Cours de Convergence, Intégration, Probabilités

Mesures sur un espace produit. Indépendance de variables aléatoires

Séance 7 - Mesures sur un espace produit, intégrales multiples

CentraleSupélec - Cursus ingénieur

8 octobre 2019

Amphis CIP 6, 7, 8 et 9

- Hervé MOUTARDE
  Institut de recherche sur les lois fondamentales de l'univers (IRFU), CEA, Université Paris-Saclay
  Orme des Merisiers, Bât. 703
  herve.moutarde@cea.fr

Des questions ?

- daskit.com/cip19-20 puis section "Amphi 7".

Support

- Support amphi 7 en version vierge disponible dès à présent sur edunao.
- Support amphi 7 en version annotée disponible ultérieurement.
- Enregistrements vidéo des amphis 6 et 7 disponibles sur la web tv après validation.

Quelques éléments des CM et TD précédents

- Tribu (**def. 3.3**) et tribu des événements (**def. 3.25**).
- Mesure (**def. 3.21**) et mesure de probabilité (**def. 3.26**).
- Densité de probabilité (**def. VI.1.9**).
- Fonction mesurable (**def. 3.10**) et variable aléatoire *discrète* (**def. 3.38**) ou *réelle* (**def. VI.2.1**).
- Loi d'une variable aléatoire *discrète* (**def. 3.39**) ou *réelle* (**def. VI.2.3**).
- Intégrale sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ pour une variable aléatoire réelle $X\colon (\Omega, \mathcal{F}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.
- π-système (**def. VI.1.1**) et unicité de la mesure de probabilité sur la tribu engendrée (**le. VI.1.2**).
- Théorèmes de convergence monotone (**th. 4.5**) et dominée (**th. 4.15**).
- Indépendance d'une famille d'événements $(A_i)_{i\in I}$ (**def. 3.34**).
- Espaces $L^p(\Omega)$ (**prop. 4.20**).

Programme

1. Espaces produits
   - Tribu produit
   - Mesure produit
2. Intégrales multiples
   - Espaces L^p (rappel)
   - Changement de variables
   - Théorèmes de Fubini
   - Variables aléatoires indépendantes
3. Produit de convolution

Objectifs de la séance

- Je connais la notion de **tribu produit**.
- Je connais la caractérisation de la **mesure produit**, par ses valeurs sur les **produits cartésiens**.
- Je suis capable de vérifier qu'une fonction de plusieurs variables est **mesurable** et **intégrable**.
- Je maîtrise l'application des théorèmes de **Fubini-Tonelli** et **Fubini-Lebesgue**, pour calculer des intégrales de fonctions de plusieurs variables.
- Je suis capable d'appliquer l'intégration par rapport à une mesure produit, au cas particulier des **lois de variables aléatoires**.
- Je sais effectuer un **changement de variables** dans une intégrale multiple.

Problème

On cherche à définir une intégrale pour une fonction f définie sur un espace produit $E \times F$, où

- $(E, \mathcal{A}, \mu)$ et $(F, \mathcal{B}, \nu)$ sont deux espaces mesurés.

Quel est le lien entre

- $\displaystyle\int_{E\times F} f$
- $\displaystyle\int_E f\, d\mu$ et $\displaystyle\int_F f\, d\nu$?

Avant la théorie de la mesure...

Dans le cadre de l'intégrale de Riemann, $\displaystyle\int f(x,y)\ dx\ dy$ est défini comme la succession de l'intégration par rapport à x, puis par rapport à y.

Avant la théorie de la mesure...

Dans le cadre de l'intégrale de Riemann, $\displaystyle\int f(x,y)\ dx\ dy$ est défini comme la succession de l'intégration par rapport à x, puis par rapport à y.

D'où la question de l'impact de l'ordre d'intégration :

- $\displaystyle\int f(x,y)\ dx\ dy$
- $\displaystyle\int\left(\int f(x,y)\ dx\right) dy$ et $\displaystyle\int\left(\int f(x,y)\ dy\right) dx$?

Avant la théorie de la mesure...

Dans le cadre de l'intégrale de Riemann,
$\int f(x,y)\ dx\ dy$ est défini comme la succession de l'intégration par rapport à x, puis par rapport à y.

