Séance X : Fonctions caractéristiques et vecteurs gaussiens

A) Objectifs de la séance

A la fin de cette séance,

- je suis capable d'exprimer une condition nécessaire et suffisante d'indépendance de variables aléatoires en terme de fonctions caractéristiques;
- je comprends la définition d'un vecteur gaussien et je ne le confonds pas avec un vecteur composé de variables réelles de loi normale;
- je sais reconnaître qu'un vecteur est gaussien, à partir de la forme de sa fonction caractéristique ou de sa densité;
- je sais exprimer la condition nécessaire et suffisante d'indépendance des composantes d'un vecteur gaussien en terme de matrice de covariance;
- je maîtrise les changements de variables impliquant des vecteurs gaussiens.

B) Pour se familiariser avec les concepts (à traiter avant les séances de TD)

Les questions X.1 et X.2 sont à traiter avant la séance de TD. Les corrigés sont disponibles sur internet.

Question X.1

Q. X.1.1 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient $X_1, X_2, \dots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes avec $X_j \sim \mathcal{P}(j)$ (loi de Poisson de paramètre j) pour $j = 1, \dots, n$.
En utilisant la fonction caractéristique, déterminer la loi de $\sum_{j=1}^{n} X_j$.

Q. X.1.2 Soient $Y \sim \mathcal{P}(1)$ et $Z \sim \mathcal{P}(2)$ des variables aléatoires de Poisson. On suppose que pour tous $(t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2$,

$$\varphi_{(Y,Z)}(t_1, t_2) = \exp\left\{e^{it_1} + 2e^{it_2} - 3\right\}.$$

Que peut-on dire de Y et Z?

Question X.2

Q. X.2.1 Pour chaque matrice Σ ci-dessous, dire (et justifier) s'il existe un vecteur gaussien de moyenne nulle et de matrice de covariance Σ:

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \Sigma = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}; \quad \Sigma = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}; \quad \Sigma = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

C) Exercices

Exercice X.1
Soient $\rho \in]-1,1[$ et (X,Y) un couple de variables aléatoires réelles, dont la loi admet la densité $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_+$ définie par

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left(-\frac{1}{2(1-\rho^2)}(x^2 - 2\rho xy + y^2)\right).$$

E. X.1.1 Montrer que les variables aléatoires X et $Z = \dfrac{Y - \rho X}{\sqrt{1-\rho^2}}$ sont indépendantes et de même loi $\mathcal{N}(0,1)$. En déduire la valeur de $\mathbb{P}(X > 0, Y > 0)$.

L'exercice suivant fournit une méthode pour simuler des variables aléatoires gaussiennes à partir du tirage de variables uniformes. Ce procédé constitue une alternative à la méthode vue en cours pour simuler des variables continues en utilisant leurs fonctions de répartition. Contrairement à cette dernière, la méthode permet de simuler des vecteurs gaussiens à valeurs dans $\mathbb{R}^N$ avec $N > 1$.

Exercice X.2 (Méthode de Box-Muller)
Soit (U,V) un couple de variables aléatoires réelles indépendantes dont la loi de chacune des composantes est la loi uniforme sur $[0,1]$.
E. X.2.1 Montrer que les expressions

$$X = (-2\ln U)^{1/2} \cos(2\pi V)$$
$$Y = (-2\ln U)^{1/2} \sin(2\pi V)$$

définissent deux variables aléatoires réelles.

E. X.2.2 Soit $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une application mesurable positive.

(a) Exprimer $\mathbb{E}[h(X,Y)]$ comme une intégrale par rapport à la mesure de Lebesgue de $\mathbb{R}^2$.

(b) A l'aide d'un changement de variable, en déduire que la loi du vecteur aléatoire (X,Y) est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue. Déterminer sa densité.

(c) En déduire que X et Y sont indépendantes et de même loi normale $\mathcal{N}(0,1)$.

Dans le cours, on a vu un exemple de deux v.a. non-corrélées mais qui ne sont cependant pas indépendantes. Il constitue un contre-exemple à l'équivalence entre les notions de non-corrélation et d'indépendance. L'exercice suivant fournit un autre contre-exemple.

