Correction

QCM n^o1

CIPEDP – 1A – 2018-2019

Durée : 20 minutes.

If you prefer to take this test in English, please identify yourself to the professor before the beginning of the test.

Ce test se compose de deux feuilles d'énoncé et d'une feuille de réponses. Seule la feuille de réponses est à rendre à la fin du quiz ; **vous devez noircir les cases correspondant à vos réponses sur la feuille de réponses et ne rien écrire d'autre sur cette feuille**. Vous pouvez utiliser les feuilles d'énoncé comme bon vous semble (brouillon par exemple). Aucun appareil électronique (téléphone, calculatrice, tablette, ordinateur, montre connectée, ...) n'est autorisé. Ceux-ci doivent être rangés et éteints pendant toute la durée de l'épreuve. Les documents et feuilles de brouillon personnels sont interdits.

Pour chaque question, il y a au moins une bonne réponse mais plusieurs bonnes réponses sont possibles.

Barême indicatif:

- Question non abordée (vous n'avez coché aucune case dans cette question) : 0 points
- Question abordée (vous avez coché une ou plusieurs cases dans cette question) :

  1 point pour chaque bonne réponse (case noircie qui devait l'être ou case laissée vide qui devait être vide);

  -1 point pour chaque mauvaise réponse (case noircie alors qu'elle aurait du être vide ou case laissée vide alors qu'elle aurait dû être noircie).

Question 1 On considère le système dynamique $y' = f(y)$ où f est une fonction $C^2(\mathbb{R}^2)$ et x^* est un équilibre. Parmi les conditions suivantes indiquer laquelle (lesquelles) garanti(ss)e(nt) que x^* est exponentiellement stable.

[A] $\mathrm{Sp}(Df(x^*)) \subset [-1;1]$

[B] $\mathrm{Sp}(Df(x^*)) \subset \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) < 0\}$

■ $\mathrm{Sp}(Df(x^*)) \subset \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) < 0\}$

[D] $\mathrm{Sp}(Df(x^*)) \subset \mathbb{R}$

[E] $\mathrm{Sp}(Df(x^*)) \subset]-1;1[$

Question 2 Soit H un espace de Hilbert dont la norme est notée $\|\cdot\|_H$ et soit V un sous-espace fermé non vide de H. On note $p_V : H \to H$ le projeté orthogonal sur V et on rappelle que la norme d'opérateur de p_V est donnée par $\|p_V\| = \sup\limits_{x\in H, x\neq 0} \dfrac{\|p_V(x)\|_H}{\|x\|_H}$. Choisissez la ou les assertions correctes parmi les propositions ci-dessous :

[A] La norme de p_V vérifie $\|p_V\| > 1$.

[B] La norme de p_V vérifie $\|p_V\| < 1$.

■ La norme de p_V vérifie $\|p_V\| = \sup\limits_{x\in S} \|p_V(x)\|_H$, où $S = \{x \in H : \ \|x\|_H = 1\}$ est la sphère unité de H.

Question 3 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans un espace métrique (E, d). Quelles sont les affirmations vraies parmi les suivantes ?

■ Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une sous-suite qui converge, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

B Si toute suite de Cauchy converge, alors elle admet une sous-suite qui converge. On peut donc conclure que si l'ensemble E est complet, alors E est compact.

■ Si l'ensemble E entier est compact, alors E est complet.

D u_n tend vers une limite lorsque $n \to \infty$.

E Si $E = [0, 1[\subset \mathbb{R}$ et $d : (x, y) \mapsto |x - y|$, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge nécessairement (dans E).

Question 4 Parmi les assertions suivantes concernant les coefficients de Fourier, laquelle (lesquelles) est (sont) vraie(s)?

■ Si f est la fonction 2π-périodique définie par $f(x) = |x|, \forall x \in [-\pi, \pi[$, alors $\lim\limits_{n\to\infty} c_n(f) = 0$.

■ Si $f(x) = \cos(5x + 2)\sin(3x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, alors les coefficients de Fourier de f sont tous nuls sauf un nombre fini d'entre eux.

■ Si f est une fonction 2π-périodique continuement dérivable, alors $c_n(f') = i\,n\,c_n(f)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

D Si f est la fonction 2π-périodique définie par $f(x) = x, \forall x \in [-\pi, \pi[$, alors $c_n(f) = 0$ pour tout n pair.

Question 5 Soit f une fonction $C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ globalement lipschitzienne en la deuxième variable. On considère le problème de Cauchy $y(0) = y^0$ et $y'(t) = f(t, y(t))$ sur $[0; 1]$. Soit $N \in \mathbb{N}^*$ et $h = 1/N$. On considère le schéma numérique :

$$\begin{aligned} z^0 &= y^0, \\ t^{i+1} &= t^i + h \text{ pour } i \in \{0, \ldots, N-1\}, \\ z^{i+1} &= z^i + hf(t^i, z^i) \text{ pour } i \in \{0, \ldots, N-1\}. \end{aligned}$$

Parmi les propositions suivantes indiquer laquelle est (lesquelles sont) vraie(s) :

A L'ordre du schéma est 2.

■ Le schéma est convergent.

■ Le schéma est consistant.

D L'ordre du schéma est 4.

■ Le schéma est stable.

Question 6 Soit $E = C^0([0, 1])$ l'ensemble des fonctions continues de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$. Parmi les fonctions suivantes $E \times E \to \mathbb{R}$, quelles sont celles qui définissent une distance ?

■ $\forall f, g \in E, \quad \varphi(f, g) = \sup\limits_{x\in[0,1]} |f(x) - g(x)|$.

B $\forall f, g \in E, \quad \varphi(f, g) = \inf\limits_{x\in[0,1]} [f(x) - g(x)]$.

C $\forall f, g \in E, \quad \varphi(f, g) = \sup\limits_{x\in[0,1]} \sqrt{|f(x) - g(x)|}$.

D $\forall f, g \in E, \quad \varphi(f, g) = \sup\limits_{x\in[0,1]} f(x) - \sup\limits_{x\in[0,1]} g(x)$.

Question 7 On considère le problème de Cauchy $y' = y^3$ et $y(0) = y^0$ donné. Parmi les propositions suivantes indiquer laquelle est (lesquelles sont) vraie(s) :

- ■ Le théorème de Cauchy-Lipchitz local s'applique et donne l'existence de solutions locales autour de 0.
- B Le théorème de Cauchy-Lipchitz global s'applique et donne l'existence de solutions globales.
- ■ Le théorème de Cauchy-Lipchitz global ne s'applique pas.
- D Le théorème de Cauchy-Lipchitz local ne s'applique pas.

Question 8 Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définies par : pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}.$$

Quelles sont les affirmations vraies parmi les suivantes ?

- ■ La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement, lorsque $n \to \infty$, vers une fonction continue sur $\mathbb{R}$.
- ■ La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement lorsque $n \to \infty$.
- C $f_n(1/n)$ tend vers 0 lorsque $n \to \infty$.
- D La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ lorsque $n \to \infty$.