# Cours de Convergence, Intégration, Probabilités

## Séance XI - Convergence de variables aléatoires.

CentraleSupélec - Cursus ingénieur

3 décembre 2019

## Amphis CIP 10, 11, 12


- Ludovic Goudenège

  Chargé de Recherche CNRS

  Fédération de Mathématiques de CentraleSupélec.

  Bâtiment Bouygues. Laboratoire MICS. Bureau SC.102.

  goudenege@math.cnrs.fr


## Des questions ?

- daskit.com/cip19-20 puis section “Amphi 11”.

## Support

- Support amphi XI en version vierge disponible dès à présent sur edunao.
- Support amphi XI en version annotée disponible ultérieurement.

# Quelques éléments des CMs et TDs précédents

- Théorème de transfert
- Théorème de convergence dominée
- Indépendance de variables aléatoires réelles

# Programme

- Notions de convergence de variables aléatoires
- Loi forte des grands nombres
- Convergence en loi
- Théorème Central Limite

# Objectifs de la séance

- je connais les différentes définitions de convergence d'une suite de v.a. : en probabilité, presque sûre, dans $L^p$
- je suis capable de montrer qu'une suite de variables aléatoires converge
- je suis capable d'appliquer la Loi des Grands Nombres, en vérifiant ses hypothèses précises
- je connais la notion de convergence en loi
- je suis capable d'appliquer le Théorème Central Limite, en vérifiant ses hypothèses précises
- je sais exprimer la différence entre les conclusions de la Loi des Grands Nombres et celles du Théorème Central Limite

## Exemple introductif : lancer d'un dé

- Résultat du lancer d'un dé : $X \in \{1, \dots, 6\}$.
- Pour $n \geq 1$ lancers successifs : $X_1, \dots, X_n$.

*Quelle proportion de 6 obtient-on au cours de n lancers, lorsque $n \to \infty$ ?*

## Exemple introductif : lancer d'un dé

- Résultat du lancer d'un dé : $X \in \{1, \ldots, 6\}$.
- Pour $n \geq 1$ lancers successifs : $X_1, \ldots, X_n$.

*Quelle proportion de 6 obtient-on au cours de n lancers, lorsque $n \to \infty$ ?*

$$\frac{\#\{k \leq n : X_k = 6\}}{n} \to \frac{1}{6}$$

lorsque $n \to \infty$

## Exemple introductif : lancer d'un dé

- Résultat du lancer d'un dé : $X \in \{1, \ldots, 6\}$.
- Pour $n \geq 1$ lancers successifs : $X_1, \ldots, X_n$.

*Quelle proportion de 6 obtient-on au cours de n lancers, lorsque $n \to \infty$ ?*

$$\frac{\#\{k \leq n : X_k = 6\}}{n} \to \frac{1}{6}$$

lorsque $n \to \infty$

- Les $X_k$ étant des variables aléatoires, quelle signification peut-on donner à cette convergence ?
- Quel est le lien entre cette proportion et l'interprétation intuitive de la probabilité ?
- Peut-on obtenir des informations sur la vitesse de convergence ?

## Rappel : convergence d'une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions $E \to \mathbb{R}$ vers $f : E \to \mathbb{R}$

- Convergence simple :

$$\forall x \in E, \quad f_n(x) \to f(x)$$

- Convergence uniforme :

$$\|f_n - f\|_\infty = \sup_{x\in E} |f_n(x) - f(x)| \to 0$$

- Convergence presque partout :

$$\lambda\big(\{x \in E : f_n(x) \to f(x)\}^c\big) = 0$$

- Convergence dans $L^p$ :

$$\|f_n - f\|_{L^p} = \left(\int_{\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)|^p \; \lambda(dx)\right)^{1/p} \to 0$$

## Définition XI.1.1 (Convergence presque sure)

*Soit* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *un espace de probabilité. On dit qu'une suite de v.a. réelles* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge presque surement** *vers une v.a.* $X$ *s'il existe* $\Omega^* \in \mathcal{F}$ *tel que* $\mathbb{P}(\Omega^*) = 1$ *et*

$$\boxed{\forall \omega \in \Omega^*,} \quad \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega),$$

*c'est-à-dire si*

$$\boxed{\mathbb{P}\left(\left\{\omega \in \Omega : \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)\right\}\right)} = 1. \geq 1 - \varepsilon$$

