Séance V : Différences finies

A) Objectifs de la séance

A la fin de cette séance,

- Je sais écrire une discrétisation d'une équation aux dérivées partielles stationnaire.
- Je sais écrire le système linéaire correspondant.
- Je sais calculer l'ordre de consistance de la méthode.
- Je sais démontrer sa stabilité.
- Je sais démontrer la convergence de la méthode.

B) Pour se familiariser avec les concepts (à traiter avant les séances de TD)

Les questions V.1 et V.2 doivent être faits avant le TD 9. Les corrigés sont disponibles sur internet.

On fixe désormais $J \geq 1$ et on décompose l'intervalle $[0,1]$ en $J+1$ sous-intervalles de même longueur h. Pour $j \in \{0,\ldots,J+1\}$, on pose $x_j = jh$ et on note la solution du problème approché $V_h = (v_j)_{j\in\{1,\ldots,J\}}$. De même, on note $F = (f(x_j))_{j\in\{1,\ldots,J\}}$ et $C = (c(x_j))_{j\in\{1,\ldots,J\}}$.

Question V.1
Soient $u \in C^6(\mathbb{R})$, $(x,h) \in \mathbb{R}^2$.

Q. V.1.1 Démontrez la relation suivante

$$u^{(4)}(x) = \frac{u(x-2h) - 4u(x-h) + 6u(x) - 4u(x+h) + u(x+2h)}{h^4} + \mathcal{O}(h^2)$$

Q. V.1.2 On considère la formule aux différences finies suivante

$$u'(x) = \frac{u(x-2h) - 8u(x-h) + 8u(x+h) - u(x+2h)}{12h} + \mathcal{O}(h^k)$$

Quel est l'ordre d'approximation k de cette méthode ?

Question V.2
On veut ici établir quelques résultats sur la résolution approchée de

$$\textbf{(CD)} \qquad \begin{cases} -\nu u''(x) + bu'(x) + c(x)u(x) = f(x), & x \in]0,1[, \\ u(0) = 1 \text{ et } u(1) = 0, \end{cases}$$

avec $\nu \in \mathbb{R}^{+*}$, $b \in \mathbb{R}^+$, $c \in C^2([0,1],\mathbb{R}^+)$ et $f \in C^2([0,1],\mathbb{R})$.
On introduit les trois discrétisations suivantes pour u' avec $h \in \mathbb{R}$:

décentrée aval : $\dfrac{u(\cdot+h) - u(\cdot)}{h}$, décentrée amont : $\dfrac{u(\cdot) - u(\cdot-h)}{h}$, centrée : $\dfrac{u(\cdot+h) - u(\cdot-h)}{2h}$

Q. V.2.1 Donner l'erreur de consistance pour chacune de ces discrétisations. Quel est leur ordre ?

Q. V.2.2 Rappeler le schéma centré à trois points permettant d'approcher u''. Quel est son ordre ?

Q. V.2.3 Ecrire la discrétisation par différences finies de (CD) en utilisant pour la dérivée première chacun des schémas présentés ci-dessus.

Q. V.2.4 Préciser l'ordre des schémas obtenus.

C) Exercices

Exercice V.1

Soient $J \geq 1$, $(\alpha_j)_{j\in\{1,\dots,J\}} \in \mathbb{R}^J$, β et $\gamma \in \mathbb{R}_*^+$ tels que $\alpha_j - \beta - \gamma \geq 0$ pour tout $j \in \{1, \dots, J\}$. Soit A la matrice carrée d'ordre $J \geq 1$ de coefficients, pour $(i, j) \in \{1, \dots, J\}^2$,

$$a_{ij} = \begin{cases} \alpha_i & \text{si } i = j, \\ -\beta & \text{si } i = j+1,\ j \leq J-1, \\ -\gamma & \text{si } i = j-1,\ j \geq 2, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}.$$

E. V.1.1 Soit $G \in (\mathbb{R}^+)^J$ tel que $G \in \mathrm{Im}(A)$, c'est-à-dire qu'il existe $V \in \mathbb{R}^J$ tel que $G = AV$. Montrer qu'alors $V \in (\mathbb{R}^+)^J$.

E. V.1.2 En déduire que A est inversible, puis que les coefficients de A^{-1} sont tous positifs.

Exercice V.2

Ceci est la suite de la question Q.V.2, utilisant les résultats de l'exercice E.V.1.

