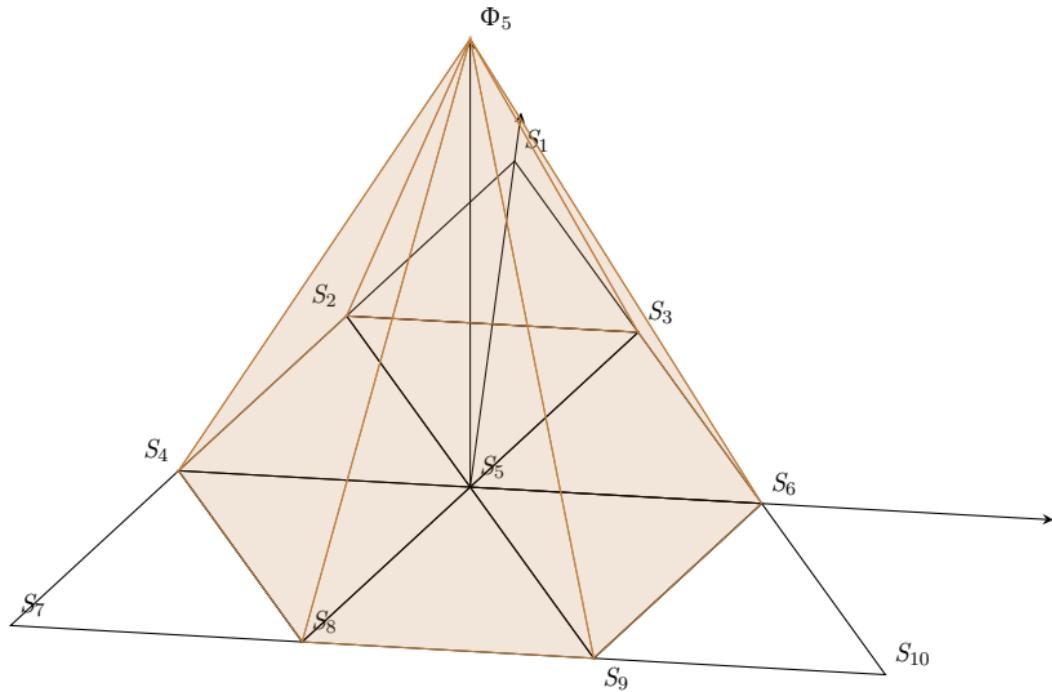


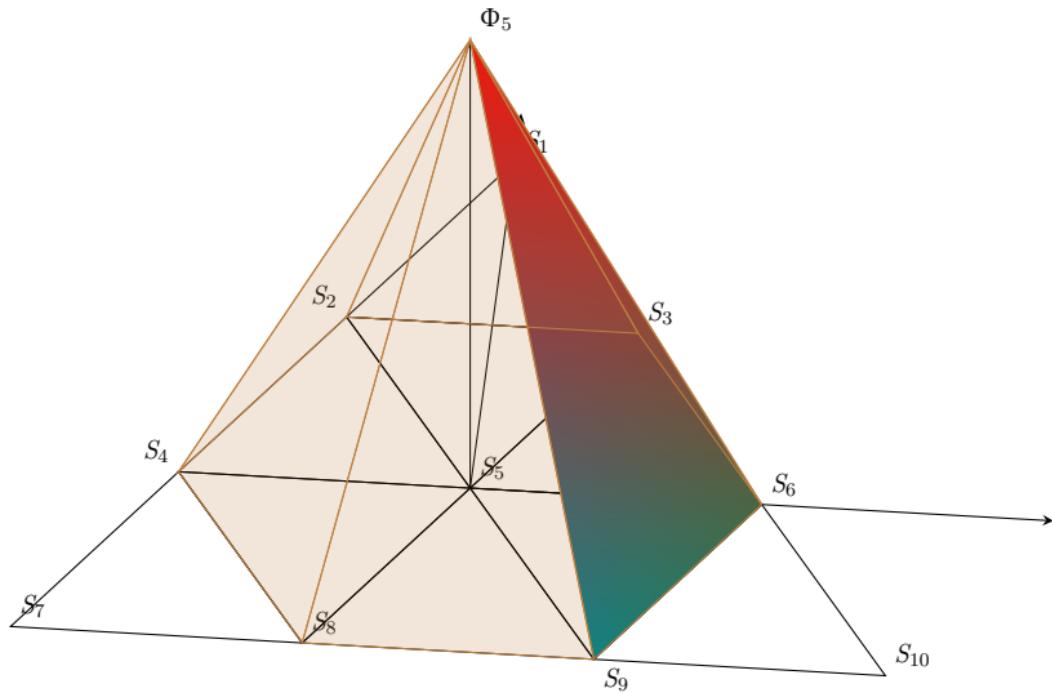
$$(FV_h) \exists! u_h \in H_{0,h} \text{ tq } \forall i \in J_{21}, \quad \sum_{j \in J_{21}} \int_{\Omega} u(S_j) \nabla \phi_j \cdot \nabla \phi_i = \int_{\Omega} f \phi_i$$