Exercice X.3
Soit X une variable aléatoire réelle de loi $\mathcal{N}(0,1)$. Pour tout $a > 0$, on considère

$$Y^a = X\mathbb{1}_{\{|X|<a\}} - X\mathbb{1}_{\{|X|\geq a\}}.$$

E. X.3.1 Exprimer $\mathbb{E}[f(Y^a)]$ pour toute fonction f borélienne bornée. En déduire que la v.a. Y^a est gaussienne.

E. X.3.2 Le couple (X, Y^a) est-il gaussien? (On étudiera la v.a. $X + Y^a$.)

E. X.3.3 Montrer qu'il existe $b > 0$ tel que

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^b t^2 e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \frac{1}{4}.$$

Calculer $\mathrm{Cov}(X, Y^b)$.
Les v.a. X et Y^b sont-elles indépendantes?

L'exercice suivant étudie l'indépendance entre des transformations linéaires d'un vecteur gaussien.

Exercice X.4
Soit X un vecteur aléatoire gaussien à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, de matrice de covariances K.
E. X.4.1 Soient T_1 et T_2 des matrices de dimensions respectives $n_1 \times n$ et $n_2 \times n$. On considère des vecteurs aléatoires $Y_1 = T_1 X$ et $Y_2 = T_2 X$.

(a) Montrer que (Y_1, Y_2) est un vecteur gaussien.

(b) Soit $\Sigma_{Y_1 Y_2} = [\mathrm{Cov}((Y_1)_i, (Y_2)_j)]_{i,j}$. A quelle condition sur $\Sigma_{Y_1 Y_2}$ les vecteurs aléatoires Y_1 et Y_2 sont-ils indépendants?

(c) Montrer que Y_1 et Y_2 sont indépendants si et seulement si $T_1 K T_2^* = 0$. Généraliser à k vecteurs $Y_i = T_i X$ $(1 \leq i \leq k)$.

E. X.4.2 On suppose maintenant que X suit la loi $\mathcal{N}(0, I_n)$. Soient E un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ et $E^\perp$ son supplémentaire orthogonal. On note A et B les matrices représentant les projections orthogonales p_E et $p_{E^\perp}$ sur E et $E^\perp$ respectivement.
Montrer que les vecteurs aléatoires AX et BX sont indépendants.

E. X.4.3 Déduire de la question précédente l'indépendance des variables aléatoires

$$\overline{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i \quad \text{et} \quad (X_1 - \overline{X}, \dots, X_n - \overline{X}),$$

où $X = (X_1, \dots, X_n)$.

D) Approfondissement

Exercice X.5
Sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, soit $X_1, \ldots, X_n$ une famille de variables aléatoires réelles indépendantes de loi normale $\mathcal{N}(0,1)$. Soient $a_1, \ldots, a_n$ et $b_1, \ldots, b_n$ des nombres réels.

Le but de cet exercice est de trouver une condition nécessaire et suffisante d'indépendance des variables aléatoires $Y = \sum_{i=1}^n a_i X_i$ et $Z = \sum_{i=1}^n b_i X_i$.

E. X.5.1 Le vecteur $(X_1, \ldots, X_n)$ est-il un vecteur gaussien?

E. X.5.2 Le vecteur (Y, Z) est-il un vecteur gaussien?

E. X.5.3 En déduire une condition nécessaire et suffisante sur les $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$ d'indépendance entre Y et Z.

Exercice X.6 (Forme canonique d'un vecteur gaussien)

E. X.6.1 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la famille de matrices $n \times n$ $(J_{k,n})_{1 \leq k \leq n}$ définies par $J_{n,n} = I_n$, et pour $1 \leq k \leq n-1$,

$$J_{k,n} = \begin{pmatrix} I_k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Montrer que si K est une matrice symétrique positive de rang k, il existe une matrice inversible A telle que $K = AJ_{k,n}A^t$.

E. X.6.2 Soit Y un vecteur aléatoire de $\mathbb{R}^n$, $\mu \in \mathbb{R}^n$ et K une matrice symétrique positive de taille $n \times n$. Montrer que Y suit la loi normale $\mathcal{N}(\mu, K)$ si et seulement si Y peut s'écrire

$$Y = AJ_{k,n}X + \mu$$

où X est un vecteur gaussien $\mathcal{N}(0, I_n)$ à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, et A est une matrice inversible vérifiant $K = AJ_{k,n}A^t$.

