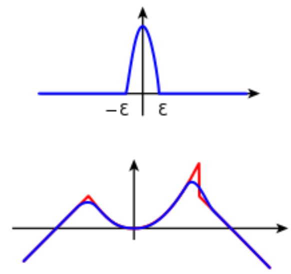
Suite régularisante

En mathématiques, une **suite régularisante** est une suite de fonctions régulières utilisées afin de donner une approximation lisse de fonctions généralisées, le plus souvent par convolution afin de lisser les discontinuités.



Visualisation de l'effet d'une fonction régularisante en dimension 1. En bas, on voit qu'une fonction présentant un coin et une discontinuité (en rouge), devient lisse par effet de la régularisation (en bleu).

Sommaire

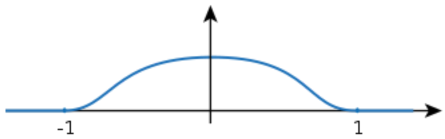
Définition

Une suite (φ_n) de fonctions tests (c.-à-d. C^∞ à support compact) sur $\mathbb{R}^d$ est dite régularisante si[1, 2, 3], pour tout indice n :

- $\varphi_n \geq 0$;
- $\int_{\mathbb{R}^d} \varphi_n(x)\,\mathrm{d}x = 1$;
- le support de φ_n est inclus dans une boule $B(0, \varepsilon_n)$ avec $\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$[4] : les fonctions sont donc de plus en plus resserrées autour de l'origine[5].

Fonction régularisante

La façon la plus simple de construire une suite régularisante[6] est de partir d'une **fonction régularisante**, c.-à-d.[7] une fonction φ, C^∞ à support compact, positive et d'intégrale 1 (sur $\mathbb{R}^d$), et de poser[8] $\varphi_n(x) := n^d\varphi(nx)$.



La fonction ψ en dimension 1.

Une telle fonction φ existe[9, 8] : il suffit par exemple de considérer la fonction ψ sur $\mathbb{R}^d$ définie par

$$\psi(x) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{1-|x|^2}\right) & \text{si } |x| < 1 \\ 0 & \text{si } |x| \geq 1 \end{cases}$$

(où $|\ |$ désigne la norme euclidienne) puis, en notant c l'intégrale de ψ, de poser

$$\varphi := \frac{1}{c}\psi.$$

Cette fonction régularisante est même symétrique, c.-à-d.[7] que $\varphi(x)$ ne dépend que de $|x|$.

Propriétés

Les suites régularisantes sont principalement utilisées en théorie des distributions, afin de passer d'un problème sur des fonctions généralisées à une restriction aux fonctions régulières, plus simples à manier[9].

La convolée d'une distribution T par une fonction test φ est une fonction de classe C^∞, dont le support est inclus dans la somme de Minkowski du support de φ et du support de la distribution T.

Soit T une distribution et (φ_n) une suite régularisante. Alors la suite des distributions régulières associées aux fonctions $T * \varphi_n$ converge vers T dans $\mathcal{D}'$, autrement dit : $\forall f \in \mathcal{D} \quad \varphi_n * f \to f$ (dans $\mathcal{D}$). Plus généralement[10] :

> **Théorème** — Pour toute suite régularisante (φ_n) sur $\mathbb{R}^d$:
>
> - si X est l'un des espaces $\mathcal{D}^m(\mathbb{R}^d)$, $\mathcal{E}^m(\mathbb{R}^d)$ $(0 \leq m \leq \infty)$ ou $L^p(\mathbb{R}^d)$ $(1 \leq p < \infty)$ alors $\forall f \in X \quad \varphi_n * f \to f$ dans X[1] ;
> - pour toute fonction f mesurable bornée sur $\mathbb{R}^d$ et continue sur un compact K, $\varphi_n * f \to f$ uniformément sur K[11].

Applications

Les suites régularisantes sont utilisées pour démontrer la densité des fonctions continues dans des espaces fonctionnels plus généraux, comme les espaces L^p ou de Sobolev[12].

