Séance III : Mesurabilité

A) Objectifs de la séance

A la fin de cette séance,

- je sais vérifier qu'une collection d'ensembles constitue une tribu;
- je suis capable de déterminer la tribu engendrée par une collection d'ensembles;
- je connais la tribu de Borel;
- je sais vérifier qu'une fonction est mesurable;
- je connais le lien entre fonction continue et fonction borélienne;
- je suis capable de montrer la mesurabilité d'une fonction, en l'approchant par une suite de fonctions mesurables.
- je sais définir et construire une mesure de probabilités sur un ensemble discret.

B) Pour se familiariser avec les concepts (à traiter avant les séances de TD)

Les questions III.1 et III.2 sont à traiter avant la séance de TD. Les corrigés sont disponibles sur internet.

Question III.1

Q. III.1.1 Soit l'ensemble $\Omega = \{a, b, c, d\}$.

(a) Quelle est la tribu engendrée par $\{a\}$?

(b) Quelle est la tribu engendrée par $\{a, b\}$?

(c) Quelle est la tribu engendrée par $\{a\}$ et $\{a, b\}$?

(d) Quels sont les liens d'inclusion entre les tribus obtenues aux questions (a), (b) et (c) ?

Q. III.1.2 Déterminer la tribu de $\mathbb{R}$ engendrée par $\mathbf{1}_{\mathbb{Q}}$, fonction indicatrice de $\mathbb{Q}$, c'est-à-dire la plus petite tribu rendant cette fonction mesurable.

Q. III.1.3 Vérifier que toute fonction constante est mesurable.

Q. III.1.4 L'ensemble des ouverts de $\mathbb{R}$ est-il une tribu?

Question III.2

Q. III.2.1 On considère dans cette question des fonctions de $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

(a) Montrer que la fonction indicatrice de $\mathbb{Q}$ est mesurable.

(b) Montrer que la fonction sinus est mesurable.

(c) Montrer que si $f(x) = \exp(x)$ pour $x > 0$ et $f(x) = 0$ pour $x \leq 0$ alors f est mesurable.

C) Exercices

La notion de tribu est fondamentale en théorie de la mesure et en probabilités. Dans le cadre du cours d'Analyse, nous utiliserons surtout la tribu discrète de $\mathbb{N}$ et la tribu borélienne de $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{R}^n$).

En revanche, les tribus utilisées dans le cadre des probabilités doivent être constituées de l'ensemble des *événements aléatoires* sur un ensemble Ω qui ne se réduit pas nécessairement à $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{R}$. Les exercices de probabilités vous permettent de vous familiariser avec le formalisme moderne de cette discipline, en le reliant à la notion intuitive que vous avez rencontrée dans vos études précédentes. Même dans les cas les plus simples, il est important de spécifier l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Exercice III.1

E. III.1.1 On lance deux dés à six faces et on calcule la somme des deux nombres obtenus.

(a) Quel est l'espace d'arrivée? Proposez une tribu sur cet espace.

(b) Quel est l'espace de départ? Proposez une tribu sur cet espace.

(c) En fonction de vos choix de tribus, la fonction qui à deux dés associe leur somme est-elle mesurable? (*i. e.* est une variable aléatoire, dans le vocabulaire des probabilités).

Exercice III.2 (Continuité et mesurabilité)

E. III.2.1 On note $\mathcal{T}$ la topologie usuelle de $\mathbb{R}$. Montrer que si $f : (\mathbb{R}, \mathcal{T}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{T})$ est continue, alors $f : (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ est mesurable (on pourra commencer par montrer que $\mathcal{F} = \{B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) : f^{-1}(B) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$ est une tribu).
Montrer que la réciproque est fausse en proposant un contre-exemple.
E. III.2.2 Soit f et g deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que si f est continue et g est (Borel-)mesurable, alors $f \circ g$ est mesurable. $f \circ g$ est-elle continue?

Exercice III.3 (Tribu de Borel)

E. III.3.1 $*$(a) Montrer que tout ouvert de $\mathbb{R}$ peut s'écrire comme une union au plus dénombrable d'intervalles ouverts.

(b) En déduire que la tribu borélienne de $\mathbb{R}$, notée $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, est engendrée par l'ensemble des intervalles de la forme $]-\infty, a[$, avec $a \in \mathbb{R}$.

E. III.3.2 Montrer que $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ est engendrée par l'ensemble des compacts (parties fermées et bornées) de $\mathbb{R}$.

E. III.3.3 (a) Montrer que l'ensemble

$$\mathcal{C} = \{A \subset \mathbb{R} : A \text{ ou } \mathbb{R} \setminus A \text{ est fini ou dénombrable}\}$$

est une tribu sur $\mathbb{R}$.

$*$(b) Cette tribu est-elle égale à $\mathcal{B}(\mathbb{R})$?

(c) La tribu engendrée par les singletons est-elle la tribu $\mathcal{B}(\mathbb{R})$?

E. III.3.4 L'ensemble des unions finies ou dénombrables d'intervalles forme-t-il une tribu ?

Les fonctions mesurables constituent les objets d'étude de la théorie de l'intégration. Dans la théorie des probabilités, elles constituent les variables aléatoires. Dans le cadre du cours d'Analyse, la mesurabilité est souvent une hypothèse des théorèmes usuels.

Les trois exercices suivant permettent de mettre en œuvre des méthodes classiques.

Exercice III.4 (Mesurabilité)

E. III.4.1 On considère dans cette question les fonctions d'un espace mesurable $(\Omega, \mathcal{F})$ dans $(\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$.

(a) Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\{x : \limsup_{n\to+\infty} f_n(x) > t\}$ est mesurable. Idem pour $\{x : \liminf_{n\to+\infty} f_n(x) > t\}$.

(b) En déduire que $\{x : \lim_{n\to+\infty} f_n(x) \text{ existe}\}$ est mesurable et que si la fonction $\lim_{n\to+\infty} f_n$ existe, alors elle est mesurable.

(c) On suppose maintenant que $(\Omega, \mathcal{F}) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Montrer que si f est dérivable alors sa dérivée f' est mesurable.

E. III.4.2 On considère dans cette question des fonctions de $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

(a) Montrer que si $f(0) = 0$ et si $f(x) = \sin(1/x^2)$ si $x \neq 0$ alors f est mesurable (on pourra s'aider de la question 1)(b)).

(b) Montrer que la fonction $f(x) = x\mathbf{1}_{\{x\in\mathbb{Q}\}}$ est non continue par morceaux mais mesurable.

$*$(c) Montrer que si f est monotone alors elle est mesurable.

