

Équations aux dérivées partielles : contrôle final (3h)

Consignes :

- Les documents papier et les appareils électroniques (téléphones, calculatrices) sont interdits.
- Il est recommandé de **lire le sujet en entier**. Les trois parties sont largement indépendantes.
- Au besoin, on pourra énoncer des résultats vus en cours et en TD *sans démonstration*, sauf quand elle est explicitement demandée.
- La qualité de la rédaction sera un élément important de l'évaluation.
- Les unités physiques utilisées ici sont le mètre (m), la seconde (s), le Kelvin (K) et le Joule (J).
- **Les coordonnées d'un point M sont cylindriques** (r, ϕ, z) , où r est la distance du point M à l'axe des z , ϕ l'angle dans le plan horizontal et z est la longueur. Le centre du repère est O . Les vecteurs orthonormés du repère en M sont e_r, e_ϕ, e_z , orientés dans le sens direct (voir Figure 1).
- L'intégrale d'une fonction réelle $f : (r, \phi, z) \mapsto f(r, \phi, z)$ sur un volume C dans les coordonnées cylindriques s'écrit comme l'intégrale de la fonction f par rapport à la mesure $rdrd\phi dz$, c'est-à-dire :

$$\int_C f(M) dM = \int_C f(r, \phi, z) r dr d\phi dz.$$

- Pour une fonction scalaire $\theta : (r, \phi, z) \mapsto \theta(r, \phi, z) \in \mathbb{R}$, où (r, ϕ, z) sont les **coordonnées cylindriques**, on pourra utiliser indifféremment la notation $\theta \mapsto \text{grad}(\theta)$ ou $\theta \mapsto \nabla \theta$ pour l'opérateur différentiel $\theta \mapsto \left(\partial_r \theta, \frac{1}{r} \partial_\phi \theta, \partial_z \theta \right)^T \in \mathbb{R}^3$.
- De même, pour une fonction vectorielle $V : (r, \phi, z) \mapsto (V_r, V_\phi, V_z)^T \in \mathbb{R}^3$ **dans le repère cylindrique**, on pourra utiliser indifféremment la notation $V \mapsto \text{div} V$ ou $V \mapsto \nabla \cdot V$ pour l'opérateur différentiel $V \mapsto \frac{1}{r} \partial_r (r V_r) + \frac{1}{r} \partial_\phi V_\phi + \partial_z V_z$.

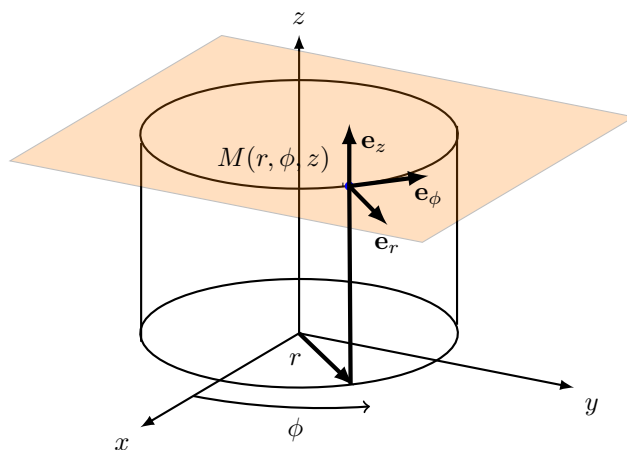


FIGURE 1 – Coordonnées cylindriques

1 Modélisation

On s'intéresse dans cet énoncé au profil de température d'un câble coaxial. On appelle $\bar{\bar{C}}$ le cylindre extérieur, et \tilde{C} le plus grand ouvert contenu dans $\bar{\bar{C}}$. \tilde{C} sera le domaine de travail.

La longueur du câble est $L > 0$. Le rayon intérieur de la section dans le plan (O, x, y) à $z \in [0, L]$ est $\tilde{r}_m > 0$, le rayon extérieur est $\tilde{r}_M > \tilde{r}_m > 0$.