*On note*

$$\lim_{n\to\infty} X_n = X \quad p.s. \qquad ou \qquad X_n \xrightarrow{p.s.} X \quad p.s.$$

## Définition XI.1.2 (Convergence dans $\mathbf{L}^p$)

*On dit qu'une suite de v.a. réelles* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge dans $\mathbf{L}^p$** *(où* $p \geq 1$*) vers une v.a.* $X$ *si*

- *les v.a.* $X$ *et* $X_n$ *(pour* $n \in \mathbb{N}$*) sont dans* $\boxed{\mathbf{L}^p(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})}$ *;*
- *et* $\lim_{n\to\infty} \boxed{\mathbf{E}[|X_n - X|^p]} = 0$.

*On note*

$$X_n \overset{\mathbf{L}^p}{\to} X.$$

## Définition XI.1.3 (Convergence en probabilité)

*On dit qu'une suite de v.a. réelles $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$* **converge en probabilité** *vers une v.a. $X$ si pour tout $\epsilon > 0$, on a*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\boxed{\{\omega : |X_n(\omega) - X(\omega)| > \epsilon\}}\right) = 0,$$

$\Omega_n^{\varepsilon}$

*qui s'écrit plus simplement*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(|X_n - X| > \epsilon) = 0.$$

*On note*

$$X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X.$$

# Propriétés des limites

Les limites définies par les convergences presque sûre, dans $\mathbf{L}^p$ et en probabilité vérifient les propriétés usuelles des limites :

- Unicité de la limite ;
- Linéarité ;
- Passage à la limite dans les inégalités.

# Propriétés des limites

**Théorème XI.1.4**

*Soient $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de v.a. réelles et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application* **continue**.

- *Si $X_n \to X$ p.s. alors $f(X_n) \to f(X)$ p.s.*
- *Si $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$ alors $f(X_n) \xrightarrow{\mathbb{P}} f(X)$.*

$$\mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

$$\{|f(X_n) - f(X)| > \varepsilon\} \subset \{|\delta_n| > \varepsilon, |X| \leq t\}$$
$$\cup \{|X| \geq t\}$$

Sur $[-t,t]$ $\boxed{\exists\, \delta} > 0$

$\forall x, y \in [-t,t]$ $|x-y| < \delta \Rightarrow |f(x)-f(y)| < \varepsilon$

$\{ |f(X_n) - f(X)| > \varepsilon, |X| \le t \}$

$\subset \{ |X_n - X| > \delta, |X| \le t \} \subset \{ |X_n - X| > \delta \}$

$\boxed{\{ |f(X_n) - f(X)| > \varepsilon \}} \subset \{ |X_n - X| > \delta \} \cup \{ |X| \geq t \}$

$P(\Omega_n^{\delta}) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ $\quad$ $\mathbb{P}(\,'' \,) \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0$ $< \gamma$

$\forall \gamma > 0 \quad \exists t$

$\limsup_{n \to +\infty} P(\quad) \le 0 + \gamma$

# Propriétés des limites

**Théorème XI.1.5**

*Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de v.a. réelles. On a l'équivalence*

$$\boxed{X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X} \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \mathbf{E}\left(\frac{|X_n - X|}{1+|X_n - X|}\right) = 0.$$

Supposons $X=0$ Soit $\varepsilon>0$

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} E\left[\frac{|X_n|}{1+|X_n|}\right]} \leq \underbrace{\frac{|X_n|}{1+|X_n|}}_{\leq 1} \mathbb{1}_{|X_n|\geq\varepsilon} + \varepsilon \, \mathbb{1}_{|X_n|\leq\varepsilon}$$

$$\leq \lim \mathbb{P}(|X_n|\geq\varepsilon) + \varepsilon \, \cancel{\mathbb{P}(|X_n|\leq\varepsilon)} \leq \boxed{\varepsilon}$$

$\Longleftarrow \quad \mathbb{P}(|X_n| > \varepsilon)\,?$

$$\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\,\mathbb{1}_{|X_n|>\varepsilon} \leq \frac{|X_n|}{1+|X_n|}\,\mathbb{1}_{|X_n|\geq\varepsilon} \leq \frac{|X_n|}{1+|X_n|}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\,\mathbb{P}(|X_n|\geq\varepsilon) \leq \lim_{n\to+\infty} E\left[\frac{|X_n|}{1+|X_n|}\right] = 0$$

$$\mathbb{P}(|X_n|\geq\varepsilon) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