D'où la question de l'impact de l'ordre d'intégration :

- $\int f(x,y)\ dx\ dy$
- $\int \left(\int f(x,y)\ dx \right) dy$ et $\int \left(\int f(x,y)\ dy \right) dx$?

- Dans le cadre de l'intégrale de Lebesgue, une construction similaire sur tous les $\mathbb{R}^n$.

Tribu produit

Quelle tribu sur l'espace produit $E \times F$?

Définition VII.1.1

Soient $(E, \mathcal{A})$ et $(F, \mathcal{B})$ deux espaces mesurables.
On peut munir l'espace produit $E \times F$ de la tribu produit
$\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} = \sigma(\mathcal{A} \times \mathcal{B}) = \sigma(A \times B; A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B})$.

Pour un nombre fini d'espaces mesurables $(E_1, \mathcal{A}_1)$, ..., $(E_n, \mathcal{A}_n)$,
$\mathcal{A}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{A}_n = \sigma(\mathcal{A}_1 \times \cdots \times \mathcal{A}_n) = \sigma(A_1 \times \cdots \times A_n; \forall i, A_i \in \mathcal{A}_i)$.

Tribu produit

Quelle tribu sur l'espace produit $E \times F$?

Définition VII.1.1

Soient $(E, \mathcal{A})$ et $(F, \mathcal{B})$ deux espaces mesurables.
On peut munir l'espace produit $E \times F$ de la tribu produit
$\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} = \sigma(\mathcal{A} \times \mathcal{B}) = \sigma(A \times B; A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B})$.

Pour un nombre fini d'espaces mesurables $(E_1, \mathcal{A}_1)$, ..., $(E_n, \mathcal{A}_n)$,
$\mathcal{A}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{A}_n = \sigma(\mathcal{A}_1 \times \cdots \times \mathcal{A}_n) = \sigma(A_1 \times \cdots \times A_n; \forall i, A_i \in \mathcal{A}_i)$.

Exemple : Que se passe-t-il dans le cas de $\mathbb{R}^N = \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}$?
Tribu produit $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \cdots \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$ ou tribu de Borel $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$?

Sections : x-section et y-section

Soient $(E, \mathcal{A})$ et $(F, \mathcal{B})$ deux espaces mesurables. Pour $C \subset E \times F$, on définit les :

- x-sections : $\forall x \in E,\ C_x = \{y \in F : (x, y) \in C\}$
- y-sections : $\forall y \in F,\ C^y = \{x \in E : (x, y) \in C\}$.

Sections : x-section et y-section

Soient $(E, \mathcal{A})$ et $(F, \mathcal{B})$ deux espaces mesurables. Pour $C \subset E \times F$, on définit les :

- x-sections : $\forall x \in E$, $C_x = \{y \in F : (x, y) \in C\}$
- y-sections : $\forall y \in F$, $C^y = \{x \in E : (x, y) \in C\}$.

Théorème VII.1.2

Soit $C \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$. On a :

- *pour tout $x \in E$, $C_x \in \mathcal{B}$;*
- *pour tout $y \in F$, $C^y \in \mathcal{A}$.*

Sections : x-section et y-section

Soient $(E, \mathcal{A})$ et $(F, \mathcal{B})$ deux espaces mesurables. Pour $C \subset E \times F$, on définit les :

- x-sections : $\forall x \in E$, $C_x = \{y \in F : (x, y) \in C\}$
- y-sections : $\forall y \in F$, $C^y = \{x \in E : (x, y) \in C\}$.

Théorème VII.1.2

Soit $C \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$. On a :

- *pour tout $x \in E$, $C_x \in \mathcal{B}$;*
- *pour tout $y \in F$, $C^y \in \mathcal{A}$.*

$\mathcal{C} = \{C \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} : C_x \in \mathcal{B}\}$ est une tribu qui contient $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$.

Mesurabilité par rapport à $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$

Pour toute fonction f définie sur $E \times F$, on note :

- $\forall x \in E,\ f_x(y) = f(x, y)$
- $\forall y \in F,\ f^y(x) = f(x, y)$.

Théorème VII.1.3

Soit $f : (E \times F, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}) \to (G, \mathcal{G})$ mesurable.

