Cours de Convergence, Intégration, Probabilités

Transformée de Fourier et fonctions caractéristiques. Vecteurs aléatoires gaussiens

Séance 9 - Transformée de Fourier
Fonctions caractéristiques de variables aléatoires

CentraleSupélec - Cursus ingénieur

22 octobre 2019

Amphis CIP 6, 7, 8 et 9

- Hervé MOUTARDE
  Institut de recherche sur les lois fondamentales de l'univers (IRFU), CEA, Université Paris-Saclay
  Orme des Merisiers, Bât. 703
  herve.moutarde@cea.fr

Des questions ?

- daskit.com/cip19-20 puis section "Amphi 9".

Support

- Support amphi 9 en version vierge disponible dès à présent sur edunao.
- Support amphi 9 en version annotée disponible ultérieurement.

Quelques éléments des CM et TD précédents

- Changement de variables (**th. VII.2.3**).
- Ordre d'intégration dans les intégrales multiples et fonctions sommables (**th. VII.2.4** et **th. VII.2.5**).
- Produit de convolution sur L^1 (**th.VIII.1.1**) et L^2 (**prop. VIII.1.2**).
- Suite régularisante (**def. VIII.1.3**, **prop. VIII.1.4**).
- Indépendance de variables aléatoires (**def. VIII.3.2**, **th.VIII.3.3**).
- Fonction caractéristique (**def. VII.2.6**).
- Indépendance de variables aléatoires : expression en termes de fonctions caractéristiques (**VII.2.7**).
- Lemme de Riemann-Lebesgue (**TD Ex. VII.3**).

Programme

Objectifs de la séance

- Je connais la définition et les propriétés de la **transformée de Fourier** d'une fonction intégrable.
- Je connais la transformée de Fourier d'une **gaussienne**.
- Je comprends la **construction** de la transformation de Fourier dans L^2 et je connais la **formule d'inversion**.
- Je sais exprimer le fait que la transformation de Fourier dans L^2 est une **isométrie** (Parseval).
- Je connais le lien entre transformée de Fourier et **dérivation**, ainsi qu'entre transformée de Fourier et **convolution**.
- Je suis capable de déterminer la **fonction caractéristique** d'une variable aléatoire.

Rappel : Convergence dans L^1, convergence dans L^2

Convergence dans L^1 : Pour $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et f dans $L^1(\mathbb{R},\mu)$, on dit que $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers f dans L^1 si

$$\int_{\mathbb{R}} |\varphi_n(x) - f(x)|\ \mu(dx) \longrightarrow 0 \quad \text{lorsque } n \to \infty.$$

Rappel : Convergence dans L^1, convergence dans L^2

Convergence dans L^1 : Pour $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et f dans $L^1(\mathbb{R},\mu)$, on dit que $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers f dans L^1 si

$$\int_{\mathbb{R}} |\varphi_n(x) - f(x)|\ \mu(dx) \longrightarrow 0 \quad \text{lorsque } n \to \infty.$$

Convergence dans L^2 : Pour $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et f dans $L^2(\mathbb{R},\mu)$, on dit que $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers f dans L^2 si

$$\int_{\mathbb{R}} |\varphi_n(x) - f(x)|^2\ \mu(dx) \longrightarrow 0 \quad \text{lorsque } n \to \infty.$$

La convergence dans L^1 ou L^2 de $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est **pas équivalente** à la convergence simple !!!

Rappel : Convergence dans L^1, convergence dans L^2

Convergence dans L^1 : Pour $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et f dans $L^1(\mathbb{R},\mu)$, on dit que $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers f dans L^1 si

$$\int_{\mathbb{R}} |\varphi_n(x) - f(x)| \ \mu(dx) \longrightarrow 0 \quad \text{lorsque } n \to \infty.$$

Convergence dans L^2 : Pour $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et f dans $L^2(\mathbb{R},\mu)$, on dit que $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers f dans L^2 si

$$\int_{\mathbb{R}} |\varphi_n(x) - f(x)|^2 \ \mu(dx) \longrightarrow 0 \quad \text{lorsque } n \to \infty.$$

La convergence dans L^1 ou L^2 de $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est **pas équivalente** à la convergence simple !!!

(Admis)

Soient $p \geq 1$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergeant vers f dans L^p. Il existe alors une sous-suite (f_{k_n}) qui converge p.p. vers f.