E. III.4.3 On considère dans cette question des fonctions de $(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2))$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

(a) Montrer que la fonction $(x, y) \mapsto \sin(xy)$ est mesurable.

(b) Soit f telle que $f(0, 0) = 0$ et

$$f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \qquad \text{si } (x, y) \neq (0, 0).$$

Montrer que f est mesurable.

E. III.4.4 On considère dans cette question les fonctions d'un espace mesurable $(\Omega, \mathcal{F})$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

(a) Déterminer les fonctions mesurables lorsque $\mathcal{F} = \{\emptyset, \Omega\}$.

(b) Déterminer les fonctions mesurables lorsque $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$.

Exercice III.5 (Approximation d'une fonction mesurable)
Soit $f : E \to \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ une fonction. Pour tout $n \geq 1$ et pour tout $i \in \{0, 1, \ldots, n\,2^n - 1\}$, on pose $A_n = \{x \in E : f(x) \geq n\}$ et $B_{n,i} = \{x \in E : i\,2^{-n} \leq f(x) < (i+1)\,2^{-n}\}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit la fonction $f_n = \sum_{i=0}^{n2^n-1} i\,2^{-n}\,\mathbf{1}_{B_{n,i}} + n\mathbf{1}_{A_n}$.

E. III.5.1 Montrer que pour tout $x \in E$, $f_n(x)$ converge simplement vers $f(x)$. La convergence est-elle uniforme?

E. III.5.2 En déduire qu'une fonction borélienne $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ peut être approchée par une suite de fonctions étagées.

E. III.5.3 Ce résultat peut-il être étendu pour une fonction $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, non nécessairement positive?

A ce stade, les probabilités ne représentent qu'un cas particulier de la théorie de la mesure: les mesures sont de masse 1 et éventuellement discrètes (i.e à support dans $\mathbb{N}$). De nouvelles notions viendront plus tard montrer que les probabilités sont bien plus que cela (l'indépendance en est un premier aperçu). En attendant, voici quelques exercices de probabilités élémentaires.

Exercice III.6 (Dénombrement)

E. III.6.1 Lors d'une soirée, n personnes sont réunies. A partir de quelle valeur de n accepteriez-vous de parier qu'au moins 2 des personnes présentes ont leur anniversaire le même jour?

La connaissance précise de la loi d'une variable aléatoire permet de résoudre des problèmes pratiques.

Exercice III.7 (Loi binomiale et assurance)
Une grande mutuelle d'assurance étudie d'éventuels changements de tarifs. Pour cela, elle a évalué le risque d'accident automobile de ses assurés en fonction de l'ancienneté de leur permis de conduire:

- 20% des assurés de cette mutuelle ont leur permis de conduire depuis moins de 5 ans.
- L'étude montre que la probabilité d'avoir un accident dans l'année quelqu'un qui possède son permis depuis moins de 5 ans est 0,4.
- Et la probabilité devient 0,125 pour quelqu'un qui possède son permis depuis plus de 5 ans.

E. III.7.1 Si on choisit au hasard 10 personnes ayant leur permis de conduire depuis moins de 5 ans, quelle est la probabilité d'en voir au moins un accidenté dans l'année?

E. III.7.2 Même question avec 10 assurés ayant leur permis depuis plus de 5 ans.

E. III.7.3 Si on prend au hasard 10 personnes parmi les assurés, quelle est la probabilité d'en voir au moins un ayant un accident dans l'année?

Exercice III.8 (Loi de Bernoulli, loi binomiale)
Soient $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et distribuées suivant la même loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$, i.e. $\mathbb{P}(X_n = 1) = p$ et $\mathbb{P}(X_n = 0) = 1 - p$ pour tout $n \geq 1$.

E. III.8.1 Montrer que la variable $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$, définie par

$$\forall k \geq 0, \quad \mathbb{P}(S_n = k) = C_n^k\, p^k (1-p)^{n-k}.$$

E. III.8.2 Montrer que si $\lim_{n\to\infty}(n\, p_n) = \lambda > 0$, alors la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p_n)$ peut être approximée par la loi de Poisson de paramètre λ, c'est-à-dire que pour tout $k \geq 0$ fixé,

$$\mathbb{P}(S_n = k) \to e^{-\lambda}\, \frac{\lambda^k}{k!} \quad \text{lorsque } n \to \infty.$$

Indication : On pourra écrire

$$C_n^k = \frac{n^k}{k!}\left(\frac{n}{n}\right)\left(\frac{n-1}{n}\right)\cdots\left(\frac{n-k+1}{n}\right).$$

Exercice III.9 (Empreintes ADN)
Dans certaines fictions policières, le détective est amené à déclarer "le criminel possède les caractéristiques inhabituelles... ; il suffit de trouver la personne correspondante et vous aurez votre homme". Supposons qu'un individu quelconque possède ces caractéristiques inhabituelles avec une probabilité 10^{-7} indépendamment des autres individus, et que la ville en question possède 10^7 habitants.

E. III.9.1 Déterminer le nombre moyen de personnes dans la ville possèdant ces caractéristiques inhabituelles.
Sachant que la police trouve une personne possédant les caractéristiques recherchées, quelle est la probabilité qu'il en existe au moins une autre?

E. III.9.2 Si la police trouve deux telles personnes, quelle est la probabilité qu'il en existe au moins une autre?

E. III.9.3 Combien de personnes possédant les caractéristiques recherchées la police doit-elle trouver, pour estimer les avoir raisonnablement toutes trouvées?

E. III.9.4 Etant donnée la population, à quel point les caractéristiques du criminel doivent-elles être improbable pour qu'il puisse être déterminé de manière unique?

D) Approfondissement

Exercice III.10 (Tribus infinies)
Le but de cet exercice est de montrer qu'il n'existe pas de tribu de taille infinie qui soit dénombrable. Soit $(E, \mathcal{E})$ un ensemble mesurable tel que $\mathcal{E}$ contient un nombre infini d'éléments. Pour tout $x \in E$, on note $A_x = \cap_{A\in\mathcal{E}: x\in A} A$.

***E. III.10.1** Montrer que si $A_x \cap A_y \neq \emptyset$, alors $A_x = A_y$.

***E. III.10.2** On suppose que $\mathcal{E}$ est au plus dénombrable, montrer que:

(a) $\forall x \in E, A_x \in \mathcal{E}$;

(b) tout $B \in \mathcal{E}$ s'écrit $B = \cup_{x \in B} A_x$;

(c) cette union est au plus dénombrable et cette décomposition est unique.

****E. III.10.3** On considère $\mathcal{A} = \{A_x\}_{x \in E}$. Montrer que $\mathcal{A}$ contient un nombre infini d'éléments (on pourra supposer le contraire et aboutir à une contradiction). En déduire que $\mathcal{E}$ n'est pas dénombrable.

