Séance I : Topologie des espaces métriques et espaces vectoriels normés

NB: Les questions précédées du symbole $*$ ou $**$ sont facultatives et demandent une compréhension et/ou des techniques qui vont au-delà de ce qui est exigé pour valider l'examen. Elles peuvent être passées et le cas échéant, admises pour répondre au reste de l'exercice.

A) Objectifs de la séance

A la fin de cette séance,

- Je suis capable de définir une topologie, des ouverts, des fermés, l'adhérence d'un ensemble, un ensemble compact;
- Je sais formaliser la notion de convergence et étudier la convergence d'une suite et la continuité d'une fonction;
- Je suis capable de déterminer la limite supérieure (limite inférieure) d'une suite et d'une fonction;
- Je sais ce qu'est une suite de Cauchy et la complétude d'un espace métrique;
- Je suis capable de prouver qu'une fonction est une norme d'un espace vectoriel ou une distance sur un ensemble;
- Je suis capable de déterminer les boules d'une distance donnée, comprendre les démonstrations par inclusions réciproques et les équivalences de normes.

B) Pour se familiariser avec les concepts (à traiter avant les séances de TD)

Les questions I.1 et I.2 sont à traiter avant la première séance de TD. Les corrigés sont disponibles sur internet.

La topologie est une branche des mathématiques fondamentale au développement de l'analyse moderne. Il est donc intéressant d'en connaître quelques principes. De plus, la ressemblance entre les axiomes de la topologie et ceux de la théorie de la mesure la rend incontournable dans ce cours.

Question I.1 (Exemples de topologie)

Q. I.1.1 Soit $X = \{a, b, c\}$. Parmi les ensembles suivants, lesquels sont des topologies?

1. $\{\emptyset, \{a, b, c\}\}$
2. $\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$
3. $\{\emptyset, \{a, b\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$
4. $\{\emptyset, \{a\}, \{c\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}\}$

Q. I.1.2 Soit $X = \mathbb{R}$ et T la topologie usuelle sur X. Parmi les ensembles suivants, lesquels sont ouverts?

1. $]0; 4[$
2. $]-\infty; 4]$
3. $]-\infty; 0[\cup]2; 4[$
4. $\{0\}$

Q. I.1.3 Soit $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ et $T = \{\emptyset, \{1, 2\}, \{5\}, \{1, 2, 5\}, \{1, 2, 3, 4\}, X\}$ une topologie sur X. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite définie par $u_n = \frac{3+(-1)^n}{2}$.

1. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle vers 1?
2. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle vers 2?
3. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle vers 3?
4. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle vers 4?
5. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle vers 5?

Question I.2 (Complétude dans $\mathbb{R}$)

Q. I.2.1 Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $u_n = \frac{1}{n}$ est une suite de Cauchy dans $\mathbb{R}$.

C) Exercices

Exercice I.1 (Métriques et limites de $\mathbb{R}^n$)
Les questions sont indépendantes les unes des autres.

E. I.1.1 Soit d_E la distance euclidienne dans $\mathbb{R}^d$. Pour $a \in \mathbb{R}^d$, on définit l'application $N_a : x \mapsto d_E(a, x)$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}^d$. Pour quel(s) a l'application N_a est-elle une norme sur $\mathbb{R}^d$?

E. I.1.2 On définit l'application $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $d(x,y) = |e^{-x} - e^{-y}|$, pour tous $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Montrer que d est une distance sur $\mathbb{R}$.

E. I.1.3 Pour $x = (x_1, x_2)$ et $y = (y_1, y_2)$ dans $\mathbb{R}^2$, on définit

1. $d(x,y) = |x_1 - y_1|$
2. $d(x,y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$
3. $d(x,y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|^2$
4. $d(x,y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| + 1$

Parmi ces fonctions, dire celles qui sont des distances.

E. I.1.4 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Vérifier les propriétés suivantes:

$$
\begin{aligned}
(i)\ & \limsup_{n\to+\infty} u_n < l \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall k \geq n,\ u_k < l \\
(ii)\ & \exists n \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall k \geq n,\ u_k < l \Rightarrow \limsup_{n\to+\infty} u_n \leq l \\
(iii)\ & \limsup_{n\to+\infty} u_n > l \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ \exists k \geq n \text{ tel que } u_k > l \\
(iv)\ & \forall n \in \mathbb{N},\ \exists k \geq n \text{ tel que } u_k > l \Rightarrow \limsup_{n\to+\infty} u_n \geq l.
\end{aligned}
$$

Écrire les propriétés correspondantes pour la $\liminf$.

Exercice I.2 (Un peu de topologie sur $\mathbb{R}^n$)
Les questions sont indépendantes les unes des autres.

E. I.2.1 Dans $\mathbb{R}^n$, on note $B(x,r)$ la boule euclidienne de centre x et de rayon $r > 0$. On définit la collection d'ensembles suivante:

$$\mathcal{O} = \{O \subset \mathbb{R}^n :\ \forall x \in O,\ \exists r > 0 \text{ tel que } B(x,r) \subset O\}\ .$$

Montrer que $\mathcal{O}$ est une topologie sur $\mathbb{R}^n$ (il s'agit de la topologie usuelle de $\mathbb{R}^n$).

E. I.2.2 Pour tous $x, y \in \mathbb{R}^2$, on définit

$$\delta(x,y) = \begin{cases} \|x-y\| & \text{si } x,\ y \text{ et } 0 \text{ sont alignés} \\ \|x\| + \|y\| & \text{sinon.} \end{cases}$$

(a) Montrer que δ est une distance (parfois appelée distance SNCF, pourquoi?).

(b) Décrire géométriquement les boules ouvertes.

(c) Montrer que tout ouvert pour la topologie usuelle est aussi ouvert pour la topologie de δ (commencer par une comparaison des boules ouvertes). La réciproque est-elle vraie? On dit que la topologie de δ est *plus fine* que la topologie usuelle.

Exercice I.3 (Compacité)
Les questions sont indépendantes.

E. I.3.1 Soient $(X, \mathcal{O})$ et $(X', \mathcal{O}')$ deux espaces topologiques séparés, et $f : X \to X'$ continue.

(a) L'image réciproque d'un compact par f est-elle compacte?

(b) L'image directe d'un compact par f est-elle compacte?