Rappel (CM2) : Séries de Fourier dans L^2

Soit $\mathcal{H} = L^2_{\mathbb{C}}\left([0,2\pi], \mathcal{B}([0,2\pi]), \frac{1}{2\pi}\lambda\right)$. On note : $\forall n \in \mathbb{Z}, N \in \mathbb{N}$,

$$e_n : x \mapsto e^{inx} \in \mathcal{H}, \qquad c_n(f) = \langle f, e_n \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{[0,2\pi]} f(x) e^{-inx} \lambda(dx),$$

$$S_N(f) = \sum_{n=-N}^{N} c_n(f) e_n.$$

Théorème (Parseval)

- $\{e_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne de $\mathcal{H}$.
- Pour tout $f \in \mathcal{H}$, la série $S_N(f)$ converge et

$$f = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f) e_n = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \langle f, e_n \rangle e_n.$$

En particulier, $\lim_{N\to+\infty} \int_{[0,2\pi]} \left| f(x) - S_N(f)(x) \right|^2 \lambda(dx) = 0.$

Première définition : cas de $L^1(\mathbb{R})$

Définition IX.1.1

La **transformée de Fourier** *d'une fonction* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *dans* $L^1(\mathbb{R}, \lambda)$ *est la fonction* $\mathcal{F}f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *définie par :*

$$\forall y \in \mathbb{R}, \quad \mathcal{F}f(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x)\ e^{-ixy}\ \lambda(dx).$$

Première définition : cas de $L^1(\mathbb{R})$

Définition IX.1.1

La **transformée de Fourier** *d'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ dans $L^1(\mathbb{R}, \lambda)$ est la fonction $\mathcal{F}f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ définie par :*

$$\forall y \in \mathbb{R}, \quad \mathcal{F}f(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x)\ e^{-ixy}\ \lambda(dx).$$

- Il existe d'autres définitions basées sur des expressions proches (sans $1/\sqrt{2\pi}$, $e^{-2\pi ixy}$, dans $\mathbb{R}^N$, ...).

  Par exemple, $\hat{f}(y) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(x)\ e^{-2\pi ixy}\ \lambda(dx).$
- Vérifier les **conventions** dans chaque discipline !

Propriétés de la transformation de Fourier dans L^1

Proposition IX.1.2

La transformée de Fourier $\mathcal{F}f$ d'une fonction $f \in L^1(\mathbb{R})$ est continue et bornée sur $\mathbb{R}$, $\|\mathcal{F}f\|_\infty \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|f\|_1$.
De plus, $\mathcal{F}f$ tend vers 0 en $\pm\infty$.

Propriétés de la transformation de Fourier dans L^1

Proposition IX.1.2

La transformée de Fourier $\mathcal{F}f$ d'une fonction $f \in L^1(\mathbb{R})$ est continue et bornée sur $\mathbb{R}$, $\|\mathcal{F}f\|_\infty \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|f\|_1$.
De plus, $\mathcal{F}f$ tend vers 0 en $\pm\infty$.

Preuve : *Existence :* $\forall x, y \quad |f(x)\ e^{-ixy}| = |f(x)|$ et $f \in L^1(\mathbb{R}, \lambda)$.

Propriétés de la transformation de Fourier dans L^1

Proposition IX.1.2

La transformée de Fourier $\mathcal{F}f$ d'une fonction $f \in L^1(\mathbb{R})$ est continue et bornée sur $\mathbb{R}$, $\|\mathcal{F}f\|_\infty \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|f\|_1$.
De plus, $\mathcal{F}f$ tend vers 0 en $\pm\infty$.

Preuve : *Existence :* $\forall x, y \quad |f(x)\ e^{-ixy}| = |f(x)|$ et $f \in L^1(\mathbb{R}, \lambda)$.

Continuité : $\mathcal{F}f(y) \to \mathcal{F}f(y_0)$, lorsque $y \to y_0$ car :

- On domine $|f(x)\ e^{-ixy}|$ par $|f(x)|$, qui est intégrable.
- On a $f(x)\ e^{-ixy} \to f(x)\ e^{-ixy_0}$, lorsque $y \to y_0$.