$E[|X|^p] < +\infty$

$E|X_n - X|^p \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

$E|X_n|^p \longrightarrow E|X|^p$

**Théorème XI.1.6**

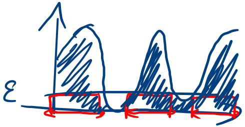
*Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de v.a. réelles.*

- *Si $X_n \xrightarrow{\mathbf{L}^p} X$, alors $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$.*
- *Si $X_n \to X$ p.s., alors $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$.*

Soit $\varepsilon > 0$

$\underline{\mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon)} \leq \dfrac{E|X_n - X|^p}{\varepsilon^p} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

$\varepsilon^p \int_\Omega \mathbb{1}_{|X_n - X|^p > \varepsilon^p} \leq E|X_n - X|^p$



$$X_n \xrightarrow{p.s.} X \implies X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$$

$$\iff \mathbb{E}\left[\frac{|X_n - X|}{1+|X_n - X|}\right] \longrightarrow 0$$

$C^0(\mathbb{R}_+)$

$\frac{x}{1+x}$

$\boxed{\text{Th CVD}}$

$$\forall \quad \frac{|X_n - X|}{1+|X_n - X|} \leq \cancel{|X_n - X|}$$

$$\leq 1 \qquad \mathbb{E}[1] = 1 < +\infty$$

$$\forall \quad \frac{|X_n - X|}{1+|X_n - X|} \xrightarrow{p.s.} 0 \implies \mathbb{E}\left[\frac{|X_n - X|}{1+|X_n - X|}\right] \longrightarrow 0$$

$$\text{p.s.} \Longrightarrow \mathbb{P}$$
$$\xLeftarrow[\text{extraction}]{}$$

### Théorème XI.1.7

*Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de v.a. réelles. Si $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$, alors il existe une suite extraite $(X_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ qui converge p.s. vers $X$.*

$L^p \Rightarrow \mathbb{P}$

## Théorème XI.1.8

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de v.a. réelles. *Si $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$ et s'il existe une v.a. $\boxed{Y \in \mathbf{L}^p(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})}$ telle que $\boxed{|X_n| \leq Y}$ pour tout $n$, alors $\boxed{X \in \mathbf{L}^p(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})}$ et $\boxed{X_n \xrightarrow{\mathbf{L}^p} X}$*

$X_k = \begin{cases} 1 & \text{si on fait } 6 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

$\frac{\#\{k \le n, X_k = 6\}}{n} \to E[X_1]$

$= 1 \cdot P(X_1 = 6) + 0 \cdot P(X_1 \neq 6)$

$= 1/6$

p.s.

## Théorème XI.2.1 (Loi forte des grands nombres)

*Soit* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de v.a. réelles* **indépendantes et identiquement distribuées (i.i.d.)** *et définies sur le même espace de probabilité* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. *Les deux conditions suivantes sont équivalentes.*

(i) *Il existe* $\mu \in \mathbb{R}$ *telle que* $\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^n X_k}{n} = \mu$ *p.s.*

(ii) $\boxed{\mathbf{E}[|X_k|] < +\infty}$ $\forall k \in \mathbb{N}$.

*Dans ce cas, on a* $\mathbf{E}[X_k] = \mu$ *pour tout* $k \in \mathbb{N}$.

$\Leftrightarrow E[|X_1|] < +\infty$ $\quad X_k \in L^1$

$E[X_1] = \mu$

## Théorème XI.2.2 (Loi forte des grands nombres (bis))

*Soit* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de v.a. réelles* **indépendantes et identiquement distribuées (i.i.d.)** *et définies sur le même espace de probabilité* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$*.*
*On pose* $\mu = \mathbf{E}[X_0]$ *et* $\sigma^2 = \mathrm{Var}(X_0) < \infty$*.*
*La variable aléatoire* $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$ *vérifie*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} = \mu \qquad p.s.$$