E. V.2.1 Ecrire les schémas sous forme matricielle. On notera A_h^+ (resp. A_h^-, A_h^0) la matrice correspondant au décentrage en aval (resp. au décentrage en amont, au schéma centré). Quelle est la forme du second membre dans les différents cas ?

E. V.2.2 On veut utiliser un schéma ayant la propriété du maximum discret. Donner le schéma à utiliser suivant la valeur de b. Récapituler sous la forme d'un tableau.

E. V.2.3 Soit $V \in \mathbb{R}^J$. On pose $v_0 = v_{J+1} = 0$. Montrer l'inégalité de Poincaré Discrète :

$$\|V\|_2^2 := h \sum_{i=0}^{J} v_i^2 \leq \sum_{i=0}^{J} \frac{(v_{i+1} - v_i)^2}{h}.$$

On note B_h la matrice correspondant au cas où $b = 0$, $c = 0$.

E. V.2.4 Soit $V \in \mathbb{R}^J$. On pose $v_0 = v_{J+1} = 0$. Montrer que $(B_h V, V) = \dfrac{\nu}{h^2} \sum_{i=0}^{J} (v_{i+1} - v_i)^2$.

On suppose dorénavant $b > 2\nu/h$. On pose de plus $v_0 = v_{J+1} = 0$: on remarque que, d'après le tableau précédent, seul le schéma obtenu avec un décentrage amont donne une matrice monotone.

E. V.2.5 Expliquer pourquoi considérer le problème avec conditions aux bords homogènes n'est pas contradictoire avec (CD).

E. V.2.6 Montrer que $(A_h V, V) \geq \left(\dfrac{\nu}{h} + \dfrac{b}{2}\right) \|V\|_2^2$, puis que $(A_h V_h = G \Rightarrow \|V_h\|_2 \leq \dfrac{1}{(\nu + bh/2)} \|G\|_2)$.

E. V.2.7 Quelle estimation de l'erreur au sens L^2 pouvez-vous donner ?

Exercice V.3 (Conditions aux limites mixtes de type Dirichlet-Neumann)

On s'intéresse maintenant au problème suivant :

$$\textbf{(P)} \qquad \begin{cases} -u''(x) + c(x)u(x) = f(x), & x \in]0,1[, \\ u(0) = 0 \text{ et } u'(1) = 0, \end{cases}$$

avec $f \in C^2([0,1],\mathbb{R})$ et $c \in C^2([0,1],\mathbb{R}^+)$. Dans un premier temps, on discrétise u'' par le schéma centré classique et on suppose qu'au point fictif x_{J+2}, $v_{J+2} = v_{J+1}$.

E. V.3.1 Ecrire la matrice de discrétisation A_h.

E. V.3.2 Montrer que la matrice A_h vérifie le principe du maximum discret.

E. V.3.3 *A priori*, le schéma est-il consistant avec (P) ?

E. V.3.4 Soit $Y \in \mathbb{R}^{J+1}$ tel que $y_{J+1} = 0$. Montrer que (V_h solution de $A_h V_h = Y \Rightarrow \|V_h\|_\infty \leq \frac{1}{2}\|Y\|_\infty$).

E. V.3.5 Soit $Y \in \mathbb{R}^{J+1}$ tel que $y_j = 0$ si $j \in \{1, \dots, J\}$. Montrer que (V_h tel que $A_h V_h = Y \Rightarrow \|V_h\|_\infty \leq h\|Y\|_\infty = h|y_J|$).

E. V.3.6 En déduire que le schéma est convergent. Quel est son ordre ?

On pose maintenant $v_{J+2} = v_J$.

E. V.3.7 A quelle discrétisation est-ce que cela correspond ? Calculer l'ordre de consistance.

D) Approfondissement

Ces exercices sont disponibles sous forme de Jupyter notebooks sur edunao.

Chapitre IX : Corrections des exercices

Solution de Q. V.1.1 On écrit les formules de Taylor

$$u(x \pm h) = u(x) \pm hu'(x) + \frac{h^2}{2}u''(x) + \pm\frac{h^3}{6}u^{(3)}(x) + \frac{h^4}{24}u^{(4)}(x) + \pm\frac{h^5}{120}u^{(5)}(x) + O(h^6)$$

et

$$u(x \pm 2h) = u(x) \pm 2hu'(x) + \frac{4h^2}{2}u''(x) + \pm\frac{8h^3}{6}u^{(3)}(x) + \frac{16h^4}{24}u^{(4)}(x) + \pm\frac{32h^5}{120}u^{(5)}(x) + O(h^6).$$

