Équations aux Dérivées Partielles

Cours IV - Distributions

CentraleSupélec - Cursus ingénieur

10 janvier 2020

Pour poser vos questions **pendant** et **entre** les cours, Daskit :

daskit.com/edp19-20

Ces slides sont préparées à partir de celles du cours CIPEDP (2018-2019) de P. Lafitte et J. Cagnol. Toute erreur ou typo ne relève en revanche que de ma responsabilité, merci dès lors de me les signaler !

1. Dualité topologique
   - Espace de Hilbert
   - $L^1_{\text{loc}}(\mathcal{I})$ et $L^2(\mathcal{I})$
2. Distributions
3. Espaces de Sobolev

Contexte

Concept de dualité déjà vu dans le cadre euclidien/hilbertien

- en dimension finie avec les coordonnées
- en dimension infinie avec le théorème de projection sur un sev fermé

Utilité : résoudre des équations linéaires par intersection d'hyperplans / orthogonalité

Exemple en dimension n :
$\Pi = vect(v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}) = \{x \in \mathbb{R}^3 : \ (x, v_n) = 0\}$

Dualité topologique : notion très importante dans le cadre des **espaces fonctionnels**.

Intégration par parties

"How far can you with the Cauchy-Schwarz inequality and integration by parts ?"

– L. Gross

- IPP "classique" : Soient $u, v \in C^1([a,b])$. Alors

$$\int_a^b u(x)\, v'(x)\ dx = u(b)v(b) - u(a)v(a) - \int_a^b v(x)\, u'(x)\ dx.$$

- dans le cours V de CIP :

Théorème V.3.3

Pour $a < b \in \mathbb{R}$, soient $f, g \in L^1\left([a,b], \mathcal{B}([a,b]), \lambda\right)$.
On pose $\forall x \in [a,b]$, $\quad F(x) = \int_{[a,x]} f(t)\ \lambda(dt) \quad$ et $\quad G(x) = \int_{[a,x]} g(t)\ \lambda(dt)$.
Alors

$$\int_{[a,b]} G(t)f(t)\ \lambda(dt) = [GF]_a^b - \int_{[a,b]} g(t)F(t)\ \lambda(dt),$$

où $[GF]_a^b = G(b)F(b) - G(a)F(a)$.

Théorème de Riesz

Soit $(\mathcal{H}, \langle , \rangle)$ un espace de Hilbert sur $\mathbb{R}$.

$\mathcal{H}' = \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathbb{R})$: ensemble des formes linéaires **continues** sur $\mathcal{H}$.

Théorème de Riesz

Soit $(\mathcal{H}, \langle , \rangle)$ un espace de Hilbert sur $\mathbb{R}$.

$\mathcal{H}' = \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathbb{R})$: ensemble des formes linéaires **continues** sur $\mathcal{H}$.

Théorème de représentation de Riesz (CIP, cours II)

Soit $\mathcal{H}$ un Hilbert et $u \in \mathcal{H}'$. Alors il existe un unique $x_u \in \mathcal{H}$ tel que

$$\forall x \in \mathcal{H}, \quad u(x) = \langle x, x_u \rangle.$$

Cela permet de définir un **isomorphisme** entre $\mathcal{H}$ et $\mathcal{H}'$.

L'espace dual de $L^2(\mathcal{I})$

Théorème (CIP, cours IV)

Soit $(E, \mathcal{E}, \mu)$ un espace mesuré. L'espace $L^2(E, \mathcal{E}, \mu)$ muni du produit scalaire suivant

$$\langle f, g \rangle := \int f\, g\; d\mu$$

est un espace de Hilbert.

L'espace dual de $L^2(\mathcal{I})$

Théorème (CIP, cours IV)

Soit $(E, \mathcal{E}, \mu)$ un espace mesuré. L'espace $L^2(E, \mathcal{E}, \mu)$ muni du produit scalaire suivant

$$\langle f, g \rangle := \int f\, g\, d\mu$$

est un espace de Hilbert.

Dans toute la séance, $\mathcal{I}$ désigne un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$.

Corollaire (de la représentation de Riesz)

Soit $u \in (L^2(\mathcal{I}))'$. Il existe un unique $g_u \in L^2(\mathcal{I})$ tel que

$$\forall f \in L^2(\mathcal{I}), \quad u(f) = \langle f, g_u \rangle.$$

L'espace dual de $L^2(\mathcal{I})$

Théorème (CIP, cours IV)

Soit $(E, \mathcal{E}, \mu)$ un espace mesuré. L'espace $L^2(E, \mathcal{E}, \mu)$ muni du produit scalaire suivant

$$\langle f, g \rangle := \int f\, g\; d\mu$$

est un espace de Hilbert.

Dans toute la séance, $\mathcal{I}$ désigne un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$.

Corollaire (de la représentation de Riesz)

Soit $u \in (L^2(\mathcal{I}))'$. Il existe un unique $g_u \in L^2(\mathcal{I})$ tel que

$$\forall f \in L^2(\mathcal{I}), \quad u(f) = \langle f, g_u \rangle = \int_{\mathcal{I}} f\; g_u\; d\lambda.$$

L'espace dual de $L^2(\mathcal{I})$

Théorème (CIP, cours IV)

Soit $(E, \mathcal{E}, \mu)$ un espace mesuré. L'espace $L^2(E, \mathcal{E}, \mu)$ muni du produit scalaire suivant

$$\langle f, g \rangle := \int f \, g \; d\mu$$

est un espace de Hilbert.

Dans toute la séance, $\mathcal{I}$ désigne un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$.

Corollaire (de la représentation de Riesz)

Soit $u \in (L^2(\mathcal{I}))'$. Il existe un unique $g_u \in L^2(\mathcal{I})$ tel que

$$\forall f \in L^2(\mathcal{I}), \quad u(f) = \langle f, g_u \rangle = \int_{\mathcal{I}} f \; g_u \; d\lambda.$$

On écrira alors $(L^2(\mathcal{I}))' \simeq L^2(\mathcal{I})$.

Formes bilinéaires : continuité

Rappel : continuité des formes bilinéaires

On dit qu'une forme bilinéaire $a : \mathcal{H}\times\mathcal{H} \to \mathbb{R}$ est **continue** s'il existe une constante C telle que

$$\forall (x,y) \in \mathcal{H}\times\mathcal{H}, \quad |a(x,y)| \leq C\,\|x\|_{\mathcal{H}}\|y\|_{\mathcal{H}},$$

En dimension finie, la linéarité implique la continuité. Ce n'est plus le cas dans les espaces de dimension infinie.

Formes bilinéaires : coercivité

Définition IV.1.1

On dit qu'une forme bilinéaire $a : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathbb{R}$ *est* **coercive** *s'il existe une constante* $\alpha > 0$ *telle que*

$$\forall x \in \mathcal{H}, \quad a(x,x) \geq \alpha \|x\|^2_{\mathcal{H}}.$$

Formes bilinéaires : coercivité

Définition IV.1.1

On dit qu'une forme bilinéaire $a : \mathcal{H}\times\mathcal{H} \to \mathbb{R}$ *est* **coercive** *s'il existe une constante* $\alpha > 0$ *telle que*

$$\forall x \in \mathcal{H}, \quad a(x,x) \geq \alpha \|x\|^2_{\mathcal{H}}.$$

Exemple 1 : Pour $\mathcal{H} = \mathbb{R}^2$,

- $a(x,y) = 2x_1y_1 + 3x_2y_2$.
- $a(x,y) = 2x_1y_1 - 3x_2y_2$.
- $a(x,y) = 2x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 4x_2y_2$.