*La convergence a lieu également dans* $\boxed{\mathbf{L}^2}$*.*

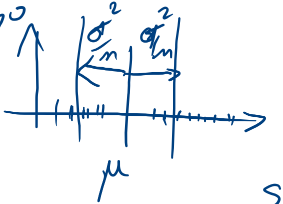
$$E[S_n] = \sum_{i=1}^{n} E[X_i] = \mu \times n$$

$$E\left[\frac{S_n}{n}\right] = \mu$$

$$Var(S_n) = \sum_{i=1}^{n} Var(X_i) = n\sigma^2$$

$$Var\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{\sigma^2}{n}$$

Soit $\varepsilon > 0$




$$P\left(\left|\frac{S_n}{n} - \mu\right| > \varepsilon\right) \le \frac{E\left(\frac{S_n}{n} - \mu\right)^2}{\varepsilon^2} = \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{P} \mu$$

$$E\left[\left(\frac{S_n}{n} - \mu\right)^2\right] = \frac{\sigma^2}{n} \longrightarrow 0 \qquad \frac{S_n}{n} \xrightarrow{L^2} \mu$$

**Méthode de Monte Carlo : calcul d'une intégrale par des simulations de variables aléatoires (Applications en finance, contrôle, optimisation, etc.)**

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ dans $\mathbf{L}^1(\mathbb{R})$. On cherche à calculer

$$\int_{[0,1]} f(x)\ \lambda(dx).$$

**Méthode de Monte Carlo : calcul d'une intégrale par des simulations de variables aléatoires (Applications en finance, contrôle, optimisation, etc.)**

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ dans $\mathbf{L}^1(\mathbb{R})$. On cherche à calculer $\int_{[0,1]} f(x)\ \lambda(dx)$.

Transfert

- Soit $U$ une v.a. uniforme sur $[0,1]$,

$$\mathbb{P}(U \in B) = \int_B \mathbb{1}_{[0,1]}(x)\lambda(dx) \quad \text{et} \quad \boxed{\mathbf{E}[f(U)]} = \int_{[0,1]} f(x)\lambda(dx)$$

## Méthode de Monte Carlo : calcul d'une intégrale par des simulations de variables aléatoires (Applications en finance, contrôle, optimisation, etc.)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ dans $\mathbf{L}^1(\mathbb{R})$. On cherche à calculer $\int_{[0,1]} f(x)\ \lambda(dx)$.

- Soit $U$ une v.a. uniforme sur $[0,1]$,

$$\mathbb{P}(U \in B) = \int_B \mathbb{1}_{[0,1]}(x)\lambda(dx) \quad \text{et} \quad \mathbf{E}[f(U)] = \int_{[0,1]} f(x)\lambda(dx)$$

- Soit $(U_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite i.i.d. de même loi que $U$.
La loi forte des grands nombres dit


$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(U_i) = \mathbf{E}[f(U)] = \int_{[0,1]} f(x)\lambda(dx)$$

presque surement.

## Définition XI.3.1

*Soient* $(\nu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $\nu$ *des mesures de probabilité sur* $\mathbb{R}^d$.
*On dit que* $(\nu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge faiblement** *vers* $\nu$ *si*

$$\int_{\mathbb{R}^N} f(x)\ \nu_n(dx) \to \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\ \nu(dx) \quad \textit{quand } n \to \infty,$$

*pour toute application* $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ *continue et bornée.*

## Définition XI.3.1

*Soient $(\nu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\nu$ des mesures de probabilité sur $\mathbb{R}^d$.*
*On dit que $(\nu_n)_{n\in\mathbb{N}}$* **converge faiblement** *vers $\nu$ si*

$$\int_{\mathbb{R}^N} f(x)\,\nu_n(dx) \to \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\,\nu(dx) \quad \textit{quand } n \to \infty,$$

*pour toute application $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ continue et bornée.*

## Définition XI.3.2

*Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de v.a. à valeurs dans $\mathbb{R}^d$.*
*On dit que $X_n$* **converge en distribution (ou en loi)** *vers $X$ si la mesure de probabilité $P_{X_n}$ converge faiblement vers $P_X$.*
*On note $X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X$, $X_n \xrightarrow{d} X$, $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ or $X_n \Rightarrow X$*

## Théorème XI.3.3

*Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de v.a. à valeurs dans $\mathbb{R}^N$.*