Elles sont également utilisées pour montrer l'équivalence des formulations faibles et fortes d'équations différentielles au sens des distributions.

Notes et références

1. (en) Abdellah El Kinani et Mohamed Oudadess, *Distribution Theory and Applications*, World Scientific, 2010 (lire en ligne (https://books.google.com/books?id=ARo8DQAAQBAJ&pg=PA11)), p. 11.

2. **(en)** Claude Gasquet et Patrick Witomski (trad. du français par R. Ryan), *Fourier Analysis and Applications* [« Analyse de Fourier et applications »], Springer, 1999 (lire en ligne (https://books.google.com/books?id=8cTcBwAAQBAJ&pg=PA188)), p. 188.
3. **(en)** Jean-Paul Penot, *Analysis: From Concepts to Applications*, Springer, 2016 (lire en ligne (https://books.google.com/books?id=wc3BDQAAQBAJ&pg=PA501)), p. 501.
4. Certains auteurs imposent $\varepsilon_n \leq 1/n$, comme Haïm Brezis, *Analyse fonctionnelle : théorie et applications* [détail des éditions] ou (en dimension 1) Francis Filbet, *Analyse numérique*, Dunod, 2013 (lire en ligne (https://books.google.com/books?id=PWPTAAAAQBAJ&pg=PA292)), p. 292.
5. **(en)** Serge Lang, *Real and Functional Analysis*, coll. « GTM » (n° 142), 2012 (1re éd. 1993) (lire en ligne (https://books.google.com/books?id=KOMlBQAAQBAJ&pg=PA228)), p. 227-228, appelle une suite (φ_n) de fonctions continues vérifiant ces trois conditions « suite de Dirac à support rétrécissant » et remarque qu'alors : $\forall\delta > 0 \quad \int_{|x|\geq\delta} \varphi_n(x)\,\mathrm{d}x \to 0$.
6. Certains auteurs réservent le nom de suites régularisantes à celles obtenues de cette façon, comme Lang 2012, p. 228 ou **(en)** Philippe Blanchard et Erwin Bruening, *Mathematical Methods in Physics*, Springer, 2012 (lire en ligne (https://books.google.com/books?id=GQ_lBwAAQBAJ&pg=PA88)), p. 88.
7. **(en)** Enrico Giusti **(it)**, *Minimal Surfaces and Functions of Bounded Variation*, Basel, Boston, Stuttgart, Birkhäuser Verlag, coll. « Monographs in Mathematics » (n° 80), 1984 (ISBN 978-0-8176-3153-6, zbMATH 0545.49018 (https://zbmath.org/?q=an:0545.49018), lire en ligne (https://books.google.com/books?id=dNgsmArDoeQC&pg=PA11)), p. 11.
8. Gilbert Demengel et Françoise Demengel, *Espaces fonctionnels*, EDP Sciences, 2007 (lire en ligne (https://books.google.com/books?id=YUHwo69RdOoC&pg=PA31)), p. 31-32.
9. **(en)** Lars Hörmander, *The Analysis of Linear Partial Differential Operators I*, coll. « Grund. math. Wiss. » (n° 256), 1983 (lire en ligne (https://archive.org/stream/springer_10.1007-978-3-642-96750-4/10.1007-978-3-642-96750-4#page/n22/mode/1up)), p. 14.
10. Pour une généralisation à tout groupe localement compact (au lieu de $\mathbb{R}^d$), voir **(en)** Zoltán Magyar, *Continuous Linear Representations*, North-Holland, 1992 (lire en ligne (https://books.google.com/books?id=f7HYGAlYd0oC&pg=PA31)), p. 31.
11. Lang 2012, p. 228 : il suffit même que (φ_n) soit une suite de fonctions continues positives d'intégrale 1 telle que $\forall\delta > 0 \quad \int_{|x|\geq\delta} \varphi_n(x)\,\mathrm{d}x \to 0$.
12. Brezis.

Articles connexes

- Approximation de l'unité
- Partition de l'unité