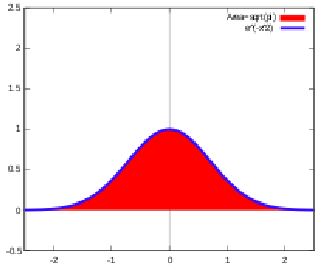
WIKIPEDIA

高斯积分

维基百科，自由的百科全书

高斯积分（英語：Gaussian integral），有时也被称为**概率积分**，是高斯函数（e^{-x^2}）在整个實數線上的积分。它是依德国数学家兼物理学家卡爾·弗里德里希·高斯之姓氏所命名。



$f(x) = e^{-x^2}$ 的图像，这个函数与 x 轴之间的面积等于 $\sqrt{\pi}$。

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$$

这个积分用处很广。例如，在变量略有变化的情况下，它用于计算正态分布的归一化常数。还是这个积分，在极限为有限值的时候，与正态分布的误差函数和累积分布函数密切相关。在物理学中，这种积分经常出现，例如在量子力学中，为了求谐振子基态的概率密度，以及在路径积分公式中，求谐振子的传播子，我们都要用到这个积分。

尽管误差函数不存在初等函数，但可以通过Risch算法证明，高斯积分可以通过多元微积分方法分析求解。下面这个不定积分

$$\int e^{-x^2}\,dx,$$

无法用初等函数表示，但可以计算定积分

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx$$

任意高斯函数的定积分为

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a(x+b)^2}\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}.$$

在物理学中，经常用到高斯积分；而在量子场论中会用到许多该积分的推广形式。

目录

计算方式
- 通过极限计算

与Γ函数的关系

一般化
- 高斯函数的积分
- n维和泛函一般化
- 带线性项的n维
- 形式相似的积分

另见

参考资料

计算方式

通过极限计算

要找到高斯积分的闭合形式首先从一个近似函数开始：

$$I(a) = \int_{-a}^{a} e^{-x^2}\,dx.$$

通过

$$\lim_{a\to\infty} I(a) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx.$$

可以找到积分。对I取平方获得

$$I^2(a)=\left(\int_{-a}^{a}e^{-x^2}\,dx\right)\cdot\left(\int_{-a}^{a}e^{-y^2}\,dy\right)=\int_{-a}^{a}\left(\int_{-a}^{a}e^{-y^2}\,dy\right)\,e^{-x^2}\,dx=\int_{-a}^{a}\int_{-a}^{a}e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy.$$

使用富比尼定理以上双重积分可以被看作是直角坐标系上一个顶点为$\{(-a,a),(a,a),(a,-a),(-a,-a)\}$的正方形的面积积分$\int e^{-(x^2+y^2)}\,d(x,y)$。

由于对任何实数来说指数函数均大于0，因此对于这个正方形内的内切圆的积分必须小于$I(a)^2$。类似地正方形的外接圆积分必须大于$I(a)^2$。通过从直角坐标系转化到极坐标系$x=r\cos\theta, y=r\sin\theta, d(x,y)=r\,d(r,\theta)$对这两个圆面的积分可以简单地计算出来：

$$\int_0^{2\pi}\int_0^a re^{-r^2}\,dr\,d\theta<I^2(a)<\int_0^{2\pi}\int_0^{a\sqrt{2}}re^{-r^2}\,dr\,d\theta.$$

积分得

$$\pi(1-e^{-a^2})<I^2(a)<\pi(1-e^{-2a^2}).$$

使用夹擠定理获得高斯积分

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}\,dx=\sqrt{\pi}.$$

与Γ函数的关系

由于被积分的函数是一个偶函数，

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}dx=2\int_0^{\infty}e^{-x^2}dx$$

通过替代变量它可以变成一个欧拉积分

$$\int_0^{\infty}e^{-t}\,t^{-\frac{1}{2}}dt\;=\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$$

这里 Γ是Γ函数。这说明了为什么一个半整数的階乘是$\sqrt{\pi}$的倍数。更广义地，

$$b\int_0^{\infty}e^{-ax^b}dx=a^{-\frac{1}{b}}\,\Gamma\left(\frac{1}{b}\right).$$

一般化

高斯函数的积分

任一高斯函数的积分都可以用以下的公式计算：

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-a(x+b)^2}\,dx=\sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

更为一般的形式为：

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty}e^{-ax^2+bx+c}\,dx=\sqrt{\frac{\pi}{a}}\,e^{\frac{b^2}{4a}+c}}$$

这一公式在计算有关正态分布的一些连续概率分布的数学期望的时候特别有用，例如对数正态分布。

n维和泛函一般化

令A为一个对称的、正定的（因而可逆）$n\times n$ 精密矩阵（即协方差矩阵的逆矩阵），则

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{\left(-\frac{1}{2}\sum\limits_{i,j=1}^{n}A_{ij}x_ix_j\right)}\,d^nx=\int_{-\infty}^{\infty}e^{\left(-\frac{1}{2}x^TAx\right)}\,d^nx=\sqrt{\frac{(2\pi)^n}{\det A}}=\sqrt{\frac{1}{\det(A/2\pi)}}=\sqrt{\det(2\pi A^{-1})}$$