Une vitesse d'entraînement angulaire uniforme U est appliquée autour de l'axe (Oz) . La vitesse en M de coordonnées (r, ϕ, z) s'écrit donc dans le repère cylindrique $\vec{u}(r, \phi, z) = r\tilde{U}e_\phi$.

Soit θ_e un réel positif. On fait l'hypothèse suivante :

(H) initialement, le câble est à température ambiante θ_e , son enveloppe extérieure (y compris aux extrémités en $z = 0$ et $z = L$) reste à tout instant à la température θ_e et le câble "interne" est isolant, c'est-à-dire que le flux de chaleur entre les deux câbles est nul.

On suppose que la conductivité thermique $\tilde{\kappa}$ dans \tilde{C} est une fonction continue strictement positive qui ne dépend que de la variable ϕ . On s'intéresse à la température $\theta : (t, M) \mapsto \theta(t, M)$ dans $\mathbb{R}^+ \times \tilde{C}$. On rappelle que la loi de conservation de l'énergie conduit à l'équation suivante sur la température θ

$$\rho_{cP} \partial_t \theta(t, M) + \text{div} \vec{j}(t, M) = \tilde{f}(t, M), \quad t > 0, M = (r, \phi, z) \in \tilde{C} \quad (1)$$

où ρ est la masse volumique du matériau, c_P la capacité thermique du matériau, \tilde{f} est la source¹ et \vec{j} est le flux de chaleur. ρ_{cP} est une constante, exprimée en $J.K^{-1}.m^{-3}$.

Q. 1 Quelle est l'unité de θ ? de \vec{j} ? de $\tilde{\kappa}$? de \tilde{f} ?

Le système étant en mouvement, on donne le flux de chaleur sous la forme

$$\vec{j} = \rho_{cP} \theta \vec{u} - \tilde{\kappa}(\phi) \text{grad} \theta. \quad (2)$$

Q. 2 Ecrire l'équation satisfaite par θ en termes de gradient et de divergence. On la nommera **(E)** dans la suite.

Q. 3 Comment réécrire la condition **(H)** comme conditions au bord **(CB)** du domaine \tilde{C} ? On appellera $\partial\tilde{C}_e$ le bord externe du câble (y compris aux extrémités en $z = 0$ et $z = L$) et $\partial\tilde{C}_i$ le bord interne (à $r = \tilde{r}_m$) de sorte que $\partial\tilde{C} = \partial\tilde{C}_e \cup \partial\tilde{C}_i$. On fera un dessin pour illustrer les conditions.

Q. 4 Quelle dernière condition **(CI)** faut-il imposer en plus de la condition au bord sur $\partial\tilde{C}$ pour espérer que le problème soit bien posé? Comment écrire mathématiquement la condition décrite en **(H)**?

Q. 5 Expliquer pourquoi on peut supposer sans changer le problème que $\theta_e = 0$.

On note T_{obs} un temps d'observation, $L_{obs} = L$ la longueur d'observation (la même en r et en z) θ_{obs} une température de référence, et $t = t^* T_{obs}$, $r = r^* L_{obs}$, etc.

Q. 6 Adimensionner le problème constitué par **(E)**, **(CB)** et **(CI)**. On le nommera **(P)**.

On note à partir de maintenant $\kappa : \phi \mapsto \kappa(\phi) = \tilde{\kappa}(\phi) T_{obs} / (\rho_{cP} L_{obs}^2)$, $U = T_{obs} \tilde{U}$, $f = T_{obs} \tilde{f} / (\rho_{cP} \theta_{obs})$, $r_m = \tilde{r}_m / L$ et $r_M = \tilde{r}_M / L$. Pour simplifier la lecture, on note t, r, θ, \dots les quantités adimensionnées (sans *).