E. I.3.2 Soit $(X, \mathcal{O})$ un espace topologique séparé. Soit K un compact de X et $x \in X \setminus K$. Montrer qu'il existe deux ouverts U, U' de X tels que $K \subset U$, $\{x\} \subset U'$ et $U \cap U' = \emptyset$. *[Indication: par séparation, on pourra considérer pour tout $k \in K$ des ouverts U_k et V_k tels que $k \in U_k$, $x \in V_k$ et $U_k \cap V_k = \emptyset$.]*
Etendre au cas où K et K' sont deux compacts disjoints.

E. I.3.3 Soit (X, d) un espace métrique. Démontrer le théorème des compacts emboîtés: si $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante de compacts non vides de X, alors $\cap_{n\in\mathbb{N}} K_n \neq \emptyset$. Montrer que tout ouvert qui contient $\cap_{n\in\mathbb{N}} K_n$ contient tous les K_n à partir d'un certain rang.

La complétude est une propriété très utile car les espaces complets possèdent de nombreuses propriétés intéressantes : critère de Cauchy, absolue convergence, convergence normale, théorèmes de point fixe, théorème de prolongement, projection…

Exercice I.4 (Complétude et quelques applications)

E. I.4.1 Prélude (exemple simple d'espace non-complet): on considère la distance d sur $\mathbb{R}$ définie à la question E.I.1.2. Montrer que la suite des entiers naturels (i.e. $u_n = n, \forall n \in \mathbb{N}$) est de Cauchy pour cette distance. L'espace métrique $(\mathbb{R}, d)$ est-il complet?

Soit E un espace vectoriel normé complet.

***E. I.4.2** Démontrer que toute série de fonctions à valeurs dans E qui converge normalement converge uniformément.

***E. I.4.3** Démontrer que l'ensemble des fonctions continues de $[a, b]$ dans E est complet pour la norme infinie.

E. I.4.4 En déduire la continuité sur $\mathbb{R}$ de

$$x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{n^2}.$$

Exercice I.5 (Espace des fonctions continues)
On considère $\mathcal{C}$ l'espace vectoriel des fonctions continues de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$, ainsi que les trois normes

suivantes: pour $f \in \mathcal{C}$,

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|, \quad \|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)|dx, \quad \|f\|_2 = \left(\int_0^1 |f(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

E. I.5.1 Comparer ces trois normes.

E. I.5.2 Soit $E_0 = \{f \in \mathcal{C} : f(0) = 0\}$. Déterminer l'adhérence de E_0 pour chacune des normes proposées.

***E. I.5.3** Soit $E_1 = \{f \in \mathcal{C} : f \text{ est dérivable}\}$ et $E_P = \{f \in \mathcal{C} : f \text{ est polynomiale sur } [0,1]\}$. Déterminer l'intérieur de E_1 et E_P pour $\|\cdot\|_\infty$.

D) Approfondissement

Exercice I.6 (Topologie)
Les deux questions sont indépendantes.
***E. I.6.1** Soient X et Y deux espaces topologiques et f une fonction de X vers Y.

(a) Montrer que si f est continue alors pour tout ensemble $A \subset X$, $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$. On pourra vérifier puis utiliser la caractérisation de la continuité par les fermés: f est continue sssi pour tout F fermé de Y, $f^{-1}(F)$ est un fermé de X.

On souhaite démontrer la réciproque. Dans toute la suite on suppose donc que pour tout ensemble $A \subset X$, $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$.

(b) En supposant que l'ensemble $f^{-1}\left(\overline{f(A)}\right)$ n'est pas fermé, montrer qu'on aboutit à une contradiction.

(c) Soit B un fermé de Y. Montrer qu'il existe un $A \subset X$ tel que $\overline{f(A)} \subset B$ et $f^{-1}(B) = f^{-1}\left(\overline{f(A)}\right)$. En déduire la continuité de f.

E. I.6.2 Soit (X, d) un espace métrique. Soit $F \subset X$ un fermé non-vide. Pour tout $x \in X$, on note $d(x, F) = \inf_{y\in F} d(x, y)$.

(a) On souhaite étudier la continuité de $x \mapsto d(x, F)$. Quelles sont les topologies utilisées sur les espaces de départ et d'arrivée?

(b) Montrer que $x \mapsto d(x, F)$ est une application continue et que $d(x, F) = 0 \Leftrightarrow x \in F$.

Exercice I.7 (De l'intérêt des $\limsup$ **et** $\liminf$**)**
Soit $a > 0$ et $S_n = \sum_{k=1}^n \left(\frac{a+k}{n}\right)^n$. On cherche à calculer $\lim_{n\to+\infty} S_n$.

E. I.7.1 Remarquer que pour tous $n \geq 1$ et $x > 0$ tels que $1 + \frac{x}{n} > 0$, $(1 + \frac{x}{n})^n \leq e^x$. Montrer que $\limsup_{n \to +\infty} S_n \leq \frac{e^{a+1}}{e-1}$.

E. I.7.2 Montrer maintenant que pour tout $k \in \mathbb{N}$ fixé et pour tout $n > k$, $S_n \geq \sum_{j=0}^{k} (1 + \frac{a-j}{n})^n$. En déduire une inégalité sur $\liminf_{n \to +\infty} S_n$ et conclure.

Exercice I.8 (Complétude et quelques applications (suite))
Soit E un espace de Banach.

****E. I.8.1** Démontrer le théorème de prolongement des applications uniformément continues définies sur un domaine dense et à valeurs dans un espace vectoriel normé complet.

***E. I.8.2** On note F l'ensemble des suites de $[0, 1]$.

(a) Montrer que

$$d(x, y) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|x_n - y_n|}{2^n}$$

est une distance sur F.

(b) Montrer que F muni de d est complet.

Exercice I.9 (Point fixe de Picard)
Soient $d \in \mathbb{N}^*$, $T > 0$ et une fonction $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ tels que f est Lipschitz continue de constante de Lipschitz ℓ, i.e.