Une combinaison linéaire bien choisie donne alors, les termes impairs disparaissant par symétrie,

$$\begin{aligned}\frac{u(x-2h) - 4u(x-h) + 6u(x) - 4u(x+h) + u(x+2h)}{h^4} &= \underbrace{(1-4+6-4+1)}_{=0}\frac{u(x)}{h^4} + \underbrace{(4h^2-4h^2-4h^2+4h^2)}_{=0}\frac{u''(x)}{2h^4} \\ &+ \underbrace{(16h^4-4h^4-4h^4+16h^4)}_{=24h^4}\frac{u^{(4)}(x)}{24h^4} + O(h^2)\end{aligned}$$

Solution de Q. V.1.2 On reprend les formules de Taylor de la question précédente. Une combinaison linéaire bien choisie donne alors, les termes pairs disparaissant par symétrie,

$$\begin{aligned}\frac{u(x-2h) - 8u(x-h) + 8u(x+h) - u(x+2h)}{12h} &= \underbrace{1-8+8-1}_{=0}\frac{u(x)}{12h} + \underbrace{(-2h+8h+8h-2h)}_{=12h}\frac{u'(x)}{12h} \\ &+ \underbrace{(-8h^3+8h^3+8h^3-8h^3)}_{=0}\frac{u^{(3)}(x)}{72h} \\ &+ \underbrace{(-32h^5+8h^5+8h^5-32h^5)}_{=-48}\frac{u^{(5)}(x)}{1440h} + O(h^6) = u'(x) + O(h^4).\end{aligned}$$

Cette formule est une approximation à l'ordre 4.

Solution de Q. V.2.1 On indique les hypothèses liées aux différentes écritures (o et O) entre parenthèses.

- Discrétisation décentrée aval : soient $u \in D^1(]0,1[)$ ($u \in C^1(]0,1[)$), $x \in]h, 1-h[$, comme $u(x+h) = u(x) + hu'(x) + o(h)(+O(h^2))$,

$$u'(x) - \frac{u(x+h) - u(x)}{h} = o(1)(= O(h))$$

- Discrétisation décentrée amont : soient $u \in D^1(]0,1[)$ ($u \in C^1(]0,1[)$), $x \in]h, 1-h[$, comme $u(x-h) = u(x) - hu'(x) + o(h)(+O(h^2))$,

$$u'(x) - \frac{u(x) - u(x-h)}{h} = o(1)(= O(h))$$

- Discrétisation centrée : soient $u \in D^2(]0,1[)$ $(u \in C^2(]0,1[))$, $x \in]h, 1-h[$, comme $u(x+h) - u(x-h) = hu'(x) + o(h^2)(+O(h^3))$,

$$u'(x) - \frac{u(x+h) - u(x-h)}{2h} = o(h)(= O(h^2))$$

Solution de Q. V.2.3 On note

- Schéma aval pour u' + discrétisation centrée pour u'' :

$$\begin{cases} -\nu \dfrac{v_{j+1} - 2v_j + v_{j-1}}{h^2} + b\dfrac{v_{j+1} - v_j}{h} + c_j v_j = f_j, \quad 1 \leq j \leq J \\ v_0 = 1; \quad v_{J+1} = 0 \end{cases}$$

- Schéma amont pour u' + discrétisation centrée pour u'' ::

$$\begin{cases} -\nu \dfrac{v_{j+1} - 2v_j + v_{j-1}}{h^2} + b\dfrac{v_j - v_{j-1}}{h} + c_j v_j = f_j, \quad 1 \leq j \leq J \\ v_0 = 1; \quad v_{J+1} = 0 \end{cases}$$

- Schéma centré pour u' + discrétisation centrée pour u'' :

$$\begin{cases} -\nu \dfrac{v_{j+1} - 2v_j + v_{j-1}}{h^2} + b\dfrac{v_{j+1} - v_{j-1}}{2h} + c_j v_j = f_j, \quad 1 \leq j \leq J \\ v_0 = 1; \quad v_{J+1} = 0 \end{cases}$$

Solution de Q. V.2.4 Calcul de l'erreur de consistance : soit u la solution exacte de (CD), de classe $C^4([0,1])$. Alors, $\forall j \in \{1, \ldots, J\}$,