1. typiquement de la forme $\tilde{f} : (t, M) \mapsto R(M) I^2(t)$, avec R la résistance électrique par unité de volume et I le courant électrique

Q. 7 Soit θ solution du problème **(P)** avec $f = 0$ **dans cette question seulement**. En étudiant la monotonie de la quantité $E : t \mapsto \frac{1}{2} \int_C \theta(t, M)^2 dM$ (sans passer aux coordonnées cylindriques), donner la solution du problème. Est-ce la seule ?

Q. 8 En déduire que, pour f quelconque, si la solution du problème **(P)** existe, alors elle est unique.

Q. 9 Décrire le domaine \tilde{C} en fonction de r, ϕ, z . On pourra écrire le résultat sous la forme “ $M(r, \phi, z) \in \tilde{C}$ si et seulement si...”. On précisera soigneusement les bords du domaine.

Q. 10 Réécrire le problème **(P)** défini en Q. ?? en termes de $\partial_t, \partial_r, \partial_\phi, \partial_z$.²

INDICATION : On écrira soigneusement \vec{j} dans le repère (e_r, e_ϕ, e_z) .

En plus des hypothèses faites précédemment, on suppose maintenant que f ne dépend pas de z .

Q. 11 Montrer que la solution θ ne dépend pas de z non plus.

Enfin, on suppose que f ne dépend pas de t .

2 Etude du problème stationnaire

On veut donc résoudre le problème **(P')** : Trouver $\theta : (t, r, \phi) \mapsto \theta(t, r, \phi)$ telle que

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t \theta - \frac{\kappa(\phi)}{r} \partial_r (r \partial_r \theta) + U \partial_\phi \theta - \frac{1}{r^2} \partial_\phi (\kappa(\phi) \partial_\phi \theta) = f(r, \phi), \quad t > 0, r \in]r_m, r_M[, \phi \in [0, 2\pi[\\ \theta \text{ est } 2\pi\text{-périodique en la variable } \phi \\ \theta(0, r, \phi) = 0, \quad r \in [r_m, r_M], \phi \in [0, 2\pi[\\ \theta(t, r_M, \phi) = 0, \quad t \geq 0, \phi \in [0, 2\pi[\\ \partial_r \theta(t, r_m, \phi) = 0, \quad t \geq 0, \phi \in [0, 2\pi[\end{array} \right. \quad (\mathbf{P}')$$

2.1 Résultats préliminaires

On s'intéresse au domaine $\Omega =]r_m, r_M[\times]0, 2\pi[$, muni de la mesure $r dr d\phi$.

Q. 12 Définir le bord $\partial\Omega$ du domaine Ω .

Q. 13 Rappeler la définition de $H^1(\Omega)$.

Q. 14 Définir le produit scalaire sur $H^1(\Omega)$.

Q. 15 Rappeler la définition de l'opérateur de trace, que l'on notera γ . On précisera soigneusement son espace de départ et son espace d'arrivée.

On suppose γ continu. Soit

$$H = \{v \in H^1(\Omega) : \forall r \in]r_m, r_M[, v(r, 0) = v(r, 2\pi) \text{ et } \forall \phi \in]0, 2\pi[, v(r_M, \phi) = 0\}.$$

Q. 16 Justifier le fait que l'espace H est bien défini.

2. On pourra utiliser sans justification les formules données dans les consignes

Q. 17 Montrer que l'espace H est un espace de Hilbert.

Q. 18 Montrer qu'il existe une constante C_Ω telle que

$$\forall u \in H, \quad \|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C_\Omega \|\text{grad}(u)\|_{L^2(\Omega)}.$$

INDICATION : On commencera par établir l'inégalité pour $u \in C^1(\Omega)$.