Formes bilinéaires : coercivité

Définition IV.1.1

On dit qu'une forme bilinéaire $a : \mathcal{H}\times\mathcal{H} \to \mathbb{R}$ *est* **coercive** *s'il existe une constante* $\alpha > 0$ *telle que*

$$\forall x \in \mathcal{H}, \quad a(x,x) \geq \alpha\|x\|^2_{\mathcal{H}}.$$

Exemple 1 : Pour $\mathcal{H} = \mathbb{R}^2$,

- $a(x,y) = 2x_1y_1 + 3x_2y_2$. Coercive
- $a(x,y) = 2x_1y_1 - 3x_2y_2$.
- $a(x,y) = 2x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 4x_2y_2$.

Formes bilinéaires : coercivité

Définition IV.1.1

On dit qu'une forme bilinéaire $a : \mathcal{H}\times\mathcal{H} \to \mathbb{R}$ *est* **coercive** *s'il existe une constante* $\alpha > 0$ *telle que*

$$\forall x \in \mathcal{H}, \quad a(x,x) \geq \alpha\|x\|^2_{\mathcal{H}}.$$

Exemple 1 : Pour $\mathcal{H} = \mathbb{R}^2$,

- $a(x,y) = 2x_1y_1 + 3x_2y_2$. Coercive
- $a(x,y) = 2x_1y_1 - 3x_2y_2$. Non coercive
- $a(x,y) = 2x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 4x_2y_2$.

Formes bilinéaires : coercivité

Définition IV.1.1

On dit qu'une forme bilinéaire $a : \mathcal{H}\times\mathcal{H} \to \mathbb{R}$ *est* **coercive** *s'il existe une constante* $\alpha > 0$ *telle que*

$$\forall x \in \mathcal{H}, \quad a(x,x) \geq \alpha \|x\|^2_{\mathcal{H}}.$$

Exemple 1 : Pour $\mathcal{H} = \mathbb{R}^2$,

- $a(x,y) = 2x_1y_1 + 3x_2y_2$. Coercive
- $a(x,y) = 2x_1y_1 - 3x_2y_2$. Non coercive
- $a(x,y) = 2x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 4x_2y_2$. Coercive

Exemple 2 : Soit $A \in \mathcal{M}_q(\mathbb{R})$ une matrice symétrique définie positive (SDP), c'est-à-dire telle que $\forall x \in \mathbb{R}^q \setminus \{0\}, \ \langle Ax, x\rangle > 0$.
Alors $(x,y) \mapsto \langle Ax, y\rangle$ est bilinéaire, continue et coercive, et on peut choisir $C = \max_{\lambda\in\mathrm{Sp}(A)} \lambda$ et $\alpha = \min_{\lambda\in\mathrm{Sp}(A)} \lambda$.

Théorème de Lax-Milgram

Théorème IV.1.2 (Lax-Milgram)

Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert. Soit a une forme bilinéaire continue et coercive sur $\mathcal{H}\times\mathcal{H}$. Alors pour tout $u \in \mathcal{H}'$,

$$\exists\,!\, x \in \mathcal{H} : \quad \forall y \in \mathcal{H}, \quad a(x,y) = u(y).$$

Théorème de Lax-Milgram

Théorème IV.1.2 (Lax-Milgram)

Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert. Soit a une forme bilinéaire continue et coercive sur $\mathcal{H}\times\mathcal{H}$. Alors pour tout $u \in \mathcal{H}'$,

$$\exists\,!\, x \in \mathcal{H} : \quad \forall y \in \mathcal{H}, \quad a(x,y) = u(y).$$

Si, de plus, a est symétrique, alors x est caractérisé par

$$\begin{cases} x \in \mathcal{H} \\ \dfrac{1}{2}a(x,x) - u(x) = \min\limits_{y\in\mathcal{H}} \left\{ \dfrac{1}{2}a(y,y) - u(y) \right\}. \end{cases}$$

Lax-Milgram : exemple en dimension 2

Existe-t-il $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\forall (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2, \; 2x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 4x_2y_2 = y_1 + y_2 \; ?$$

Lax-Milgram : exemple en dimension 2

Existe-t-il $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\forall (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2,\ 2x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 4x_2y_2 = y_1 + y_2 \ ?$$

On peut reformuler le problème ainsi :

$$\exists?\ x \in \mathcal{H} :\ \forall y \in \mathcal{H},\ a(x, y) = u(y),$$

Lax-Milgram : exemple en dimension 2

Existe-t-il $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\forall (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2, \; 2x_1 y_1 + x_1 y_2 + x_2 y_1 + 4x_2 y_2 = y_1 + y_2 \text{ ?}$$

On peut reformuler le problème ainsi :

$$\exists ? \; x \in \mathcal{H} : \; \forall y \in \mathcal{H}, \; a(x, y) = u(y),$$

où

- $\mathcal{H} = \mathbb{R}^2$ (c'est un espace de Hilbert) ;

Lax-Milgram : exemple en dimension 2

Existe-t-il $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\forall (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2,\ 2x_1 y_1 + x_1 y_2 + x_2 y_1 + 4x_2 y_2 = y_1 + y_2\ ?$$

On peut reformuler le problème ainsi :

$$\exists ?\ x \in \mathcal{H} :\ \forall y \in \mathcal{H},\ a(x, y) = u(y),$$

où

- $\mathcal{H} = \mathbb{R}^2$ (c'est un espace de Hilbert) ;
- l'application $a(x, y) = 2x_1 y_1 + x_1 y_2 + x_2 y_1 + 4x_2 y_2$ est une forme bilinéaire continue et coercive ;

Lax-Milgram : exemple en dimension 2

Existe-t-il $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\forall (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2, \; 2x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 4x_2y_2 = y_1 + y_2 \text{ ?}$$

On peut reformuler le problème ainsi :

$$\exists ? \; x \in \mathcal{H} : \; \forall y \in \mathcal{H}, \; a(x, y) = u(y),$$

où

- $\mathcal{H} = \mathbb{R}^2$ (c'est un espace de Hilbert) ;
- l'application $a(x, y) = 2x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 4x_2y_2$ est une forme bilinéaire continue et coercive ;
- et $u(y) = y_1 + y_2$ est une application linéaire continue.

Lax-Milgram : exemple en dimension 2

Existe-t-il $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\forall (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2,\ 2x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 4x_2y_2 = y_1 + y_2 \ ?$$

On peut reformuler le problème ainsi :

$$\exists ?\ x \in \mathcal{H} :\ \forall y \in \mathcal{H},\ a(x, y) = u(y),$$

où

- $\mathcal{H} = \mathbb{R}^2$ (c'est un espace de Hilbert) ;
- l'application $a(x, y) = 2x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 4x_2y_2$ est une forme bilinéaire continue et coercive ;
- et $u(y) = y_1 + y_2$ est une application linéaire continue.

Alors, le théorème de Lax-Milgram donne :

$$\forall y \in \mathcal{H}, \exists !\ x \in \mathcal{H} \text{ tq } a(x, y) = u(y).$$

Lax-Milgram : exemple en dimension 2

Existe-t-il $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\forall (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2,\ 2x_1 y_1 + x_1 y_2 + x_2 y_1 + 4x_2 y_2 = y_1 + y_2 \ ?$$

Lax-Milgram : exemple en dimension 2

Existe-t-il $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\forall (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2,\ 2x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 4x_2y_2 = y_1 + y_2\ ?$$

Il était plus simple ici de résoudre directement

$$\forall (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2,\ [y_1\ \ y_2] \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = [y_1\ \ y_2] \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

Lax-Milgram : exemple en dimension 2

Existe-t-il $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\forall (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2,\ 2x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 4x_2y_2 = y_1 + y_2 \ ?$$

Il était plus simple ici de résoudre directement

$$\forall (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2,\ [y_1\ \ y_2] \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = [y_1\ \ y_2] \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

ce qui donne

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

Lax-Milgram : exemple en dimension 2

Existe-t-il $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\forall (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2,\ 2x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 4x_2y_2 = y_1 + y_2 \ ?$$

Il était plus simple ici de résoudre directement

$$\forall (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2,\ [y_1\ \ y_2] \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = [y_1\ \ y_2] \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

ce qui donne

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

et ainsi $x_1 = \frac{3}{7}$, $x_2 = \frac{1}{7}$.