*On a $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ si et seulement si*

$$\int_\Omega f(\omega)\, d\mathbb{P}_{X_n}(d\omega) = \boxed{\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}[f(X_n)] = \mathbf{E}[f(X)],} = \int_\Omega f(\omega)\, d\mathbb{P}_X(\omega)$$

*pour toute application $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ continue et bornée.*

$\mathbb{P} \Rightarrow \mathcal{L}$

## Théorème XI.3.4

*Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de v.a. à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ définies sur l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.*

$$X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X \Rightarrow X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X.$$

Soit $f$ $C^0$ bornée

$\mathbb{E}[f(X_n)] \to \mathbb{E}[f(X)]$

$f(X_n) \xrightarrow{\mathbb{P}} f(X)$

$f$ bornée

$\mathbb{P} \Rightarrow \mathcal{L}$

Il existe une réciproque partielle au résultat précédent.

## Théorème XI.3.5

*Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de v.a. à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ définies sur l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.*

$$\left.\begin{array}{l} X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X \text{ et} \\ X = \text{Constante} \quad p.s. \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X}$$

$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{p.s.} \mu$

$Y_n = (-1)^n X_n$

Linéarité

$(X_n) \to \frac{1}{2} \quad 1$

$\phantom{(X_n)} \to \frac{1}{2} \quad -1$

$\to X$

$\frac{X_n + Y_n}{2} = \begin{cases} X & n \text{ pair} \\ 0 & n \text{ impair} \end{cases}$

# Convergence en loi de v.a. discrètes

**Théorème XI.3.6**

*Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de v.a. à valeurs dans un espace discret $E$. Alors, $X_n$ converge en loi vers une v.a. $X$ si et seulement si*

$$\forall k \in E, \quad \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n = k) = \mathbb{P}(X = k).$$

$$\mathbb{E}[f(X_n)] = \sum f(k)\, \mathbb{P}(X_n = k)$$

$$\longrightarrow \sum f(k)\, \mathbb{P}(X = k)$$

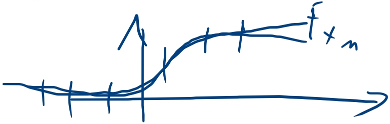
# Convergence en loi et fonctions de répartition

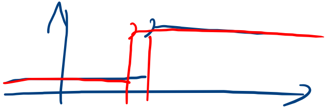
## Théorème XI.3.7

*Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de v.a. à valeurs dans $\mathbb{R}^N$. Alors, $X_n$ converge en loi vers une v.a. $X$ si et seulement si les fonctions de répartition $F_{X_n}$ et $F_X$ de $X_n$ et $X$ vérifient*

$$\boxed{\forall x \in D, \quad \lim_{n\to\infty} F_{X_n}(x) = F_X(x),}$$

*où $D = \{x \in \mathbb{R}^N : F_X(x-) = F_X(x)\}$ est l'ensemble des points de continuité de $F_X$.*



# Convergence en loi et fonctions caractéristiques

## Théorème XI.3.8

*Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de v.a. à valeurs dans $\mathbb{R}^N$. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *$X_n$ converge en loi vers la v.a. $X$.*

(ii) *La suite des fonctions caractéristiques $\varphi_{X_n}$ des $X_n$ converge simplement ~~vers une fonction $\phi$ qui est~~ $\boxed{\text{continue en } 0}$.*

*Dans ces cas $\varphi$ est la fonction caractéristique de $X$.* $= \varphi_X$

$$\varphi_{X_n} \longrightarrow \phi \quad C^0 \text{ en } 0$$

## Théorème XI.4.1 (Théorème Central Limite)

*Soit* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de v.a. réelles* **indépendantes et identiquement distribuées** *avec un* **moment d'ordre 2**.
*On note* $\mu = \mathbf{E}[X]$ *et* $\sigma^2 = \mathrm{Var}(X)$ *et on suppose* $0 < \sigma^2 < \infty$.
*En posant* $S_n = \sum_{j=1}^n X_j$, *on a*

$$\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \xrightarrow{\mathcal{L}} Y \quad \textit{variable aléatoire de loi } \mathcal{N}(0,1).$$