Q. 19 Comment appelle-t-on l'inégalité démontrée dans la question Q. ???

Q. 20 Ecrire le problème stationnaire associé à (\mathbf{P}') , noté (\mathbf{P}'_∞) .

2.2 Résolution dans Ω

Q. 21 Ecrire la formulation faible du problème (\mathbf{P}'_∞) .

Q. 22 Ecrire la formulation variationnelle associée à (\mathbf{P}'_∞) . On la notera (\mathbf{FV}) .

Q. 23 Résoudre (\mathbf{FV}) . On notera θ_∞ la solution.

Q. 24 Montrer que θ_∞ satisfait à (\mathbf{E}) au sens des distributions.

3 Résolution numérique en 1D

On suppose que $U = 0$, que $\kappa(\phi) = \kappa$ pour tout ϕ , que $\partial_r(r\partial_r\theta) = -\frac{c(\phi)}{r}\theta(r, \phi)$ et $f : (r, \phi) \mapsto \frac{1}{r^2}g(\phi)$.
On s'intéresse donc au problème en une dimension

$$\begin{cases} -\kappa\partial_\phi^2 w(\phi) + c(\phi)w(\phi) = g(\phi), & 0 < \phi < 2\pi, \\ w(0) = w(2\pi) \end{cases} \quad (\mathbf{D})$$

où $c \in C^0([0, 2\pi], \mathbb{R}^{+*})$, $c(0) = c(2\pi)$, et g est supposée appartenir à $L^2(0, 2\pi)$, g périodique de période 2π .

Soit $J \geq 1$.

Q. 25 Ecrire une discrétisation uniforme en J sous-intervalles de l'intervalle $[0, 2\pi[$. On fera un dessin du maillage.

On notera $\phi_j = jh$, $j \in \{0, \dots, J\}$.

Q. 26 Que vaut h ?

Q. 27 Ecrire la matrice A_J de discrétisation en différences finies centrées associée au problème (\mathbf{D}) et au maillage (ϕ_1, \dots, ϕ_J) . On donnera l'écriture **en langage Matlab**. On écrira soigneusement, en particulier, la première et de la dernière ligne de la matrice.

Q. 28 Montrer que, si $V \in \mathbb{R}^J$ est tel que le produit $A_J V$ soit à coefficients positifs, alors nécessairement V est à coefficients positifs (principe du maximum).

Q. 29 En déduire que la matrice A_J est inversible.

Q. 30 Montrer que le schéma de discrétisation aux différences finies centré est consistant avec (\mathbf{D}) . Quel est son ordre de consistance ?

Q. 31 Donner une condition suffisante sur les matrices $(A_J)_{J \geq 1}$ pour que le schéma soit convergent.

Contrôle final : Correction

Solution Q.1

- unité de θ : K Kelvin,
- unité de \vec{j} : $J s^{-1} m^{-2}$,
- unité de $\tilde{\kappa}$: $J s^{-1} m^{-1} K^{-1}$
- unité de \tilde{f} : $J . m^{-3} . s^{-1}$

Solution Q.2

$$\rho_{CP} \partial_t \theta(t, M) + \operatorname{div} \left(\rho_{CP} \theta \vec{u} - \tilde{\kappa}(\phi) \operatorname{grad} \theta \right) = \tilde{f}, \quad t > 0, \quad M = (r, \phi, z) \in \tilde{C} \quad (\mathbf{E})$$

Solution Q.3

$$\begin{cases} \theta(t, \cdot)|_{\tilde{C}_e} = \theta_e, & t \geq 0 \\ \vec{j}(t, \cdot) \cdot \vec{n}|_{\tilde{C}_i} = \rho_{CP} \theta \vec{u} \cdot \vec{n} - \tilde{\kappa}(\phi) \operatorname{grad} \theta \cdot \vec{n} = 0, & t \geq 0 \end{cases}$$

Solution Q.4 Il faut imposer une condition initiale : $\theta^0(M) = \theta_e, \forall M \in \tilde{C}$.

Solution Q.5 Le problème étant sous la forme divergence, θ_e et U étant supposés constants, $\theta - \theta_e$ est solution du problème avec conditions initiale et au bord homogènes.