Propriétés de la transformation de Fourier dans L^1

Proposition IX.1.2

La transformée de Fourier $\mathcal{F}f$ d'une fonction $f \in L^1(\mathbb{R})$ est continue et bornée sur $\mathbb{R}$, $\|\mathcal{F}f\|_\infty \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|f\|_1$.
De plus, $\mathcal{F}f$ tend vers 0 en $\pm\infty$.

Preuve : *Existence :* $\forall x, y \quad |f(x)\ e^{-ixy}| = |f(x)|$ et $f \in L^1(\mathbb{R}, \lambda)$.

Continuité : $\mathcal{F}f(y) \to \mathcal{F}f(y_0)$, lorsque $y \to y_0$ car :

- On domine $|f(x)\ e^{-ixy}|$ par $|f(x)|$, qui est intégrable.
- On a $f(x)\ e^{-ixy} \to f(x)\ e^{-ixy_0}$, lorsque $y \to y_0$.

Borne : $\|\mathcal{F}f(y)\|_\infty \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\|f\|_1$ car :

$$\left|\int_{\mathbb{R}} f(x)\ e^{-ixy}\ \lambda(dx)\right| \leq \int_{\mathbb{R}} |f(x)\ e^{-ixy}|\ \lambda(dx) \leq \int_{\mathbb{R}} |f(x)|\ \lambda(dx) = \|f\|_1.$$

Propriétés de la transformation de Fourier dans L^1

Proposition IX.1.2

La transformée de Fourier $\mathcal{F}f$ d'une fonction $f \in L^1(\mathbb{R})$ est continue et bornée sur $\mathbb{R}$, $\|\mathcal{F}f\|_\infty \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|f\|_1$.
De plus, $\mathcal{F}f$ tend vers 0 en $\pm\infty$.

Preuve : *Existence :* $\forall x, y \quad |f(x)\ e^{-ixy}| = |f(x)|$ et $f \in L^1(\mathbb{R}, \lambda)$.

Continuité : $\mathcal{F}f(y) \to \mathcal{F}f(y_0)$, lorsque $y \to y_0$ car :

- On domine $|f(x)\ e^{-ixy}|$ par $|f(x)|$, qui est intégrable.
- On a $f(x)\ e^{-ixy} \to f(x)\ e^{-ixy_0}$, lorsque $y \to y_0$.

Borne : $\|\mathcal{F}f(y)\|_\infty \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\|f\|_1$ car :

$$\left|\int_{\mathbb{R}} f(x)\ e^{-ixy}\ \lambda(dx)\right| \leq \int_{\mathbb{R}} |f(x)\ e^{-ixy}|\ \lambda(dx) \leq \int_{\mathbb{R}} |f(x)|\ \lambda(dx) = \|f\|_1.$$

Limites : Voir lemme de Riemann-Lebesgue.

Proposition IX.1.3

Pour $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ *et* $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$,

(i) $\mathcal{F}(\alpha f + \beta g) = \alpha \mathcal{F} f + \beta \mathcal{F} g$

(ii) *Si* $\alpha \neq 0$, *pour tout* $y \in \mathbb{R}$, $\mathcal{F}(x \mapsto f(\alpha x))(y) = \frac{1}{|\alpha|} \mathcal{F} f\left(\frac{y}{\alpha}\right)$.

(iii) *Pour tout* $y \in \mathbb{R}$, $\mathcal{F}\big(x \mapsto f(x - x_0)\big) = e^{-ix_0 y} \mathcal{F} f(y)$.

(iv) $\mathcal{F}(f * g) = \sqrt{2\pi}\, \mathcal{F} f . \mathcal{F} g$.

Proposition IX.1.3

Pour $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ *et* $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$,

(i) $\mathcal{F}(\alpha f + \beta g) = \alpha \mathcal{F} f + \beta \mathcal{F} g$

(ii) *Si* $\alpha \neq 0$, *pour tout* $y \in \mathbb{R}$, $\mathcal{F}(x \mapsto f(\alpha x))(y) = \dfrac{1}{|\alpha|} \mathcal{F} f\left(\dfrac{y}{\alpha}\right)$.

(iii) *Pour tout* $y \in \mathbb{R}$, $\mathcal{F}\big(x \mapsto f(x - x_0)\big) = e^{-ix_0 y} \mathcal{F} f(y)$.

(iv) $\mathcal{F}(f * g) = \sqrt{2\pi}\, \mathcal{F} f . \mathcal{F} g$.

Preuve :

(i) Linéarité de l'intégrale.