- pour le schéma aval pour u' + discrétisation centrée pour u'' :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_j &= -\nu \frac{u(x_{j+1}) - 2u(x_j) + u(x_{j-1})}{h^2} + b\frac{u(x_{j+1}) - u(x_j)}{h} + c_j u(x_j) - f(x_j) \\ &= -\nu \frac{u(x_{j+1}) - 2u(x_j) + u(x_{j-1})}{h^2} + b\frac{u(x_{j+1}) - u(x_j)}{h} + c_j u(x_j) + \nu u''(x_j) - bu'(x_j) - c_j u(x_j) \\ &= -\nu u''(x_j) + O(h^2) + \nu u''(x_j) + bu'(x_j) + O(h) - bu'(x_j) = O(h). \end{aligned}$$

- de même, pour le schéma amont pour u' + discrétisation centrée pour u'' :

$$\mathcal{E}_j = O(h),$$

- de même, pour le schéma centré pour u' + discrétisation centrée pour u'' :

$$\mathcal{E}_j = -\nu u''(x_j) + O(h^2) + \nu u''(x_j) + bu'(x_j) + O(h^2) - bu'(x_j) = O(h^2).$$

Solution de Q. V.1.1 On a

$$\begin{cases} \alpha_1 v_1 - \beta v_2 \geq 0 \\ \forall j \in \{2,\dots,J-1\},\ -\beta v_{j-1} + \alpha_j v_j - \gamma v_{j+1} \geq 0 \\ -\gamma v_{J-1} + \alpha_J v_J \geq 0. \end{cases}$$

Soit $m \in \{1,\dots,J\}$ tel que $v_m = \min_{1\leq j\leq J} v_j$.
Il y a 3 cas de figures possibles :

- Cas $m = 1$: alors on a $\alpha_1 v_1 - \gamma v_2 \geq 0$ d'où $(\alpha_1 - \gamma)v_1 + \gamma(v_1 - v_2) \geq 0$donc, comme $\alpha_1 - \gamma \geq \beta > 0$, $v_1 \geq \gamma(v_2 - v_1)/(\alpha - \gamma) \geq 0$.
  Conclusion : comme $v_m = v_1 \geq 0, \forall j \in \{1,\dots,J\}, v_j \geq v_m \geq 0$.
- Cas $m = J$: même raisonnement en remplaçant γ par β.
- Cas $2 \leq m \leq J - 1$: alors

  $$-\beta v_{m-1} + \alpha_m v_m - \gamma v_{m+1} \geq 0 \text{ d'où } \underbrace{\beta(v_m - v_{m-1})}_{\leq 0 \text{ par déf. de } v_m} + (\alpha_m - \beta - \gamma)v_m + \underbrace{\gamma(v_m - v_{m+1})}_{\leq 0 \text{par déf. de } v_m} \geq 0$$

  d'où deux cas :

  - Cas $\alpha_m - \beta - \gamma > 0$: alors $v_m \geq 0$!
  - Cas $\alpha_m - \beta - \gamma = 0$: $v_m - v_{m-1} \geq 0$ et $v_m - v_{m-1} \leq 0$, ce qui implique que $v_m = v_{m-1}$. De même, on conclut que $v_m = v_{m+1}$. On est donc ramené au cas $v_{m-1} = \min_j v_j$, ce qui aboutit par récurrence au cas $m = 1$.

On a donc prouvé que A est monotone.

Solution de Q. V.1.2 On montre que A_h est injective donc inversible, puisque c'est une matrice carrée. En effet, comme le vecteur nul $0_{\mathbb{R}^J}$ est à la fois à coefficients positifs et négatifs, tout élément du noyau de A_h est également à coefficients positifs et négatifs, donc nuls ! La matrice est donc injective. Comme elle est carrée, elle est inversible.
De plus, les coefficients de A_h^{-1} sont tous positifs, puisque, pour tout $j \in \{1,\dots,J\}$, sa j-ème colonne peut s'écrire

$$[A_h^{-1}]_{1\leq i\leq J,j} = A_h^{-1} e_j$$

où e_j est le j-ème vecteur de la base canonique et est à coefficients positifs.

Solution de Q. V.2.1 On adopte ici l'écriture MATLAB, plus commode :

- $A_h^+ = \dfrac{\nu}{h^2}(2\text{diag}(ones(J,1)) - \text{diag}(ones(J-1,1),-1) - \text{diag}(ones(J-1,1),1)) + \dfrac{b}{h}(\text{diag}(ones(J-1,1),1) - \text{diag}(ones(J,1)) + diag(C)$,

- $A_h^- = \dfrac{\nu}{h^2}(2\text{diag}(ones(J,1)) - \text{diag}(ones(J-1,1),-1) - \text{diag}(ones(J-1,1),1)) + \dfrac{b}{h}(\text{diag}(ones(J,1)) - \text{diag}(ones(J-1,-1)) + diag(C)$,
- $A_h^0 = \dfrac{\nu}{h^2}(2\text{diag}(ones(J,1)) - \text{diag}(ones(J-1,1),-1) - \text{diag}(ones(J-1,1),1)) + \dfrac{b}{2h}(\text{diag}(ones(J-1,1),1) - \text{diag}(ones(J-1,1)) + diag(C)$.