Exercice III.11

E. III.11.1 Soit f une fonction sur Ω muni d'une tribu $\mathcal{F}$. Montrer que si $\{x : f(x) \geq r\}$ est mesurable pour tout $r \in \mathbb{Q}$, alors f est mesurable de $(\Omega, \mathcal{F})$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

Exercice III.12 (Paradoxe de Bertrand)
Une corde du cercle unité est choisie au hasard. Quelle est la probabilité qu'un triangle équilatéral ayant cette corde pour base soit contenu dans le disque ? L'exercice montre que des constructions différentes de la "corde aléatoire" conduisent à des solutions différentes : on dit le problème est mal-posé.

Pour illustrer cela, on considère trois constructions différentes du triangle équilatéral. Soit $\mathcal{U}$ le cercle de centre O et de rayon unité, et soit X la longueur de la corde aléatoire $[A, B]$ où A et B sont sur le cercle $\mathcal{U}$. Déterminer la probabilité recherchée dans chacune des constructions suivantes:

E. III.12.1 Un point P est tiré au hasard (uniformément) à l'intérieur du disque, et la corde est construite de sorte que P soit le milieu du segment $[A, B]$.

E. III.12.2 On choisit au hasard (uniformément) un rayon de $\mathcal{U}$, et on choisit au hasard (uniformément) un point P de ce rayon. La corde est construite de sorte que P soit le milieu du segment $[A, B]$.

E. III.12.3 Les points A et B sont choisis au hasard (uniformément) de manière indépendante sur le cercle $\mathcal{U}$.

E. III.12.4 Commenter la différence entre ces résultats.

Séance 3 : Eléments de correction des exercices

Solution de Q. III.1.1

(a) La tribu engendrée par $\{a\}$ contient nécessairement $\emptyset$, Ω et $\{b, c, d\}$.

Réciproquement $\mathcal{F}_1 = \{\emptyset, \{a\}, \{b, c, d\}, \Omega\}$ est une tribu (car elle vérifie les axiomes de la définition).

C'est donc la plus petite tribu contenant $\{a\}$, c'est la tribu engendrée par $\{a\}$.

(b) Par un raisonnement analogue, on trouve que la tribu engendrée par $\{a, b\}$ est $\mathcal{F}_2 = \{\emptyset, \{a, b\}, \{c, d\}, \Omega\}$.

(c) La tribu engendrée par $\{a\}$ et $\{a, b\}$ contient par complémentaire $\{b, c, d\}$ et $\{c, d\}$ et par différence $\{b\}$. Elle doit maintenant contenir aussi $\{a, c, d\}$.

Réciproquement $\mathcal{F}_3 = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{c, d\}, \{b, c, d\}, \{a, c, d\}, \Omega\}$ est une tribu. C'est donc la plus petite tribu contenant $\{a\}$, $\{a, b\}$, c'est la tribu engendée par $\{a\}$ et $\{a, b\}$.

(d) On a $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_3$ et $\mathcal{F}_2 \subset \mathcal{F}_3$.

Solution de Q. III.1.2 La tribu engendrée par $1_{\mathbb{Q}}$ est la plus petite tribu $\mathcal{T}$ de $\mathbb{R}$ (considéré comme espace de départ) rendant $\mathbf{1}_{\mathbb{Q}}$ mesurable (de $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$).

Posons $\mathcal{T} = \{\{\emptyset, \mathbb{Q}, \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \mathbb{R}\}$. Alors $\mathcal{T}$ est une tribu, elle rend $\mathbf{1}_{\mathbb{Q}}$ mesurable puisque pour $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}))$:

- $\mathbf{1}_{\mathbb{Q}}^{-1}(A) = \mathbb{Q}$ si A contient 1 et pas 0,
- $\mathbf{1}_{\mathbb{Q}}^{-1}(A) = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ si A contient 0 et pas 1,
- $\mathbf{1}_{\mathbb{Q}}^{-1}(A) = \mathbb{R}$ si A contient 0 et 1,
- $\mathbf{1}_{\mathbb{Q}}^{-1}(A) = \emptyset$ si A ne contient ni 0 ni 1,

and this is the smallest σ-algebra since $\mathbf{1}_{\mathbb{Q}}$ is not measurable with respect to $\{\emptyset, \mathbb{R}\}$.

Cette tribu $\mathcal{T}$ est donc la tribu engendrée par $\mathbf{1}_{\mathbb{Q}}$.

Solution de Q. III.1.3 Soit f une fonction mesurable de $(E, \mathcal{E})$ dans $(F, \mathcal{F})$, où $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ sont respectivement des tribus sur E et F.

On suppose que f est constante, c'est-à-dire qu'il existe $c \in F$ tel que

$$\forall x \in E, \quad f(x) = c.$$

Pour tout $A \in \mathcal{F}$,

- Soit $c \in A$. On a alors $f^{-1}(A) = E$.
- Soit $c \notin A$. On a alors $f^{-1}(A) = \emptyset$.

Dans les deux cas, on a $f^{-1}(A) \in \mathcal{E}$.

Donc f est mesurable, quelles que soient les tribus de départ et d'arrivée.

Solution de Q. III.1.4 L'intervalle $]-\infty, 0[$ est un ouvert de $\mathbb{R}$. Or, son complémentaire $[0, +\infty[$ n'est pas un ouvert de $\mathbb{R}$. Donc l'ensemble des ouverts de $\mathbb{R}$ n'est pas une tribu, car n'est pas stable par passage au complémentaire.

Solution de Q. III.2.1

(a) Comme $\mathbb{Q}$ est une union dénombrable de singletons et donc de fermés, $\mathbb{Q}$ est mesurable (dans $\mathcal{B}(\mathbb{R})$) et la Proposition 3.15 [1] assure que $\mathbf{1}_{\mathbb{Q}}$ est mesurable.

Remarque : on peut même dire que $\mathbf{1}_{\mathbb{Q}}$ est étagée.

(b) La fonction sinus est mesurable car continue sur $\mathbb{R}$.

(c) La fonction f est mesurable car continue par morceaux sur $\mathbb{R}$. (Comment prouvez-vous qu'une fonction continue par morceaux est mesurable?)

Solution de E. III.1.1

(a) L'espace d'arrivée est l'ensemble $\Omega' = \{2, 3, 4, \ldots, 10, 11, 12\}$ muni de sa tribu discrète $\mathcal{F}'$.

(b) L'espace de départ est l'ensemble Ω des couples (i, j), i et j étant des entiers variant entre 1 et 6, muni de sa tribu discrète $\mathcal{F}$.