Lax-Milgram : exemple en dimension 2

Existe-t-il $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\forall (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2,\ 2x_1 y_1 + x_1 y_2 + x_2 y_1 + 4 x_2 y_2 = y_1 + y_2 \ ?$$

Il était plus simple ici de résoudre directement

$$\forall (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2,\ [y_1\ \ y_2] \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = [y_1\ \ y_2] \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

ce qui donne

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

et ainsi $x_1 = \frac{3}{7}$, $x_2 = \frac{1}{7}$.

Lax-Milgram sera vraiment utile plus tard, sur des problèmes plus compliqués.

$L^1_{\text{loc}}(\mathcal{I})$

Dans toute la séance, $\mathcal{I}$ désigne un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$.

Définition IV.1.3

On note $L^1_{loc}(\mathcal{I})$ l'ensemble des fonctions dites localement intégrables, i.e.

$$L^1_{loc}(\mathcal{I}) = \left\{ f : \mathcal{I} \to \mathbb{R} \text{ mesurable} : \ f \mathbb{1}_K \in L^1(\mathcal{I}), \ \forall K \subset \mathcal{I} \text{ compact} \right\}.$$

$L^1_{\mathrm{loc}}(\mathcal{I})$

Dans toute la séance, $\mathcal{I}$ désigne un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$.

Définition IV.1.3

On note $L^1_{loc}(\mathcal{I})$ l'ensemble des fonctions dites localement intégrables, i.e.

$$L^1_{loc}(\mathcal{I}) = \left\{ f : \mathcal{I} \to \mathbb{R} \text{ mesurable} : \; f \mathbb{1}_K \in L^1(\mathcal{I}), \; \forall K \subset \mathcal{I} \text{ compact} \right\}.$$

On a $L^1(\mathcal{I}) \subset L^1_{\mathrm{loc}}(\mathcal{I})$.

Exemple

Avec $\mathcal{I} =]0,1[$, la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x} \in L^1_{loc}(\mathcal{I}) \setminus L^1(\mathcal{I})$.

Quelle norme sur $L^1_{\mathrm{loc}}(\mathcal{I})$?

Définition IV.1.4

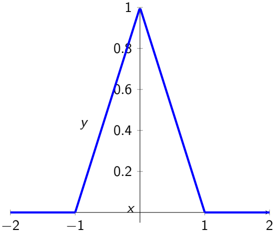
Soit $f : \mathcal{I} \to \mathbb{R}$ une fonction. On appelle **support de** f *l'ensemble*

$$\operatorname{supp}(f) = \overline{\{t \in \mathcal{I} : \ f(t) \neq 0\}}.$$

Définition IV.1.4

Soit $f : \mathcal{I} \to \mathbb{R}$ une fonction. On appelle **support de** f *l'ensemble*

$$\operatorname{supp}(f) = \overline{\{t \in \mathcal{I} : \ f(t) \neq 0\}}.$$



Définition IV.1.5

L'ensemble des fonctions continues de $\mathcal{I}$ dans $\mathbb{R}$ et à support compact est noté $C^0_c(\mathcal{I})$.

- $L^2(\mathcal{I})$ est un Hilbert et $(L^2(\mathcal{I}))' \simeq L^2(\mathcal{I})$.
- $L^2(\mathcal{I})$ contient des fonctions non dérivables,
- mais contient aussi un sev de fonctions sympathiques :

- $L^2(\mathcal{I})$ est un Hilbert et $(L^2(\mathcal{I}))' \simeq L^2(\mathcal{I})$.
- $L^2(\mathcal{I})$ contient des fonctions non dérivables,
- mais contient aussi un sev de fonctions sympathiques :

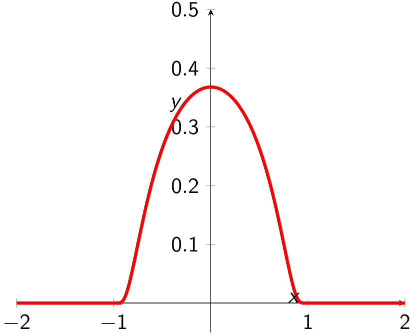
Définition IV.1.6

On appelle $\mathcal{D}(\mathcal{I})$ (ou $C_c^\infty(\mathcal{I})$) l'ensemble des fonctions à **support compact** *de classe C^∞ dans $\mathcal{I}$, encore appelées* **fonctions-test** *:*

$$\mathcal{D}(\mathcal{I}) := \{f \in C^\infty(\mathcal{I}) : \ \mathrm{supp}(f) \ \textbf{compact de } \mathcal{I}\}.$$

$\mathcal{D}(\mathcal{I})$ est un espace vectoriel.

Exemple



$$\phi : x \longmapsto \exp\left(\frac{1}{x^2-1}\right)\mathbf{1}_{\{|x|\leq 1\}}$$

On peut vérifier que ϕ est infiniment dérivable partout (en particulier en -1 et 1). Ainsi $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \subset L^2(\mathbb{R})$.

1. Dualité topologique
2. Distributions
   - Définition et premières propriétés
   - Exemples
   - $L^1_{\text{loc}}(\mathcal{I})$ comme sous-espace de $\mathcal{D}'(\mathcal{I})$
   - Opérations sur les distributions
3. Espaces de Sobolev

Propriétés topologiques de $\mathcal{D}(\mathcal{I})$

On munit $\mathcal{D}(\mathcal{I})$ de la notion de convergence suivante :

Définition IV.2.1

Soient $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $\mathcal{D}(\mathcal{I})$ et $\phi \in \mathcal{D}(\mathcal{I})$.

On dit que ϕ_n **converge vers** ϕ *si*

(i) *les supports des (ϕ_n) sont inclus dans un* **compact fixe** *:*

$$\exists K \text{ compact de } \mathcal{I} : \quad \forall n \in \mathbb{N},\ \operatorname{supp}(\phi_n) \subset K$$

(ii) $\forall m \in \mathbb{N},\ \phi_n^{(m)} \longrightarrow \phi^{(m)}$ **uniformément** *dans $\mathcal{I}$:*

$$\forall m \in \mathbb{N}, \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} : \quad \forall n \geq N,\ \|\phi_n^{(m)} - \phi^{(m)}\|_\infty \leq \varepsilon.$$

On notera $\phi_n \xrightarrow{\mathcal{D}(\mathcal{I})} \phi$.

Propriétés topologiques de $\mathcal{D}(\mathcal{I})$

On munit $\mathcal{D}(\mathcal{I})$ de la notion de convergence suivante :

Définition IV.2.1

Soient $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $\mathcal{D}(\mathcal{I})$ et $\phi \in \mathcal{D}(\mathcal{I})$.

On dit que ϕ_n **converge vers** ϕ *si*

(i) *les supports des (ϕ_n) sont inclus dans un* **compact fixe** *:*

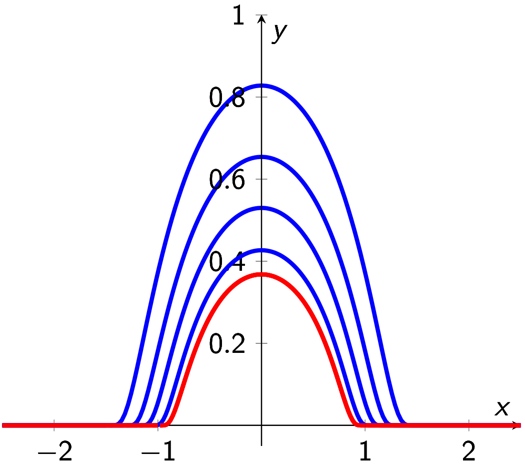
$$\exists K \text{ compact de } \mathcal{I} : \quad \forall n \in \mathbb{N},\ \mathrm{supp}(\phi_n) \subset K$$

(ii) $\forall m \in \mathbb{N},\ \phi_n^{(m)} \longrightarrow \phi^{(m)}$ **uniformément** *dans $\mathcal{I}$:*

$$\forall m \in \mathbb{N}, \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} : \quad \forall n \geq N,\ \|\phi_n^{(m)} - \phi^{(m)}\|_\infty \leq \varepsilon.$$

On notera $\phi_n \xrightarrow{\mathcal{D}(\mathcal{I})} \phi$.