Séance 10 : Eléments de correction des exercices

Solution de Q. X.1.1 On note $Y = \sum_{j=1}^{n} X_j$. D'après le cours, on sait que l'indépendance des X_j implique que

$$\varphi_Y(t) = \prod_{j=1}^{n} \varphi_{X_j}(t) = \prod_{j=1}^{n} \exp\{j(e^{it}-1)\} = \exp\left\{\frac{n(n+1)}{2}(e^{it}-1)\right\},$$

où on a utilisé le résultat de la Question Q.IX.2.

Solution de Q. X.1.2 On observe que $\varphi_{(Y,Z)}(t_1,t_2) = \varphi_Y(t_1)\varphi_Z(t_2)$ et donc Y et Z sont indépendantes.

Solution de Q. X.2.1 La première n'est pas carrée, ce n'est donc pas une matrice de covariance.
La deuxième est bien symétrique définie positive, donc il existe un vecteur gaussien de covariance donnée par cette matrice.
La troisième n'est pas définie positive (calculer par exemple $U\Sigma U^T$ pour le vecteur $U = (1,1)$).
La quatrième est une matrice de covariance.

Solution de E. X.1.1 Pour étudier l'indépendance des variables X et Z, il s'agit de considérer la loi du couple (X,Z). Ainsi, en utilisant le théorème de transfert, puis la définition de la densité f par rapport à la mesure de Lebesgue λ de $\mathbb{R}^2$, pour tout $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$, on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\big((X,Z) \in B\big) &= \int_\Omega \mathbf{1}_B \left(X(\omega), \frac{Y(\omega)-\rho X(\omega)}{\sqrt{1-\rho^2}}\right) \mathbb{P}(d\omega) \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} \mathbf{1}_B \left(x, \frac{y-\rho x}{\sqrt{1-\rho^2}}\right) P_{(X,Y)}(dx,dy) \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} \mathbf{1}_B \left(x, \frac{y-\rho x}{\sqrt{1-\rho^2}}\right) f(x,y)\, \lambda(dx,dy).
\end{aligned}$$

On considère alors le changement de variables

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & \left(w = x, z = \dfrac{y-\rho x}{\sqrt{1-\rho^2}}\right) \end{array} \right. .$$

On vérifie que φ définit bien un C^1-difféomorphisme, dont l'inverse s'exprime par $\varphi^{-1} : (w,z) \mapsto (x = w, y = \rho w + \sqrt{1-\rho^2}\, z)$ et admet le jacobien $J\varphi^{-1}(w,z) = \sqrt{1-\rho^2}$.

En effectuant le changement de variables, on obtient

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\big((X,Z) \in B\big) &= \int_{\mathbb{R}^2} \mathbf{1}_B\,(w,z)\ f(w, \rho w + \sqrt{1-\rho^2}\, z)\ |J\varphi^{-1}(w,z)|\ \lambda(dw,dz) \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} \mathbf{1}_B\,(w,z)\ \frac{1}{2\pi}\ \exp\left(-\frac{1}{2}(w^2+z^2)\right)\ \lambda(dw,dz).
\end{aligned}$$

On en déduit que le couple (X, Z) admet la densité $(x,z) \mapsto \dfrac{1}{2\pi} \exp\left(-\dfrac{1}{2}(x^2+z^2)\right)$, qui est la densité d'un couple gaussien de moyenne nulle et de matrice de covariances $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Comme la matrice est diagonale, les composantes X et Z sont indépendantes.

Comme composante du couple gaussien (X, Z), la variable X suit une loi normale de moyenne nulle et de variance 1, c'est la loi $\mathcal{N}(0,1)$. De même, Z suit la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$.

Remarque : sans reconnaitre la densité d'un couple gaussien, on aurait également pu déterminer les densités f_X et f_Z des variables X et Z à partir de celle de (X, Z) et constater que $f_{(X,Z)}(x,z) = f_X(x)\, f_Z(z)$ pour tous $x, z \in \mathbb{R}$, ce qui montre l'indépendance entre les variables aléatoires X et Z.