- *Pour tout $x \in E$, f_x est $\mathcal{B}$-mesurable.*
- *Pour tout $y \in F$, f^y est $\mathcal{A}$-mesurable.*

Mesure produit

Rappel (Amphi 3, 34/54) : Une mesure μ sur $(\Omega, \mathcal{T})$ est **σ-finie** si Ω est union dénombrable d'une suite croissante d'éléments de $\mathcal{T}$ de mesure finie.

Théorème VII.1.4

Soient μ une mesure σ-finie sur $(E, \mathcal{A})$ et ν une mesure σ-finie sur $(F, \mathcal{B})$.

(i) *Il existe une unique mesure m sur $(E \times F, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B})$ telle que :*
$\forall A \in \mathcal{A}, \forall B \in \mathcal{B}, \quad m(A \times B) = \mu(A)\nu(B)$.
(avec la convention $0.\infty = 0$).
La mesure m est σ-finie et notée $m = \mu \otimes \nu$.

(ii) *Pour tout $C \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$,*
$$\mu \otimes \nu(C) = \int_E \nu(C_x)\ \mu(dx) = \int_F \mu(C^y)\ \nu(dy).$$

Mesure produit

Soient μ une mesure σ-finie sur $(E, \mathcal{A})$ et ν une mesure σ-finie sur $(F, \mathcal{B})$.

(i) Il existe une unique mesure m sur $(E \times F, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B})$ telle que :
$\forall A \in \mathcal{A}, \forall B \in \mathcal{B}, \quad m(A \times B) = \mu(A)\nu(B)$. (avec la convention $0.\infty = 0$).
La mesure m est σ-finie et notée $m = \mu \otimes \nu$.

Unicité : π-système des pavés $A \times B$ avec $(A, B) \in \mathcal{A} \times \mathcal{B}$.

Mesure produit

Soient μ une mesure σ-finie sur $(E, \mathcal{A})$ et ν une mesure σ-finie sur $(F, \mathcal{B})$.

(ii) Pour tout $C \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$, $\mu \otimes \nu(C) = \int_E \nu(C_x)\ \mu(dx) = \int_F \mu(C^y)\ \nu(dy)$.

Existence : Evaluation de $m : C \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \to \int_E \nu(C_x)\ \mu(dx)$ sur les pavés $A \times B$ avec $(A, B) \in \mathcal{A} \times \mathcal{B}$.

Mesure produit

Soient μ une mesure σ-finie sur $(E, \mathcal{A})$ et ν une mesure σ-finie sur $(F, \mathcal{B})$.

(i) Il existe une unique mesure m sur $(E \times F, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B})$ telle que : $\forall A \in \mathcal{A}, \forall B \in \mathcal{B}, \quad m(A \times B) = \mu(A)\nu(B)$.
(avec la convention $0.\infty = 0$).
La mesure m est σ-finie et notée $m = \mu \otimes \nu$.

(ii) Pour tout $C \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$, $$\mu \otimes \nu(C) = \int_E \nu(C_x)\ \mu(dx) = \int_F \mu(C^y)\ \nu(dy).$$

Rem : Le caractère σ-fini est essentiel.

Application à l'indépendance de variables aléatoires

Rappel (Amphi 3, 44/54) : Deux événements A et B d'un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ sont **indépendants** si

$$\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B).$$

Définition VII.1.5 (Indépendance de variables aléatoires)

Les variables aléatoires $X : \Omega \to (E, \mathcal{A})$ *et* $Y : \Omega \to (F, \mathcal{B})$ *sont dites* ***indépendantes*** *si*

$$\forall A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}, \quad \underbrace{\mathbf{P}(X \in A, Y \in B)}_{\mathbf{P}(X^{-1}(A) \cap Y^{-1}(B))} = \mathbf{P}(X \in A)\ \mathbf{P}(Y \in B).$$

Application à l'indépendance de variables aléatoires

Proposition VII.1.6

Soient (X, Y) un couple de variables aléatoires à valeurs dans $E \times F$ muni de la tribu produit $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$.
Les deux assertions suivantes sont équivalentes :

