WIKIPEDIA

光滑函数

维基百科，自由的百科全书

光滑函数（smooth function）在数学中特指无穷可导的函数，也就是说，存在所有有限阶导数。若一函数是连续的，则称其为C^0函数；若函数存在导函数，且其導函數連續，則稱為**连续可导**，記为C^1函数；若一函数n阶可导，并且其n阶导函数连续，则为C^n函数（$n \geq 1$）。而光滑函数是对所有n都属于C^n函数，特称其为C^∞**函数**。

例如，指数函数显然是光滑的，因为指数函数的导数是指数函数本身。

目录

按照要求构造光滑函数

构造在给定区间外为零但在区间内非零的光滑函数经常很有用。这是可以达到的；另一方面来讲，一个幂级数不可能有这样的属性。这表明光滑和解析函数之间存在着巨大的鸿沟；所以泰勒定理一般不可以应用到展开光滑函数。

要给出这样的函数的显式构造，我们从构造如下的函数开始

$$f(x) = \exp\left(-\frac{1}{x}\right) ,$$

开始先对$x > 0$定义。我们不但有

$$\lim_{x \to 0} f(x) \to 0 \text{（从上式可以得到）}$$

而且对于所有多项式P,有

$$\lim_{x \to 0} P(x) f(x) \to 0$$

因为负指数的指数增长起支配作用。这意味着对于$x < 0$设定$f(x) = 0$将给出一个光滑函数。象$f(x)f(1-x)$这样的组合可以以任何给定区间为支撑构成；在这个特例中，该区间是$[0, 1]$。这样的函数从0开始有特别慢的‘启动’。

参看非解析無窮可微函數。

和解析函数理论的关系

用复分析的术语考虑，如下的函数

$$g(z) = \exp(-\frac{1}{z^2})$$

对于z取任何实数值是光滑的，但在$z=0$有一个本质奇点。也就是，在$z=0$附近的行为不好；但恰巧只看实参数时无法让我们发现这一点。

光滑单位分解

给定闭支撑的光滑函数用于构造**光滑单位分解**（参看拓扑学术语**单位分解**条目）；这在光滑流形的研究中有基本的作用，例如在证明黎曼度量可以从他们的局部存在性全局的定义时。一个简单的情形是实直线上的一个**突起函数**，一个光滑函数f在区间$[a,b]$外为0，并且使得

$$f(x) > 0 \text{ for } a < x < b.$$

给定一些直线上的互相重叠的区间，可以在每个区间上构造突起函数，在半无限区间（$-\infty, c$]和[$d, +\infty$）上也可以，以覆盖整条直线，使得函数的和总是1。

根据前面所说，单位分解不适用于全纯函数；它们的对于存在性和解析连续的不同行为是层论的根源之一。作为对比，光滑函数的层趋向于不包含很多拓扑信息。

流形的光滑映射

光滑流形之间的**光滑映射**可以用坐标图的方式来定义。因为函数的光滑性的概念和特定的坐标图的选取无关。这样的映射有一个**一阶**导数，定义在切向量上；它给出了在切丛的级别上的对应纤维间的线性映射。

高等定义

在需要讨论所有无穷可微函数的集合时，以及该空间的元素在微分和积分、求和、取极限时的行为时，人们发现所有光滑函数的空间不是一个合适的选择，因为它在这些操作下不是完备和闭合的。对于这个情况的一个正确处理，我们可以采用索伯列夫空间（Sobolev space）的概念。

参看

- 准解析函数
- 分段光滑函数

外部链接