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^d, \quad \|f(x) - f(y)\| \leq \ell \|x - y\|.$$

Soit $y^0 \in \mathbb{R}^d$.
On définit l'application

$$F : \left(\mathcal{C}([0, T], \mathbb{R}^d), \|\cdot\|_\infty\right) \to \left(\mathcal{C}([0, T], \mathbb{R}^d), \|\cdot\|_\infty\right)$$
$$\varphi \mapsto F(\varphi)$$

avec

$$\forall t \in [0, T], \quad F(\varphi)(t) = y_0 + \int_0^t f(\varphi(s))\, ds.$$

E. I.9.1 On suppose dans cette question que $T = 1$ et $\ell < 1$. Montrer que F est une contraction et en déduire que la suite de fonctions $(\varphi_k)_{k \in \mathbb{N}}$ définies par

$$\varphi_k(t) = \begin{cases} y^0 & \text{si } k = 0 \\ y^0 + \int_0^t f(\varphi_{k-1}(s))\, ds & \text{si } k \geq 1, \end{cases}$$

converge uniformément vers une fonction y qui vérifie

$$\forall t \in [0, T], \quad y(t) = y^0 + \int_0^t f(y(s)) ds.$$

Il s'agit de la suite de Picard.

E. I.9.2 On ne suppose plus que $T = 1$ et $\ell < 1$. Montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $F^n = F \circ \cdots \circ F$ est une contraction.

E. I.9.3 En déduire que la suite de fonctions $(\psi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ definies par

$$\psi_k(t) = \begin{cases} y^0 & \text{si } k = 0 \\ F^n(\psi_{k-1})(t) & \text{si } k \geq 1, \end{cases}$$

converge uniformément vers une fonction y qui vérifie

$$\forall t \in [0, T], \quad y(t) = y^0 + \int_0^t f(y(s))ds.$$

***E. I.9.4** Soient désormais $d \in \mathbb{N}^*$, $T > 0$ et une fonction $f : [0, T] \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ tels que

$$\begin{array}{lll} \forall x \in \mathbb{R}^d, & t \mapsto f(t, x) & \text{est continue en t} \\ \forall t \in [0, T], & x \mapsto f(t, x) & \text{est Lipschitz continue, c'est-à-dire que:} \end{array}$$

$$\forall t \in [0, T],\ \exists \ell_{(t)} > 0 \text{ tel que } \forall x, y \in \mathbb{R}^d,\ |f(t, x) - f(t, y)| \leq \ell_{(t)}|x - y|.$$

Soient $t^0 \in [0, T]$ et $y^0 \in \mathbb{R}^d$. On définit la suite de fonctions $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ par

$$\varphi_k(t) = \begin{cases} y^0 & \text{si } k = 0 \\ y^0 + \int_{t_0}^t f(s, \varphi_{k-1}(s))\, ds & \text{si } k \geq 1. \end{cases}$$

Montrer que $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers une fonction y qui vérifie

$$\forall t \in [0, T], \quad y(t) = y^0 + \int_{t^0}^t f(s, y(s))ds.$$

Exercice I.10 (Point fixe ou non?)
Soit $(E, \|\cdot\|)$ un EVN, K un compact de E et $f : K \to K$ une fonction continue. On suppose que f vérifie, pour tous $x \neq y \in K$,

$$\|f(x) - f(y)\| < \|x - y\|.$$

***E. I.10.1** Montrer que f admet un unique point fixe *(on pourra utiliser ici la fonction $x \mapsto \|x - f(x)\|$ plutôt que la procédure itérative vue en cours)*. Que se passe-t-il si on suppose K uniquement fermé?

Exercice I.11 (Théorème du graphe fermé, version compacte)
Soient (X, d) un espace métrique et (X', d') un espace métrique compact. On munit $X \times X'$ de la topologie produit, c'est-à-dire la topologie la moins fine qui rend continue les projections sur chacune des deux coordonnées (en particulier, une suite $(x_n, y_n) \in X \times X'$ converge ssi (x_n) et (y_n) convergent). Soit $f : X \to X'$, dont le graphe est le sous-ensemble de $X \times X'$ donné par $G_f = \{(x, f(x)),\ x \in X\}$.

E. I.11.1 Montrer que si f est continue, alors G_f est fermé dans $X \times X'$.

E. I.11.2 Réciproquement, supposons que G_f est fermé. Montrer alors que f est continue.

Séance 1 : Eléments de correction des exercices

Solution de Q. I.1.1

1. Oui, c'est la topologie triviale;
2. Oui, c'est la topologie discrète;
3. Non, car l'intersection de $\{a, b\}$ et $\{b, c\}$ est $\{b\}$, qui n'est pas dans T;
4. Oui.

Solution de Q. I.1.2

1. Oui;
2. Non, il n'existe pas d'$\epsilon > 0$ tel que $]4-\epsilon; 4+\epsilon[$ soit inclus dans $]-\infty; 4]$;
3. Oui;
4. Non, il n'existe pas d'$\epsilon > 0$ tel que $(-\epsilon; +\epsilon)$ soit inclus dans $\{0\}$.

Solution de Q. I.1.3 Les propositions 1, 2, 3 et 4 sont vraies, la 5 est fausse.

1. u_n converge vers 1, puisque les voisinages de 1 contiennent $\{1,2\}$, $\{1,2,5\}$, $\{1,2,3,4\}$ ou $\{1,2,3,4,5\}$. Donc pour tout voisinage de 1, u_n appartient à ce voisinage pour tout $n \geq 0$.
2. u_n converge vers 2.
3. u_n converge vers 3, puisque les voisinages de 3 contiennent $\{1,2,3,4\}$ ou $\{1,2,3,4,5\}$.
4. u_n converge vers 4 pour la même raison.
5. u_n ne converge pas vers 5 car il n'existe pas de n tel que u_n appartienne à $\{5\}$, alors que $\{5\}$ est un voisinage de 5.

Solution de Q. I.2.1 Fixons $\epsilon > 0$. Alors pour N un entier supérieur ou égal à $\frac{2}{\epsilon}$, on a que

$$\forall n, m \geq N, \quad |u_n - u_m| \leq u_n + u_m \leq \frac{1}{N} + \frac{1}{N} \leq \epsilon$$

(plus généralement, on remarque que toute suite qui converge est une suite de Cauchy).

Solution de E. I.1.4 On vérifie seulement la première assertion, les autres s'obtenant de la même façon.

$$\begin{aligned} \limsup_{n\to+\infty} u_n < l &\Rightarrow \exists n \in \mathbb{N},\ \sup_{k\geq n} u_k < l \\ &\Rightarrow \exists n \in \mathbb{N},\ \forall k \geq n,\ u_k < l. \end{aligned}$$

Attention cependant aux implications dans le sens inverse, qui ne préservent pas les inégalités strictes.