Solution Q.6 $C =]\tilde{r}_m/L, \tilde{r}_M/L[\times]0, 2\pi[\times]0, 1[$ et

$$\begin{cases} \frac{1}{T_{obs}} \rho_{CP} \partial_t \theta(t, M) + \frac{1}{L_{obs}} \operatorname{div} \left(\rho_{CP} \theta \vec{u} - \frac{1}{L_{obs}} \tilde{\kappa}(\phi) \operatorname{grad} \theta \right) = \tilde{f}, & t > 0, \quad M = (r, \phi, z) \in C \\ \theta(0, M) = 0, \quad \forall M \in C \\ \theta(t, \cdot)|_{C_e} = 0, & t \geq 0 \\ \vec{j}(t, \cdot) \cdot \vec{n}|_{C_i} = \rho_{CP} \theta \vec{u} \cdot \vec{n} - \tilde{\kappa}(\phi) \operatorname{grad} \theta \cdot \vec{n} = 0, & t \geq 0 \end{cases}$$

d'où

$$\begin{cases} \partial_t \theta(t, M) + \operatorname{div} \left(T_{obs} \theta \vec{u} - \frac{T_{obs}}{\rho_{CP} L_{obs}^2} \tilde{\kappa}(\phi) \operatorname{grad} \theta \right) = \frac{T_{obs}}{\rho_{CP} \theta_{obs}} \tilde{f}, & t > 0, \quad M = (r, \phi, z) \in C \\ \theta(0, M) = 0, \quad \forall M \in C \\ \theta(t, \cdot)|_{C_e} = 0, & t \geq 0 \\ \vec{j}(t, \cdot) \cdot \vec{n}|_{C_i} = \theta \vec{u} \cdot \vec{n} - \kappa(\phi) \operatorname{grad} \theta \cdot \vec{n} = 0, & t \geq 0 \end{cases}$$

Solution Q.7 Omission dans l'énoncé : la température devrait être au carré dans l'intégrale pour pouvoir appliquer les techniques vues dans le TP1 et dans le dernier cours. D'où des points bonus

pour les élèves qui le voient. 2 points sur 4 pour les élèves qui mentionnent la solution nulle.

On suppose, conformément aux théorèmes énoncés dans le dernier cours d'EDP, que pour tout $t \geq 0$, si $\theta : t \mapsto \theta(t, \cdot)$, $\theta(t) \in L^2(C)$, que θ est continue en $t = 0$ et enfin que θ est dérivable en temps, de dérivée $\partial_t \theta(t, \cdot) \in L^2(C)$, $\forall t > 0$, alors, en étudiant $E : t \mapsto \frac{1}{2} \int_C \theta(t, M)^2 dM$, on a pour $t > 0$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} E(t) &= \int_C \theta(t, \cdot) \partial_t \theta(t, \cdot) = \int_C \operatorname{div}(\kappa(M) \operatorname{grad}(\theta(t, M)) \theta(t, M)) dM \\ &= - \int_C \kappa(M) \|\operatorname{grad}(\theta(t, M))\|^2 dM + \underbrace{\int_{\partial C} \theta(t, M) (\operatorname{grad}(\theta(t, M)) \cdot n)}_{=0 \text{ car } \theta=0 \text{ sur le bord } C_e \\ &\quad \text{et } \operatorname{grad}(\theta) \cdot \vec{n} = \vec{u} \cdot \vec{n} = 0 \text{ sur } C_i} \\ &\leq 0. \end{aligned}$$

La quantité E est donc décroissante. Comme elle est positive en tout temps et qu'elle est nulle en $t = 0$, elle est nulle en tout temps. On en déduit que θ est nulle. Par linéarité, c'est la seule.

Solution Q.8 Par linéarité, la différence de solutions de problèmes aux mêmes conditions est solution du problème résolu dans la question précédente, donc la solution nulle.

Solution Q.9 $\tilde{C} =]r_m, r_M[\times]0, 2\pi[\times]0, L[$.