(i) *X et Y sont indépendantes ;*

(ii) *la loi jointe $P_{(X,Y)}$ du couple (X, Y) est égale à la mesure produit $P_X \otimes P_Y$.*

Application à l'indépendance de variables aléatoires

Proposition VII.1.7 (Admis)

Les variables aléatoires réelles X et Y sont indépendantes si et seulement si leurs fonctions de répartition vérifient

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad F_{(X,Y)}(x,y) = F_X(x)\ F_Y(y).$$

Théorème VII.1.8 (Admis)

Soit (X,Y) un vecteur aléatoire dont la loi admet une densité par rapport à la mesure de Lebesgue.
Les variables aléatoires X et Y sont indépendantes si et seulement si leurs densités de probabilité vérifient presque partout

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f_{(X,Y)}(x,y) = f_X(x)\ f_Y(y).$$

Espaces L^p

Pour tout $p \geq 1$,

$$\mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{T}, \mu) = \left\{ f : \Omega \to \mathbb{R} \text{ mesurable } : \int |f|^p . d\mu < \infty \right\}$$

Dans $L^p(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$, on identifie les fonctions de $\mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ qui sont égales μ-pp.

Pour $f : \Omega \to \mathbb{R}$ mesurable, pour tout $p \in [1, \infty[$, on note

$$\|f\|_p = \left(\int |f|^p . d\mu \right)^{1/p} \quad \text{avec la convention } \infty^{1/p} = \infty$$

Espaces L^p

Théorème VII.2.1 (Admis, inégalité de Minkowski)

Soit $p \in [1, \infty]$ et soient $f, g \in L^p(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$.
Alors, on a $f + g \in L^p(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ et $\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$.

Théorème VII.2.2 (Riesz)

Pour tout $p \in [1, \infty]$, l'espace $L^p(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ muni de la norme $f \mapsto \|f\|_p$ est un espace vectoriel normé complet (espace de Banach).

- Voir **TD Exercice II.5** (complétude de $\ell^2(\mathbb{N})$).

Construction de $\mathcal{I}_{\mu\otimes\nu}(f) = \int_{E\times F} f(x)\ \mu\otimes\nu(dx)$, pour une mesure $\mu\otimes\nu$ définie sur $\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$ et $f\colon (E\times F, \mathcal{A}\otimes\mathcal{B}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ mesurable.

Construction de $\mathcal{I}_{\mu\otimes\nu}(f) = \displaystyle\int_{E\times F} f(x)\ \mu\otimes\nu(dx)$, pour une mesure $\mu\otimes\nu$ définie sur $\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$ et $f\colon (E\times F, \mathcal{A}\otimes\mathcal{B}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ mesurable.

- Pour $f = \sum_{i=1}^n \alpha_i\ \mathbf{1}_{A_i}$, où $A_i \in \mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$ et $\alpha_i \in \mathbb{R}_+$ pour tout $1 \leq i \leq n$,

$$\mathcal{I}_{\mu\otimes\nu}(f) = \int_{E\times F} f(x)\ \mu\otimes\nu(dx) := \sum_{i=1}^n \alpha_i\ \mu\otimes\nu(A_i).$$

Construction de $\mathcal{I}_{\mu\otimes\nu}(f) = \int_{E\times F} f(x)\ \mu\otimes\nu(dx)$, pour une mesure $\mu\otimes\nu$ définie sur $\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$ et $f\colon (E\times F, \mathcal{A}\otimes\mathcal{B}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ mesurable.

- Pour $f = \sum_{i=1}^n \alpha_i\ \mathbf{1}_{A_i}$, où $A_i \in \mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$ et $\alpha_i \in \mathbb{R}_+$ pour tout $1 \leq i \leq n$,

$$\mathcal{I}_{\mu\otimes\nu}(f) = \int_{E\times F} f(x)\ \mu\otimes\nu(dx) := \sum_{i=1}^n \alpha_i\ \mu\otimes\nu(A_i).$$

- Pour tout $f\colon (E\times F, \mathcal{A}\otimes\mathcal{B}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ mesurable **positive**,

$$\mathcal{I}_{\mu\otimes\nu}(f) := \text{sup}\left\{\mathcal{I}_{\mu\otimes\nu}(\varphi);\ \varphi \text{ étagée telle que } \varphi \leq f\right\}.$$

Construction de $\mathcal{I}_{\mu\otimes\nu}(f) = \int_{E\times F} f(x)\ \mu\otimes\nu(dx)$, pour une mesure $\mu\otimes\nu$ définie sur $\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$ et $f\colon (E\times F, \mathcal{A}\otimes\mathcal{B}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ mesurable.