Solution de E. I.2.1 On vérifie que $\emptyset$ et $\mathbb{R}^n$ appartiennent à $\mathcal{O}$, puis qu'une réunion quelconque d'éléments de $\mathcal{O}$ est encore dans $\mathcal{O}$. Il reste à vérifier la stabilité de $\mathcal{O}$ par intersection finie: soit $p \in \mathbb{N}^*$ et $O_1, \ldots, O_p \in \mathcal{O}$. Soit $\cap_{k=1}^p O_k = \emptyset$, auquel cas la propriété est vérifiée, soit il existe $x \in \cap_{k=1}^p O_k$. Pour chacun des O_k, il existe $r_k > 0$ tel que $B(x, r_k) \subset O_k$. Ainsi, $r = \min\{r_1, \ldots, r_p\}$ est tel que $B(x, r) \subset \cap_{k=1}^p O_k$. Ainsi $\cap_{k=1}^p O_k \in \mathcal{O}$, ce qui achève de prouver le résultat.

Solution de E. I.2.2

(a) La symétrie et la séparabilité de δ sont évidentes. Pour vérifier l'inégalité triangulaire, soient $x, y, z \in \mathbb{R}^2$. Plusieurs cas sont à envisager selon que: *i)* les trois points sont alignés avec 0; *ii)* deux des trois points sont alignés avec 0, ou *iii)* aucun couple de points n'est aligné avec 0:

   (i) dans ce cas on utilise l'inégalité triangulaire de la norme euclidienne, $\delta(x, y) = \|x - y\| \leq \|x - z\| + \|z - y\| = \delta(x, z) + \delta(z, y)$.

   (ii) sans perte de généralité, supposons que x, y et 0 sont alignés (tout autre alignement de deux points avec 0 est donc impossible, par hypothèse). Alors $\delta(x, y) = \|x - y\| \leq \|x - z\| + \|z - y\| \leq \|x\| + \|z\| + \|z\| + \|y\| = \delta(x, z) + \delta(z, y)$. De plus, $\delta(x, z) = \|x\| + \|z\| = \|x - y + y\| + \|z\| \leq \|x - y\| + \|y\| + \|z\| = \delta(x, y) + \delta(y, z)$ et le cas de $\delta(y, z)$ est identique.

   (iii) Enfin, ce dernier cas est symétrique en x, y et z. On choisit donc arbitrairement de traiter $\delta(x, y)$. On trouve $\delta(x, y) = \|x\| + \|y\| \leq \|x\| + \|z\| + \|z\| + \|y\| = \delta(x, z) + \delta(z, y)$. Donc δ est bien une distance.

(b) Soit $x \in \mathbb{R}^2$ et $r > 0$ et on note $B_\delta(x, r)$ la boule de centre x et de rayon r pour la topologie de δ. Cette boule prend deux formes distinctes selon que $\|x\| \geq r$ ou $\|x\| < r$.

   (i) Si $\|x\| \geq r$, alors la boule est "plate": elle est constituée des points alignés avec 0 et x sur un segment ouvert de longueur $2r$ centré en x.

   (ii) Si $\|x\| < r$, la boule est l'union de la boule euclidienne de rayon $r - \|x\|$ et du segment ouvert de longueur $2r$ centré en x.

(c) On note $B(x, r)$ la boule euclidienne. Si $y \in B(x, r) \setminus \{0\}$, alors pour $\epsilon > 0$ suffisamment petit, $B_\delta(y, \epsilon)$ est un segment inclus dans $B(x, r)$. Si $y = 0$, $B_\delta(y, \epsilon) = B(0, \epsilon)$, il suffit donc de choisir ϵ suffisamment petit pour que $B_\delta(y, \epsilon) \subset B(x, r)$. Ainsi $B(x, r)$ est un ouvert de la topologie de δ. Si O est un ouvert quelconque de la topologie euclidienne, il est réunion de boules euclidiennes (ouvertes pour δ comme nous venons de le voir), et il est donc lui-même ouvert pour δ.
La réciproque est fausse: prenons par exemple $B_\delta((0, 1), 1)$. Il s'agit de l'ensemble $\{(0, y) : 0 < y < 2\}$ qui ne contient aucune boule euclidienne. Donc il ne peut s'agir d'un ouvert de la topologie euclidienne.

Solution de E. I.3.1

(a) Non. Prendre par exemple X non compact, et f une fonction constante égale à $x_0 \in X'$. Alors $\{x_0\}$ est compact et $f^{-1}(\{x_0\}) = X$ n'est pas compacte.

(b) Oui, on utilise pour cela la caractérisation de la compacité par Borel-Lebesgue. Soit K un compact de X. Soit $\{O_j\}_{j\in J}$ un recouvrement ouvert de $f(K)$. Montrons qu'on peut en extraire un recouvrement fini. $f(K) \subset \cup_{j\in J} O_j$, donc

$$f^{-1}\left(f(K)\right) \subset f^{-1}\left(\cup_{j\in J} O_j\right),$$

et donc $K \subset \cup_{j\in J} f^{-1}\left(O_j\right)$ (vérifiez en effet que $K \subset f^{-1}(f(K))$ et que $f^{-1}\left(\cup_{j\in J} O_j\right) = \cup_{j\in J} f^{-1}\left(O_j\right)$). Or f est continue, donc $f^{-1}(O_j)$ est un ouvert de X, pour tout j. Ainsi on peut extraire de J une sous-famille finie J_0 telle que $K \subset \cup_{j\in J_0} f^{-1}\left(O_j\right)$, et par conséquent $f(K) \subset f(\cup_{j\in J_0} f^{-1}(O_j)) \subset \cup_{j\in J_0} O_j$. Donc $f(K)$ est compact.

Solution de E. I.3.2 Remarquons pour commencer que l'exercice propose de travailler dans le cadre d'un espace topologique général. Il n'y a donc pas de distance disponible et la seule notion de compacité valable est celle au sens de Borel-Lebesgue.

Comme indiqué dans l'énoncé, on définit U_k et V_k. Ainsi $\cup_{k\in K} U_k$ est un recouvrement ouvert de K. On peut donc en extraire un sous-recouvrement fini: notons $k_1, \ldots, k_N$ des éléments de K tels que

$$K \subset \cup_{j=1}^{N} U_{k_j} =: U.$$

De plus, prenons $V = \cap_{j=1}^{N} V_{k_j}$ et on remarque que $U \cap V = \emptyset$. V étant une intersection finie d'ouverts, c'est encore un ouvert, qui de plus contient $\{x\}$.
Pour étendre à deux compacts disjoints K et K', on utilise la propriété démontrée à l'instant. Ainsi pour tout $k \in K$, il existe deux ouverts U_k et W_k tels que $k \in U_k$, $W_k \supset K'$ et $U_k \cap W_k = \emptyset$. On conclut par le même procédé que précédemment.