(c) L'application S qui au couple (i, j) de Ω associe $i + j$ dans Ω' est bien mesurable puisque par définition de $\mathcal{F}$:

$$\forall B \in \mathcal{F}' \quad S^{-1}(B) \in \mathcal{F}.$$

Solution de E. III.2.1 On rappelle que $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ est la tribu engendrée par les ouverts de $\mathbb{R}$, c'est-à-dire la plus petite tribu contenant tous les ouverts de $\mathbb{R}$. (Attention, contrairement aux ouverts, un borélien quelconque ne s'écrit pas nécessairement comme réunion dénombrable d'ouverts).
On déduit des égalités générales $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$ et $f^{-1}(A \setminus B) = f^{-1}(A) \setminus f^{-1}(B)$, que $\mathcal{F}$ (définie dans l'énoncé) est bien une tribu. On remarque que $\mathcal{F} \supset \mathcal{T}$ puisque f est continue. $\mathcal{F}$ contient donc la tribu engendrée par $\mathcal{T}$, qui n'est autre que $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. Ainsi $\mathcal{F} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$.
Le raisonnement précédent est un exemple d'application du lemme de transport, sur lequel nous reviendrons à plusieurs reprises dans la suite.

La fonction $\mathbf{1}_{[0,1]}$ fournit un contre-exemple.

Solution de E. III.2.2 Grâce à la question précédente, on sait que f est mesurable. Grâce à la relation $(f \circ g)^{-1}(A) = g^{-1} \circ f^{-1}(A)$, on vérifie que $f \circ g$ est mesurable.

Prendre $f(x) = x$ et $g(x) = \mathbf{1}_{[0,1]}(x)$.

Solution de E. III.3.1

[1] voir slides du cours (en français) sur Edunao.

(a) Soit O un ouvert de $\mathbb{R}$.

Par définition, pour tout $x \in O$, il existe $r > 0$ tel que $]x-r, x+r[\subset O$.

Par densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, il existe $s \in \mathbb{Q}$ tel $0 < s < r$ et donc $]x-s, x+s[\subset]x-r, x+r[\subset O$.

Encore par densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, il existe $q \in \mathbb{Q}$ tel que $|x-q| < s/2$.

On a donc $x \in]q-s/2, q+s/2[\subset O$.

L'union des intervalles ouverts $]q-s/2, q+s/2[$ est dénombrable (car q et s sont rationnels). Elle contient O (car elle contient tous les x). Elle est aussi incluse dans O (car les $]q-s/2, q+s/2[$ sont tous inclus dans O).

Finalement, tout ouvert O de $\mathbb{R}$ est une union dénombrable d'intervalles ouverts.

(b) On remarque d'abord que si une famille de parties $\mathcal{A}$ est incluse dans une famille de parties $\mathcal{B}$ alors la tribu engendrée par $\mathcal{A}$ est incluse dans la tribu engendrée par $\mathcal{B}$.

Tout intervalle du type $]-\infty, a[$, $a \in \mathbb{R}$, est un ouvert donc la tribu $\tau := \sigma\left(]-\infty, a[, a \in \mathbb{R}\}\right)$ est incluse dans la tribu engendrée par les ouverts c'est-à-dire la tribu borélienne.

Par ailleurs, soient $a < b$. On a $]-\infty, a] = \cap_{n\in\mathbb{N}^*}]-\infty, a+1/n[$ qui est dans τ et donc $]a, b[=]-\infty, b[\setminus]-\infty, a]$ est aussi dans τ (par propriétés de stabilité d'une tribu).

Par application de la question 1)(a), tout ouvert de $\mathbb{R}$ est dans τ. Grâce à la remarque préliminaire, on en déduit que la tribu borélienne est incluse dans τ.

Solution de E. III.3.2 Les compacts sont des fermés donc leurs complémentaires sont des ouverts donc des boréliens. La tribu engendrée par les compacts est donc incluse dans la tribu borélienne.

Réciproquement, tout intervalle $]-\infty, a[$ est une union dénombrable de compacts (par exemple les $[a-n, a-1/n]$) donc la tribu borélienne engendrée par les $]-\infty, a[$ est incluse dans la tribu engendrée par les compacts.

Solution de E. III.3.3

(a) $\mathcal{C}$ contient $\mathbb{R}$ et est stable par complémentaire. Reste à prouver que $\mathcal{C}$ est stable par union dénombrable.

Soit (A_n) une famille dénombrable de parties de $\mathcal{C}$.

Notons A l'union des A_n.

Si tous les A_n sont finis ou dénombrables alors A aussi donc A est dans $\mathcal{C}$.

S'il existe n' tel que $A_{n'}$ est non dénombrable alors $\mathbb{R} \setminus A_{n'}$ est fini ou dénombrable.

Or $\mathbb{R} \setminus A = \cap \mathbb{R} \setminus A_n \subset \mathbb{R} \setminus A_{n'}$.

Donc $\mathbb{R} \setminus A$ est fini ou dénombrable donc A est dans $\mathcal{C}$.

(b) $\mathbb{R}_+^*$ est un ouvert donc un borélien mais ni $\mathbb{R}_+^*$ ni son complémentaire $\mathbb{R}_-$ ne sont finis ou dénombrables.

Donc $\mathbb{R}_+^*$ n'est pas dans $\mathcal{C}$.

(c) La tribu engendrée par les singletons est $\mathcal{C}$ (on le prouve facilement par double inclusion). Ce n'est donc pas la tribu borélienne.

Solution de E. III.3.4 $\mathbb{Q}$ est une union dénombrable d'intervalles (en fait des singletons) mais pas son complémentaire $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Les unions finies ou dénombrables d'intervalles ne forment donc pas une tribu.

Solution de E. III.4.1

(a) D'après la Question Q. III.3.1, on sait que la tribu $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ est engendrée par la collection d'ensembles $\{]-\infty, a[,\ a \in \mathbb{R}\}$. Ce résultat s'étend à $\overline{\mathbb{R}}$ (muni on le rappelle de la topologie de l'ordre), c'est-à-dire que $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}) = \sigma(\{[-\infty, a[, a \in \mathbb{R}\}) = \sigma(\{]a, +\infty], a \in \mathbb{R}\})$. Ainsi par la Proposition 3.12, $\limsup f_n$ est mesurable si et seulement si $(\limsup f_n)^{-1}(]a, +\infty]) \in \mathcal{F}, \forall a \in \mathbb{R}$. Or on a vu en cours que si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions mesurables, alors $\limsup f_n$ est mesurable. Donc $\{x : \limsup_{n\to+\infty} f_n(x) > a\} \in \mathcal{F}$ (idem pour la $\liminf$). Sinon, on peut observer directement que

$$\{x : \limsup_{n\to+\infty} f_n(x) > t\} = \bigcup_{m\in\mathbb{N}^*} \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{k\geq n} \{x : f_k(x) \geq t + \frac{1}{m}\}.$$

Puisque $\{x : \limsup_{n\to+\infty} f_n(x) > t\}$ s'écrit comme une combinaison d'intersections et d'unions dénombrables d'ensembles mesurables, il est lui-même mesurable.