- Pour $f = \sum_{i=1}^n \alpha_i\ \mathbf{1}_{A_i}$, où $A_i \in \mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$ et $\alpha_i \in \mathbb{R}_+$ pour tout $1 \leq i \leq n$,

$$\mathcal{I}_{\mu\otimes\nu}(f) = \int_{E\times F} f(x)\ \mu\otimes\nu(dx) := \sum_{i=1}^n \alpha_i\ \mu\otimes\nu(A_i).$$

- Pour tout $f\colon (E\times F, \mathcal{A}\otimes\mathcal{B}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ mesurable **positive**,

$$\mathcal{I}_{\mu\otimes\nu}(f) := \sup\left\{\mathcal{I}_{\mu\otimes\nu}(\varphi);\ \varphi \text{ étagée telle que } \varphi \leq f\right\}.$$

- Pour tout $f\colon (E\times F, \mathcal{A}\otimes\mathcal{B}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ mesurable,

$$f \in L^1(E\times F, \mu\otimes\nu) \Leftrightarrow \mathcal{I}_{\mu\otimes\nu}(|f|) < +\infty.$$

  On pose $\mathcal{I}_{\mu\otimes\nu}(f) := \mathcal{I}_{\mu\otimes\nu}(f^+) - \mathcal{I}_{\mu\otimes\nu}(f^-)$, où $f^+ = \max(f, 0)$ et $f^- = -\min(f, 0)$.

Changement de variables

Dans le cas de la mesure de Lebesgue $\lambda^{(N)} = \lambda \otimes \cdots \otimes \lambda$ sur $\mathbb{R}^N$.

Le jacobien de $\Phi : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ est noté $J\Phi(x) = \det\left[\left(\frac{\partial \Phi_j}{\partial x_i}(x)\right)_{i,j}\right]$,

où $\Phi(x) = (\Phi_1(x), \ldots, \Phi_N(x))$ avec $x \in \mathbb{R}^N$.

Théorème VII.2.3 (Admis, changement de variables)

Soient U et V ouverts de $\mathbb{R}^N$. Soit Φ un C^1-difféomorphisme de V sur U, de jacobien $J\Phi$.

Soit f une fonction borélienne définie sur U.

Alors, f est intégrable sur U si et seulement si $f \circ \Phi.|J\Phi|$ est intégrable sur V.

Dans ce cas, on a $\int_U f(y)\ \lambda(dy) = \int_V f \circ \Phi(x).|J\Phi(x)|\ \lambda(dx).$

Théorème VII.2.4 (Fubini-Tonelli)

Soient μ une mesure σ-finie sur $(E, \mathcal{A})$ et ν une mesure σ-finie sur $(F, \mathcal{B})$.
Soit $f : E \times F \to [0, \infty]$ une fonction mesurable.

(i) *La fonction $x \mapsto \int f(x, y)\ \nu(dy)$ est $\mathcal{A}$-mesurable et la fonction $y \mapsto \int f(x, y)\ \mu(dx)$ est $\mathcal{B}$-mesurable.*

(ii)

$$\int_{E\times F} f(x, y)\ \mu \otimes \nu(dx, dy) = \int_E \left(\int_F f(x, y)\ \nu(dy) \right) \mu(dx)$$
$$= \int_F \left(\int_E f(x, y)\ \mu(dx) \right) \nu(dy).$$

Soient μ une mesure σ-finie sur $(E, \mathcal{A})$ et ν une mesure σ-finie sur $(F, \mathcal{B})$.
Soit $f : E \times F \to [0, \infty]$ une fonction mesurable.

(i) La fonction $x \mapsto \displaystyle\int f(x, y)\ \nu(dy)$ est $\mathcal{A}$-mesurable et la fonction $y \mapsto \displaystyle\int f(x, y)\ \mu(dx)$ est $\mathcal{B}$-mesurable.