Solution de E. I.3.3 Il suffit de construire une suite de points qui converge: pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $x_n \in K_n$. Comme K_0 est compact dans un espace métrique, la propriété de Bolzano-Weierstrass s'applique et il existe donc une sous-suite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge. Or la limite de cette sous-suite est nécessairement dans $\cap_{n\in\mathbb{N}} K_n$, qui est donc non-vide.
Remarque: ça ne fonctionne pas si les K_n ne sont que fermés (il manque l'hypothèse de diamètre qui tend vers 0.) Trouvez un contre-exemple.
Soit maintenant U un ouvert contenant $K = \cap_{n\in\mathbb{N}} K_n$. Raisonnons par l'absurde en supposant que pour tout $N \in \mathbb{N}$, il existe $n \geq N$ et $y_n \in K_n \setminus U$. Alors on peut extraire une sous-suite $y_{\varphi(n)}$ qui converge. Sa limite y est nécessairement dans K, et donc dans U. Toutefois, $y_{\varphi(n)} \in K_{\varphi(n)} \setminus U \subset X \setminus U$. Or $X \setminus U$ est fermé, donc $y \in X \setminus U$. D'où la contradiction.

Solution de E. I.4.2 Soit une série de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'un ensemble X vers $(E, \|\cdot\|_E)$ qui converge normalement. On note $\|f_n\|_\infty = \sup_{x\in X} \|f_n(x)\|_E$. La convergence normale de cette série signifie la convergence de la série $\sum \|f_n\|_\infty$ c'est-à-dire la convergence de la suite des sommes partielles $\sum_{i=0}^{n} \|f_i\|_\infty$, lorsque $n \to \infty$.

La convergence de cette suite entraîne qu'elle est une suite de Cauchy. Ainsi :

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists N > 0 :\ n > p > N \Rightarrow \sum_{i=p+1}^{n} \|f_i\|_\infty < \epsilon.$$

On note $F_n = \sum_{i=0}^{n} f_i$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En appliquant l'inégalité triangulaire, on obtient :

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists N > 0 :\ n > p > N \Rightarrow \|F_n - F_p\|_\infty < \epsilon. \tag{I.1}$$

Ainsi la suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy de l'espace des fonctions bornées muni de la norme infinie (la convergence normale implique que les f_i et donc les F_n sont bornées).

On peut ici utiliser que l'espace des fonctions bornées est complet pour la norme infinie (exercice classique) et conclure. À la place, construisons explicitement cette limite (ce qui revient partiellement à démontrer la complétude des fonctions bornées). Pour tout $x \in X$, on a que

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists N > 0 :\ n > p > N \Rightarrow \|F_n(x) - F_p(x)\|_E < \epsilon,$$

par la propriété (I.1). E étant complet, notons $F(x) \in E$ la limite de $F_n(x)$. En prenant la limite $p \to +\infty$ dans (I.1), on en déduit

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists N > 0 :\ n > N \Rightarrow \|F_n - F\|_\infty < \epsilon,$$

qui n'est autre que la convergence uniforme de la série.

Solution de E. I.4.3 Notons $\mathcal{C}$ l'ensemble des fonctions continues sur $[a, b]$. Soit (f_n) une suite de Cauchy de $\mathcal{C}$. Comme toute fonction de $\mathcal{C}$ est bornée, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans l'espace des fonctions bornées. Elle est donc convergente vers une fonction bornée que l'on notera f.

Il reste à démontrer que f est continue en tout point. Soit x_0 dans $[a, b]$. Par inégalité triangulaire, on peut écrire que pour tout x :

$$\|f(x_0) - f(x)\|_E \leq \|f(x_0) - f_n(x_0)\|_E + \|f_n(x_0) - f_n(x)\|_E + \|f_n(x) - f(x)\|_E.$$

Par convergence uniforme de la suite (f_n) on a :

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists N > 0 :\ n > N \Rightarrow \|f_n - f\|_\infty < \epsilon/3$$

Fixons $n = N + 1$. Par continuité de f_n en x_0 :

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists \alpha > 0 :\ |x - x_0| < \alpha \Rightarrow \|f_n(x) - f_n(x_0)\|_E < \epsilon/3.$$

On a donc prouvé que :

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists \alpha > 0 :\ |x - x_0| < \alpha \Rightarrow \|f(x) - f(x_0)\|_E < \epsilon$$

ce qui prouve la continuité de f.

Remarque : il faut bien fixer n avant α et pas dans l'ordre inverse.

Solution de E. I.4.4 Dans cet exemple, une simple majoration montre que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge normalement. D'après la question 1), elle converge donc uniformément. Ce qui signife que la suite des sommes partielle $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément. Comme c'est une suite de l'espace $\mathcal{C}$, qui est complet pour la norme considérée, on en déduit que cette suite converge vers une fonction continue.

La somme de la série étant la limite de la suite des sommes partielles, on a prouvé la continuité de cette somme.

Remarque : on a prouvé la continuité sur tout segment $[a, b]$ de $\mathbb{R}$, ce qui implique la continuité sur $\mathbb{R}$ entier.

Solution de E. I.5.1 On a

- $\|f\|_1 \leq \int_0^1 \|f\|_\infty dx = \|f\|_\infty$ et de même, $\|f\|_2 \leq \|f\|_\infty$;
- $\|f\|_1 \leq \left(\int_0^1 dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^1 |f(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} = \|f\|_2$ par l'inégalité de Cauchy-Schwarz *(attention, l'implication $\|f\|_2 < \infty \Rightarrow \|f\|_1 < \infty$ n'est vraie que parce qu'ici, $\int_0^1 dx < \infty$. Elle n'est plus valable sur $\mathbb{R}_+$ ou $\mathbb{R}$, par exemple).*;
- en revanche, on ne peut pas dominer $\|\cdot\|_\infty$ par $\|\cdot\|_1$: par exemple la suite de fonctions $f_n(x) = e^{-nx}$ vérifie $\|f_n\|_\infty = 1$ pour tout n, et $\|f_n\|_1 = \frac{1}{n}(1 - e^{-n}) \to 0$;
- de même, on trouve facilement f telle que $\|f\|_2 = \infty$ alors que $\|f\|_1 < \infty$.