(b) On remarque d'abord que

$$\{x : \lim_{n\to+\infty} f_n(x) \text{ existe (dans } \overline{\mathbb{R}})\} = \{x : \limsup_{n\to+\infty} f_n(x) = \liminf_{n\to+\infty} f_n(x)\}.$$

On peut alors directement conclure en posant la fonction $F = (\liminf_{n\to+\infty} f_n, \limsup_{n\to+\infty} f_n)$ et $D = \{(x,x) :\ x \in \overline{\mathbb{R}}\}$ la diagonale de $\overline{\mathbb{R}}^2$. F est mesurable, D est fermé dans $\overline{\mathbb{R}}^2$ donc $D \in \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}^2)$, et on a $F^{-1}(D) = \{x : \lim_{n\to+\infty} f_n(x) \text{ existe}\}$. Au vu des remarques précédentes, on a donc $\{x : \lim_{n\to+\infty} f_n(x) \text{ existe}\} \in \mathcal{F}$. Si on souhaite déduire ce résultat de 1)(a) comme le suggère la question, alors on pourra écrire

$$\begin{aligned}\{x : \lim_{n\to+\infty} f_n(x) \text{ existe (dans } \overline{\mathbb{R}})\} &= \{x : \limsup_{n\to+\infty} f_n(x) \leq \liminf_{n\to+\infty} f_n(x)\} \\ &= \bigcap_{p\in\mathbb{N}^*} \bigcup_{q\in\overline{\mathbb{Q}}} \{x : \limsup_{n\to+\infty} f_n(x) \leq q + \frac{1}{p}\} \cap \{x : \liminf_{n\to+\infty} f_n(x) > q\},\end{aligned}$$

où on a noté $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q} \cup \{-\infty, +\infty\}$.
Si cette limite existe (i.e. si $\{x : \lim_{n\to+\infty} f_n(x) \text{ existe}\} = \Omega$), alors $\lim f_n = \limsup f_n = \liminf f_n$ et d'après la question précédente, les ensembles de la forme $\{x : \lim_{n\to\infty} f_n(x) > t\}$ sont mesurables. Suite à la remarque formulée en 1)(a), on en déduit donc que $\lim f_n$ est mesurable.

(c) Considérons pour $n \geq 1$:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g_n(x) = n(f(x+\frac{1}{n}) - f(x)).$$

Les fonctions $g_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont continues donc mesurables de $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ (voir Exercice III.2). Or $\{x : \lim_{n\to\infty} g_n(x) \text{ existe}\} = \mathbb{R}$ car f est dérivable en tout point. Donc $\lim_{n\to\infty} g_n = f'$ est aussi mesurable d'après la question précédente.

Solution de E. III.4.2

(a) Remarquons que la fonction f valant $\sin(1/x^2)$ si $x \neq 0$ et 0 si $x = 0$ n'est pas continue par morceaux (elle n'a pas de limite en 0). On ne peut donc pas conclure comme précédemment.

Considérons, pour $n \geq 1$ les fonctions :

$$f_n(x) = \sin\left(\frac{1}{x^2 + 1/n\pi}\right).$$

Alors, pour tout x réel, $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)$ et comme pour tout entier $n \geq 1$, f_n est mesurable car continue, on en déduit par la Proposition 3.17 que f est mesurable (sur $\mathbb{R}$).

(b) Ordonnons les rationnels en une suite (q_n). La fonction considérée peut s'écrire :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} q_n \mathbf{1}_{\{q_n\}}(x)$$

Elle est donc limite d'une suite de fonctions étagées donc mesurable.

Remarque : on peut aussi remarquer que $f(x) = x\mathbf{1}_{\mathbb{Q}}(x)$ et conclure que f est mesurable comme produit de fonctions mesurables.

(c) Supposons f croissante.

Comme expliqué à la Question 1)(a) de cet exercice, on rappelle que pour montrer que f est mesurable, il suffit de montrer que $f^{-1}(]-\infty, a[)$ est mesurable pour tout a.

Considérons $M = \sup\{x : f(x) < a\}$. On a alors $f^{-1}(]-\infty, a[) =]-\infty, M]$ ou $]-\infty, M[$. Donc $f^{-1}(]-\infty, a[)$ est un intervalle donc est un borélien.

Solution de E. III.4.3

(a) La fonction $(x, y) \mapsto \sin(xy)$ est continue donc mesurable relativement aux tribus de Borel.

(b) Considérons pour $n \geq 1$:

$$f_n(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2 + \frac{1}{n}}.$$

Pour tout $n \geq 1$, les fonctions f_n sont mesurables car continues donc leur limite f est aussi mesurable.

Solution de E. III.4.4

(a) Soit f une fonction mesurable et b dans $f(\Omega)$. Alors $\{b\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ d'où $f^{-1}(\{b\}) \in \mathcal{F}$. Ainsi $f^{-1}(\{b\}) = \Omega$ et donc f est constante sur Ω, égale à b.

Réciproquement, toute fonction constante est mesurable. En effet si on note $f(\Omega) = \{b\}$ alors, pour tout B de $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, $f^{-1}(B) = \Omega$ si $b \in B$ et $f^{-1}(B) = \emptyset$ sinon.

L'ensemble des fonctions mesurables est donc l'ensemble des fonctions constantes.

(b) Soit f une fonction quelconque. Pour tout B de $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, on a nécessairement $f^{-1}(B) \in \mathcal{F}$ donc f est mesurable.

Toutes les fonctions sont donc mesurables.

Solution de E. III.5.1

On fixe $n \geq 1$.
Pour tout $x \in E$, soit $x \in A_n$, soit $x \in B_{n,i}$ pour un certain $i \in \{0, 1, \dots, n\,2^n - 1\}$.