Solution Q.10

$$\vec{j} = \begin{pmatrix} -\kappa(\phi) \partial_r \theta \\ rU\theta - \kappa(\phi) \frac{1}{r} \partial_\phi \theta \\ -\kappa(\phi) \partial_z \theta \end{pmatrix}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t \theta - \frac{\kappa(\phi)}{r} \partial_r (r \partial_r \theta) + U \partial_\phi \theta - \frac{1}{r^2} \partial_\phi (\kappa(\phi) \partial_\phi \theta) - \kappa(\phi) \partial_{zz}^2 \theta = f(t, r, \phi, z), \quad t > 0, r \in]r_m, r_M[, \phi \in [0, 2\pi[, z \in]0, 1[\\ \theta \text{ est } 2\pi\text{-périodique en la variable } \phi \\ \theta(0, r, \phi, z) = 0, \\ \theta(t, r_M, \phi, z) = 0, \\ \partial_r \theta(t, r_m, \phi, z) = 0, \\ \theta(t, r, \phi, 0) = 0, \\ \theta(t, r, \phi, 1) = 0, \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} r \in [r_m, r_M], \phi \in [0, 2\pi[, z \in]0, 1[\\ t \geq 0, \phi \in [0, 2\pi[, z \in]0, 1[\\ t \geq 0, \phi \in [0, 2\pi[, z \in]0, 1[\\ t \geq 0, r \in [r_m, r_M], \phi \in [0, 2\pi[\\ t \geq 0, r \in [r_m, r_M], \phi \in [0, 2\pi[\end{array}$$

Solution Q.11 On montre que $\partial_z \theta$ est solution du problème homogène (conditions au bord et initiale et source nulles). Elle est donc nulle.

Solution Q.12

$$\partial\Omega = \{ \{r = r_m\} \times]0, 2\pi[\} \cup \{]r_m, r_M[\times \{\phi = 0\} \} \cup \{ \{r = r_M\} \times]2\pi, 0[\} \cup \{]r_m, r_M[\times \{\phi = 2\pi\} \}$$

Solution Q.13 C'est l'ensemble des fonctions dans $L^2(\Omega, r dr d\phi)$ telles que leur gradient au sens des distributions appartient à $(L^2(\Omega, r dr d\phi))^2$.

Solution Q.14

$$(f, g) \mapsto \int_{\Omega} (fg + \text{grad} f \cdot \text{grad} g) r dr d\phi$$

ou bien en version cylindrique.

Solution Q.15 $\gamma : H^1(\Omega) \longrightarrow L^2(\partial\Omega)$, obtenu par prolongement de l'opérateur linéaire continu $\bar{\gamma} : H^1(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega}) \longrightarrow L^2(\partial\Omega)$, $v \mapsto v|_{\partial\Omega}$, $H^1(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ étant dense dans $H^1(\Omega)$.

Solution Q.16 Les conditions aux limites sont bien définies grâce à la fonction $\gamma : H$ est l'intersection des images réciproques de $\{0\}$ par deux applications continues ($T_r : v \mapsto (\phi \mapsto v(r_M, \phi))$ et $T_\phi : v \mapsto (r \mapsto v(r, 2\pi) - v(r, 0))$).

Solution Q.17 H est l'intersection des images réciproques de $\{0\}$ par deux applications continues ($T_r : v \mapsto (\phi \mapsto v(r_M, \phi))$ et $T_\phi : v \mapsto (r \mapsto v(r, 2\pi) - v(r, 0))$), c'est donc un fermé de $H^1(\Omega)$, et un espace de Hilbert pour le produit scalaire de $H^1(\Omega)$.

