1.2 Espaces de Hilbert

Motivation et Définition

Dans un espace euclidien (ou hermitien si on est dans $\mathbb{C}$) on peut décomposer un vecteur sur une base orthonormée. Tout vecteur de $\mathbb{R}^3$ s'écrit $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = \sum_{i=1}^{3} x_i \vec{e}_i$

Dans un espace de dimension infinie, il n'y a pas de base de dimension finie [1] donc le mieux que l'on puisse avoir est

$$\vec{u} = \sum_{i=1}^{+\infty} x_i \vec{e}_i$$

Cette "somme" est infinie : c'est une série, il faut qu'elle converge.
Il est intéressant que l'espace soit complet. Cela motive la définition suivante

Définition *On appelle espace hilbertien un espace qui est :*

i *Pré-Hilbertien*

ii *Complet (pour la norme induite par le produit scalaire)*

Exemples

Premier exemple L'espace $\mathcal{C}^0([0,1])$ est préhilbertien mais pas Hilbertien. Pour s'en convaincre il suffit de considérer la suite (f_n) pour $n \geq 3$ suivante [2] :

$$f_n : \begin{array}{rcl} [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < \frac{1}{2} \\ nx - \frac{n}{2} & \text{si} \quad x \in [\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{n}] \\ 1 & \text{si} \quad n > \frac{1}{2} + \frac{1}{n} \end{cases} \end{array}$$

cette suite est de Cauchy mais ne converge pas dans $\mathcal{C}^0([0,1])$.

Deuxième exemple L'espace $l_0(\mathbb{C})$ est également préhilbertien mais pas hilbertien.

$$< u, v >= \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \overline{v_n} \Rightarrow \|u\| = \sqrt{\sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|^2}$$

Pour s'en convaincre, il suffit de considérer $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}^N = \begin{cases} \frac{1}{n} \text{ si } n \leq N \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$. C'est une suite de $l_0(\mathbb{C})$.
$\left((u_n)_{n\in\mathbb{N}}^N\right)$ est de Cauchy mais sa limite est $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*} \notin l_0(\mathbb{C})$.

Troisième exemple
$l_2(\mathbb{C})$ est un espace de Hilbert. Cela peut se démontrer "à la main" et sera également la conséquence de l'un des résultats qui viendra plus tard dans le cours.

---

1. Rappellons que si Jacques II de Chabannes, seigneur de La Palice, n'était pas mort il serait encore vivant.
2. Graphe : `http://cagnol.link/vc0h`

Base Hilbertienne

Définition *Une base Hilbertienne de $\mathcal{E}$ est une famille $\{e_i\}_{i\in I}$ d'éléments de $\mathcal{E}$ t.q. :*

— $\forall (i,j)\in I^2, <e_i,e_j>=\delta_{i,j}=\left\{\begin{array}{lll} 1 & si & i=j \\ 0 & si & i\neq j\end{array}\right.$

— $\overline{Vect\{e_i, i\in I\}}=E$*, l'ensemble I pouvant être infini (y compris non dénombrable)*

Une base hilbertienne est donc une famille de vecteurs deux-à-deux orthogonaux, de norme 1 et dont les combinaisons linéaires permettent de s'approcher autant que l'on veut de n'importe quel élément de $\mathcal{E}$ (puisque l'adhérence de l'espace vectoriel engendré par la famille est $\mathcal{E}$).

Notre motivation initiale était de pouvoir écrire les éléments de $\mathcal{E}$ sous forme d'une série $\sum_{n=1}^{+\infty} c_n e_n$. Pour pouvoir écrire la série, il ne doit pas y avoir plus de e_n que d'éléments dans $\mathbb{N}$, c'est–a-dire que l'on aimerait que I soit dénombrable[3]. Le théorème suivant permet de se placer dans ce cadre.

