

多元正态分布

维基百科，自由的百科全书

多变量正态分布亦称为**多变量高斯分布**。它是单维正态分布向多维的推广。它同矩阵正态分布有紧密的联系。

一般形式

N维随机向量

X
=

[

X

1

,
…
,

X

N

]

T

 如果服从多变量正态分布，必须满足下面的三个等價条件：

- 任何线性组合

Y
=

a

1

X

1

+
⋯
+

a

N

X

N

 服从正态分布。
- 存在随机向量

Z
=

[

Z

1

,
…
,

Z

M

]

T

 (它的每个元素服从独立标准正态分布) ，向量

μ
=

[

μ

1

,
…
,

μ

N

]

T

 及

N
×
M

 矩阵

A

 满足

X
=
A
Z
+
μ
.
- 存在

μ
和一个对称半正定阵

Σ
满足

X

的特征函数

$$\phi_X(u;\mu,\Sigma)=\exp\left(i\mu^Tu-\frac{1}{2}u^T\Sigma u\right)$$

如果

Σ
是非奇异的，那么该分布可以由以下的PDF来描述：^[1]

 <div>Many samples from a multivariate (bivariate) Gaussian distribution centered at (1,3) with a standard deviation of 3 in roughly the (0.878, 0.478) direction (longer vector) and of 1 in the second direction (shorter vector, orthogonal to the longer vector).</div>
<div>概率多变量函数</div>
<div><div>参数</div><div> μ<!-- μ --> ∈<!-- ∈ --> R N — 位置</div><div> Σ<!-- Σ --> ∈<!-- ∈ --> R N ×<!-- × --> N — 协方差矩阵 (半正定)</div></div>
<div><div>支撑集</div><div> x ∈<!-- ∈ --> μ<!-- μ --> + span (Σ<!-- Σ -->) ⊆<!-- ⊆ --> R N </div></div>
<div><div>概率多变量函数</div><div> (2 π<!-- π -->) −<!-- − --> N 2 Σ<!-- Σ --> −<!-- − --> 1 2 e −<!-- − --> 1 2 (x −<!-- − --> μ<!-- μ -->) ′<!-- ′ --> Σ<!-- Σ --> −<!-- − --> 1 (x −<!-- − --> μ<!-- μ -->) , <div>(仅当 Σ<!-- Σ --> 为正定矩阵时)</div></div></div>
<div><div>累积分佈函数</div><div>解析表达式不存在</div></div>
<div><div>期望值</div><div> μ<!-- μ --> </div></div>
<div><div>眾數</div><div> μ<!-- μ --> </div></div>
<div><div>方差</div><div> Σ<!-- Σ --> </div></div>
<div><div>信息熵</div><div> 1 2 ln ((2 π<!-- π --> e) N Σ<!-- Σ -->) </div></div>
<div><div>動差生成函数</div><div> exp ⁡<!-- ⁡ --> (μ<!-- μ --> ′<!-- ′ --> t + 1 2 t ′<!-- ′ --> Σ<!-- Σ --> t) </div></div>
<div><div>特性函数</div><div> exp ⁡<!-- ⁡ --> (i μ<!-- μ --> ′<!-- ′ --> t −<!-- − --> 1 2 t ′<!-- ′ --> Σ<!-- Σ --> t) </div></div>

$$f_{\mathbf{x}}(x_1,\ldots,x_k)=\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^k|\Sigma|}}\exp\left(-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})^T\Sigma^{-1}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})\right),$$

注意这里的|

Σ
|表示协方差矩阵的行列式。

二元的情况

在二维非奇异的情况下 (

k
=
rank
(
Σ
)
=
2

) ，向量

[
X
Y
]

′
 的概率密度函数为：

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left(-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_X)^2}{\sigma_X^2}+\frac{(y-\mu_Y)^2}{\sigma_Y^2}-\frac{2\rho(x-\mu_X)(y-\mu_Y)}{\sigma_X\sigma_Y}\right]\right)$$

其中

ρ
 是

X

 与

Y

 之间的相关系数，

σ

X

>
0

 且

σ

Y

>
0

。在这种情况下，

$$\boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} \mu_X \\ \mu_Y \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_X^2 & \rho\sigma_X\sigma_Y \\ \rho\sigma_X\sigma_Y & \sigma_Y^2 \end{pmatrix}.$$

參考資料

- UIUC, Lecture 21. *The Multivariate Normal Distribution* (<http://www.math.uiuc.edu/~r-ash/Stat/StatLec21-25.pdf>), 21.5:"Finding the Density".
-

取自“<https://zh.wikipedia.org/w/index.php?title=多元正态分布&oldid=51304757>”

本页面最后修订于2018年9月16日 (星期日) 09:03。

本站的全部文字在知识共享 署名-相同方式共享 3.0协议之条款下提供，附加条款亦可能应用。（请参阅使用条款）
Wikipedia®和维基百科标志是维基媒体基金会的注册商标；维基™是维基媒体基金会的商标。
维基媒体基金会是按美国国内稅收法501(c)(3)登记的非营利慈善机构。