- Si $x \in A_n$, alors en distinguant les cas $x \in A_{n+1}$ et $x \in B_{n+1,j}$ pour un certain $j \in \{0, \dots, (n+1)2^{n+1} - 1\}$,

$$f_{n+1}(x) = \begin{cases} n+1 & \text{si } f(x) \geq n+1 \\ n + l2^{-(n+1)} & \text{si } n + l2^{-(n+1)} \leq f(x) < n + (l+1)2^{-(n+1)} \text{ avec } 0 \leq l \leq 2^{n+1} - 1. \end{cases}$$

  Pour trouver l'entier j dans le 2ème cas (qui peut se ré-écrire $n \leq f(x) < n+1$), il suffit de remarquer que

$$n + l2^{-(n+1)} \leq f(x) < n + (l+1)2^{-(n+1)} \Leftrightarrow n2^{n+1} + l \leq 2^{n+1} f(x) < n2^{n+1} + (l+1)$$

  ce qui montre que $j = n2^{n+1} + l$ et implique $f_{n+1}(x) = j2^{-(n+1)} = n + l2^{-(n+1)}$.

- Soit $x \in B_{n,i}$ pour un certain $i \in \{0, 1, \dots, n\,2^n - 1\}$.
  On a $i \leq 2^n f(x) < (i+1)$, donc $2i \leq 2^{n+1} f(x) < 2i + 2$ et

$$2i \leq 2^{n+1} f(x) < 2i + 1 \quad \text{ou bien} \quad 2i + 1 \leq 2^{n+1} f(x) < 2i + 2.$$

  Dans le 1er cas, on a $f_{n+1}(x) = 2i\, 2^{-(n+1)} = f_n(x)$.
  Dans le 2ème cas, on a $f_{n+1}(x) = (2i+1)\, 2^{-(n+1)} = f_n(x) + 2^{-(n+1)}$.

  En résumé, on a

$$f_{n+1}(x) = \begin{cases} f_n(x) & \text{si } 2i \leq 2^{n+1} f(x) < 2i + 1 \\ f_n(x) + 2^{-(n+1)} & \text{si } 2i + 1 \leq 2^{n+1} f(x) < 2i + 2. \end{cases}$$

On remarque donc que la suite $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.
De plus, si $f(x) < n_0$ pour un certain entier n_0, alors pour tout $n \geq n_0$,

$$f_n(x) = i\, 2^{-n} \quad \text{si } i\, 2^{-n} \leq f(x) < (i+1)\, 2^{-n},$$

ce qui implique

$$0 \leq f(x) - f_n(x) < 2^{-n}.$$

On en déduit que la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(x)$.
Si la fonction f est majorée par $M > 0$, alors pour tout $n \geq M$, on a

$$\forall x \in E, \quad 0 \leq f(x) - f_n(x) < 2^{-n}.$$

Dans ce cas, la convergence de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers f est uniforme.

Solution de E. III.5.2 On applique le résultat de 1) à la fonction h.
Puisque la fonction $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ est borélienne, les ensemble A_n et $B_{n,i}$ sont des boréliens : $A_n = f^{-1}([n, +\infty[)$ et $B_{n,i} = f^{-1}([i\,2^{-n}, (i+1)\,2^{-n}[)$.
On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est borélienne étagée.
Donc le résultat est une conséquence de 1).

Solution de E. III.5.3 Pour étendre le résultat à une fonction $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, on peut décomposer

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = f^+(x) - f^-(x),$$

où $f^+(x) = \max(f(x), 0)$ et $f^-(x) = -\min(f(x), 0)$ et appliquer la question 2) aux fonctions boréliennes f^+ et f^-.
Evidemment, il faut justifier que f^+ et f^- sont boréliennes.
Une autre manière de procéder serait de reprendre la question 1) avec

$$\begin{aligned} i &\in \{-n2^n + 1, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, n2^n - 1\}, \\ A_n &= \{x \in R : f(x) \geq n\}, \\ A'_n &= \{x \in R : f(x) \leq -n\} \end{aligned}$$

et $f_n = \sum_{i=-n2^n+1}^{n2^n-1} i\,2^{-n}\,\mathbf{1}_{B_{n,i}} + n\mathbf{1}_{A_n} - n\mathbf{1}_{A'_n}$.

Solution de E. III.6.1 On cherche la probabilité qu'au moins 2 des personnes présentes ont leur anniversaire le même jour. On suppose que $n \leq 365$, sinon la probabilité recherchée est évidemment 1. Il sera plus commode de déterminer la probabilité de l'événement contraire.
Les anniversaires des n personnes forment une application

$$\{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, 365\}.$$

On considère alors l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ défini par :

- L'espace d'état Ω est l'ensemble des applications de $\{1, \ldots, n\}$ dans $\{1, \ldots, 365\}$;
- La tribu $\mathcal{F}$ est l'ensemble $\mathcal{P}(\Omega)$ des parties de Ω ;

- la mesure de probabilité est la probabilité uniforme (ou equi-probabilité)

$$\mathbb{P} : A \mapsto \frac{\mathrm{Card}(A)}{\mathrm{Card}(\Omega)}.$$

Dans l'espace $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, l'événement "les n dates d'anniversaires sont différentes" se formalise en : $\{$l'application $\{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, 365\}$ est injective$\}$.

Ainsi, la probabilité recherchée est

$$1 - \frac{\text{Nombre d'injections } \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, 365\}}{\mathrm{Card}(\Omega)} = 1 - \frac{A_{365}^n}{365^n},$$

où $A_{365}^n = \frac{365!}{(365-n)!}$ est le nombre d'arrangements de n éléments parmi 365.

Pour $n = 20$, on trouve $p \approx 0,4114$ et pour $n = 40$, $p \approx 0,891$.

Solution de E. III.7.1 L'espace de probabilité Ω est l'ensemble des triplets (i, A_i, J_i) où i est l'identifiant de l'assuré,

$$A_i = \mathbb{1}_{\{i \text{ est accidenté dans l'année}\}},$$
$$J_i = \mathbb{1}_{\{i \text{ est jeune conducteur}\}}.$$

La tribu considérée est l'ensemble $\mathcal{P}(\Omega)$ des parties de Ω. L'énoncé dit

$$\mathbb{P}(A \mid J) = 0.4$$
$$\mathbb{P}(A \mid J^c) = 0.125$$
$$\mathbb{P}(J) = 0.2.$$

On choisit au hasard 10 jeunes conducteurs. La variable aléatoire X qui compte le nombre de jeunes conducteurs, parmi ces 10, qui ont un accident dans l'année, suit une loi binomiale $B(n = 10, p = 0.4)$. C'est-à-dire

$$\mathbb{P}(X = k) = C_n^k\, p^k (1-p)^{n-k},$$

où

- p^k correspond à k individus qui ont un accident (probabilité $p = 0.4$) ;
- $(1-p)^{n-k}$ correspond à $n-k$ individus qui n'ont pas d'accident (probabilité $1 - p = 0.6$) ;
- C_n^k correspond au nombre de façons de choisir k individus accidentés parmi les 10.