Attention : La topologie de $\mathcal{D}(\mathcal{I})$ n'est pas métrisable (i.e. pas associée à une distance)... voir électif en 2A !



$$n \geq 1, \quad \phi_n : x \longmapsto \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 \exp\left\{\frac{1}{\left(\frac{n}{n+1}x\right)^2 - 1}\right\}.$$

Espace des distributions

Définition IV.2.2

L'espace $\mathcal{D}'(\mathcal{I})$ est le **dual topologique** *de $\mathcal{D}(\mathcal{I})$,*
i.e. $T \in \mathcal{D}'(\mathcal{I})$ si $T : \mathcal{D}(\mathcal{I}) \to \mathbb{R}$ est une **application linéaire continue**.
Les éléments de $\mathcal{D}'(\mathcal{I})$ sont appelés **distributions**.
Pour $\phi \in \mathcal{D}(\mathcal{I})$, on note $T(\phi) = \langle T, \phi \rangle$.

Caractérisation

Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathcal{I})$. Alors $T : \mathcal{D}(\mathcal{I}) \to \mathbb{R}$ est

- linéaire : $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall \phi, \psi \in \mathcal{D}(\mathcal{I})$,

$$\langle T, \lambda\phi + \psi \rangle = \lambda \langle T, \phi \rangle + \langle T, \psi \rangle.$$

- continue pour la convergence dans $\mathcal{D}(\mathcal{I})$:

$$\forall \, \phi_n \xrightarrow{\mathcal{D}(\mathcal{I})} \phi, \; \langle T, \phi_n \rangle \xrightarrow{\mathbb{R}} \langle T, \phi \rangle.$$

1er exemple : distribution de Dirac

Définition IV.2.3

On appelle **distribution de Dirac** *en $a \in \mathcal{I}$, notée δ_a, la forme linéaire continue sur $\mathcal{D}(\mathcal{I})$:*

$$\forall \phi \in \mathcal{D}(\mathcal{I}), \quad \langle \delta_a, \phi \rangle = \phi(a).$$

1er exemple : distribution de Dirac

Définition IV.2.3

On appelle **distribution de Dirac** *en $a \in \mathcal{I}$, notée δ_a, la forme linéaire continue sur $\mathcal{D}(\mathcal{I})$:*

$$\forall \phi \in \mathcal{D}(\mathcal{I}), \quad \langle \delta_a, \phi \rangle = \phi(a).$$

δ_a distribution car :

- δ_a est une forme linéaire

1er exemple : distribution de Dirac

Définition IV.2.3

On appelle **distribution de Dirac** *en $a \in \mathcal{I}$, notée δ_a, la forme linéaire continue sur $\mathcal{D}(\mathcal{I})$:*

$$\forall \phi \in \mathcal{D}(\mathcal{I}), \quad \langle \delta_a, \phi \rangle = \phi(a).$$

δ_a distribution car :

- δ_a est une forme linéaire
- Continuité : $\forall\, \phi_n \xrightarrow{\mathcal{D}(\mathcal{I})} \phi$,

$$\begin{aligned} |\,\langle \delta_a, \phi_n \rangle - \langle \delta_a, \phi \rangle\,| &= |\,\langle \delta_a, (\phi_n - \phi) \rangle\,| \\ &= |(\phi_n - \phi)(a)| \end{aligned}$$

1er exemple : distribution de Dirac

Définition IV.2.3

On appelle **distribution de Dirac** *en $a \in \mathcal{I}$, notée δ_a, la forme linéaire continue sur $\mathcal{D}(\mathcal{I})$:*

$$\forall \phi \in \mathcal{D}(\mathcal{I}), \quad \langle \delta_a, \phi \rangle = \phi(a).$$

δ_a distribution car :

- δ_a est une forme linéaire
- Continuité : $\forall\, \phi_n \xrightarrow{\mathcal{D}(\mathcal{I})} \phi$,

$$\begin{aligned} |\,\langle \delta_a, \phi_n \rangle - \langle \delta_a, \phi \rangle\,| &= |\,\langle \delta_a, (\phi_n - \phi) \rangle\,| \\ &= |(\phi_n - \phi)(a)| \\ &\leq \|\phi_n - \phi\|_\infty, \end{aligned}$$

$$\text{d'où} \qquad |\,\langle \delta_a, \phi_n \rangle - \langle \delta_a, \phi \rangle\,| \to 0.$$

2è exemple

Soit $K \subset \mathcal{I}$, K compact. On définit l'**intégrale sur K** par

$$I_K : \phi \in \mathcal{D}(\mathcal{I}) \longmapsto \int_K \phi(x)\lambda(\mathrm{d}x)$$

2è exemple

Soit $K \subset \mathcal{I}$, K compact. On définit l'**intégrale sur K** par

$$I_K : \phi \in \mathcal{D}(\mathcal{I}) \longmapsto \int_K \phi(x)\lambda(\mathrm{d}x)$$

$I_K \in \mathcal{D}'(\mathcal{I})$ car :

- I_K est une forme linéaire

2è exemple

Soit $K \subset \mathcal{I}$, K compact. On définit l'**intégrale sur K** par

$$I_K : \phi \in \mathcal{D}(\mathcal{I}) \longmapsto \int_K \phi(x)\lambda(\mathrm{d}x)$$

$I_K \in \mathcal{D}'(\mathcal{I})$ car :

- I_K est une forme linéaire
- Continuité : $\forall\, \phi_n \xrightarrow{\mathcal{D}(\mathcal{I})} \phi$,

$$\begin{aligned} |\langle I_K, \phi_n\rangle - \langle I_K, \phi\rangle| &= \left| \int_K (\phi_n(x) - \phi(x))\, \lambda(\mathrm{d}x) \right| \\ &\leq \lambda(K)\|\phi_n - \phi\|_\infty, \end{aligned}$$

2è exemple

Soit $K \subset \mathcal{I}$, K compact. On définit l'**intégrale sur K** par

$$I_K : \phi \in \mathcal{D}(\mathcal{I}) \longmapsto \int_K \phi(x)\lambda(\mathrm{d}x)$$

$I_K \in \mathcal{D}'(\mathcal{I})$ car :

- I_K est une forme linéaire
- Continuité : $\forall\, \phi_n \xrightarrow{\mathcal{D}(\mathcal{I})} \phi$,

$$\begin{aligned} |\langle I_K, \phi_n\rangle - \langle I_K, \phi\rangle| &= \left| \int_K (\phi_n(x) - \phi(x))\, \lambda(\mathrm{d}x) \right| \\ &\leq \lambda(K) \|\phi_n - \phi\|_\infty, \end{aligned}$$

$$\text{d'où} \quad |\langle I_K, \phi_n\rangle - \langle I_K, \phi\rangle| \to 0.$$

3è exemple : distributions régulières

Définition IV.2.4

Soit $f \in L^1_{loc}(\mathcal{I})$. On définit la **distribution régulière** T_f *par*

$$\begin{aligned} T_f : \mathcal{D}(\mathcal{I}) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \phi &\longmapsto \int_{\mathcal{I}} f(x)\,\phi(x)\,\lambda(\mathrm{d}x). \end{aligned}$$

3è exemple : distributions régulières

Définition IV.2.4

Soit $f \in L^1_{loc}(\mathcal{I})$. On définit la **distribution régulière** T_f *par*

$$\begin{aligned} T_f : \mathcal{D}(\mathcal{I}) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \phi &\longmapsto \int_{\mathcal{I}} f(x)\,\phi(x)\,\lambda(\mathrm{d}x). \end{aligned}$$

Remarque : 1) Le 2è exemple était un cas particulier avec $f = \mathbb{1}_K$.
2) La distribution de Dirac **n'est pas régulière** !