Théorème *Si $\mathcal{E}$ est un espace de Hilbert séparable, alors une telle base existe toujours avec $I=\mathbb{N}$*

Démonstration :
Voir Brézis, Théorème V.10. ■

Théorème *(Parseval)*
Soit $\mathcal{E}$ un espace de Hilbert et (e_n) une base de Hilbert de H. Alors :

$$\forall x\in\mathcal{E}, x=\lim_{N\to+\infty}\sum_{n=0}^{N}<x,e_n>e_n$$

ce que l'on écrit sous forme d'une série :

$$\forall x\in\mathcal{E}, x=\sum_{n=0}^{+\infty}<x,e_n>e_n$$

On a

$$\forall (x,y)\in\mathcal{E}^2, <x,y>=\sum_{n=0}^{+\infty}<x,e_n>\overline{<y,e_n>}$$

et

$$\forall x\in\mathcal{E}, \|x\|^2=\sum_{n=0}^{+\infty}|<x,e_n>|^2$$

Cette dernière égalité est le théorème de Pythagore en dimension infinie.
Démonstration :
Rudin 4.18 ou Ramis, Tome 4, Section 3.6.3. ■

3. Si vous n'êtes pas familier avec ce concept, vous êtes invité à regarder les deux séquences suivantes extraites de cours du MIT : `cagnol.link/cnt1` et `cagnol.link/cnt2`, dénombrable se dit "countable" en anglais). Il est indispensable d'avoir compris le concept avant le prochain cours sur la théorie de la mesure.

Exemple

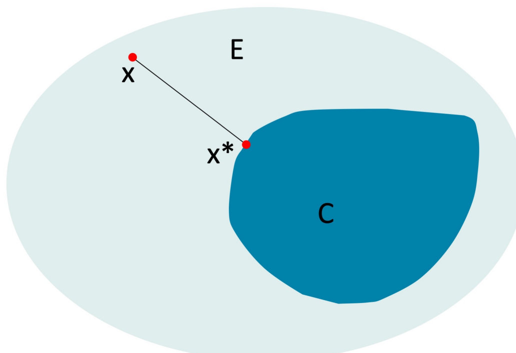
A venir dans la section suivante.

Projection orthogonale

Théorème *Soit $\mathcal{E}$ un espace de Hilbert. Soit $\mathcal{F} \subset \mathcal{E}$ un sous ensemble fermé, convexe et non vide, et $x \in \mathcal{E}$. Alors*

$$\exists ! x^* \in \mathcal{F} \ t.q. d(x, \mathcal{F}) = d(x, x_0)$$

x^* est la projection de x sur $\mathcal{F}$. On note $x^* = p(x)$.



Corollaire *Si $\mathcal{F}$ est un espace vectoriel alors p est linéaire et continue*[4]*, on a*

$$\forall x \in \mathcal{E}, \forall y \in \mathcal{F}, < x - p(x), y >= 0$$

Théorème *Soit $\mathcal{E}$ un espace de Hilbert et $\mathcal{F}$ un sous espace vectoriel de $\mathcal{E}$. Alors :*
Tout $x \in \mathcal{E}$ se décompose en $x = y + z$ avec $y \in \mathcal{F}$ et $z \in \mathcal{F}^\perp$
(y est le point de $\mathcal{F}$ le plus près de x)
(z est le point de $\mathcal{F}^\perp$ le plus près de x)
On écrit

$$\mathcal{E} = \mathcal{F} \oplus \mathcal{F}^\perp$$

Démonstration :
Rudin 4.11 ■

Théorème de représentation de Riesz

Le dual topologique d'une espace vectoriel $\mathcal{E}$ est l'ensemble de ses formes linéaires continues. Lorsque $\mathcal{E}$ est un espace de Hilbert, il y a une situation remarquable : toute forme linéaire

$$u \ : \ E \to \mathbb{R}$$

4. Il est rappelé que la continuité d'une application linéaire n'est pas automatique en dimension infinie.

s'écrit comme le produit scalaire avec un élément z_u

$$u(x) = < x, z_u >$$

Cela signifie que toute forme linéaire continue u de $\mathcal{E}$ peut être *représentée* par un élément z_u. Le théorème s'énonce de la manière suivante :

Théorème (Riesz) *Soit $\mathcal{E}$ un espace de Hilbert.*
Soit $u \in \mathcal{E}'$ alors $\exists ! z_u \in \mathcal{E}$ s.t. $u(x) = < x, z_u >$

On peut ainsi "identifier" un espace de Hilbert avec son dual.
Démonstration :
Brezis, Théorème V.5 ■