Solution de E. I.5.2 Avant de répondre à la question, rappelons les caractérisations séquentielles suivantes, *valables dans les espaces métriques*: Soit (E, d) un espace métrique et F un sous-ensemble de E, alors

- F est fermé dans E sssi toute suite d'éléments de F qui converge (dans E) a pour limite un élément de F;
- F est dense dans E sssi tout élément de E est limite d'une suite d'éléments de F.

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de E_0 qui converge dans $\mathcal{C}$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$. Alors $|f_n(0) - f(0)| \leq \|f_n - f\|_\infty \to 0$. Donc $f(0) = 0$ et E_0 est fermé dans $(\mathcal{C}, \|\cdot\|_\infty)$.
Montrons maintenant que E_0 est dense dans $(\mathcal{C}, \|\cdot\|_1)$ (idem avec $\|\cdot\|_2$). Soit $f \in \mathcal{C}$ et f_n la fonction égale à f sur $[\frac{1}{n}, 1]$ et qui vaut $nxf(\frac{1}{n})$ pour $x \in [0, \frac{1}{n}]$. On voit bien que $f_n \in E_0$, et

$$\|f_n - f\|_1 = \int_0^{\frac{1}{n}} |f(x) - f_n(x)| dx \leq \int_0^{\frac{1}{n}} 2\|f\|_\infty dx = \frac{2\|f\|_\infty}{n},$$

donc $\|f_n - f\|_1 \to 0$. Ainsi la fermeture de E_0 dans $(\mathcal{C}, \|\cdot\|_1)$ est $\mathcal{C}$ tout entier.

Solution de E. I.5.3 Il est plus simple de raisonner avec les points adhérents à $\mathcal{C} \setminus E_1$, en effet $\mathrm{int}(E_1) = E_1 \setminus \{\overline{\mathcal{C} \setminus E_1}\}$. Montrons que $\overline{\mathcal{C} \setminus E_1} \supset E_1$, ce qui entraînera que l'intérieur de E_1 est vide.
Soit $f \in E_1$. On va construire une suite (f_n) de fonctions non-dérivables approchant f uniformément, en perturbant f par une fonction non-dérivable de plus en plus petite. Un exemple simple consiste à choisir la fonction valeur absolue, ce qui donne par exemple $f_n(x) = f(x) + \frac{1}{n}|x - \frac{1}{2}|$. On voit facilement que f_n est non-dérivable et que $\|f_n - f\|_\infty \to 0$. Ainsi, $\overline{\mathcal{C} \setminus E_1} \supset E_1$.
Concernant E_P, il suffit de remarquer que $E_P \subset E_1$.

Solution de E. I.6.1

(a) On rappelle que $\overline{A}$ est l'adhérence de A, définie comme le plus petit fermé contenant A.
Ainsi, $f^{-1}(\overline{f(A)})$ est fermé par continuité de f. Puisque $f^{-1}(\overline{f(A)})$ contient A, il contient également le plus petit fermé contenant A, c'est-à-dire $\overline{A}$. Par conséquent, $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$.

(b) Si $f^{-1}(\overline{f(A)})$ n'est pas fermé, alors il existe $x \in \overline{f^{-1}(\overline{f(A)})} \setminus f^{-1}(\overline{f(A)})$. Ainsi $f(x) \in f\left(\overline{f^{-1}(\overline{f(A)})}\right)$, or par hypothèse sur f, $f\left(\overline{f^{-1}(\overline{f(A)})}\right) \subset \overline{f(A)}$. Ceci est en contradiction avec la définition de x.

(c) Soit B un fermé de Y. On peut vérifier que l'ensemble $A = f^{-1}(B)$ est tel que $\overline{f(A)} \subset B$ et $f^{-1}(B) = f^{-1}(\overline{f(A)})$.
Ainsi d'après la question précédente, $f^{-1}(B) = f^{-1}(\overline{f(A)})$ est fermé, ce qui prouve la continuité de f.

Solution de E. I.6.2

(a) L'application $x \mapsto d(x,F)$ va d'un espace métrique X dans $\mathbb{R}$. En l'absence de précisions supplémentaires, on considère en général que la topologie sur $\mathbb{R}$ est la topologie usuelle (cf Exercice 1) et la topologie sur un espace métrique est la topologie construite à partir des boules de la distance d. Plus précisément, un sous-ensemble de X est un ouvert sssi il est une union de boules de d (on dit alors que l'ensemble des boules de d forme une base de la topologie de X).

(b) Soient $x, y \in X$ et soit $\epsilon > 0$. Par définition de l'inf, il existe $\tilde{x}, \tilde{y} \in F$ tels que $d(x,\tilde{x}) \leq d(x,F) + \epsilon$ et $d(y,\tilde{y}) \leq d(y,F) + \epsilon$. Ainsi,

$$d(x,F) \leq d(x,\tilde{y}) \leq d(x,y) + d(y,\tilde{y}) \leq d(x,y) + d(y,F) + \epsilon,$$

et de même, $d(y,F) \leq d(x,y) + d(x,F) + \epsilon$. Ces inégalités étant vraies pour tout $\epsilon > 0$, on en déduit l'inégalité suivante:

$$|d(x,F) - d(y,F)| \leq d(x,y),$$

et ainsi la continuité de l'application $x \mapsto d(x,F)$.

Montrons désormais que $d(x,F) = 0 \Leftrightarrow x \in F$. L'implication réciproque est immédiate. Soit donc $x \in X$ tel que $d(x,F) = 0$. Par définition de $d(x,F)$, il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in F^{\mathbb{N}}$ telle que $d(x,x_n) \to d(x,F)$. Puisque $d(x,F) = 0$, ceci signifie donc que $x_n \to x$. Or F est fermé, donc la limite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dans F. Donc $x \in F$.

Solution de E. I.7.1 On a

$$S_n = \sum_{j=0}^{n-1} \left(1 + \frac{a-j}{n}\right)^n \leq \sum_{j=0}^{n-1} e^{a-j} < \sum_{j=0}^{\infty} e^{a-j} = \frac{e^{a+1}}{e-1},$$

et donc $\limsup_{n\to\infty} S_n \leq \dfrac{e^{a+1}}{e-1}$.