Soient μ une mesure σ-finie sur $(E, \mathcal{A})$ et ν une mesure σ-finie sur $(F, \mathcal{B})$.
Soit $f : E \times F \to [0, \infty]$ une fonction mesurable.

(ii)

$$\begin{aligned}\int_{E\times F} f(x, y)\ \mu \otimes \nu(dx, dy) &= \int_E \left(\int_F f(x, y)\ \nu(dy) \right) \mu(dx) \\ &= \int_F \left(\int_E f(x, y)\ \mu(dx) \right) \nu(dy).\end{aligned}$$

Avec les mêmes hypothèses sur μ et ν

Théorème VII.2.5 (Fubini-Lebesgue)

Soit $f \in \mathcal{L}^1(E \times F, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}, \mu \otimes \nu)$. Alors, on a :

(i) *Pour μ-presque tout x, $y \mapsto f(x,y)$ est dans $\mathcal{L}^1(F, \mathcal{B}, \nu)$*
Pour ν-presque tout y, $x \mapsto f(x,y)$ est dans $\mathcal{L}^1(E, \mathcal{A}, \mu)$.

(ii) *Les fonctions $x \mapsto \int f(x,y)\ \nu(dy)$ et $y \mapsto \int f(x,y)\ \mu(dx)$ sont bien définies (sauf sur un ensemble de mesure nulle) et sont respectivement dans $\mathcal{L}^1(E, \mathcal{A}, \mu)$ et $\mathcal{L}^1(F, \mathcal{B}, \nu)$.*

(iii)

$$\int_{E\times F} f(x,y)\ \mu \otimes \nu(dx,dy) = \int_E \left(\int_F f(x,y)\ \nu(dy) \right) \mu(dx) = \int_F \left(\int_E f(x,y)\ \mu(dx) \right) \nu(dy).$$

Soit $f \in \mathcal{L}^1(E \times F, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}, \mu \otimes \nu)$. Alors, on a :

(i) Pour μ-presque tout x, $y \mapsto f(x, y)$ est dans $\mathcal{L}^1(F, \mathcal{B}, \nu)$
Pour ν-presque tout y, $x \mapsto f(x, y)$ est dans $\mathcal{L}^1(E, \mathcal{A}, \mu)$.

Soit $f \in \mathcal{L}^1(E \times F, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}, \mu \otimes \nu)$. Alors, on a :

(ii) Les fonctions $x \mapsto \int f(x,y)\ \nu(dy)$ et $y \mapsto \int f(x,y)\ \mu(dx)$ sont bien définies (sauf sur un ensemble de mesure nulle) et sont respectivement dans $\mathcal{L}^1(E, \mathcal{A}, \mu)$ et $\mathcal{L}^1(F, \mathcal{B}, \nu)$.

Soit $f \in \mathcal{L}^1(E \times F, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}, \mu \otimes \nu)$. Alors, on a :

(iii)

$$\begin{aligned}\int_{E\times F} f(x,y)\ \mu\otimes\nu(dx,dy) &= \int_E \left(\int_F f(x,y)\ \nu(dy)\right) \mu(dx) \\ &= \int_F \left(\int_E f(x,y)\ \mu(dx)\right) \nu(dy).\end{aligned}$$

Définition VII.2.6 (Fonction caractéristique)

La **fonction caractéristique** *d'une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{R}^N$ est l'application $\varphi_X : \mathbb{R}^N \to \mathbb{C}$ définie par*

$$t \mapsto \varphi_X(t) = \mathbf{E}\left[e^{i\langle t,X\rangle}\right] = \int_{\mathbb{R}^N} e^{i\langle t,x\rangle} P_X(dx)$$

Théorème VII.2.7

Les v.a. réelles $X_1, \dots, X_N$ sont indépendantes si et seulement si leurs fonctions caractéristiques vérifient

$$\forall t \in \mathbb{R}^N, \quad \varphi_X(t) = \prod_{k=1}^{N} \varphi_{X_k}(t_k)$$

où $X = (X_1, \dots, X_N)$.

Produit de convolution

Soient f et g deux fonctions mesurables sur $\mathbb{R}^N$.