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow[L^2]{p.s.} \mu$$

$$\overbrace{\left(\frac{S_n}{n} - \mu\right)}^{\to 0} \overbrace{\frac{\sqrt{n}}{\sigma}}^{\to +\infty} \xrightarrow{\mathcal{L}} Y$$

$$\| $$

$$\frac{(S_n - n\mu)}{\sqrt{n}\,\sigma}$$

## Théorème XI.4.1 (Théorème Central Limite)

*Soit* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de v.a. réelles* **indépendantes et identiquement distribuées** *avec un* **moment d'ordre 2**.
*On note* $\mu = \mathbf{E}[X]$ *et* $\sigma^2 = \mathrm{Var}(X)$ *et on suppose* $0 < \sigma^2 < \infty$.
*En posant* $S_n = \sum_{j=1}^{n} X_j$, *on a*

$$\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \xrightarrow{\mathcal{L}} Y \quad \textit{variable aléatoire de loi } \mathcal{N}(0,1).$$

## LLN $\neq$ CLT

- **Loi des grands nombres** $\Rightarrow$ Convergence d'une $\boxed{\text{moyenne empirique}}$ de v.a. i.i.d. vers leur moyenne.
- **Théorème Central Limite** $\Rightarrow$ Résultat asymptotique sur la $\boxed{\text{loi}}$ des fluctuations de la moyenne empirique de v.a. i.i.d. autour de la vraie moyenne.

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de v.a. réelles **indépendantes et identiquement distribuées**.
On note $\mu = \mathbb{E}[X]$ et $\sigma^2 = \mathrm{Var}(X)$ et on suppose $0 < \sigma^2 < \infty$.
En posant $S_n = \sum_{j=1}^n X_j$,

$$\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \xrightarrow{\mathcal{L}} Y \quad \text{variable aléatoire de loi } \mathcal{N}(0,1).$$

**Preuve :** Quitte à considérer $\frac{X_n-\mu}{\sigma}$ à la place de $X_n$, on peut supposer que $\mu = 0$ et $\sigma = 1$. On pose alors $Y_n = \dfrac{S_n}{\sqrt{n}}$.
Par indépendance des $X_n$, la fonction caractéristique de $Y_n$ s'écrit :
$\forall u \in \mathbb{R}$,

$$\varphi_{Y_n}(u) = \varphi_{\sum X_j/\sqrt{n}}(u) = \varphi_{\sum X_j}(u/\sqrt{n}) = \prod_{j=1}^n \varphi_{X_j}\left(\frac{u}{\sqrt{n}}\right) = \left[\varphi_X\left(\frac{u}{\sqrt{n}}\right)\right]^n.$$

Comme $\mathbb{E}[X^2] < \infty$, $\varphi_X \in C^2(\mathbb{R})$ et

$$\forall u \in \mathbb{R}, \quad \varphi'_X(u) = i\,\mathbb{E}\left[X\ e^{iuX}\right], \qquad \varphi''_X(u) = -\mathbb{E}\left[X^2\ e^{iuX}\right].$$

D'où $\varphi'_X(0) = 0$ et $\varphi''_X(0) = -1$.

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de v.a. réelles **indépendantes et identiquement distribuées**.
On note $\mu = \mathbb{E}[X]$ et $\sigma^2 = \mathrm{Var}(X)$ et on suppose $0 < \sigma^2 < \infty$.
En posant $S_n = \sum_{j=1}^n X_j$,

$$\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \xrightarrow{\mathcal{L}} Y \quad \text{variable aléatoire de loi } \mathcal{N}(0,1).$$

**Preuve :** On en déduit le développement de Taylor de $\varphi$ à l'ordre 2 au voisinage de 0 : $\varphi_X(u) = 1 - \frac{u^2}{2} + o(u^2)$.
Pour chaque $u$ fixé, on a alors

$$\ln \varphi_{Y_n}(u) = n \ln \varphi_X\left(\frac{u}{\sqrt{n}}\right) \sim \left(-\frac{u^2}{2}\right), \quad n \to \infty.$$

En passant à l'exponentielle (attention à la justification), on en déduit

$$\varphi_{Y_n}(u) \sim \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right), \quad n \to \infty.$$

Le second membre est la fonction caractéristique de $\mathcal{N}(0,1)$. □

# Références


- E. Herbin. *Probabilités*. Polycopié de l'École CentraleSupélec. 2017-2018.
- J.-F. Le Gall. *Intégration, probabilités et processus aléatoires*. https://www.math.u-psud.fr/~jflegall/IPPA2.pdf