Solution de E. I.7.2 On obtient comme à la question précédente que $S_n = \sum_{j=0}^{n-1} \left(1 + \frac{a-j}{n}\right)^n$ et donc pour $k < n$,

$$S_n \geq \sum_{j=0}^{k} \left(1 + \frac{a-j}{n}\right)^n.$$

En faisant tendre n vers l'infini, on obtient

$$\liminf_{n\to\infty} S_n \geq \sum_{j=0}^{k} e^{a-j}$$

et cette inégalité est vraie pour tout k. On peut donc maintenant faire tendre k vers l'infini pour obtenir

$$\limsup_{n\to\infty} S_n = \liminf_{n\to\infty} S_n = \frac{e^{a+1}}{e-1}.$$

Ainsi, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ existe et vaut $\frac{e^{a+1}}{e-1}$.

Solution de E. I.8.1 Voir page 24 de l'ouvrage *Les maths en tête - Analyse*, par X. Gourdon, Ed. Ellipses.

Solution de E. I.8.2

(a) Pour tous $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in F$ et $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in F$, on a

$$d(x,y) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|x_n - y_n|}{2^n} \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} < +\infty.$$

Donc la fonction d est bien définie sur $F \times F$.

- Si $d(x,y) = 0$, alors $|x_n - y_n| = 0$ pour tout $n \geq 0$.
  En effet, $d(x,y)$ est une somme de termes positifs (donc sa nullité implique le fait que chacun des termes de la somme est nul). Donc $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, c'est-à-dire $x = y$.
- d est symétrique : pour tous $x, y \in F$, on a $d(y,x) = d(x,y)$.
- Soient $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in F$, $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in F$ et $z = (z_n)_{n\in\mathbb{N}} \in F$.
  Pour tout $n \geq 0$, l'inégalité triangulaire dans $\mathbb{R}$ implique

  $$|x_n - z_n| \leq |x_n - y_n| + |y_n - z_n|.$$

  On en déduit

  $$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|x_n - z_n|}{2^n} \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|x_n - y_n|}{2^n} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|y_n - z_n|}{2^n},$$

  c'est-à-dire

  $$d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z).$$

Ces 3 points montrent que d définit une distance sur F.

(b) Pour montrer que F muni de la distance d est complet, on montre que toute suite de Cauchy dans F converge dans F.

Soit $(x^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans F (pour tout k fixé, $x^{(k)} \in F$). Par définition d'une suite de Cauchy, on a

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists K \in \mathbb{N} :\ p > q \geq K \Rightarrow d(x^{(p)}, x^{(q)}) < \epsilon.$$

On en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ fixé, la suite $\left(x_n^{(k)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans $[0,1]$. En effet, l'assertion précédente implique

$$\forall \epsilon > 0, \exists K \in \mathbb{N} :\ p > q \geq K \Rightarrow \left|x_n^{(p)} - x_n^{(q)}\right| < \epsilon.2^n.$$

D'où, en posant $\epsilon' = \epsilon.2^n$,

$$\forall \epsilon' > 0, \exists K \in \mathbb{N} :\ p > q \geq K \Rightarrow \left|x_n^{(p)} - x_n^{(q)}\right| < \epsilon'.$$

Comme $[0,1]$ est complet pour la distance euclidienne de $\mathbb{R}$, on en déduit qu'il existe $x_n^\infty \in [0,1]$ tel que $\lim_{k\to\infty} x_n^{(k)} = x_n^\infty$.

On a ainsi défini une suite $x^\infty = (x_n^\infty)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $[0,1]$, c'est-à-dire $x^\infty \in F$. Montrons que $(x^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers x^∞.

$$\begin{aligned} d(x^{(k)}, x^\infty) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|x_n^{(k)} - x_n^\infty|}{2^n} &= \sum_{n=0}^{N_0} \frac{|x_n^{(k)} - x_n^\infty|}{2^n} + \sum_{n=N_0+1}^{\infty} \frac{|x_n^{(k)} - x_n^\infty|}{2^n} \\ &\leq \sum_{n=0}^{N_0} \frac{|x_n^{(k)} - x_n^\infty|}{2^n} + \frac{1}{2^{N_0}}, \end{aligned}$$

car

$$\sum_{n=N_0+1}^{\infty} \frac{|x_n^{(k)} - x_n^\infty|}{2^n} \leq \sum_{n=N_0+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \leq \frac{1}{2^{N_0+1}} \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}}_{=2} = \frac{1}{2^{N_0}}.$$

Soit $\epsilon > 0$. On choisit N_0 tel que $2^{-N_0} < \epsilon/2$.

On considère K tel que

$$\forall k \geq K, \quad \sum_{n=0}^{N_0} \frac{|x_n^{(k)} - x_n^\infty|}{2^n} < \frac{\epsilon}{2}.$$

Il s'agit d'une somme finie de termes, qui convergent vers 0, lorsque $k \to \infty$.

On a

$$\forall k \geq K, \quad d\left(x^{(k)}, x^\infty\right) < \epsilon.$$

Ceci montre que $(x^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers x^∞, puis que F est complet.

Solution de E. I.9.1 Dans tous l'exercice $\|f\|_\infty = \sup_{t\in[0,T]} |f(t)|$ est la norme infinie sur $\mathcal{C}([0,T],\mathbb{R}^d)$. On rappelle (voir Exercice I.4) que l'espace $\left(\mathcal{C}([0,T],\mathbb{R}^d), \|\cdot\|_\infty\right)$ est complet. Soient $\varphi, \psi \in \mathcal{C}\left([0,T],\mathbb{R}^d\right)$, alors

$$\begin{aligned}\forall t \in [0,1], \quad |F(\varphi)(t) - F(\psi)(t)| = \left|\int_0^t (f(\varphi(s)) - f(\psi(s)))\ ds\right| &\le \int_0^t |f(\varphi(s)) - f(\psi(s))|\ ds\\ &\le \int_0^t \ell\,|\varphi(s) - \psi(s)|\ ds\\ &\le \int_0^t \ell\|\varphi-\psi\|_\infty\, ds\\ &\le \ell\|\varphi-\psi\|_\infty,\end{aligned}$$

où on a utilisé successivement l'inégalité triangulaire pour l'intégrale, la Lipschitz continuité de f et la majoration uniforme de $|\varphi(s) - \psi(s)|$ par $\|\varphi-\psi\|_\infty$. Ainsi F est Lipschitz continue de constante $\ell < 1$ (c'est donc une contraction).

