Index: Espérances conditionnelles

Lois conditionnelles

Commençons par un exemple élémentaire. Soient X,Y des v.a. entières indépendantes de loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ et $\mathcal{P}(\mu)$. Soit $T=X+Y$. On sait que que $T\sim\mathcal{P}(\lambda+\mu)$ et l'on a, pour $0\le k\le t$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X=k|T=t) &= \frac{\mathbb{P}(X=k,T=t)}{\mathbb{P}(T=t)}=\frac{\mathbb{P}(X=k)\mathbb{P}(Y=t-k)}{\mathbb{P}(T=t)}\\
&= \mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}\quad \mathrm{e}^{-\mu}\frac{\mu^{t-k}}{(t-k)!}\quad \mathrm{e}^{\lambda+\mu}\frac{t!}{(\lambda+\mu)^t}=\frac{t!}{k!(t-k)!}\frac{\lambda^k\mu^{t-k}}{\lambda+\mu)^t}\\
&= C_t^k p^k(1-p)^{(t-k)}=N_t(k) \text{ où } p=\frac{\lambda}{\lambda+\mu}.
\end{aligned}$$

On dira que $(N_t(k),\ 0\le k\le t)$ est la loi conditionnelle de X sachant que $T=t$. Ici il s'agit de la loi binomiale $B(t,\frac{\lambda}{\lambda+\mu}.)$. On a alors, pour toute f positive,

$$\mathbb{E}(f(X)|T=t)=\sum_k f(k)N_t(k).$$

Plus généralement, soient T,X des v.a. à valeurs $(E,\mathcal{E})$ et $(F,\mathcal{F})$. On sait que μ est la loi de X ssi, pour tout $f\in\mathcal{F}^+$, $\mathbb{E}(f(X))=\int f(x)\,d\mu(x)$. On appellera donc la loi conditionnelle de X sachant que $T=t$, une famille de probabilités sur $(F,\mathcal{F})$, soit $(N_t(dx),\,t\in E)$, telle que, pour toute $f\in\mathcal{F}^+$,

$$\mathbb{E}(f(X)|T=t)=\int f(x)N_t(dx).$$

Pour être tout à fait rigoureux, il faut préciser les mesurabilités.

Définition 3.26 *On appelle probabilité de transition de E dans F une famille de probabilités sur $(F,\mathcal{F})$, soit $(N_t(dx),\,t\in E)$, telle que, pour tout $A\in F$, $t\mapsto N_t(A)$ soit $\mathcal{E}$-mesurable. On adopte souvent la notation $N(t,dx)$ plutôt que $N_t(dx)$. Pour toute fonction f, $\mathcal{F}$ mesurable, positive (resp. bornée) on définit*

$$Nf(t)=\int_F f(x)\ N(t,dx)$$

qui est une une fonction $\mathcal{E}$ mesurable positive (resp. bornée).

Définition 3.27 *Une probabilité de transition, $(N(t,dx),\,t\in E)$, de E dans F est la loi conditionnelle de X sachant que $T=t$ si, pour toute $f\in\mathcal{F}^+$,*

$$\mathbb{E}(f(X)|T)=Nf(T)\ \text{p.s.},\ \text{ou encore}\ \mathbb{E}(f(X)|T=t)=Nf(t)\ \ \mu_T\text{p.s.},\qquad (3.11)$$

où $\mu_T =$ loi de T.

Il existe un cas ou le calcul de cette loi conditionnelle est immédiat:

Proposition 3.28 *Si X et T sont des variables aléatoires indépendantes , alors pour toute fonction $\varphi \in (\mathcal{E} \otimes \mathcal{F})$ la loi conditionnelle de $\varphi(T,X)$ sachant que $T=t$ est identique à la loi de la variable aléatoire $\varphi(t,X)$.*

Démonstration. Il suffit d'appliquer le Corollaire 3.25.□

La prop.3.18 entraîne que

Proposition 3.29 *Une probabilité de transition de E dans F, $(N(t,dx),\, t \in E)$, est la loi conditionnelle de X sachant que $T=t$ ssi, pour toute $f \in \mathcal{F}^+$ et toute $g \in \mathcal{E}^+$,*

$$\boxed{\mathbb{E}[g(T)f(X)] = \int g(t)Nf(t)\,d\mu_T(t) \quad \text{où } \mu_T = \text{ loi de } T} \tag{3.12}$$

La loi conditionnelle de X sachant que $T=t$ est unique au sens suivant. Si $N(t,dx)$ et $N'(t,dx)$ vérifient (3.11), on a, pour tout $A \in \mathcal{F}$, $N(T,A) = N'(T,A)$ p.s. i.e. $N(t,A) = N'(t,A)$ μ_T p.p.

