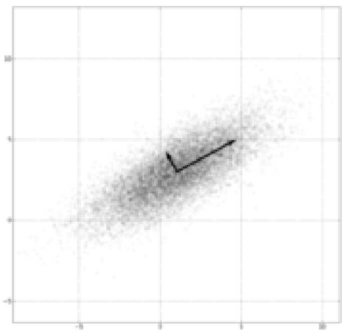
WIKIPEDIA

多元正态分布

维基百科，自由的百科全书

多变量正态分布亦称为**多变量高斯分布**。它是单维正态分布向多维的推广。它同矩阵正态分布有紧密的联系。



Many samples from a multivariate (bivariate) Gaussian distribution centered at (1,3) with a standard deviation of 3 in roughly the (0.878, 0.478) direction (longer vector) and of 1 in the second direction (shorter vector, orthogonal to the longer vector).

概率多变量函數

参数	$\boldsymbol{\mu} \in \mathbf{R}^N$ — 位置 $\boldsymbol{\Sigma} \in \mathbf{R}^{N\times N}$ — 协方差矩阵 (半正定)
支撑集	$\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{\mu}$+span($\boldsymbol{\Sigma}$) ⊆ $\mathbf{R}^N$
概率多变量函数	$(2\pi)^{-\frac{N}{2}}\lvert\boldsymbol{\Sigma}\rvert^{-\frac{1}{2}}\,e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})}$, （仅当 $\boldsymbol{\Sigma}$ 为正定矩阵时）
累積分佈函數	解析表达式不存在
期望值	$\boldsymbol{\mu}$
眾數	$\boldsymbol{\mu}$
方差	$\boldsymbol{\Sigma}$
信息熵	$\frac{1}{2}\ln((2\pi e)^N\lvert\boldsymbol{\Sigma}\rvert)$
動差生成函數	$\exp\left(\boldsymbol{\mu}'\mathbf{t}+\frac{1}{2}\mathbf{t}'\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{t}\right)$
特性函數	$\exp\left(i\boldsymbol{\mu}'\mathbf{t}-\frac{1}{2}\mathbf{t}'\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{t}\right)$

一般形式

N维随机向量 $X=[X_1,\dots,X_N]^T$ 如果服从多变量正态分布，必须满足下面的三个等價条件：

- 任何线性组合 $Y=a_1X_1+\cdots+a_NX_N$ 服从正态分布。
- 存在随机向量 $Z=[Z_1,\dots,Z_M]^T$ (它的每个元素服从独立标准正态分布），向量 $\mu=[\mu_1,\dots,\mu_N]^T$ 及 $N\times M$ 矩阵 A满足 $X=AZ+\mu$.
- 存在μ和一个对称半正定阵 Σ满足 X的特征函数

$$\phi_X\left(u;\mu,\Sigma\right)=\exp\left(i\mu^Tu-\frac{1}{2}u^T\Sigma u\right)$$

如果 Σ是非奇异的，那么该分布可以由以下的PDF来描述：[1]

$$f_{\mathbf{x}}(x_1,\ldots,x_k)=\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^k\lvert\boldsymbol{\Sigma}\rvert}}\exp\left(-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})\right),$$

注意这里的|Σ|表示协方差矩阵的行列式。

二元的情况

在二维非奇异的情况下（k = rank(Σ) = 2），向量 [X Y]′ 的概率密度函数为：

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left(-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_X)^2}{\sigma_X^2}+\frac{(y-\mu_Y)^2}{\sigma_Y^2}-\frac{2\rho(x-\mu_X)(y-\mu_Y)}{\sigma_X\sigma_Y}\right]\right)$$

其中 ρ 是 X 与 Y 之间的相关系数，$\sigma_X>0$ 且 $\sigma_Y>0$。在这种情况下，

$$\boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} \mu_X \\ \mu_Y \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_X^2 & \rho\sigma_X\sigma_Y \\ \rho\sigma_X\sigma_Y & \sigma_Y^2 \end{pmatrix}.$$

參考資料

1. UIUC, Lecture 21. *The Multivariate Normal Distribution* (http://www.math.uiuc.edu/~r-ash/Stat/StatLec21-25.pdf), 21.5:"Finding the Density".