3è exemple : distributions régulières

Définition IV.2.4

Soit $f \in L^1_{loc}(\mathcal{I})$. On définit la **distribution régulière** T_f *par*

$$\begin{aligned} T_f : \mathcal{D}(\mathcal{I}) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \phi &\longmapsto \int_{\mathcal{I}} f(x)\,\phi(x)\,\lambda(\mathrm{d}x). \end{aligned}$$

Remarque : 1) Le 2è exemple était un cas particulier avec $f = \mathbb{1}_K$.
2) La distribution de Dirac **n'est pas régulière** !

$T_f \in \mathcal{D}'(\mathcal{I})$ car :

- T_f est une forme linéaire

3è exemple : distributions régulières

Définition IV.2.4

Soit $f \in L^1_{loc}(\mathcal{I})$. On définit la **distribution régulière** T_f *par*

$$\begin{aligned} T_f : \mathcal{D}(\mathcal{I}) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \phi &\longmapsto \int_{\mathcal{I}} f(x)\,\phi(x)\,\lambda(\mathrm{d}x). \end{aligned}$$

Remarque : 1) Le 2è exemple était un cas particulier avec $f = \mathbb{1}_K$.
2) La distribution de Dirac **n'est pas régulière** !

$T_f \in \mathcal{D}'(\mathcal{I})$ car :

- T_f est une forme linéaire
- Continuité : Soit $\phi_n \xrightarrow{\mathcal{D}(\mathcal{I})} \phi$ et soit $K \supset \bigcup_n \mathrm{supp}(\phi_n)$, alors

3è exemple : distributions régulières

Définition IV.2.4

Soit $f \in L^1_{loc}(\mathcal{I})$. On définit la **distribution régulière** T_f *par*

$$\begin{aligned} T_f : \mathcal{D}(\mathcal{I}) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \phi &\longmapsto \int_{\mathcal{I}} f(x)\,\phi(x)\,\lambda(\mathrm{d}x). \end{aligned}$$

Remarque : 1) Le 2è exemple était un cas particulier avec $f = \mathbb{1}_K$.
2) La distribution de Dirac **n'est pas régulière** !

$T_f \in \mathcal{D}'(\mathcal{I})$ car :

- T_f est une forme linéaire
- Continuité : Soit $\phi_n \overset{\mathcal{D}(\mathcal{I})}{\longrightarrow} \phi$ et soit $K \supset \bigcup_n \mathrm{supp}(\phi_n)$, alors

$$|\langle T_f, \phi_n\rangle - \langle T_f, \phi\rangle| = \left| \int_{\mathcal{I}} f(x)\,(\phi_n(x) - \phi(x))\,\lambda(\mathrm{d}x) \right|$$

3è exemple : distributions régulières

Définition IV.2.4

Soit $f \in L^1_{loc}(\mathcal{I})$. On définit la **distribution régulière** *T_f par*

$$\begin{aligned} T_f : \mathcal{D}(\mathcal{I}) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \phi &\longmapsto \int_{\mathcal{I}} f(x)\, \phi(x)\, \lambda(\mathrm{d}x). \end{aligned}$$

Remarque : 1) Le 2è exemple était un cas particulier avec $f = \mathbb{1}_K$.
2) La distribution de Dirac **n'est pas régulière** !

$T_f \in \mathcal{D}'(\mathcal{I})$ car :

- T_f est une forme linéaire
- Continuité : Soit $\phi_n \xrightarrow{\mathcal{D}(\mathcal{I})} \phi$ et soit $K \supset \bigcup_n \mathrm{supp}(\phi_n)$, alors

$$\begin{aligned} |\langle T_f, \phi_n\rangle - \langle T_f, \phi\rangle| &= \left| \int_{\mathcal{I}} f(x)\, (\phi_n(x) - \phi(x))\, \lambda(\mathrm{d}x) \right| \\ &\leq \|\phi_n - \phi\|_\infty \int_K |f| d\lambda \end{aligned}$$

3è exemple : distributions régulières

Définition IV.2.4

Soit $f \in L^1_{loc}(\mathcal{I})$. On définit la **distribution régulière** T_f *par*

$$\begin{aligned} T_f : \mathcal{D}(\mathcal{I}) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \phi &\longmapsto \int_{\mathcal{I}} f(x)\,\phi(x)\,\lambda(\mathrm{d}x). \end{aligned}$$

Remarque : 1) Le 2è exemple était un cas particulier avec $f = \mathbb{1}_K$.
2) La distribution de Dirac **n'est pas régulière** !

$T_f \in \mathcal{D}'(\mathcal{I})$ car :

- T_f est une forme linéaire
- Continuité : Soit $\phi_n \xrightarrow{\mathcal{D}(\mathcal{I})} \phi$ et soit $K \supset \bigcup_n \mathrm{supp}(\phi_n)$, alors

$$\begin{aligned} |\langle T_f, \phi_n\rangle - \langle T_f, \phi\rangle| &= \left| \int_{\mathcal{I}} f(x)\,(\phi_n(x) - \phi(x))\,\lambda(\mathrm{d}x) \right| \\ &\leq \|\phi_n - \phi\|_\infty \int_K |f|\,d\lambda \to 0. \end{aligned}$$

Statut de $L^1_{\text{loc}}(\mathcal{I})$

Théorème IV.2.5 (Identification de L^1_{loc})

La fonctionnelle
$$\begin{array}{rcl} T_{\cdot} : L^1_{loc}(\mathcal{I}) & \to & \mathcal{D}'(\mathcal{I}) \\ f & \mapsto & T_f \end{array}$$
est **injective** *($T_f = T_g \Rightarrow f = g$).*

Statut de $L^1_{\text{loc}}(\mathcal{I})$

Théorème IV.2.5 (Identification de L^1_{loc})

La fonctionnelle

$$\begin{array}{rcl} T_\cdot : L^1_{loc}(\mathcal{I}) & \to & \mathcal{D}'(\mathcal{I}) \\ f & \mapsto & T_f \end{array}$$

est **injective** *($T_f = T_g \Rightarrow f = g$).*

Ainsi, $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathcal{I})$ peut être représentée par sa distribution régulière T_f, ce qu'on note $L^1_{loc}(\mathcal{I}) \subset \mathcal{D}'(\mathcal{I})$, $T_f = f$ et $\langle T_f, \phi\rangle = \langle f, \phi\rangle$.
Alors,

Statut de $L^1_{\text{loc}}(\mathcal{I})$

Théorème IV.2.5 (Identification de L^1_{loc})

La fonctionnelle
$$\begin{array}{rcl} T_\cdot : L^1_{loc}(\mathcal{I}) & \to & \mathcal{D}'(\mathcal{I}) \\ f & \mapsto & T_f \end{array}$$

est **injective** *($T_f = T_g \Rightarrow f = g$).*

Ainsi, $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathcal{I})$ peut être représentée par sa distribution régulière T_f, ce qu'on note $L^1_{loc}(\mathcal{I}) \subset \mathcal{D}'(\mathcal{I})$, $T_f = f$ et $\langle T_f, \phi \rangle = \langle f, \phi \rangle$. Alors,

$$\langle \quad T_f \quad , \quad \phi \quad \rangle$$

Statut de $L^1_{\text{loc}}(\mathcal{I})$

Théorème IV.2.5 (Identification de L^1_{loc})

La fonctionnelle
$$\begin{array}{rcl} T_\cdot : L^1_{loc}(\mathcal{I}) & \rightarrow & \mathcal{D}'(\mathcal{I}) \\ f & \mapsto & T_f \end{array}$$
est **injective** *($T_f = T_g \Rightarrow f = g$).*