Observons que $Y = -\sin(\alpha)X + \cos(\alpha)Z$, où α est l'unique réel de $]-\pi/2, \pi/2[$ tel que $-\sin(\alpha) = \rho$ et $\cos(\alpha) = \sqrt{1-\rho^2}$, i.e. $\alpha = -\arcsin(\rho)$. On a

$$\{X > 0, Y > 0\} = \{X > 0, Z > \tan(\alpha)\, X\}\,,$$

puis en notant $D = \big\{(x,z) \in \mathbb{R}^2 : x > 0 \text{ et } z > \tan(\alpha)\, x\big\}$,

$$\mathbb{P}(X > 0, Y > 0) = \int_D \frac{1}{2\pi}\, e^{-(x^2+z^2)/2}\, \lambda(dx, dz).$$

Déterminez graphiquement la région D du plan à l'aide de l'angle α. Il apparaît alors que D est exactement l'ensemble des points qui peuvent s'écrire en coordonnées polaires sous la forme $(r\cos\theta, r\sin\theta)$, avec $r > 0$ et $\theta \in]\alpha, \frac{\pi}{2}[$.

Ainsi, en effectuant dans l'intégrale précédente le changement de variables en coordonnées polaires $(r,\theta) \mapsto (x = r\ \cos\theta, z = r\ \sin\theta)$, on obtient

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X > 0, Y > 0) &= \int_{\mathbb{R}_+ \times [\alpha, \pi/2[} \frac{1}{2\pi}\, e^{-r^2/2}\, r\, \lambda(dr, d\theta) \\
&= \int_{[\alpha,\pi/2[} \frac{1}{2\pi}\, \lambda(d\theta) = \frac{1}{4} - \frac{\alpha}{2\pi}.
\end{aligned}$$

Solution de E. X.2.1 Attention, l'énoncé n'est pas assez précis pour la définition de X et Y. En effet, le fait que U soit une variable aléatoire réelle de loi uniforme sur $[0, 1]$ ne signifie absolument pas que $U(\omega) \in]0, 1]$ pour tout ω. Autrement dit, le fait que $U \rightsquigarrow \mathcal{U}([0,1])$ implique $\mathbb{P}(U \in]0,1]) = 1$, mais l'ensemble $\{\omega \in \Omega : U(\omega) \notin]0,1]\}$ ne se réduit pas nécessairement à l'ensemble vide, bien que de probabilité nulle.

L'application $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$(u,v) \mapsto (-2\ln u)^{1/2}\ \cos(2\pi v)\ \mathbf{1}_{]0,1[}(u)$$

est borélienne. Par composition, l'application $\varphi(U, V) : (\Omega, \mathcal{F}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ est mesurable et définit donc une variable aléatoire. En remarquant que $\mathbb{P}(U \notin]0,1[) = 0$, on a $X = \varphi(U, V)$ presque surement.

On raisonne de la même façon pour Y.

Solution de E. X.2.2

(a) En utilisant successivement le théorème de transfert, l'indépendance de U et V et les densités de probabilité de U et V, on écrit

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[h(X,Y)] &= \int_{\mathbb{R}^2} h((-2\ln U)^{1/2}\cos(2\pi V), (-2\ln U)^{1/2}\sin(2\pi V))\ P_{(U,V)}(du,dv) \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} h((-2\ln U)^{1/2}\cos(2\pi V), (-2\ln U)^{1/2}\sin(2\pi V))\ P_U(du)\otimes P_V(dv) \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} h((-2\ln U)^{1/2}\cos(2\pi V), (-2\ln U)^{1/2}\sin(2\pi V))\ \mathbf{1}_{]0,1[^2}(u,v)\ d\lambda(u,v),
\end{aligned}$$

où λ désigne la mesure de Lebesgue.