On peut aussi remarquer que X peut s'écrire comme la somme de n variables aléatoires N_i indépendantes, valant 1 si l'individu a un accident et 0 sinon.

On a alors

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X \geq 1) &= 1 - \mathbb{P}(X = 0)\\ &= 1 - C_{10}^0\, 0.4^0\, 0.6^{10}\\ &= 0.994.\end{aligned}$$

Solution de E. III.7.2 On choisit au hasard 10 conducteurs qui ne sont pas jeunes conducteurs. La variable aléatoire qui compte le nombre d'individus, parmi ces 10, qui ont un accident dans l'année, suit une loi binomiale $B(n = 10, p = 0.125)$.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y \geq 1) &= 1 - \mathbb{P}(Y = 0)\\ &= 1 - C_{10}^{0}\, 0.125^{0}\, 0.875^{10}\\ &= 0.74.\end{aligned}$$

Solution de E. III.7.3 On choisit au hasard 10 conducteurs parmi les assurés. Soit Z la variable aléatoire égale au nombre de personnes ayant un accident dans l'année. Z suit une loi binomiale $B(n = 10, p = \mathbb{P}(A))$.

Or on a

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A) &= \mathbb{P}(A \mid J) \times \mathbb{P}(J) + \mathbb{P}(A \mid J^c) \times (1 - \mathbb{P}(J))\\ &= 0.4 \times 0.2 + 0.125 \times 0.8\\ &= 0.18.\end{aligned}$$

On en déduit

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Z \geq 1) &= 1 - \mathbb{P}(Z = 0)\\ &= 1 - C_{10}^{0}\, 0.18^{0}\, 0.82^{10}\\ &= 0.86\end{aligned}$$

Solution de E. III.8.1 Question de cours.

Solution de E. III.8.2 On suit l'indication de l'énoncé. Pour toute v.a. S_n de loi binomiale $\mathcal{B}(n, p_n)$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(S_n = k) &= \frac{n^k}{k!}\left(\frac{n}{n}\right)\left(\frac{n-1}{n}\right)\cdots\left(\frac{n-k+1}{n}\right) p_n^k\,(1-p_n)^{n-k}\\ &\sim \frac{\lambda^k}{k!}\left(\frac{n}{n}\right)\left(\frac{n-1}{n}\right)\cdots\left(\frac{n-k+1}{n}\right) (1-p_n)^{n-k}.\end{aligned}$$

Il reste donc à étudier le logarithme de la quantité

$$A_n = \left(\frac{n}{n}\right)\left(\frac{n-1}{n}\right)\cdots\left(\frac{n-k+1}{n}\right)(1-p_n)^{n-k},$$

lorsque n tend vers ∞.

$$\begin{aligned}\ln A_n &= (n-k)\ln(1-p_n) + \underbrace{\ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \cdots + \ln\left(1 - \frac{k-1}{n}\right)}_{\to 0 \text{ quand } n \to \infty}\\ &\sim -(n-k)\, p_n \sim -\lambda.\end{aligned}$$

On en déduit que pour tout k fixé,

$$\mathbb{P}(S_n = k) \to e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \quad \text{lorsque } n \to \infty.$$

On dit que la variable S_n converge en loi vers la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$.

Solution de E. III.9.1 Soit N le nombre d'individu possédant les caractéristiques recherchées. N est une variable aléatoire suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(n = 10^7, p = 10^{-7})$. Pourquoi ?

Ainsi, $\mathbb{E}[N] = np = 1$.

La probabilité recherchée est

$$\mathbb{P}(N > 1 \mid N \geq 1) = \frac{\mathbb{P}(N > 1)}{\mathbb{P}(N > 0)} = \frac{1 - \mathbb{P}(N = 0) - \mathbb{P}(N = 1)}{1 - \mathbb{P}(N = 0)}.$$

Or, $\mathbb{P}(N = k) = C_n^k \, p^k \, (1-p)^{n-k}$ implique

$$\mathbb{P}(N = 0) = (1 - 10^{-7})^{10^7} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(N = 1) = 10^7 \, 10^{-7} (1 - 10^{-7})^{10^7 - 1} = (1 - 10^{-7})^{10^7 - 1}.$$

D'où

$$\mathbb{P}(N > 1 \mid N \geq 1) = \frac{1 - (1 - 10^{-7})^{10^7} - (1 - 10^{-7})^{10^7 - 1}}{1 - (1 - 10^{-7})^{10^7}}.$$

Pour obtenir une approximation de $\mathbb{P}(N > 1 \mid N \geq 1)$, on peut utiliser l'approximation de la loi binomiale $\mathcal{B}(n = 10^7, p = 10^{-7})$ par la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda = 1)$

$$\mathbb{P}(N > 1 \mid N \geq 1) = \frac{\mathbb{P}(N > 1)}{\mathbb{P}(N > 0)} \approx \frac{1 - e^{-1} - e^{-1}}{1 - e^{-1}} \approx 0.4.$$

Solution de E. III.9.2 De la même manière,

$$\mathbb{P}(N > 2 \mid N \geq 2) = \frac{\mathbb{P}(N > 2)}{\mathbb{P}(N > 1)} \approx \frac{1 - e^{-1} - e^{-1} - \frac{1}{2} e^{-1}}{1 - e^{-1} - e^{-1}} \approx 0.3.$$

Solution de E. III.9.3 Pour tout $k \ll n = 10^7$, en remarquant que $p = 1/n$, on a l'approximation de la loi binomiale par la loi de Poisson

$$\mathbb{P}(N = k) = C_n^k \left(\frac{1}{n}\right)^k \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n-k} \approx \frac{e^{-1}}{k!}.$$

On estime que "être raisonnablement confiant que m soit la totalité des individus recherchés" signifie que $\mathbb{P}(N > m \mid N \geq m) \leq q$ pour un certain réel q suffisamment petit. Sous l'approximation de la loi binomiale par la loi de Poisson, on a l'équivalence suivante

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(N > m \mid N \geq m) \leq q &\Leftrightarrow \mathbb{P}(N > m) \leq q\, \mathbb{P}(N \geq m)\\ &\Leftrightarrow e^{-1} \sum_{l=m+1}^{\infty} \frac{1}{l!} \leq q\, e^{-1} \sum_{l=m}^{\infty} \frac{1}{l!}.\end{aligned}$$

Pour tout q fixé, la plus petite valeur acceptable de m peut être déterminée numériquement. Si q est petit, alors une estimation très grossière de m est $1/q$. En effet, l'approximation grossière

$$\sum_{l=m+1}^{\infty} \frac{1}{l!} = \frac{1}{m+1}\left(\frac{1}{m!} + \frac{m+1}{(m+2)!} + \dots\right) \approx \frac{1}{m+1} \sum_{l=m}^{\infty} \frac{1}{l!}$$

conduit à

$$\sum_{l=m+1}^{\infty} \frac{1}{l!} \leq q \sum_{l=m}^{\infty} \frac{1}{l!} \Longleftrightarrow \frac{1}{m+1} \leq q.$$

Cette estimation grossière est vérifiée numériquement dans le cas où $q = 0.05$, qui conduit à $m \approx 20$.