On considère $\forall x \in \mathbb{R}^N, \quad f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^N} f(x-y)g(y)\ \lambda(dy)$.

Théorème VII.3.1

Soient $f, g \in L^1(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N), \lambda)$.
Alors pour λ-presque tout $x \in \mathbb{R}^N$, $f * g(x)$ est bien définie.
De plus, $f * g \in L^1$ et $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1\ \|g\|_1$.

Proposition VII.3.2 (Admis)

Soient $p \in [1, +\infty[$ *et* $q \in]1, +\infty[$ *tels que* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.
Soient $f \in L^p$ *et* $g \in L^q$. *Alors pour* $x \in \mathbb{R}^N$, $f * g(x)$ *est bien définie et la fonction* $f * g$ *est uniformément continue et bornée sur* $\mathbb{R}^N$.

Approximation de la mesure de Dirac

Définition VII.3.3 (Suite régularisante)

Une suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $C_c(\mathbb{R}^N)$ (fonctions continues à support compact) est une approximation de δ_0 si :

- *Il existe un compact K tel que supp $\varphi_n \subset K$ pour tout n*
- $\forall n$, $\varphi_n \geq 0$ *et* $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} \varphi_n . d\lambda = 1$.
- $\forall \delta > 0$, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_{\{|x|>\delta\}} \varphi_n(x)\ \lambda(dx) = 0$.

Approximation de la mesure de Dirac

Définition VII.3.3 (Suite régularisante)

Une suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $C_c(\mathbb{R}^N)$ (fonctions continues à support compact) est une approximation de δ_0 si :

- *Il existe un compact K tel que supp $\varphi_n \subset K$ pour tout n*
- $\forall n$, $\varphi_n \geq 0$ *et* $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} \varphi_n . d\lambda = 1$.
- $\forall \delta > 0$, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_{\{|x|>\delta\}} \varphi_n(x)\ \lambda(dx) = 0$.

Exemple : Si $\varphi : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ est continue à support compact tel que $\int \varphi d\lambda = 1$, alors on pose : $\forall n, \quad \varphi_n(x) = n^N\ \varphi(nx)$.

Densité dans L^p

Proposition VII.3.4

Soit $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une approximation de* δ_0*.*

(i) *Si* $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ *est continue, on a* $\varphi_n * f \to f$ *uniformément sur tout compact.*

(ii) *Si* $f \in L^p$*, avec* $p \in [1, +\infty[$*, on a* $\varphi_n * f \to f$ *dans* L^p*.*

Densité dans L^p

Théorème VII.3.5

Pour Ω ouvert connexe de $\mathbb{R}^N$, l'ensemble $\mathcal{D}(\Omega) = C_c^\infty(\Omega)$ est dense dans $L^p(\Omega, \lambda)$ pour $p \in [1, +\infty[$.

Objectifs de la séance

- Je connais la notion de **tribu produit (def. VII.1.1)**.
- Je connais la caractérisation de la **mesure produit (th. VII.1.1)**, par ses valeurs sur les **produits cartésiens**.
- Je suis capable de vérifier qu'une fonction de plusieurs variables est **mesurable** et **intégrable**.
- Je maîtrise l'application des théorèmes de **Fubini-Tonelli (th. VII.2.4)** et **Fubini-Lebesgue (th. VII.2.5)**, pour calculer des intégrales de fonctions de plusieurs variables.
- Je suis capable d'appliquer l'intégration par rapport à une mesure produit, au cas particulier des **lois de variables aléatoires (prop. VII.1.6)**.
- Je sais effectuer un **changement de variables (th. VII.2.3)** dans une intégrale multiple.

Références bibliographiques

- T. Gallouët, R. Herbin. *Mesure, intégration, probabilités*.
  https://www.i2m.univ-amu.fr/perso/thierry.gallouet/licence.d/mes-int-pro.pdf
- O. Garet. *Intégration et probabilités*.
  http://www.iecl.univ-lorraine.fr/~Olivier.Garet/cours/ip/ip-2016-2017.pdf
- J.-F. Le Gall. *Intégration, probabilités et processus aléatoires*.
  https://www.math.u-psud.fr/~jflegall/IPPA2.pdf
- W. Rudin. *Real and Complex Analysis*. McGraw-Hill.