(b) On considère un premier changement de variables défini par

$$\begin{aligned}
T :\,]0,1[^2 &\to \mathbb{R}_+^* \times]0,2\pi[\\
(u,v) &\mapsto T(u,v) = ((-2\ln u)^{1/2}, 2\pi v).
\end{aligned}$$

L'application T est visiblement un C^1-difféomorphisme, dont la réciproque T^{-1} est définie par

$$\begin{aligned}
T^{-1} : \mathbb{R}_+^* \times]0,2\pi[&\to]0,1[^2 \\
(r,\theta) &\mapsto T^{-1}(r,\theta) = \left(e^{-r^2/2}, \frac{\theta}{2\pi}\right).
\end{aligned}$$

On calcule alors le jacobien de T^{-1}

$$J_{T^{-1}}(r,\theta) = \begin{vmatrix} -re^{-r^2/2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2\pi} \end{vmatrix} = -\frac{r}{2\pi}e^{-r^2/2}.$$

On réalise alors le changement de variables dans l'intégrale sur $\mathbb{R}^2$ obtenue au (a)

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[h(X,Y)] &= \int_{\mathbb{R}^2} h(r\cos\theta, r\sin\theta)\ \frac{r}{2\pi}e^{-r^2/2}\ \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+^*\times]0,2\pi[}(r,\theta)\ \lambda(dr,d\theta) \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} h(r\cos\theta, r\sin\theta)\ \frac{r}{2\pi}e^{-r^2/2}\ \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+\times[0,2\pi[}(r,\theta)\ \lambda(dr,d\theta).
\end{aligned}$$

On effectue alors le deuxième changement de variables (passage en polaire)

$$\begin{aligned}
\mathbb{R}_+ \times [0,2\pi[&\to \mathbb{R}^2 \\
(r,\theta) &\mapsto (x = r\cos\theta, y = r\sin\theta)
\end{aligned}$$

qui est un C^1-difféomorphisme.
On obtient

$$\mathbb{E}[h(X,Y)] = \int_{\mathbb{R}^2} h(x,y)\ \frac{1}{2\pi}e^{-(x^2+y^2)/2}\ \lambda(dx,dy).$$

ce qui montre que le vecteur (X,Y) admet la densité de probabilité

$$f : (x,y) \mapsto \frac{1}{2\pi}e^{-(x^2+y^2)/2}.$$

(c) On en déduit alors que les lois marginales, les lois de X et de Y, admettent des densités f_X et f_Y définies par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_X(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,\lambda(dy) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$$
$$\forall y \in \mathbb{R}, \quad f_Y(y) = \int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,\lambda(dx) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y^2/2}.$$

Donc, les variables aléatoires suivent la même loi normale $\mathcal{N}(0,1)$. De plus, comme $f(x,y) = f_X(x)\,f_Y(y)$ pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, les variables aléatoires X et Y sont indépendantes.

Solution de E. X.3.1 Pour toute fonction h borélienne bornée, on a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[h(Y^a)] &= \mathbb{E}[h(X)\mathbb{1}_{\{|X|<a\}} + h(-X)\mathbb{1}_{\{|X|\geq a\}}] \\ &= \int_{\{|X|<a\}} h(x)\,\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}\,dx + \int_{\{|X|\geq a\}} h(-x)\,\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}\,dx.\end{aligned}$$

Le changement de variable $x' = -x$ dans la seconde intégrale conduit à

$$\mathbb{E}[h(Y^a)] = \int_{\mathbb{R}} h(x)\,\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}\,dx,$$

ce qui montre que Y^a a pour loi de probabilité $\mathcal{N}(0,1)$.

Solution de E. X.3.2 On a

$$X + Y^a = 2X\,\mathbb{1}_{\{|X|<a\}}.$$

Comme $X \neq 0$ presque surement, on en déduit

$$\mathbb{P}(X + Y^a = 0) = \mathbb{P}(|X| \geq a).$$

Or $0 < \mathbb{P}(|X| \geq a) < 1$, ce qui montre que $X + Y^a$ ne peut pas être une variable aléatoire gaussienne et donc que (X, Y^a) n'est pas un vecteur gaussien.

Solution de E. X.3.3 On considère l'application G définie par

$$\forall u \in [0, +\infty[, \quad G(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^u t^2 e^{-t^2/2}\,dt,$$

qui est visiblement continue, strictement croissante et admet pour limite en $+\infty$

$$\lim_{u\to+\infty} G(u) = \frac{1}{2}\mathbb{E}[X^2] = \frac{1}{2}.$$

On en déduit que G définit une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $[0, 1/2[$. On peut alors définir $b = G^{-1}(1/4)$.