(ii) Changement de variable : $u = \alpha x$.

(iii) Changement de variable : $v = x - x_0$.

(iv) Pour $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $\mathcal{F}(f * g) = \sqrt{2\pi}\ \mathcal{F}f.\mathcal{F}g$.

Preuve :

(iv) Pour $f, g \in L^1$, $f * g$ est bien défini et $f * g \in L^1$:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f * g(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-u) g(u)\ \lambda(du)$$

(iv) Pour $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $\mathcal{F}(f * g) = \sqrt{2\pi}\ \mathcal{F}f.\mathcal{F}g$.

Preuve :

(iv) Pour $f, g \in L^1$, $f * g$ est bien défini et $f * g \in L^1$:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f * g(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-u)g(u)\ \lambda(du)$$

On a donc $\mathcal{F}(f * g)(y) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_R f * g(x)\ e^{-ixy}\ \lambda(dx).$

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} f * g(x)\ e^{-ixy}\ \lambda(dx) &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(x-u)g(u)\ e^{-ixy}\ \lambda(du)\ \lambda(dx) \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} f(x-u)g(u)\ e^{-ixy}\ \lambda^{(2)}(du, dx).\end{aligned}$$

(iv) Pour $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $\mathcal{F}(f * g) = \sqrt{2\pi}\ \mathcal{F}f.\mathcal{F}g$.

Preuve :

(iv) Pour $f, g \in L^1$, $f * g$ est bien défini et $f * g \in L^1$:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f * g(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-u)g(u)\ \lambda(du)$$

On a donc $\mathcal{F}(f * g)(y) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_R f * g(x)\ e^{-ixy}\ \lambda(dx)$.

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} f * g(x)\ e^{-ixy}\ \lambda(dx) &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(x-u)g(u)\ e^{-ixy}\ \lambda(du)\ \lambda(dx) \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} f(x-u)g(u)\ e^{-ixy}\ \lambda^{(2)}(du, dx).\end{aligned}$$

On réalise le chgt de variables $(u, x) \mapsto (x, z = x - u)$ de jacobien 1.

(iv) Pour $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $\mathcal{F}(f * g) = \sqrt{2\pi}\ \mathcal{F}f.\mathcal{F}g$.

Preuve :

(iv) Pour $f, g \in L^1$, $f * g$ est bien défini et $f * g \in L^1$:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f * g(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-u)g(u)\ \lambda(du)$$

On a donc $\mathcal{F}(f * g)(y) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_R f * g(x)\ e^{-ixy}\ \lambda(dx)$.

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} f * g(x)\ e^{-ixy}\ \lambda(dx) &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(x-u)g(u)\ e^{-ixy}\ \lambda(du)\ \lambda(dx) \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} f(x-u)g(u)\ e^{-ixy}\ \lambda^{(2)}(du, dx).\end{aligned}$$

On réalise le chgt de variables $(u, x) \mapsto (x, z = x - u)$ de jacobien 1.

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} f * g(x)\ e^{-ixy}\ \lambda(dx) &= \int_{\mathbb{R}^2} f(z)g(u)\ e^{-i(z+u)y}\ \lambda^{(2)}(du, dz) \\ &= \left(\int f(z)\ e^{-izy}\ \lambda(dz) \right) \left(\int g(u)\ e^{-iuy}\ \lambda(du) \right)\end{aligned}$$

Lien entre transformation de Fourier dans L^1 et dérivation

Proposition IX.1.4

Si les fonctions f et $x \mapsto xf(x)$ sont dans $L^1(\mathbb{R})$, alors $\mathcal{F}f \in C^1(\mathbb{R})$ et $(\mathcal{F}f)' = \mathcal{F}\big(x \mapsto -ix\, f(x)\big)$.

Lien entre transformation de Fourier dans L^1 et dérivation

Proposition IX.1.4

Si les fonctions f et $x \mapsto xf(x)$ sont dans $L^1(\mathbb{R})$, alors $\mathcal{F}f \in C^1(\mathbb{R})$ et $(\mathcal{F}f)' = \mathcal{F}\big(x \mapsto -ix\, f(x)\big)$.