Solution de E. III.9.4 Aucun niveau p d'improbabilité n'est suffisamment petit pour garantir la détermination unique de la personne recherchée.

Si $p = 10^{-7}\,\alpha$, alors N suit la loi binomiale $\mathcal{B}(10^7, 10^{-7}\alpha)$, qui peut être approximée par la loi de Poisson $\mathcal{P}(\alpha)$. Dans ce cas,

$$\mathbb{P}(N > 1 \mid N \geq 1) \approx \frac{1 - e^{-\alpha} - \alpha e^{-\alpha}}{1 - e^{-\alpha}} = \rho.$$

Une valeur acceptable pour des délits mineurs pourrait être de $\rho \approx 0.05$, qui correspond à $\alpha \approx 0.1$, c'est-à-dire un niveau d'improbabilité $p = 10^{-8}$. Pour des crimes plus importants, il est évidemment nécessaire d'exiger des valeurs de ρ beaucoup plus petites...

Solution de E. III.10.1 Soit $x, z \in E$ tels que $z \in A_x$. $z \in A_x$ signifie que tout ensemble $A \in \mathcal{E}$ contenant x contient aussi z. Si il existait $B \in \mathcal{E}$ tel que $z \in B$ mais $x \notin B$, alors on aurait $B^c (\in \mathcal{E})$ contenant x mais pas z, ce qui est contradictoire. Donc $z \in A_x \Rightarrow A_z = A_x$.

Solution de E. III.10.2

(a) Puisque $\mathcal{E}$ est dénombrable, A_x est défini par l'intersection d'un nombre dénombrable d'éléments de $\mathcal{E}$ et est donc dans $\mathcal{E}$.

(b) L'inclusion $B \subset \cup_{x \in B} A_x$ est immédiate. Si $x \in B$, alors $A_x \subset B$ ce qui fournit l'inclusion réciproque.

(c) Puisque $A_x \in \mathcal{E}$ et que nous avons supposé que $\mathcal{E}$ est dénombrable, une union quelconque de A_x est nécessairement dénombrable. D'après la question 1), les A_x forment une partition de E. Cette décomposition est donc unique.

Solution de E. III.10.3 D'après les questions précédentes, si $\mathcal{E}$ est dénombrable, l'application

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(\mathcal{A}) &\to \mathcal{E}\\ B &\mapsto \bigcup_{A\in B} A\end{aligned}$$

est bijective. Or par hypothèse, $\mathcal{E}$ contient un nombre infini d'éléments. Ainsi E et donc $\mathcal{A}$ sont également infinis. Mais alors $\mathcal{P}(\mathcal{A})$ est indénombrable et il ne peut y avoir de bijection avec $\mathcal{E}$, ce qui fournit une contradiction.

Solution de E. III.11.1 En complément de la Question Q. III.3.1, on remarque que tout ensemble $]-\infty, x[, x \in \mathbb{R}$ peut s'écrire comme une union dénombrable d'ouverts:

$$]-\infty, x[= \bigcup_{r\in\mathbb{Q}, r\leq x}]-\infty, r[.$$

Ainsi, la tribu borélienne est engendrée par la famille dénombrable $\{]-\infty, r[, r \in \mathbb{Q}\}$ ou par complémentarité, $\{[r, +\infty[, r \in \mathbb{Q}\}$.

Pour répondre à la question, il suffit alors d'utiliser le lemme de transport (voir l'énoncé dans le corrigé de la Question Q. III.4.1).

On rappelle la preuve de ce résultat. D'abord, on peut vérifier que l'image réciproque d'une tribu est une tribu. Donc $f^{-1}(\sigma(\mathcal{C}))$ étant une tribu contenant $f^{-1}(\mathcal{C})$, on a l'inclusion $\sigma(f^{-1}(\mathcal{C})) \subset f^{-1}(\sigma(\mathcal{C}))$.
L'inclusion réciproque s'obtient en observant que $\Sigma = \{A \in \sigma(\mathcal{C}) : f^{-1}(A) \in \sigma(f^{-1}(\mathcal{C}))\}$ est une tribu et que Σ contient $\mathcal{C}$. Ainsi, $\Sigma = \sigma(\mathcal{C})$ et donc $f^{-1}(\sigma(\mathcal{C})) \subset \sigma(f^{-1}(\mathcal{C}))$.

Solution de E. III.12.1 On sait qu'un triangle équilatéral peut être construit sur la corde $[A, B]$ en restant à l'intérieur du disque unité si et seulement si la longueur de $[A, B]$ est inférieure à $\sqrt{3}$ (faire un dessin dans chacun des cas).

Le point P est tiré de manière uniforme à l'intérieur du cercle $\mathcal{U}$. P est le milieu du segment $[A, B]$ si la droite (OP) est la médiatrice de $[A, B]$.
Soit X la longueur de $[A, B]$. $X > \sqrt{3}$ si et seulement si la distance $OP < \frac{1}{2}$. Ainsi $\mathbb{P}(X > \sqrt{3}) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$. Avec cette construction, la probabilité recherchée est donc $3/4$.

Solution de E. III.12.2 Comme P est tiré de manière uniforme sur un rayon, la probabilité que $X > \sqrt{3}$ devient $\mathbb{P}(X > \sqrt{3}) = \mathbb{P}(OP < \frac{1}{2}) = 1/2$. La probabilité recherchée est donc $1/2$.

Solution de E. III.12.3 Les points A et B sont tirés uniformément de manière indépendante sur le cercle. Un triangle équilatéral construit sur $[A, B]$ peut être à l'intérieur du disque si et seulement si la longueur de l'arc $\overset{\frown}{AB}$ est inférieure à $2\pi/3$. La probabilité recherchée est donc $2/3$ (par symétrie, le point A étant fixé, B est choisi sur l'un des demi-cercles séparés par la droite $(0A)$, de longueur π).

Solution de E. III.12.4 Les valeurs différentes obtenues pour des constructions différentes peuvent justifier le terme de paradoxe. L'explication vient du fait qu'en changeant le mode de construction, on change la distribution de probabilité du triangle.