Ainsi, $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathcal{I})$ peut être représentée par sa distribution régulière T_f, ce qu'on note $L^1_{loc}(\mathcal{I}) \subset \mathcal{D}'(\mathcal{I})$, $T_f = f$ et $\langle T_f, \phi \rangle = \langle f, \phi \rangle$. Alors,

$$\langle \; f \;\; , \;\; \phi \; \rangle \;=\; \int_{\mathcal{I}} f \phi$$

Statut de $L^1_{\mathrm{loc}}(\mathcal{I})$

Théorème IV.2.5 (Identification de L^1_{loc})

La fonctionnelle

$$\begin{array}{rcl} T_\cdot : L^1_{loc}(\mathcal{I}) & \to & \mathcal{D}'(\mathcal{I}) \\ f & \mapsto & T_f \end{array}$$

est **injective** *($T_f = T_g \Rightarrow f = g$).*

Ainsi, $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathcal{I})$ peut être représentée par sa distribution régulière T_f, ce qu'on note $L^1_{loc}(\mathcal{I}) \subset \mathcal{D}'(\mathcal{I})$, $T_f = f$ et $\langle T_f, \phi \rangle = \langle f, \phi \rangle$.
Alors,

$$\langle \underset{L^1_{loc}(\mathcal{I})}{\underset{\pitchfork}{f}} , \underset{\mathcal{D}(\mathcal{I})}{\underset{\pitchfork}{\phi}} \rangle = \int_{\mathcal{I}} f \phi$$

Statut de $L^1_{\text{loc}}(\mathcal{I})$

Théorème IV.2.5 (Identification de L^1_{loc})

La fonctionnelle

$$\begin{array}{rcl} T_\cdot : L^1_{loc}(\mathcal{I}) & \to & \mathcal{D}'(\mathcal{I}) \\ f & \mapsto & T_f \end{array}$$

est **injective** *($T_f = T_g \Rightarrow f = g$).*

Ainsi, $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathcal{I})$ peut être représentée par sa distribution régulière T_f, ce qu'on note $L^1_{loc}(\mathcal{I}) \subset \mathcal{D}'(\mathcal{I})$, $T_f = f$ et $\langle T_f, \phi\rangle = \langle f, \phi\rangle$.
Alors,

$$\begin{array}{ccccccc} \langle & f & , & \phi & \rangle & = & \int_{\mathcal{I}} f\phi \\ & \pitchfork & & \pitchfork & & & \\ & L^1_{loc}(\mathcal{I}) & & \mathcal{D}(\mathcal{I}) & & & \\ & & & \cap & & & \\ & & & L^2(\mathcal{I}) & & & \end{array}$$

Statut de $L^1_{\mathrm{loc}}(\mathcal{I})$

Théorème IV.2.5 (Identification de L^1_{loc})

La fonctionnelle

$$\begin{array}{rcl} T_\cdot : L^1_{loc}(\mathcal{I}) & \to & \mathcal{D}'(\mathcal{I}) \\ f & \mapsto & T_f \end{array}$$

est **injective** *($T_f = T_g \Rightarrow f = g$).*

Ainsi, $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathcal{I})$ peut être représentée par sa distribution régulière T_f, ce qu'on note $L^1_{loc}(\mathcal{I}) \subset \mathcal{D}'(\mathcal{I})$, $T_f = f$ et $\langle T_f, \phi\rangle = \langle f, \phi\rangle$.
Alors, si $f \in L^2(\mathcal{I})$,

$$\begin{array}{ccccccc} \langle & f & , & \phi & \rangle & = & \int_{\mathcal{I}} f\phi \\ & \Cap & & \Cap & & & \\ & L^2(\mathcal{I}) & & \mathcal{D}(\mathcal{I}) & & & \\ & \cap & & \cap & & & \\ & L^1_{loc}(\mathcal{I}) & & L^2(\mathcal{I}) & & & \end{array}$$

Somme de distributions

Soient T_1, $T_2 \in \mathcal{D}'(\mathcal{I})$. Définissons alors Z par

$$\langle Z, \phi \rangle = \langle T_1, \phi \rangle + \langle T_2, \phi \rangle$$

Somme de distributions

Soient $T_1, T_2 \in \mathcal{D}'(\mathcal{I})$. Définissons alors Z par

$$\langle Z, \phi \rangle = \langle T_1, \phi \rangle + \langle T_2, \phi \rangle$$

Z est linéaire : $\langle Z, \phi + \lambda\psi \rangle = \langle T_1, \phi + \lambda\psi \rangle + \langle T_2, \phi + \lambda\psi \rangle$

Somme de distributions

Soient T_1, $T_2 \in \mathcal{D}'(\mathcal{I})$. Définissons alors Z par

$$\langle Z, \phi \rangle = \langle T_1, \phi \rangle + \langle T_2, \phi \rangle$$

Z est linéaire :

$$\langle Z, \phi + \lambda\psi \rangle = \langle T_1, \phi \rangle + \lambda \langle T_1, \psi \rangle + \langle T_2, \phi \rangle + \lambda \langle T_2, \psi \rangle$$

Somme de distributions

Soient $T_1, T_2 \in \mathcal{D}'(\mathcal{I})$. Définissons alors Z par

$$\langle Z, \phi \rangle = \langle T_1, \phi \rangle + \langle T_2, \phi \rangle$$

Z est linéaire :

$$\langle Z, \phi + \lambda\psi \rangle = \langle T_1, \phi \rangle + \langle T_2, \phi \rangle + \lambda(\langle T_1, \psi \rangle + \langle T_2, \psi \rangle)$$

Somme de distributions

Soient $T_1, T_2 \in \mathcal{D}'(\mathcal{I})$. Définissons alors Z par

$$\langle Z, \phi \rangle = \langle T_1, \phi \rangle + \langle T_2, \phi \rangle$$

Z est linéaire : $\langle Z, \phi + \lambda\psi \rangle = \langle Z, \phi \rangle + \lambda \langle Z, \psi \rangle$

Somme de distributions

Soient $T_1, T_2 \in \mathcal{D}'(\mathcal{I})$. Définissons alors Z par

$$\langle Z, \phi \rangle = \langle T_1, \phi \rangle + \langle T_2, \phi \rangle$$

Z est linéaire : $\langle Z, \phi + \lambda\psi \rangle = \langle Z, \phi \rangle + \lambda \langle Z, \psi \rangle$

Z est continue : Soit $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{D}(\mathcal{I})^{\mathbb{N}}$ tq $\phi_n \longrightarrow \phi$ dans $\mathcal{D}(\mathcal{I})$.

$\langle Z, \phi_n \rangle = \langle T_1, \phi_n \rangle + \langle T_2, \phi_n \rangle$

Comme : $\lim_{n\to+\infty} \langle T_1, \phi_n \rangle = \langle T_1, \phi \rangle$ et $\lim_{n\to+\infty} \langle T_2, \phi_n \rangle = \langle T_2, \phi \rangle$

on obtient $\lim_{n\to+\infty} \langle Z, \phi_n \rangle = \langle T_1, \phi \rangle + \langle T_2, \phi \rangle$
$\lim_{n\to+\infty} \langle Z, \phi_n \rangle = \langle Z, \phi \rangle$

Somme de distributions

Soient T_1, $T_2 \in \mathcal{D}'(\mathcal{I})$. Définissons alors Z par

$$\langle Z, \phi \rangle = \langle T_1, \phi \rangle + \langle T_2, \phi \rangle$$

Z est linéaire : $\langle Z, \phi + \lambda\psi \rangle = \langle Z, \phi \rangle + \lambda \langle Z, \psi \rangle$

Z est continue : Soit $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{D}(\mathcal{I})^{\mathbb{N}}$ tq $\phi_n \longrightarrow \phi$ dans $\mathcal{D}(\mathcal{I})$.