La formule (3.12) montre que si on connaît la loi de T et la loi conditionnelle de X sachant que $T=t$, on peut reconstituer la loi du couple (X,T). Plus précisément,

Proposition 3.30 *Soient T,X des v.a. à valeurs $(E,\mathcal{E})$ et $(F,\mathcal{F})$, μ_T la loi de T, $N(t,dx)$ la loi conditionnelle de X sachant que $T=t$. On a , pour toute $h \in (\mathcal{E}\otimes\mathcal{F})^+ \cup (\mathcal{E}\otimes\mathcal{F})_b$,*

$$\mathbb{E}[h(T,X)] = \int [\int h(t,x)\; N(t,dx)]\, d\mu_T(t).$$

Démonstration. Soient $\mu_1(C) = \mathbb{P}((T,X)\in C)$ et $\mu_2(C) = \int[\int 1_{\{C\}}(t,x)N(t,dx)]\,d\mu_T(t)$. μ_1 et μ_2 sont deux probabilités sur $(E\times F, \mathcal{E}\otimes\mathcal{F})$ (μ_1 est la loi de (T,X)). On a $\mathbb{E}[h(T,X)] = \int h(t,x)\,d\mu_1(t,x)$ et $\int[\int h(t,x)N(t,dx)]\,d\mu_T(t) = \int h(t,x)\,d\mu_2(t,x)$. Vu la prop.3.29, $\mu_1(A\times B) = \mu_2(A\times B)$ pour tout $A\in\mathcal{E}$ et $B\in\mathcal{F}$ et donc (prop.1.7) $\mu_1=\mu_2$ et le résultat cherché □

Les problèmes classiques de conditionnement se traitent grâce à

Proposition 3.31 *Soient T,X des v.a. à valeurs $(E,\mathcal{E})$ et $(F,\mathcal{F})$, α,β des mesures σ-finies sur $(E,\mathcal{E})$ et $(F,\mathcal{F})$. On suppose que (T,X) a une densité $h(t,x)$ par rapport à $\alpha\otimes\beta$. On pose $\phi(t) = \int h(t,x)\,d\beta(x)$ et*

$$h(x/t) = \frac{h(t,x)}{\phi(t)} \text{ si } \phi(t)\neq 0, \quad h(x/t) = \text{densité arbitraire si } \phi(t)=0.$$

Alors est la loi conditionnelle de X sachant que $T=t$.

$$N(t,dx) = h(x/t)\, d\beta(x)$$

Démonstration. Notons d'abord que ϕ est la densité de T par rapport à α. Soit $B=\{t,\ \phi(t)=0\}$. On a $\int_{B\times F} h(t,x)\,d\alpha(t)d\beta(x) = \int_B \phi(t)\,d\alpha(t) = 0$ et $h(t,x)=0$ sur $B\times F$ $\alpha\otimes\beta$ p.p. On en déduit que $h(t,x)=\phi(t)h(x/t)$ $\alpha\otimes\beta$ p.p. Soient $f\in\mathcal{F}^+$ et $g\in\mathcal{E}^+$, on a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[g(T)f(X)] &= \int g(t)f(x)h(t,x)\,d\alpha(t)d\beta(x) = \int g(t)f(x)\phi(t)h(x/t)\,d\alpha(t)d\beta(x)\\ &= \int g(t)[\int f(x)h(x/t)\,d\beta(x)]\phi(t)\,d\alpha(t)\end{aligned}$$

et $N(t,dx)=h(x/t)\,d\beta(x)$ par la prop.3.29 $\square$

La fonction $h(x/t)$ s'appelle la densité conditionnelle de X sachant que $T=t$. On a donc

$$h(x/t) = \frac{\text{densité de } (T,X)}{\text{densité de } T},$$

ou, de façon heuristique,

$$h(x/t) = \mathbb{P}(X\in dx|\, T\in dt) = \frac{\mathbb{P}(T\in dt,\ X\in dx)}{\mathbb{P}(T\in dt)}.$$

Ceci permet de calculer des espérances conditionnelles puisque, si $F=\mathbb{R}$, $\mathbb{E}(X|T=t) = \int x n(t,dx)$. On a donc dans ce cas

$$\mathbb{E}(X|T=t) = \frac{\int x h(t,x)\,d\beta(x)}{\int h(t,x)\,d\beta(x)}. \tag{3.13}$$

Retour Index: Espérances conditionnelles