Solution de Q. V.2.2 On a vu en E.V.1.1 une condition suffisante de monotonie. Énumérons les cas en présence :

- pour A_h^+ :
$$\begin{cases} h^2\alpha_i &= 2\nu - bh + c_i h^2, \quad i \in \{1,\dots,J\} \\ h^2\beta &= \nu - bh \\ h^2\gamma &= \nu \end{cases}$$
donc la condition suffisante est satisfaite si et seulement si
$$\nu - bh > 0 \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad \frac{bh}{\nu} < 1.$$
- pour A_h^- :
$$\begin{cases} h^2\alpha_i &= 2\nu + bh + c_i h^2, \quad i \in \{1,\dots,J\} \\ h^2\beta &= \nu \\ h^2\gamma &= \nu + bh \end{cases}$$
donc la condition suffisante est satisfaite si et seulement si
$$\nu + bh > 0 \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad \frac{bh}{\nu} > -1.$$
- pour A_h^0 :
$$\begin{cases} h^2\alpha_i &= 2\nu + c_i h^2, \quad i \in \{1,\dots,J\} \\ h^2\beta &= \nu - \dfrac{bh}{2} \\ h^2\gamma &= \nu + \dfrac{bh}{2} \end{cases}$$
donc la condition suffisante est satisfaite si et seulement si
$$|b|h < 2\nu \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad \frac{|b|h}{\nu} < 2.$$

Supposons $b \in \mathbb{R}$, $\nu > 0$ et $h > 0$fixés. Posons $\lambda = \dfrac{bh}{\nu}$.

λ	$-\infty$		-2		-1		0		1		2		$+\infty$
A_h^+										?		?	
A_h^-		?		?									
A_h^0		?										?	

Solution de Q. V.2.3 La démonstration est l'analogue discret de la démonstration de l'inégalité de Poincaré dans le cas continu vue en cours et repose sur l'utilisation de l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Soit $j \in \{0, \ldots, J\}$.

$$
\begin{aligned}
|v_j| &= \left| v_0 + \sum_{k=0}^{j-1} (v_{k+1} - v_k) \right| \\
&\leq \sqrt{\sum_{k=0}^{j-1} 1} \sqrt{\sum_{k=0}^{j-1} (v_{k+1} - v_k)^2} \\
&\leq \sqrt{(J+1)} \sqrt{\sum_{k=0}^{J} (v_{k+1} - v_k)^2} \\
&\leq \sqrt{\sum_{k=0}^{J} \frac{(v_{k+1} - v_k)^2}{h}}
\end{aligned}
$$

car $h(J+1) = 1$. On en déduit

$$
\begin{aligned}
h \sum_{i=0}^{J} v_i^2 &\leq h \sum_{j=0}^{J} \sum_{k=0}^{J} \frac{(v_{k+1} - v_k)^2}{h} \\
&\leq \sum_{k=0}^{J} \frac{(v_{k+1} - v_k)^2}{h}.
\end{aligned}
$$

Solution de Q. V.2.4 Voir Question 4.3.1 du TD1.

Solution de Q. V.2.5 En différences finies, il est toujours possible de reporter les conditions aux bords non homogènes dans le second membre du système linéaire : on prend comme second membre $G = \left(f(x_1) + \frac{\nu}{h^2} u(0) + \frac{b}{h} u(0), f(x_2), \ldots, f(x_J) \right)^T$.