On a alors
$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^b t^2 e^{-\frac{t^2}{2}}dt = \frac{1}{4} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_b^{+\infty} t^2 e^{-\frac{t^2}{2}}dt.$$
On calcule alors
$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(X,Y^b) &= \mathbb{E}[XY^b]\\ &= \mathbb{E}[X^2\mathbb{1}_{\{|X|<b\}} - X^2\mathbb{1}_{\{|X|\geq b\}}]\\ &= \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^b t^2 e^{-\frac{t^2}{2}}dt - \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_b^{+\infty} t^2 e^{-\frac{t^2}{2}}dt = 0.\end{aligned}$$
Les variables aléatoires X et Y^b ne sont pas indépendantes car si elles l'étaient, le vecteur (X,Y^b) serait gaussien, ce qui contredit la question 2).

Solution de E. X.4.1

(a) On peut écrire
$$Y = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \end{pmatrix} X.$$
Ainsi, toute combinaison linéaire des composantes de Y est une combinaison linéaire des composantes du vecteur gaussien X, et donc est une v.a. gaussienne. Il s'ensuit que Y est un vecteur gaussien.

(b) Les vecteurs aléatoires Y_1 et Y_2 sont indépendants si et seulement si la fonction caractéristique de Y s'écrit $\varphi_Y = \varphi_{Y_1}\varphi_{Y_2}$, où φ_{Y_1} et φ_{Y_2} sont les fonctions caractéristiques de Y_1 et Y_2.

Or pour tout $t \in \mathbb{R}^{n_1+n_2}$, on a
$$\varphi_Y(t) = \exp\left(i\langle \mu, t\rangle - \frac{1}{2}\langle t, Dt\rangle\right),$$
où $\mu \in \mathbb{R}^{n_1+n_2}$ et $D \in \mathbb{R}^{n_1+n_2}\times\mathbb{R}^{n_1+n_2}$ sont le vecteur moyenne et la matrice de covariances de Y.

D'autre part, $\varphi_{Y_1}\varphi_{Y_2}$ s'écrit
$$\begin{aligned}\varphi_{Y_1}(t_1,\dots,t_{n_1})\,\varphi_{Y_2}(t_{n_1+1},\dots,t_{n_1+n_2}) &= \exp\left(i\sum_{j=1}^{n_1}\mu_j t_j - \frac{1}{2}\sum_{1\leq j,k\leq n_1} t_j D_{j,k} t_k\right)\\ &\quad\times\exp\left(i\sum_{j=n_1}^{n_1+n_2}\mu_j t_j - \frac{1}{2}\sum_{n_1<j,k\leq n_1+n_2} t_j D_{j,k} t_k\right).\end{aligned}$$
L'égalité $\varphi_Y = \varphi_{Y_1}\varphi_{Y_2}$ est donc équivalente à
$$\langle t, Dt\rangle = \sum_{1\leq j,k\leq n_1} t_j D_{j,k} t_k + \sum_{n_1<j,k\leq n_1+n_2} t_j D_{j,k} t_k,$$
pour tout $t \in \mathbb{R}^{n_1+n_2}$, c'est-à-dire
$$1 \leq j \leq n_1 \text{ et } n_1 < k \leq n_1+n_2 \Rightarrow D_{j,k} = (\Sigma_{Y_1Y_2})_{j,k-n_1} = 0.$$
En conclusion, Y_1 et Y_2 sont indépendants si et seulement si $\Sigma_{Y_1Y_2} = 0$.

(c) Sans perte de généralité, on peut supposer $\mathbb{E}[X] = 0$ (sinon on remplace X par $X - \mathbb{E}[X]$). On a alors

$$\Sigma_{Y_1 Y_2} = \mathbb{E}[Y_1 Y_2^t] = \mathbb{E}[T_1 X \, (T_2 X)^t] = T_1 \, \mathbb{E}[XX^t] \, T_2^t = T_1 \, K \, T_2^t,$$

d'où l'équivalence recherchée.

On généralise ce résultat à k vecteurs : $T_1 X, \ldots, T_k X$ sont indépendants si et seulement si pour tous $1 \leq i < j \leq k$, $T_i \, K \, T_j^t = 0$.

