

# 富比尼定理

维基百科，自由的百科全书

**富比尼定理**（英語：Fubini's theorem）是数学分析中有关重积分的一个定理，由数学家圭多·富比尼在1907年提出。富比尼定理给出了使用逐次积分的方法计算双重积分的条件。在这些条件下，不仅能够用逐次积分计算双重积分，而且交换逐次积分的顺序时，积分结果不变。**Tonelli定理**由数学家 Leonida Tonelli在1909年提出，与富比尼定理相似，但是是应用于非负函数而不是可积函数。

## 定理

若

$$\int_{A\times B} |f(x,y)| \, d(x,y) < \infty \, ,$$

其中A和B都是σ-有限测度空间，*A* × *B*是A和B的积可测空间，*f* : *A* × *B* ↦ **C**是可测函数，那么

$$\int_A \left( \int_B f(x,y) \, dy \right) \, dx = \int_B \left( \int_A f(x,y) \, dx \right) \, dy = \int_{A\times B} f(x,y) \, d(x,y) \, ,$$

前二者是在两个测度空间上的逐次积分，但积分次序不同；第三个是在乘积空间上关于乘积测度的积分。

特别地，如果 *f*(*x*,*y*) = *h*(*x*)*g*(*y*)，则

$$\int_A h(x) \, dx \int_B g(y) \, dy = \int_{A\times B} f(x,y) \, d(x,y)。$$

如果条件中绝对值积分值不是有限，那么上述两个逐次积分的值可能不同。

## 非负函数的Tonelli定理

Tonelli定理延续了富比尼定理。Tonelli定理的结论与富比尼定理一样，但是条件从|*f*|积分有限改为了*f*非负。

## 应用

富比尼定理一个应用是计算高斯积分。高斯积分是很多概率论结果的基础：

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2} \, dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}。$$

取自“https://zh.wikipedia.org/w/index.php?title=富比尼定理&oldid=56203713”

本页面最后修订于2019年9月23日 (星期一) 03:26。

本站的全部文字在知识共享 署名-相同方式共享 3.0协议之条款下提供，附加条款亦可能应用。（请参阅**使用条款**）Wikipedia®和维基百科标志是维基媒体基金会的注册商标；维基™是维基媒体基金会的商标。维基媒体基金会是按美国国内稅收法501(c)(3)登记的非营利慈善机构。