Solution Q.18 Soit $u \in C^1(\bar{\Omega})$ avec $u(r_M, \cdot) = 0$. Comme en dimension 1, il faut écrire que pour tous $(r, \phi) \in]r_m, r_M[\times]0, 2\pi[$,

$$u(r, \phi) = - \int_r^{r_M} \partial_r u(r', \phi) dr' = - \int_r^{r_M} \frac{1}{\sqrt{r'}} \partial_r u(r', \phi) \sqrt{r'} dr'$$

puis majorer par le théorème de Cauchy-Schwarz :

$$\forall (r, \phi) \in]r_m, r_M[\times]0, 2\pi[, \quad u(r, \phi)^2 \leq \frac{(r_M - r_m)}{r_m} \int_{r_m}^{r_M} (\partial_r u(r', \phi))^2 r' dr'$$

d'où

$$\forall r \in]r_m, r_M[, \quad \int_{]0, 2\pi[} u^2(r, \phi) d\phi \leq \frac{(r_M - r_m)}{r_m} \|\text{grad}(u)\|_{L^2(\Omega)}^2$$

et

$$\int_{\Omega} u^2(r, \phi) r dr d\phi \leq \frac{(r_M - r_m)}{r_m} r_M^2 \|\text{grad}(u)\|_{L^2(\Omega)}^2$$

On étend le résultat à H par densité.

Solution Q.19 C'est une inégalité de Poincaré.

Solution Q.20 Trouver $\theta : (t, r, \phi) \mapsto \theta(t, r, \phi)$ telle que

$$\begin{cases} -\frac{\kappa(\phi)}{r} \partial_r(r \partial_r \theta) + U \partial_\phi \theta - \frac{1}{r^2} \partial_\phi(\kappa(\phi) \partial_\phi \theta) = f(r, \phi), & r \in]r_m, r_M[, \phi \in [0, 2\pi[\\ \theta \text{ est } 2\pi\text{-périodique en la variable } \phi \\ \theta(r_M, \phi) = 0, & \phi \in [0, 2\pi[\\ \partial_r \theta(r_m, \phi) = 0, & \phi \in [0, 2\pi[\end{cases} \quad (\mathbf{P}')$$

Solution Q.21 Soit $\psi \in C^1(\overline{\Omega})$, avec $\psi(r_m, \phi) = 0$, $\psi(r, 0) = \psi(r, 2\pi)$ pour tout $r \in]r_m, r_M[$. On fait le calcul d'IPP en supposant $\theta \in C^2(\overline{\Omega})$. Les conditions de type Dirichlet sont homogènes et le terme de bord Neumann disparaît car \vec{n} est colinéaire à e_r et orthogonal à \vec{u} :

$$-\int_{\Omega} ((\theta \vec{u} - \kappa(\phi) \text{grad}(\theta)) \cdot \text{grad}(\psi)) dM + \int_{\partial\Omega} \psi(r \theta U e_\phi - \kappa(\phi)) \cdot \vec{n} dM = \int_{\Omega} f \psi dM$$

d'où

$$\int_{\Omega} (-U \theta \partial_\phi \psi + \kappa(\phi) \partial_r \theta \partial_r \psi + \frac{\kappa(\phi)}{r^2} \partial_\phi \theta \partial_\phi \psi) r dr d\phi = \int_{\Omega} f \psi r dr d\phi.$$

Solution Q.22 Trouver $\theta \in H$ telle que pour tout $v \in H$

$$-\int_{\Omega} ((\theta \vec{u} - \kappa(\phi) \text{grad}(\theta)) \cdot \text{grad}(v)) dM + \int_{\partial\Omega} v(r \theta U e_\phi - \kappa(\phi)) \cdot \vec{n} dM = \int_{\Omega} f v dM$$

d'où

$$\int_{\Omega} \left(-U \theta \partial_\phi v + \kappa(\phi) \partial_r \theta \partial_r v + \frac{\kappa(\phi)}{r^2} \partial_\phi \theta \partial_\phi v \right) r dr d\phi = \int_{\Omega} f v r dr d\phi.$$

Solution Q.23 On vérifie les hypothèses du théorème de Lax-Milgram :