$\langle Z, \phi_n \rangle = \langle T_1, \phi_n \rangle + \langle T_2, \phi_n \rangle$

Comme : $\lim_{n\to+\infty} \langle T_1, \phi_n \rangle = \langle T_1, \phi \rangle$ et $\lim_{n\to+\infty} \langle T_2, \phi_n \rangle = \langle T_2, \phi \rangle$

on obtient $\lim_{n\to+\infty} \langle Z, \phi_n \rangle = \langle T_1, \phi \rangle + \langle T_2, \phi \rangle$
$\lim_{n\to+\infty} \langle Z, \phi_n \rangle = \langle Z, \phi \rangle$

Ainsi Z est une distribution.

Somme de distributions

Soient $T_1, T_2 \in \mathcal{D}'(\mathcal{I})$. Définissons alors $T_1 + T_2$ par

$$\langle T_1 + T_2, \phi \rangle = \langle T_1, \phi \rangle + \langle T_2, \phi \rangle$$

Z est linéaire :

$$\langle T_1 + T_2, \phi + \lambda\psi \rangle = \langle T_1 + T_2, \phi \rangle + \lambda \langle T_1 + T_2, \psi \rangle$$

Z est continue : Soit $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{D}(\mathcal{I})^{\mathbb{N}}$ tq $\phi_n \longrightarrow \phi$ dans $\mathcal{D}(\mathcal{I})$.

$\langle T_1 + T_2, \phi_n \rangle = \langle T_1, \phi_n \rangle + \langle T_2, \phi_n \rangle$

Comme : $\lim_{n\to+\infty} \langle T_1, \phi_n \rangle = \langle T_1, \phi \rangle$ et $\lim_{n\to+\infty} \langle T_2, \phi_n \rangle = \langle T_2, \phi \rangle$

on obtient

$\lim_{n\to+\infty} \langle T_1 + T_2, \phi_n \rangle = \langle T_1, \phi \rangle + \langle T_2, \phi \rangle$

$\lim_{n\to+\infty} \langle T_1 + T_2, \phi_n \rangle = \langle T_1 + T_2, \phi \rangle$

Ainsi $T_1 + T_2$ est une distribution.

Cette opération étend la somme de L^1_{loc} : $T_{f_1+f_2} = T_{f_1} + T_{f_2}$.

Produit de distributions ?

Soient T_1, $T_2 \in \mathcal{D}'(\mathcal{I})$. Peut-on définir $T_1 \times T_2$ par

$$\langle T_1 \times T_2, \phi \rangle = \langle T_1, \phi \rangle \ \langle T_2, \phi \rangle \ ?$$

Produit de distributions ?

Soient T_1, $T_2 \in \mathcal{D}'(\mathcal{I})$. Peut-on définir $T_1 \times T_2$ par

$$\langle T_1 \times T_2, \phi \rangle = \langle T_1, \phi \rangle \ \langle T_2, \phi \rangle \ ?$$

$T_1 \times T_2$ linéaire ?

$$\langle T_1 \times T_2, \phi + \lambda\psi \rangle = \langle T_1, \phi + \lambda\psi \rangle \, \langle T_2, \phi + \lambda\psi \rangle$$

Produit de distributions ?

Soient $T_1, T_2 \in \mathcal{D}'(\mathcal{I})$. Peut-on définir $T_1 \times T_2$ par

$$\langle T_1 \times T_2, \phi \rangle = \langle T_1, \phi \rangle \ \langle T_2, \phi \rangle \ ?$$

$T_1 \times T_2$ linéaire ?

$$\begin{aligned}\langle T_1 \times T_2, \phi + \lambda\psi \rangle &= \langle T_1, \phi + \lambda\psi \rangle \langle T_2, \phi + \lambda\psi \rangle \\ &= \langle T_1, \phi \rangle \langle T_2, \phi \rangle \\ &\quad + \lambda \langle T_1, \phi \rangle \langle T_2, \psi \rangle + \lambda \langle T_1, \psi \rangle \langle T_2, \phi \rangle \\ &\quad + \lambda^2 \langle T_2, \psi \rangle \langle T_2, \psi \rangle\end{aligned}$$

Produit de distributions ?

Soient T_1, $T_2 \in \mathcal{D}'(\mathcal{I})$. Peut-on définir $T_1 \times T_2$ par

$$\langle T_1 \times T_2, \phi \rangle = \langle T_1, \phi \rangle \ \langle T_2, \phi \rangle \ ?$$

$T_1 \times T_2$ linéaire ?

$$\begin{aligned}
\langle T_1 \times T_2, \phi + \lambda\psi \rangle &= \langle T_1, \phi + \lambda\psi \rangle \langle T_2, \phi + \lambda\psi \rangle \\
&= \langle T_1, \phi \rangle \langle T_2, \phi \rangle \\
&\quad + \lambda \langle T_1, \phi \rangle \langle T_2, \psi \rangle + \lambda \langle T_1, \psi \rangle \langle T_2, \phi \rangle \\
&\quad + \lambda^2 \langle T_2, \psi \rangle \langle T_2, \psi \rangle
\end{aligned}$$

Non !

Produit d'une distribution et d'une fonction test

Définition-Théorème IV.2.6 (Multiplication par une fonction régulière)

Pour toute distribution $T \in \mathcal{D}'(\mathcal{I})$ et toute fonction $h \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{I})$,

$$h \cdot T : \phi \in \mathcal{D}(\mathcal{I}) \longmapsto \langle T, h\,\phi \rangle$$

est une distribution.

Dérivation d'une distribution

Définition-Théorème IV.2.7

Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathcal{I})$. On définit

$$\begin{array}{rcl} S : \mathcal{D}(\mathcal{I}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \phi & \longmapsto & \langle S, \phi \rangle = - \langle T, \phi' \rangle \end{array}$$

alors S est une distribution, appelée **dérivée** *de T et notée $S = T'$.*

Exemple : Fonction de Heaviside

Dérivation d'une distribution

Définition-Théorème IV.2.7

Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathcal{I})$. On définit

$$\begin{array}{rcl} S : \mathcal{D}(\mathcal{I}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \phi & \longmapsto & \langle S, \phi \rangle = -\langle T, \phi' \rangle \end{array}$$

alors S est une distribution, appelée **dérivée** *de T et notée $S = T'$.*

Exemple : Fonction de Heaviside

Définition-Proposition IV.2.8

*Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathcal{I})$. Soit $k \in \mathbb{N}$. On définit la k-***ème dérivée de** *T par*

$$\begin{array}{rcl} T^{(k)} : \mathcal{D}(\mathcal{I}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \phi & \longmapsto & (-1)^k \left\langle T, \phi^{(k)} \right\rangle . \end{array}$$

$T^{(k)}$ est une distribution.

Deux notions de dérivées

Proposition IV.2.9

Soit $\mathcal{I}$ intervalle ouvert de $\mathbb{R}$.
Si $f \in L^1_{loc}(\mathcal{I})$ dérivable sur $\mathcal{I}$ et $f' \in L^1_{loc}(\mathcal{I})$, $T_{f'} = (T_f)'$.

Théorème IV.2.10 (Formule des sauts en dimension 1)

Soit $\mathcal{I} =]a_0, a_{k+1}[$. Soit $f \in C^1_{par\ morceaux}(\mathcal{I})$. Soient $a_1 < \ldots < a_k$, les points de discontinuité de f. Alors

$$(T_f)' = T_{f'} + \sum_{i=1}^{k} (f(a_i^+) - f(a_i^-))\delta_{a_i},$$

où f' est la dérivée de la restriction de f à chaque sous-intervalle $]a_i, a_{i+1}[$, $0 \leq i \leq k$.

Conclusion : $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ et $L^1_{loc}(\mathcal{I}) \subset D'(\mathcal{I})$

$$\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

On peut maintenant prendre la racine carrée de tout élément.

On étend : $+$ et $\times$.

On perd : la relation d'ordre $\leq$ compatible avec $+$ et $\times$.

$$L^1_{loc}(\mathcal{I}) \subset D'(\mathcal{I})$$

On peut maintenant dériver tout élément.