Preuve :

- Pour tout $y \in \mathbb{R}$, l'application $x \mapsto f(x)\, e^{-ixy}$ est dans L^1,

Lien entre transformation de Fourier dans L^1 et dérivation

Proposition IX.1.4

Si les fonctions f et $x \mapsto xf(x)$ sont dans $L^1(\mathbb{R})$, alors $\mathcal{F}f \in C^1(\mathbb{R})$ et $(\mathcal{F}f)' = \mathcal{F}\big(x \mapsto -ix\, f(x)\big)$.

Preuve :

- Pour tout $y \in \mathbb{R}$, l'application $x \mapsto f(x)\ e^{-ixy}$ est dans L^1,
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $y \mapsto f(x)\ e^{-ixy}$ est dérivable

Lien entre transformation de Fourier dans L^1 et dérivation

Proposition IX.1.4

Si les fonctions f et $x \mapsto xf(x)$ sont dans $L^1(\mathbb{R})$, alors $\mathcal{F}f \in C^1(\mathbb{R})$ et $(\mathcal{F}f)' = \mathcal{F}\big(x \mapsto -ix\, f(x)\big)$.

Preuve :

- Pour tout $y \in \mathbb{R}$, l'application $x \mapsto f(x)\ e^{-ixy}$ est dans L^1,
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $y \mapsto f(x)\ e^{-ixy}$ est dérivable
- et pour tout $x \in \mathbb{R}$, sa dérivée est majorée par $|xf(x)|$, où $x \mapsto |xf(x)|$ est intégrable.

Lien entre transformation de Fourier dans L^1 et dérivation

Proposition IX.1.4

Si les fonctions f et $x \mapsto xf(x)$ sont dans $L^1(\mathbb{R})$, alors $\mathcal{F}f \in C^1(\mathbb{R})$ et $(\mathcal{F}f)' = \mathcal{F}\big(x \mapsto -ix\, f(x)\big)$.

Preuve :

- Pour tout $y \in \mathbb{R}$, l'application $x \mapsto f(x)\ e^{-ixy}$ est dans L^1,
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $y \mapsto f(x)\ e^{-ixy}$ est dérivable
- et pour tout $x \in \mathbb{R}$, sa dérivée est majorée par $|xf(x)|$, où $x \mapsto |xf(x)|$ est intégrable.

Les conditions du Théorème de dérivabilité des intégrales à paramètres sont vérifiées. $\square$

Proposition IX.1.5

Si $f \in L^1(\mathbb{R})$, $f \in C^1(\mathbb{R})$ et $f' \in L^1(\mathbb{R})$, alors pour tout $y \in \mathbb{R}$,
$\mathcal{F}\left(f'\right)(y) = iy\,\mathcal{F}f(y)$.

Proposition IX.1.5

Si $f \in L^1(\mathbb{R})$, $f \in C^1(\mathbb{R})$ et $f' \in L^1(\mathbb{R})$, alors pour tout $y \in \mathbb{R}$,
$\mathcal{F}\left(f'\right)(y) = iy\,\mathcal{F}f(y)$.

Preuve : $\mathcal{F}f'$ est bien définie puisque $f' \in L^1$.

Proposition IX.1.5

Si $f \in L^1(\mathbb{R})$, $f \in C^1(\mathbb{R})$ et $f' \in L^1(\mathbb{R})$, alors pour tout $y \in \mathbb{R}$,
$\mathcal{F}\left(f'\right)(y) = iy\,\mathcal{F}f(y)$.

Preuve : $\mathcal{F}f'$ est bien définie puisque $f' \in L^1$. Pour tout $A > 0$,

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{[-A,A]} f'(x)\ e^{-ixy}\ \lambda(dx) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-A}^{A} f'(x)e^{-ixy}dx$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[f(x)e^{-ixy}\right]_{-A}^{A} + \frac{iy}{\sqrt{2\pi}}\int_{-A}^{A} f(x)e^{-ixy}dx$$

Proposition IX.1.5

Si $f \in L^1(\mathbb{R})$, $f \in C^1(\mathbb{R})$ et $f' \in L^1(\mathbb{R})$, alors pour tout $y \in \mathbb{R}$,
$\mathcal{F}\left(f'\right)(y) = iy\,\mathcal{F}f(y)$.