Solution de Q. V.2.6 On peut décomposer A^- en la somme de trois matrices : $A = B_h + D + \mathrm{diag}(C)$ où

$$D = \frac{b}{h}\begin{pmatrix} 1 & 0 & & & \\ -1 & 1 & 0 & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & 0 & -1 & 1 & 0 \\ & & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

On a déjà l'estimation $(B_h V, V) \geq \frac{\nu}{h}\|V\|_2^2$, et $(CV, V) = \sum_{j=1}^{J} c_j v_j^2 \geq 0$. De plus,

$$\begin{aligned}
(DV, V) &= \frac{b}{h}\sum_{j=1}^{J}(v_j - v_{j-1})v_j \\
&= \frac{b}{h}\sum_{j=1}^{J}(v_j - v_{j-1})(v_j - v_{j-1}) + \frac{b}{h}\sum_{j=1}^{J}(v_j - v_{j-1})v_{j-1} \\
&= \frac{b}{2h}\sum_{j=1}^{J}(v_j - v_{j-1})^2 + \frac{b}{2h}\sum_{j=1}^{J}(v_j - v_{j-1})(v_j - v_{j-1} + 2v_{j-1}) \\
&= \frac{b}{2h}\left(\sum_{j=1}^{J}(v_j - v_{j-1})^2 + v_J^2\right) \\
&\geq \frac{b}{2h}\sum_{j=1}^{J}(v_j - v_{j-1})^2 \\
&\geq \frac{b}{2}\|V\|_2^2
\end{aligned}$$

En additionnant les estimations, on obtient le résultat escompté.
Pour conclure, il suffit d'écrire

$$\left(\frac{\nu}{h} + \frac{b}{2}\right)\|V\|_2^2 \leq (A_h V_h, V_h) \leq \sqrt{\sum_{j=1}^{J} f_i^2}\sqrt{\sum_{j=1}^{J} v_i^2} = \frac{1}{h}\|G\|_2\|V_h\|_2.$$

On en déduit immédiatement l'inégalité demandée.

Solution de Q. V.2.7 Soit u la solution exacte régulière de **(CD)**. On pose $\Pi_h u = (u(x_1, \ldots, u(x_J))^T$ et on note V_h la solution du système linéaire $A_h V_h = G$, où G est le second membre défini à la question V.2.5. On cherche à estimer $E = V_h - \Pi_h u$ en norme $\|\cdot\|_2$.
D'après la question précédente, $\|A_h^{-1}\|_2 \leq (\nu + bh/2)^{-1}$.
On peut donc chercher une estimation de $A_h E$, car on a reconnu l'erreur de consistance :

pour $j \in \{2, \dots, J-1\}$,

$$\begin{aligned}
(A_h E)_j &= -\frac{\nu}{h^2}(v_{j+1} - 2v_j + v_{j-1}) + \frac{b}{h}(v_j - v_{j-1}) + c_j v_j \\
&\qquad + \frac{\nu}{h^2}(u(x_{j+1}) - 2u(x_j) + u(x_{j-1})) - \frac{b}{h}(u(x_j) - u(x_{j-1})) - c(x_j)u(x_j) \\
&= G_j - (f(x_j) + \mathcal{E}_j) \\
&= f(x_j) - f(x_j) - \mathcal{E}_j \\
&= -\mathcal{E}_j
\end{aligned}$$

où $\mathcal{E}_j$ est l'erreur de consistance calculée en V.2.4 ;
pour $j = 1$,

$$\begin{aligned}
(A_h E)_1 &= -\frac{\nu}{h^2}(-2v_1 + v_2) + \frac{b}{h} v_1 + c_1 v_1 \\
&\qquad + \frac{\nu}{h^2}(-2u(x_1) + u(x_2)) - \frac{b}{h} u(x_1) - c(x_1)u(x_1) \\
&= G_1 + \frac{\nu}{h^2}(-2u(x_1) + u(x_2)) - \frac{b}{h} u(x_1) - c(x_1)u(x_1) \\
&= f(x_1) + \frac{\nu}{h^2} u(0) + \frac{b}{h} u(0) + \frac{\nu}{h^2}(-2u(x_1) + u(x_2)) - \frac{b}{h} u(x_1) - c(x_1)u(x_1) \\
&= f(x_1) + \frac{\nu}{h^2}(u(x_0) - 2u(x_1) + u(x_2)) - \frac{b}{h}(u(x_1) - u(x_0)) - c(x_1)u(x_1) \\
&= f(x_1) - f(x_1) - \mathcal{E}_1 \\
&= -\mathcal{E}_1
\end{aligned}$$

pour $j = J$, on trouve par la même méthode $(A_h E)_J = -\mathcal{E}_J$ car $u(1) = v_{J+1} = 0$.

Au final, $A_h E = -\mathcal{E}$.
Finally, $A_h E = -\mathcal{E}$.