这里的积分是对$\mathbf{R}^n$的。上式被用于研究多元正态分布。

同样，

$$\int x^{k_1}\cdots x^{k_{2N}}\, e^{\left(-\frac{1}{2}\sum\limits_{i,j=1}^{n}A_{ij}x_ix_j\right)}\, d^nx=\sqrt{\frac{(2\pi)^n}{\det A}}\,\frac{1}{2^N N!}\sum_{\sigma\in S_{2N}}(A^{-1})_{k_{\sigma(1)}k_{\sigma(2)}}\cdots(A^{-1})_{k_{\sigma(2N-1)}k_{\sigma(2N)}}$$

这里的 σ 表示的是有序集 {1, ..., 2N} 的不同排列。等式右边的系数是对 N 个重复的 A^{-1} 的 {1, ..., 2N} 中所有的组合的求和（the sum over all combinatorial pairings of {1, ..., 2N} of N copies of A^{-1}）。

或者，

$$\int f(\vec{x})e^{\left(-\frac{1}{2}\sum\limits_{i,j=1}^{n}A_{ij}x_ix_j\right)}\, d^nx=\sqrt{\frac{(2\pi)^n}{\det A}}\, e^{\left(\frac{1}{2}\sum\limits_{i,j=1}^{n}(A^{-1})_{ij}\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_j}\right)} f(\vec{x})\Bigg|_{\vec{x}=0}$$

以上积分中的 f 是解析函数，且函数值的增长必须满足某些边界条件以及另一些特定要求。微分算子的幂可以理解为幂级数。

虽然泛函积分没有严格的定义，但是我们仍然可以依照有限维的情况“定义”高斯泛函积分。 然而，$(2\pi)^\infty$ 无穷大的问题依然存在，且大部分的泛函行列式也是无穷大的。如果只考虑比例：

$$\frac{\int f(x_1)\cdots f(x_{2N})e^{-\iint\frac{1}{2}A(x_{2N+1},x_{2N+2})f(x_{2N+1})f(x_{2N+2})d^dx_{2N+1}d^dx_{2N+2}}\mathcal{D}f}{\int e^{-\iint\frac{1}{2}A(x_{2N+1},x_{2N+2})f(x_{2N+1})f(x_{2N+2})d^dx_{2N+1}d^dx_{2N+2}}\mathcal{D}f}=\frac{1}{2^N N!}\sum_{\sigma\in S_{2N}}A^{-1}(x_{\sigma(1)},x_{\sigma(2)})\cdots A^{-1}(x_{\sigma(2N-1)},x_{\sigma(2N)}).$$

则可以解决这个问题。在德维特标记法下，此公式与有限维的情况一致。

带线性项的n维

如果A是一个对称的正定矩阵，则有（假设均为列向量）

$$\int e^{-\frac{1}{2}\sum\limits_{i,j=1}^{n}A_{ij}x_ix_j+\sum\limits_{i=1}^{n}B_ix_i}\, d^nx=\int e^{-\frac{1}{2}\vec{x}^T\mathbf{A}\vec{x}+\vec{B}^T\vec{x}}d^nx=\sqrt{\frac{(2\pi)^n}{\det A}}e^{\frac{1}{2}\vec{B}^T\mathbf{A}^{-1}\vec{B}}.$$

形式相似的积分

$$\int_0^\infty x^{2n}e^{-\frac{x^2}{a^2}}\,dx=\sqrt{\pi}\frac{a^{2n+1}(2n-1)!!}{2^{n+1}}$$
$$\int_0^\infty x^{2n+1}e^{-\frac{x^2}{a^2}}\,dx=\frac{n!}{2}a^{2n+2}$$
$$\int_0^\infty x^{2n}e^{-ax^2}\,dx=\frac{(2n-1)!!}{a^n2^{n+1}}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$$
$$\int_0^\infty x^{2n+1}e^{-ax^2}\,dx=\frac{n!}{2a^{n+1}}$$
$$\int_0^\infty x^{n}e^{-ax^2}\,dx=\frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{2a^{\frac{n+1}{2}}}$$

其中，n 为正整数，“!!”表示双阶乘。 这类积分的一种简单的计算方式是应用莱布尼兹积分规则对参数进行微分：

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}x^{2n}e^{-\alpha x^2}\,dx&=(-1)^n\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial^n}{\partial\alpha^n}e^{-\alpha x^2}\,dx\ =(-1)^n\frac{\partial^n}{\partial\alpha^n}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\alpha x^2}\,dx\\&=\sqrt{\pi}(-1)^n\frac{\partial^n}{\partial\alpha^n}\alpha^{-\frac{1}{2}}\ =\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\frac{(2n-1)!!}{(2\alpha)^n}\end{aligned}$$

也可以先分部积分，然后找出递推关系之后求解。

另见

- 高斯函数积分表
- 量子场论中常见的积分
- 正态分布
- 指数函数积分表

- 误差函数
- 格拉斯曼积分

参考资料

- 埃里克·韦斯坦因. Gaussian Integral. MathWorld.
- Griffiths, David. Introduction to Quantum Mechanics 2nd.
- Abramowitz, M.; Stegun, I. A. Handbook of Mathematical Functions. New York: Dover Publications.