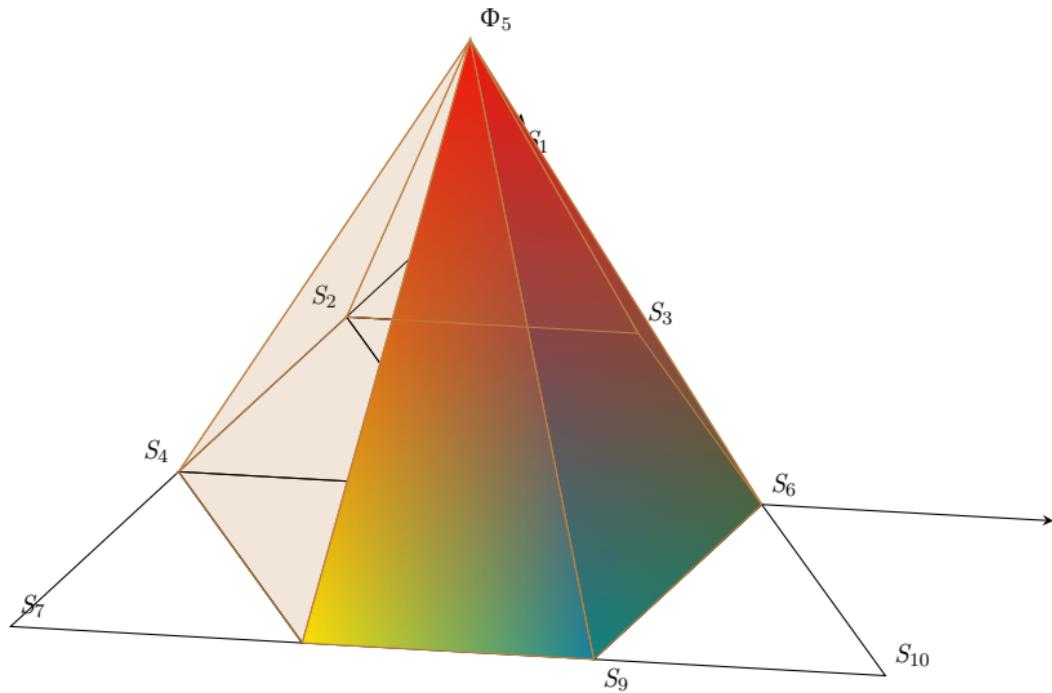
- 1.Introduction
- 2.Rappels théoriques
- 3.Approximation Galerkin/interne-Partie théorique
- 4.Présentation à grosses mailles de la MEF
- 5.Brève histoire de la Méthode des Eléments Finis
- 6.Exemples
- 7.Résolution par Eléments Finis

Approximation interne
Méthode numérique









Outil géométrique : les coordonnées barycentriques

Définition-Théorème 7.27

Si $T = S_a S_b S_c$ est un triangle non dégénéré,

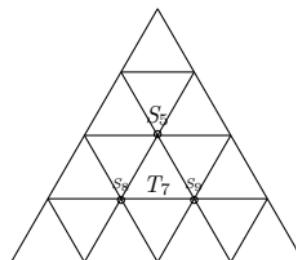
$$\forall M \in \mathbb{R}^2, \quad \exists! (\lambda_a^T, \lambda_b^T, \lambda_c^T) \in \mathbb{R}^3, \quad \begin{cases} \lambda_a^T + \lambda_b^T + \lambda_c^T = 1 \\ M = \sum_{j \in \{a, b, c\}} \lambda_j^T S_j. \end{cases}$$

*On appelle $(\lambda_1^T, \lambda_2^T, \lambda_3^T)$ les **coordonnées barycentriques** de $M(x, y)$: elles sont affines en (x, y) .*

C'est la base naturelle de \mathbb{P}_1 sur le triangle T .

Attention ! Les coordonnées barycentriques sont propres à 1 triangle !