- H est un espace de Hilbert.
- La forme bilinéaire $a : (\theta, v) \mapsto \int_{\Omega} \left(-U \theta \partial_\phi v + \kappa(\phi) \partial_r \theta \partial_r v + \frac{\kappa(\phi)}{r^2} \partial_\phi \theta \partial_\phi v \right) r dr d\phi$ est bien définie sur $H \times H$ de même que la forme linéaire $\ell : v \mapsto \int_{\Omega} f v r dr d\phi$ sur H .
- a et ℓ sont continues, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwartz.
- a est coercive car $\forall v \in H$,

$$\begin{aligned} a(v, v) &= \int_{\Omega} \left(-U v \partial_\phi v + \kappa(\phi) \partial_r v \partial_r v + \frac{\kappa(\phi)}{r^2} \partial_\phi v \partial_\phi v \right) r dr d\phi \\ &= -U \int_{r_m}^{r_M} \underbrace{\left[\frac{v^2(r, \phi)}{2} \right]_0^{2\pi}}_{=0} r dr + \int_{\Omega} \kappa(\phi) \|\text{grad}(v)\|^2 r dr d\phi \\ &\geq \frac{\min \kappa}{1 + C_\Omega^2} \|u\|_{H^1(\Omega)}^2 \end{aligned}$$

Solution Q.24 On applique la FV pour $v \in \mathcal{D}(\Omega)$.

Solution Q.25 Il y a $J + 1$ points de discrétisation et $\phi_0 = 0 = \phi_J$ pour respecter la périodicité.

Solution Q.26 $h = 2\pi/J$.

Solution Q.27 Attention, la première ligne a un coefficient en dernière colonne et la dernière ligne a un coefficient en première colonne. On note K la valeur numérique de κ et c de $(c(\phi_1), \dots, c(\phi_J))$.

$$\begin{aligned} A_J &= K * (2 * \text{diag}(\text{ones}(J, 1)) - \text{diag}(\text{ones}(J - 1, 1), 1) - \text{diag}(\text{ones}(J - 1, 1), -1))/h^2 + \text{diag}(c) \\ A_J(1, J) &= -K/h^2 \\ A_J(J, 1) &= -K/h^2 \end{aligned}$$

Solution Q.28 Soit $V \in \mathbb{R}^J$ tel que le produit $A_J V$ soit à coefficients positifs.

Soit $m \in \{1, \dots, J\}$ l'indice tel que $\min_{1 \leq j \leq J} v_j = v_m$.

La solution étant périodique, on identifie v_0 à v_J et on a (les cas $m = 1$ et $m = J$ sont couverts)

$$-\kappa \frac{(v_{m-1} - 2v_m + v_{m+1}))}{h^2} + c(\phi_m)v_m \geq 0,$$

d'où

$$c(\phi_m)h^2 v_m \geq \kappa(v_{m-1} - v_m + v_{m+1} - v_m) \geq 0.$$

Comme $c > 0$, $v_m \geq 0$ et V est à coefficients positifs.

Solution Q.29 Le vecteur nul étant simultanément à coefficients positifs et négatifs, ses antécédents aussi, et sont donc nuls. A_J est donc injective, donc inversible puisque carrée.

Solution Q.30 Soit w une solution exacte de classe C^4 de **(D)**.

On calcule l'erreur de consistance du schéma avec **(D)**.

Soit $j \in \{1, \dots, J\}$. On tient compte de la périodicité pour $j = 1$ et $j = J$.

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_j &= -\kappa \frac{(w(\phi_{j-1}) - 2w(\phi_j) + w(\phi_{j+1})))}{h^2} + c(\phi_j)w(\phi_j) - g(\phi_j) \\ &= -\kappa \partial_{\phi\phi}^2 w(\phi_j) + c(\phi_j)w(\phi_j) - g(\phi_j) + O(h^2) \\ &= O(h^2) \end{aligned}$$

Le schéma est d'ordre 2.

Solution Q.31 Il suffit de montrer qu'il existe une borne uniforme en J de $(\|A_J^{-1}\|)_J$.