Attention : cette généralisation repose sur la reprise de tout le raisonnement, en disant que $Y_1, \ldots, Y_k$ sont indépendants (mutuellement) si et seulement si $\varphi_{(Y_1,\ldots,Y_k)} = \varphi_{Y_1} \ldots \varphi_{Y_k}$.

Solution de E. X.4.2 Dans ce cas, on a $K = I_n$ donc d'après la question précédente, AX et BX sont indépendants si et seulement si $AB^t = 0$.

Les matrices A et B étant les matrices de projection sur des espaces orthogonaux, on a $AB = 0$. De plus, comme les projections orthogonales sont auto-adjointes, A et B sont symétriques.

On en déduit $AB^t = 0$ et donc que AX et BX sont indépendants.

Solution de E. X.4.3 En reprenant la question 2), si le sous-espace vectoriel E est la droite

$$E = \mathbb{R}.(1, 1, \ldots, 1)^t$$

alors

$$A = \begin{pmatrix} 1/n & 1/n & \ldots & 1/n \\ 1/n & 1/n & \ldots & 1/n \\ \ldots & & & \\ 1/n & 1/n & \ldots & 1/n \end{pmatrix}.$$

Comme $p_E + p_{E^\perp} = Id$, on a $B = I_n - A$.

On a alors

$$\begin{aligned} AX &= (\overline{X}, \overline{X}, \ldots, \overline{X})^t \\ BX &= (X_1 - \overline{X}, X_2 - \overline{X}, \ldots, X_n - \overline{X})^t. \end{aligned}$$

Il s'ensuit la conclusion recherchée.

Solution de E. X.5.1 Par définition, un vecteur aléatoire $U = (U_1, \ldots, U_n)$ est gaussien si toute combinaison linéaire de ses composantes suit une loi normale, autrement dit si pour tous réels $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, la variable aléatoire réelle $\sum_{i=1}^n \lambda_i U_i$ suit une loi normale.

Comme premier exemple, on a vu en cours que lorsque $U_1, \ldots, U_n$ sont indépendantes et suivent des lois normales, alors le vecteur $(U_1, \ldots, U_n)$ est gaussien. Ainsi, $(X_1, \ldots, X_n)$ est un vecteur gaussien. En effet, pour tout i, la variable aléatoire $\lambda_i X_i$ suit la loi $\mathcal{N}(0, \lambda_i^2)$. Comme les v.a. $\lambda_i X_i$ sont indépendantes et que la somme de gaussiennes indépendantes est une gaussienne (cf. cours), la v.a. $\sum_i \lambda_i X_i$ est gaussienne.

Solution de E. X.5.2 Y et Z sont des combinaisons linéaires des composantes du vecteur $(X_1, \ldots, X_n)$. Ainsi toute combinaison linéaire de Y et Z est également une combinaison linéaire des X_i et est donc une v.a. réelle gaussienne car $(X_1, \ldots, X_n)$ est un vecteur gaussien. Ceci montre que (Y, Z) est un vecteur gaussien.

Solution de E. X.5.3 Un résultat important du cours sur les vecteurs gaussiens énonce que pour un vecteur gaussien $(U_1, \ldots, U_n)$, les v.a. sont indépendantes si et seulement si $\mathrm{Cov}(U_i, U_j) = 0$ pour tous i, j.

Comme (Y, Z) forme un vecteur gaussien, Y et Z sont indépendantes si et seulement si $\mathrm{Cov}(Y, Z) = 0$.

On détermine $\mathbb{E}[Y] = \sum_i a_i \, \mathbb{E}[X_i] = 0$ et $\mathbb{E}[Z] = \sum_i b_i \, \mathbb{E}[X_i] = 0$. Donc

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cov}(Y, Z) &= \mathbb{E}[YZ] - \mathbb{E}[Y] \, \mathbb{E}[Z] \\
&= \mathbb{E}\left[\sum_{i,j} a_i b_j \, X_i X_j\right] \\
&= \sum_{i,j} a_i b_j \, \mathbb{E}[X_i X_j] = \sum_i a_i b_i
\end{aligned}$$

en utilisant le fait que $\mathbb{E}[X_i X_j] = \delta_{ij}$. On en conclut que Y et Z sont indépendantes si et seulement si $\sum_{i=1}^n a_i b_i = 0$.