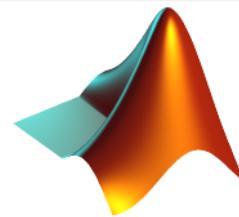
$$\phi_5 := \lambda_5^{T_j} \text{ dans } T_j, \quad j \in \{2, \dots, 7\}$$



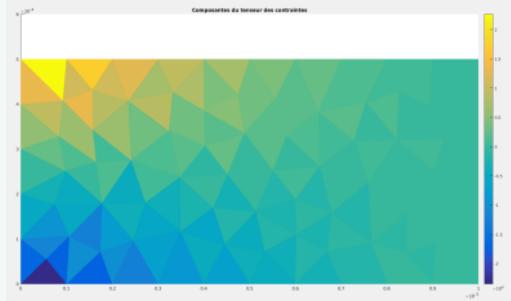
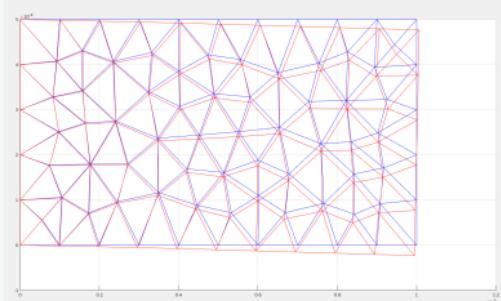
Une illustration académique

Test 2D Déformations Planes

Plaque cantilever épaisse : (DP)

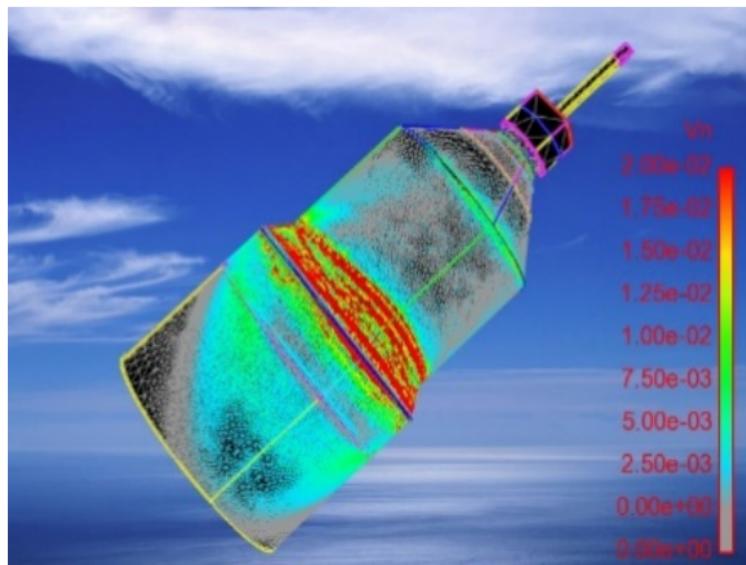


MATLAB



- 1.Introduction
- 2.Rappels théoriques
- 3.Approximation Galerkin/interne-Partie théorique
- 4.Présentation à grosses mailles de la MEF
- 5.Brève histoire de la Méthode des Eléments Finis
- 6.Exemples
- 7.Résolution par Eléments Finis

Approximation interne
Méthode numérique



Détachement-Coiffe Ariane

Bilan :

- Nécessité de l'analyse théorique et numérique
- Géométries quelconques
- Construction d'approximations variationnelles
- Lemme de Céa, interpolation

Bilan :

- Nécessité de l'analyse théorique et numérique
- Géométries quelconques
- Construction d'approximations variationnelles
- Lemme de Céa, interpolation

But : $\partial_t u - \Delta u = f$ dans Ω , $u|_{\partial\Omega} = 0$, $u(0, \cdot) = u^0$

- Discrétisation complète temps + espace

Précision de $1e-3$ en utilisant un schéma d'ordre 1 (en 2018, un processeur courant réalise 10^{12} flops)

Dimension d'espace	nombre de points	taille du système
1	1000	1000×1000
2	1e6	$1e6 \times 1e6$
3	1e9	$1e9 \times 1e9$

Problème :

comment résoudre ces très grands systèmes linéaires efficacement ?

Bibliographie

-  Grégoire Allaire, *Analyse numérique et optimisation : Une introduction à la modélisation mathématique et à la simulation numérique*, Editions Ecole Polytechnique, 2005.
-  Philippe G. Ciarlet, *Introduction to numerical linear algebra and optimisation*, Cambridge Texts in Applied Mathematics, Cambridge University Press, 1989.
-  Frédéric Lagoutière, *Equations aux dérivées partielles et leurs approximations*, polycopié.
-  Serge Nicaise, *Analyse numérique et équations aux dérivées partielles : cours et problèmes résolus*, Sciences sup (Dunod). : Mathématiques, Dunod, 2000.