Posons $\mathcal{E}_0 = 0$. On sait que $\|\mathcal{E}\|_\infty \leq Ch$, avec C une constante ne dépendant que de u, b et ν. Or

$$\|\mathcal{E}\|_2^2 = h \sum_{j=0}^{J} \mathcal{E}_j^2 \leq h(J+1)\|\mathcal{E}\|_\infty^2 = \|\mathcal{E}\|_\infty^2.$$

Donc

$$\|E\|_2 \leq \|A_h^{-1}\|_2 \|\mathcal{E}\|_2 \leq \frac{Ch}{\nu + bh/2} \leq \frac{Ch}{\nu}.$$

Le schéma converge donc à l'ordre 1.

Solution de Q. V.3.1 Le schéma s'écrit

$$\begin{cases}
-\dfrac{v_{j+1} - 2v_j + v_{j-1}}{h^2} + c_j v_j = f_j, \quad 1 \leq j \leq J \\
-\dfrac{-v_{J+1} + v_J}{h^2} + c_{J+1} v_{J+1} = f_{J+1}, \\
v_0 = 1
\end{cases}$$

La matrice $A_h \in \mathcal{M}_{J+1}(\mathbb{R})$ s'écrit donc

$$A_h = \frac{1}{h^2}\begin{pmatrix} 2+h^2c_1 & -1 & 0 & & \\ -1 & 2+h^2c_2 & -1 & 0 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & 0 & -1 & 2+h^2c_J & -1 \\ & & 0 & -1 & 1+h^2c_{J+1} \end{pmatrix}$$

Solution de Q. V.3.2 On applique la question V.1.1. La matrice A_h est donc inversible.

Solution de Q. V.3.3 Calculons l'erreur de consistance. Soit $u \in C^4([0,1])$ la solution de (P). Alors, pour tout $j \in \{1,\dots,J\}$,

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_j &= -\frac{u(x_{j+1}) - 2u(x_j) + u(x_{j-1})}{h^2} + c_j u(x_j) - f(x_j)\\ &= -\frac{u(x_{j+1}) - 2u(x_j) + u(x_{j-1})}{h^2} + c_j u(x_j) + u''(x_j) - c_j u(x_j)\\ &= -\nu u''(x_j) + O(h^2) + \nu u''(x_j) = O(h^2).\end{aligned}$$

Calculons $\mathcal{E}_{J+1}$, sachant que $u'(1) = 0$:

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_{J+1} &= -\frac{-u(x_{J+1}) + u(x_J)}{h^2} + c_{J+1}u(x_{J+1}) - f(x_{J+1})\\ &= -\frac{-u(1) + u(1-h)}{h^2} + c(1)u(1) - f(1)\\ &= \frac{hu'(1) - (h^2/2)u''(1) + o(h^2)}{h^2} + c(1)u(1) - f(1)\\ &= \frac{u''(1)}{2} + o(1).\end{aligned}$$

Il n'y a pas de raison *a priori* pour que l'erreur de consistance soit nulle en x_{J+1} (considérer le cas $c = 0$). Le schéma n'est donc pas consistant !

Solution de Q. V.3.4 Notons $\mathbf{e} := (1,\dots,1,0)^T$ Notons $A_h^0 = A_h - \mathrm{diag}([C, c(1)])$.
Traitons tout d'abord le cas $c = 0$ ($A_h^0 = A_h$). On note V_h^0 la solution de $A_h^0 V_h^0 = Y$.
Considérons le problème

$$\begin{cases} -u'' = 1 & \text{dans} \quad]0,1[\\ u(0) = 1 & \text{et} \quad u(1) = u(1-h). \end{cases}$$

L'unique solution du problème est un polynôme de degré 2 :

$$\bar{u} : x \mapsto -\frac{x^2}{2} + \left(1 - \frac{h}{2}\right)x.$$

On vérifie immédiatement que $A_h^0(\Pi_h \bar{u}) = \mathbf{e}$. En effet, le schéma est exact pour ce problème, puisque la solution est polynomiale de degré inférieur ou égal à 3 !
Remarquons que $\|\bar{u}\|_\infty = ((1-h/2)^2)/2 \leq 1/2$.
Considérons à présent le vecteur $W_- = Y - \|Y\|_\infty \mathbf{e}$, qui est **à coefficients négatifs**. Comme A_h^0 est monotone, $(A_h^0)^{-1}W_-$ est également à coefficients négatifs.
Or on a

$$(A_h^0)^{-1}W_- = (A_h^0)^{-1}(Y - \|Y\|_\infty \mathbf{e}) = V_h^0 - \|Y\|_\infty \Pi_h \bar{u}.$$