On étend : $+$, le produit avec une fonction $\mathcal{C}^\infty$, la dérivation.

On perd : $\times$, entre autres... (eg l'évaluation de T en tout point de $\mathcal{I}$).

Définition de $H^1(\mathcal{I})$

Définition IV.3.1

L'espace de Sobolev d'ordre 1 sur $\mathcal{I}$ est défini par

$$\begin{aligned} H^1(\mathcal{I}) &:= \left\{ v \in L^2(\mathcal{I}) : \quad (T_v)' \in L^2(\mathcal{I}) \right\} \\ &:= \left\{ v \in L^2(\mathcal{I}) : \quad v' \in L^2(\mathcal{I}) \right\} \end{aligned}$$

avec v' dérivée de v **au sens des distributions**.

Notation

Si $\mathcal{I}$ intervalle borné, $\mathcal{I} =]a,b[$, on note $H^1(\mathcal{I}) = H^1(a,b)$.

$H^1(\mathcal{I})$ espace de Hilbert

Théorème IV.3.2

L'espace $H^1(\mathcal{I})$ muni du produit scalaire

$$(\cdot,\cdot)_{H^1(\mathcal{I})} : (u,v) \mapsto (u,v)_{L^2(\mathcal{I})} + (u',v')_{L^2(\mathcal{I})}$$

est complet pour la norme $\|\cdot\|_{H^1(\mathcal{I})} : v \mapsto \sqrt{\|v\|^2_{L^2(\mathcal{I})} + \|v'\|^2_{L^2(\mathcal{I})}}$.

$H^1(\mathcal{I})$ espace de Hilbert

Théorème IV.3.2

L'espace $H^1(\mathcal{I})$ muni du produit scalaire

$$(\cdot,\cdot)_{H^1(\mathcal{I})} : (u,v) \mapsto (u,v)_{L^2(\mathcal{I})} + (u',v')_{L^2(\mathcal{I})}$$

est complet pour la norme $\|\cdot\|_{H^1(\mathcal{I})} : v \mapsto \sqrt{\|v\|^2_{L^2(\mathcal{I})} + \|v'\|^2_{L^2(\mathcal{I})}}$.

Théorème IV.3.3

Soit $k \in \mathbb{N}$. L'espace

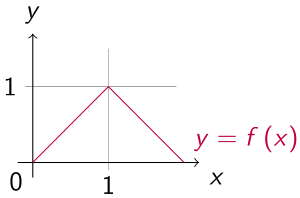
$$H^k(\mathcal{I}) := \left\{ u \in L^2(\mathcal{I}) : \quad u^{(m)} \in L^2(\mathcal{I}),\ 0 \leq m \leq k \right\}$$

muni du prod. scalaire $(u,v) \mapsto \displaystyle\sum_{0\leq m\leq k} \int_{\mathcal{I}} u^{(m)}\, v^{(m)}$ *est un Hilbert.*

Exemple

Posons $\mathcal{I} =]0,2[$. Considérons la fonction **chapeau** :

$$f : x \mapsto \begin{cases} x & \text{si } x \in]0,1[, \\ 2-x & \text{si } x \in [1,2[. \end{cases}$$



- La fonction f est-elle dans $H^1(0,2)$?
- La fonction f est-elle dans $H^2(0,2)$?

Régularité des espaces de Sobolev en dimension 1

Théorème IV.3.4 (Rellich)

Soit $\mathcal{I} =]a, b[$ un intervalle ouvert borné de $\mathbb{R}$. Toute fonction u de $H^1(a, b)$ admet un représentant continu $\overline{u}$ sur $[a, b]$ qui est une primitive de u', i.e. tel que

$$\forall x, y \in [a, b], \quad \overline{u}(x) - \overline{u}(y) = \int_{[y,x]} u'(t)\,\lambda(dt).$$

De plus,

1. *il existe une constante $C > 0$, ne dépendant que de $b - a$, tq*

$$\forall u \in H^1(a, b), \quad \|\overline{u}\|_\infty \leq C\,\|u\|_{H^1}$$

2. *de toute suite bornée de $H^1(a, b)$, on peut extraire une sous-suite qui* **converge dans** *$C^0([a, b])$.*

Théorème de trace en dimension 1

On a vu que, si $\mathcal{I} =]a,b[$, $H^1(a,b) \subset C^0([a,b])$
$\Longrightarrow$ les valeurs au bord de $u \in H^1(a,b)$ sont définies !

Définition IV.3.5

Pour $u \in H^1(a,b)$, $(u(a),u(b))$ est appelée la **trace** *de u, et l'application linéaire $\gamma_0 : u \mapsto (u(a),u(b))$ l'***opérateur de trace***.*

Théorème IV.3.6 (Théorème de trace)

La distribution de Dirac δ_x est une forme linéaire continue sur $H^1(a,b)$: il existe C ne dépendant que de $b-a$ tel que

$$\forall x \in [a,b],\ \forall u \in H^1(a,b), \quad |u(x)| \leq C \|u\|_{H^1(a,b)}.$$

L'application linéaire γ_0 est donc continue de $H^1(a,b)$ dans $\mathbb{R}^2$.

Application : IPP

Théorème IV.3.7 (Intégration par parties)

Soient $u, v \in H^1(a,b)$. Alors

$$\int_{]a,b[} u\ v'\ d\lambda = -\int_{]a,b[} v\ u'\ d\lambda\ + u(b)v(b) - u(a)v(a).$$

Théorème IV.3.8 (Intégration par parties 2)

Soient $u \in H^2(a,b)$ et $v \in H^1(a,b)$. Alors

$$\int_{]a,b[} u''\ v\ d\lambda = -\int_{]a,b[} u'\ v'\ d\lambda\ + u'(b)v(b) - u'(a)v(a).$$

L'espace $H_0^1(a, b)$

$\mathcal{D}(a, b)$ est dense dans $L^2(a, b)$, mais pas dans $H^1(a, b)$.

Définition IV.3.9

$H_0^1(a, b) := \gamma_0^{-1}(\{(0, 0)\})$.

Proposition IV.3.10

(i) *$H_0^1(a, b) \subset H^1(a, b)$ et $H_0^1(a, b) \neq H^1(a, b)$.*

(ii) *L'espace $H_0^1(a, b)$ muni de la norme H^1 est un espace de Hilbert.*

(iii) *L'adhérence de $\mathcal{D}(a, b)$ pour la norme H^1 est $H_0^1(a, b)$.*

Inégalité de Poincaré

Théorème IV.3.11 (Poincaré ou Friedrichs)

Si $\mathcal{I} =]a,b[$, alors il existe une constante C ne dépendant que de $b-a$ telle que

$$\forall v \in H_0^1(a,b), \quad \|v\|_{L^2(a,b)} \leq C\|v'\|_{L^2(a,b)}.$$

La semi-norme $v \mapsto \|v'\|_{L^2(\mathcal{I})}$ définie sur H^1 par

$$v \mapsto |v|_{H^1(\mathcal{I})} := \|v'\|_{L^2(\mathcal{I})}$$

vérifie dans $H_0^1(a,b)$:

$$\forall v \in H_0^1(a,b), \quad |v|_{H^1(\mathcal{I})} \leq \|v\|_{H^1(\mathcal{I})} \leq \sqrt{1+C^2}\, |v|_{H^1(\mathcal{I})}.$$

Conséquence sur $H_0^1(a,b)$

Définition IV.3.12

On définit $\|\cdot\|_{H_0^1} := |\cdot|_{H^1}$ *et*

$$(\cdot,\cdot)_{H_0^1} : (u,v) \in H_0^1 \times H_0^1 \longmapsto \int_{\mathcal{I}} u' \ v' \ d\lambda.$$

Théorème IV.3.13

L'espace $H_0^1(a,b)$ *muni du produit scalaire* $(\cdot,\cdot)_{H_0^1}$ *est un espace de Hilbert.*