Il résulte alors du théorème du point fixe I.2.6 que la suite $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ définie dans l'énoncé (remarquez que $\varphi_{k+1} = F(\varphi_k)$) converge dans $\left(\mathcal{C}([0,T],\mathbb{R}^d), \|\cdot\|_\infty\right)$ (i.e. converge uniformément) et que sa limite est un point fixe de F, d'où le résultat.

Solution de E. I.9.2 On a déjà vu à la question précédente que pour tous $\varphi, \psi \in \mathcal{C}([0,T],\mathbb{R}^d)$ et tout $t \in [0,T]$, $\sup_{s\in[0,t]} |F(\varphi)(s) - F(\psi)(s)| \le \ell t\|\varphi-\psi\|_\infty$. Nous allons montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sup_{s\in[0,t]} |F^n(\varphi)(s) - F^n(\psi)(s)| \le \frac{(\ell t)^n}{n!}\|\varphi-\psi\|_\infty \tag{I.2}$$

Il suffira donc de choisir n tel que $\frac{(\ell T)^n}{n!} < 1$ pour que F^n soit une contraction. Montrons donc que (I.2) est vérifié, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
L'inégalité (I.2) est vérifiée pour $n = 1$. Supposons qu'elle le soit pour un certain $n \ge 1$. Alors

$$\begin{aligned}\sup_{s\in[0,t]} |F^{n+1}(\varphi)(s) - F^{n+1}(\psi)(s)| &\le \int_0^t |f(F^n(\varphi)(s)) - f(F^n(\psi)(s))|\, ds\\ &\le \ell\int_0^t |F^n(\varphi)(s) - F^n(\psi)(s)|\, ds\\ &\le \frac{\ell^{n+1}}{n!}\|\varphi-\psi\|_\infty \int_0^t s^n\, ds\\ &= \frac{(\ell t)^{n+1}}{(n+1)!}\|\varphi-\psi\|_\infty,\end{aligned}$$

which proves the induction step.

Solution de E. I.9.3 On conclut à nouveau en utilisant le Théorème du point fixe.

Solution de E. I.9.4 Définissons l'application $\widetilde{F}$ par

$$\widetilde{F}: \ (\mathcal{C}([0,T],\mathbb{R}^d), \|\cdot\|_\infty) \to (\mathcal{C}([0,T],\mathbb{R}^d), \|\cdot\|_\infty)$$
$$\varphi \mapsto y^0 + \int_{t^0}^{\cdot} f(s,\varphi(s))\, ds.$$

On suppose ici que $\ell_{(t)}$ est une constante de Lipschitz uniforme en temps, i.e. $\forall t \in [0,T], \ell_{(t)} \leq \ell$, pour un certain $\ell < \infty$ (vous pourrez traiter le cas général). Pour tout $\epsilon > 0$, notons $I_{t^0,\epsilon} = [\max(0,(t^0 - \epsilon)), \min(T,(t^0+\epsilon))]$ et $\mathcal{C}_{t^0,\epsilon} = \mathcal{C}(I_{t^0,\epsilon}, \mathbb{R}^d)$ muni de la norme uniforme sur cet intervalle restreint. Montrons qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\widetilde{F}$ restreint à $\mathcal{C}_{t^0,\varepsilon}$ est une contraction. Pour cela, choisissons $\varepsilon \in]0, \ell^{-1}[$. Alors,

$$\forall \varphi, \psi \in \mathcal{C}_{t^0,\varepsilon}, \quad \|T\varphi - T\psi\|_\infty = \sup_{t \in I_{t^0,\varepsilon}} |\int_{t^0}^{t} f(s,\varphi(s)) - f(s,\psi(s))\, ds|$$
$$\leq \varepsilon\ell\|\varphi - \psi\|_\infty.$$

Ainsi $\widetilde{F}$ est une contraction sur $\mathcal{C}_{t^0,\varepsilon}$ et le Théorème du point fixe assure qu'il existe $y_1 \in \mathcal{C}_{t^0,\varepsilon}$ tel que $\widetilde{F}(y_1) = y_1$. On étend alors la solution à $[0,T]$ en recollant les solutions sur des intervalles de longueur 2ϵ et en s'assurant que la solution n'explose pas (...).

Solution de E. I.10.1 Notons d'abord que K est complet, car compact dans un espace métrique (vérifiez cette propriété). Ainsi le Théorème `I.2.6` s'applique.
On propose donc une démonstration alternative plus directe (dans un cadre plus restrictif). Considérons la fonction $g : x \mapsto \|x - f(x)\|$ définie sur K, comme proposée dans l'énoncé. Cette fonction est définie sur un compact et à valeurs dans $\mathbb{R}$, donc elle admet un minimum, atteint en un point $x_0 \in K$. Alors $g(f(x_0)) = \|f(x_0) - f(f(x_0))\|$, or si $x_0 \neq f(x_0)$, on devrait avoir $g(f(x_0)) < g(x_0)$, ce qui contredirait la minimalité de $g(x_0)$. Donc $x_0 = f(x_0)$. L'unicité s'obtient comme dans le cours.
Si on suppose désormais K fermé et non plus compact, un contre-exemple classique est le suivant: prenons $E = \mathbb{R}$ et f qui vaut 1 sur $\mathbb{R}_-$ et $f(x) = x + \frac{1}{1+x}$ pour $x \in \mathbb{R}_+$. Alors f vérifie les hypothèses et $f(x) \neq x, \forall x \in \mathbb{R}$.

Solution de E. I.11.1 Soit $(x_n, f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de G_f qui converge vers un élément noté $(x,y) \in X \times X'$. Montrons que $y = f(x)$, ce qui prouvera bien que $(x, y = f(x))$ appartient à G_f (et donc que G_f est fermé).
Par définition de la topologie produit, x_n converge vers x et par continuité de f, on a donc $f(x_n)$ qui converge vers $f(x)$. L'unicité de la limite assure donc que $y = f(x)$.

Solution de E. I.11.2 Soit $x \in X$ et une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de X qui converge vers x. Montrons que $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(x)$.
Comme X' est compact, il existe une sous-suite φ telle que $(f(x_{\varphi(n)}))_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Or $(x_{\varphi(n)}, f(x_{\varphi(n)}))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de G_f qui est fermé, donc nécessairement la limite de cette suite est $(x, f(x))$. Ainsi toute suite extraite de $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(x)$. On utilise maintenant un résultat classique qui stipule qu'une suite dans un compact ayant une seule valeur d'adhérence converge (démontrez ce résultat).