On a donc prouvé que

$$\forall j \in \{1, \dots, J+1\}, \qquad v_j^0 - \|Y\|_\infty \bar{u}(x_j) \leq 0.$$

De même, en considérant $W_+ = Y + \|Y\|_\infty \mathbf{e}$, qui est à coefficients positifs, on prouve que

$$\forall j \in \{1, \dots, J+1\}, \qquad v_j^0 + \|Y\|_\infty \bar{u}(x_j) \geq 0.$$

On a donc

$$\|V_h^0\|_\infty \leq \|\bar{u}\|_\infty \|Y\|_\infty \leq \frac{\|Y\|_\infty}{2}.$$

Cas général : c est une fonction positive. Soit V_h la solution de $A_h V_h = Y$.
Rappelons que A_h^{-1} et $(A_h^0)^{-1}$ sont à coefficients positifs ou nuls. Remarquons que

$$(A_h)^{-1} - (A_h^0)^{-1} = A_h^{-1}(A_h^0 - A_h)(A_h^0)^{-1} = -\mathrm{diag}([C, c(1)]).$$

La matrice $(A_h)^{-1} - (A_h^0)^{-1}$ est donc à coefficients négatifs ! On en déduit que

$$\forall j \in \{1, \dots, J+1\}, \qquad 0 \leq ((A_h)^{-1}\mathbf{e})_j \leq ((A_h^0)^{-1}\mathbf{e})_j.$$

En reprenant la démonstration dans le cas $c = 0$, on écrit

$$(A_h)^{-1}W_- = V_h - \|Y\|_\infty (A_h)^{-1}\mathbf{e}.$$

Donc, pour tout $j \in \{1, \dots, J+1\}$, on a

$$v_j \leq \|Y\|_\infty (A_h^{-1}\mathbf{e}) \leq \|Y\|_\infty ((A_h^0)^{-1}\mathbf{e}) \leq \frac{\|Y\|_\infty}{2}.$$

De même, on montre que

$$v_j \geq -\frac{\|Y\|_\infty}{2}.$$

Solution de Q. V.3.5 On raisonne comme à la question précédente.
On traite d'abord le cas $c = 0$.
Considérons le problème

$$\begin{cases} -u'' = 0 & \text{dans} \quad]0,1[\\ u(0) = 1 & \text{et} \quad u(1) = u(1-h) + h^2. \end{cases}$$

L'unique solution du problème est un polynôme de degré 1 :

$$\bar{u} : x \mapsto hx.$$

En appliquant le même raisonnement qu'à la question précédente en prenant $W_\pm = Y \pm |y_J| e_{J+1}$, on montre l'inégalité demandée.

Solution de Q. V.3.6 Soit u la solution régulière de (P).
Alors l'erreur $E = V_h - \Pi_h u$ est évaluée grâce à

$$E = A_h^{-1} A_h E = A_h^{-1} A_h (V_h - \Pi_h u) = A_h^{-1}(F - A_h \Pi_h) = A_h^{-1}\mathcal{E}$$

qui donne

$$\|E\|_\infty \leq \left\| A_h^{-1} \begin{pmatrix} \mathcal{E}_1 \\ \vdots \\ \mathcal{E}_J \\ 0 \end{pmatrix} \right\|_\infty + \left\| A_h^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \mathcal{E}_{J+1} \end{pmatrix} \right\|_\infty \leq \frac{1}{2} C h^2 + h |\mathcal{E}_{J+1}| = O(h).$$

Le schéma converge à l'ordre 1.

Solution de Q. V.3.7 Ceci est une discrétisation centrée de la dérivée en x_J : la matrice A_h devient

$$A_h = \frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} 2 + h^2 c_1 & -1 & 0 & & \\ -1 & 2 + h^2 c_2 & -1 & 0 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & 0 & -1 & 2 + h^2 c_J & -1 \\ & & 0 & -2 & 2 + h^2 c_{J+1}. \end{pmatrix}$$

Le dernier coefficient de l'erreur de consistance est donc

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{J+1} &= -\frac{-2u(x_{J+1}) + 2u(x_J)}{h^2} + c_{J+1} u(x_{J+1}) - f(x_{J+1}) \\ &= -\frac{-2u(1) + 2u(1-h)}{h^2} + c(1)u(1) - f(1) \\ &= 2\frac{hu'(1) - (h^2/2)u''(1) + O(h^3)}{h^2} + c(1)u(1) - f(1) \\ &= O(h). \end{aligned}$$

Le nouveau schéma est donc consistant à l'ordre 1.