Preuve : $\mathcal{F}f'$ est bien définie puisque $f' \in L^1$. Pour tout $A > 0$,

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{[-A,A]} f'(x)\ e^{-ixy}\ \lambda(dx) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-A}^{A} f'(x) e^{-ixy} dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[f(x) e^{-ixy}\right]_{-A}^{A} + \frac{iy}{\sqrt{2\pi}} \int_{-A}^{A} f(x) e^{-ixy} dx$$

Comme $f(x) = f(0) + \displaystyle\int_0^x f'(u)du$,

Proposition IX.1.5

Si $f \in L^1(\mathbb{R})$, $f \in C^1(\mathbb{R})$ et $f' \in L^1(\mathbb{R})$, alors pour tout $y \in \mathbb{R}$,
$\mathcal{F}\left(f'\right)(y) = iy\,\mathcal{F}f(y)$.

Preuve : $\mathcal{F}f'$ est bien définie puisque $f' \in L^1$. Pour tout $A > 0$,

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{[-A,A]} f'(x)\ e^{-ixy}\ \lambda(dx) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-A}^{A} f'(x) e^{-ixy} dx$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[f(x) e^{-ixy}\right]_{-A}^{A} + \frac{iy}{\sqrt{2\pi}} \int_{-A}^{A} f(x) e^{-ixy} dx$$

Comme $f(x) = f(0) + \int_0^x f'(u) du$, l'intégrabilité de f' montre que f admet des limites lorsque $A \to \pm\infty$.

Proposition IX.1.5

Si $f \in L^1(\mathbb{R})$, $f \in C^1(\mathbb{R})$ et $f' \in L^1(\mathbb{R})$, alors pour tout $y \in \mathbb{R}$, $\mathcal{F}(f')(y) = iy\,\mathcal{F}f(y)$.

Preuve : $\mathcal{F}f'$ est bien définie puisque $f' \in L^1$. Pour tout $A > 0$,

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{[-A,A]} f'(x)\ e^{-ixy}\ \lambda(dx) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-A}^{A} f'(x) e^{-ixy} dx$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[f(x) e^{-ixy} \right]_{-A}^{A} + \frac{iy}{\sqrt{2\pi}} \int_{-A}^{A} f(x) e^{-ixy} dx$$

Comme $f(x) = f(0) + \int_0^x f'(u)du$, l'intégrabilité de f' montre que f admet des limites lorsque $A \to \pm\infty$. Ces limites sont nécessairement nulles (sinon $f \notin L^1$). On fait donc tendre A vers $+\infty$:

$$\mathcal{F}f'(y) = \frac{iy}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-ixy} \lambda(dx). \quad \square$$

Résolution des EDP linéaires à coefficients constants

Dérivée d'une transformée de Fourier

Si les fonctions f et $x \mapsto xf(x)$ sont dans $L^1(\mathbb{R})$, alors $\mathcal{F}f \in C^1(\mathbb{R})$ et $(\mathcal{F}f)' = \mathcal{F}\big(x \mapsto -ix\, f(x)\big)$.

Transformée de Fourier d'une dérivée

Si $f \in L^1(\mathbb{R})$, $f \in C^1(\mathbb{R})$ et $f' \in L^1(\mathbb{R})$, alors pour tout $y \in \mathbb{R}$, $\mathcal{F}\big(f'\big)(y) = iy\, \mathcal{F}f(y)$.

- On a transformé un **problème différentiel** en **problème algébrique** !
- Généralisation facile aux fonctions de plusieurs variables.
- Résoudre une EDP revient essentiellement à calculer la transformée de Fourier inverse d'une fraction rationnelle !

Inversion de la transformation de Fourier

On définit pour $F \in L^1(\mathbb{R})$,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \overline{\mathcal{F}}F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} F(y)\ e^{+ixy}\ \lambda(dy).$$

Théorème IX.1.6 (d'inversion de Fourier)

Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ telle que $\mathcal{F}f \in L^1(\mathbb{R})$.
Alors, on a presque partout sur $\mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}f(y)\ e^{+ixy}\ \lambda(dy) = \overline{\mathcal{F}}\mathcal{F}f(x).$$

Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ telle que $\mathcal{F}f \in L^1(\mathbb{R})$.
Alors, on a presque partout sur $\mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}f(y)\ e^{+ixy}\ \lambda(dy) = \overline{\mathcal{F}}\mathcal{F}f(x).$$

Preuve : Pour $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\overline{\mathcal{F}}\mathcal{F}f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{+ixy} \left(\int_R f(u) e^{-iuy} \lambda(du) \right) \lambda(dy),$$

Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ telle que $\mathcal{F}f \in L^1(\mathbb{R})$.
Alors, on a presque partout sur $\mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}f(y)\ e^{+ixy}\ \lambda(dy) = \overline{\mathcal{F}}\mathcal{F}f(x).$$

Preuve : Pour $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\overline{\mathcal{F}}\mathcal{F}f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{+ixy} \left(\int_R f(u) e^{-iuy} \lambda(du) \right) \lambda(dy),$$

mais on ne peut pas appliquer le Théorème de Fubini car la fonction n'est pas dans $\mathcal{L}^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$.

Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ telle que $\mathcal{F}f \in L^1(\mathbb{R})$.
Alors, on a presque partout sur $\mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}f(y)\; e^{+ixy}\; \lambda(dy) = \overline{\mathcal{F}}\mathcal{F}f(x).$$

Preuve : Pour $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\overline{\mathcal{F}}\mathcal{F}f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{+ixy} \left(\int_R f(u) e^{-iuy} \lambda(du) \right) \lambda(dy),$$

mais on ne peut pas appliquer le Théorème de Fubini car la fonction n'est pas dans $\mathcal{L}^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$.
Stratégie : multiplication par $e^{-\epsilon^2 y^2/2}$, qui tend vers 1 lorsque $\epsilon \to 0$.

Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ telle que $\mathcal{F}f \in L^1(\mathbb{R})$.
Alors, on a presque partout sur $\mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}f(y)\ e^{+ixy}\ \lambda(dy) = \overline{\mathcal{F}}\mathcal{F}f(x).$$

Preuve : Pour $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\overline{\mathcal{F}}\mathcal{F}f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{+ixy} \left(\int_R f(u) e^{-iuy} \lambda(du) \right) \lambda(dy),$$

mais on ne peut pas appliquer le Théorème de Fubini car la fonction n'est pas dans $\mathcal{L}^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$.
Stratégie : multiplication par $e^{-\epsilon^2 y^2/2}$, qui tend vers 1 lorsque $\epsilon \to 0$.
On considère alors

$$I_\epsilon(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} f(u) e^{i(x-u)y} e^{-\epsilon^2 y^2/2} \lambda^{(2)}(du, dy).$$

Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ telle que $\mathcal{F}f \in L^1(\mathbb{R})$.
Alors, on a presque partout sur $\mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}f(y)\, e^{+ixy}\, \lambda(dy) = \overline{\mathcal{F}}\mathcal{F}f(x).$$

Preuve : [1ère étape] En intégrant, dans l'expression $I_\epsilon(x)$, d'abord par rapport à u, on obtient

$$I_\epsilon(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}f(y) e^{ixy} e^{-\epsilon^2 y^2/2} \lambda(dy).$$

Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ telle que $\mathcal{F}f \in L^1(\mathbb{R})$.
Alors, on a presque partout sur $\mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}f(y)\ e^{+ixy}\ \lambda(dy) = \overline{\mathcal{F}}\mathcal{F}f(x).$$

Preuve : [1ère étape] En intégrant, dans l'expression $I_\epsilon(x)$, d'abord par rapport à u, on obtient

$$I_\epsilon(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}f(y) e^{ixy} e^{-\epsilon^2 y^2/2} \lambda(dy).$$

Par convergence dominée, $I_\epsilon(x) \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}f(y) e^{ixy} \lambda(dy)$, lorsque $\epsilon \to 0$.

Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ telle que $\mathcal{F}f \in L^1(\mathbb{R})$.
Alors, on a presque partout sur $\mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}f(y)\ e^{+ixy}\ \lambda(dy) = \overline{\mathcal{F}}\mathcal{F}f(x).$$

Preuve : [2ème étape] En intégrant, dans l'expression $I_\epsilon(x)$, d'abord par rapport à y, on obtient

$$\begin{aligned} I_\epsilon(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} f(u) \int_{\mathbb{R}} e^{i(x-u)y} e^{-\epsilon^2 y^2/2} \lambda(dy)\ \lambda(du) \\ &= \frac{1}{2\pi\epsilon} \int_{\mathbb{R}} f(u) \int_{\mathbb{R}} e^{i(x-u)y} e^{-\epsilon^2 y^2/2}\ \epsilon\lambda(dy)\ \lambda(du) \\ &= \frac{1}{2\pi\epsilon} \int_{\mathbb{R}} f(u) \int_{\mathbb{R}} e^{i(x-u)v/\epsilon} e^{-v^2/2}\ \lambda(dv)\ \lambda(du). \end{aligned}$$

Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ telle que $\mathcal{F}f \in L^1(\mathbb{R})$.
Alors, on a presque partout sur $\mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}f(y)\; e^{+ixy}\; \lambda(dy) = \overline{\mathcal{F}}\mathcal{F}f(x).$$

Preuve : [2ème étape] En intégrant, dans l'expression $I_\epsilon(x)$, d'abord par rapport à y, on obtient

$$\begin{aligned}
I_\epsilon(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} f(u) \int_{\mathbb{R}} e^{i(x-u)y} e^{-\epsilon^2 y^2/2} \lambda(dy)\; \lambda(du) \\
&= \frac{1}{2\pi\epsilon} \int_{\mathbb{R}} f(u) \int_{\mathbb{R}} e^{i(x-u)y} e^{-\epsilon^2 y^2/2}\; \epsilon\lambda(dy)\; \lambda(du) \\
&= \frac{1}{2\pi\epsilon} \int_{\mathbb{R}} f(u) \int_{\mathbb{R}} e^{i(x-u)v/\epsilon} e^{-v^2/2}\; \lambda(dv)\; \lambda(du).
\end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} e^{i(x-u)v/\epsilon} e^{-v^2/2}\; \lambda(dv) &= \sqrt{2\pi}\; \mathcal{F}(v \mapsto e^{-v^2/2}) \left(\frac{x-u}{-\epsilon}\right) \\
&= \sqrt{2\pi}\; e^{-(x-u)^2/(2\epsilon^2)}.
\end{aligned}$$

Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ telle que $\mathcal{F}f \in L^1(\mathbb{R})$.
Alors, on a presque partout sur $\mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}f(y)\, e^{+ixy}\, \lambda(dy) = \overline{\mathcal{F}}\mathcal{F}f(x).$$

Preuve : [2ème étape]

On trouve donc

$$I_\epsilon(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\epsilon} \int_{\mathbb{R}} f(u)\; e^{-(x-u)^2/(2\epsilon^2)}\; \lambda(du).$$

Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ telle que $\mathcal{F}f \in L^1(\mathbb{R})$.
Alors, on a presque partout sur $\mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}f(y)\, e^{+ixy}\, \lambda(dy) = \overline{\mathcal{F}}\mathcal{F}f(x).$$

Preuve : [2ème étape]

On trouve donc

$$I_\epsilon(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\epsilon} \int_{\mathbb{R}} f(u)\, e^{-(x-u)^2/(2\epsilon^2)}\, \lambda(du).$$

On pose alors $\rho(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2}$ et $\rho_\epsilon(z) = \frac{1}{\epsilon}\rho(\frac{z}{\epsilon})$.

Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ telle que $\mathcal{F}f \in L^1(\mathbb{R})$.
Alors, on a presque partout sur $\mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}f(y)\ e^{+ixy}\ \lambda(dy) = \overline{\mathcal{F}}\mathcal{F}f(x).$$

Preuve : [2ème étape]

On trouve donc

$$I_\epsilon(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\epsilon} \int_{\mathbb{R}} f(u)\ e^{-(x-u)^2/(2\epsilon^2)}\ \lambda(du).$$

On pose alors $\rho(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2}$ et $\rho_\epsilon(z) = \frac{1}{\epsilon}\rho(\frac{z}{\epsilon})$.
On remarque que $(\rho_\epsilon)_{\epsilon>0}$ est une approximation de la mesure de Dirac

Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ telle que $\mathcal{F}f \in L^1(\mathbb{R})$.
Alors, on a presque partout sur $\mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}f(y)\ e^{+ixy}\ \lambda(dy) = \overline{\mathcal{F}}\mathcal{F}f(x).$$

Preuve : [2ème étape]

On trouve donc

$$I_\epsilon(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\epsilon} \int_{\mathbb{R}} f(u)\ e^{-(x-u)^2/(2\epsilon^2)}\ \lambda(du).$$

On pose alors $\rho(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2}$ et $\rho_\epsilon(z) = \frac{1}{\epsilon}\rho(\frac{z}{\epsilon})$.
On remarque que $(\rho_\epsilon)_{\epsilon>0}$ est une approximation de la mesure de Dirac et $I_\epsilon(x) = \rho_\epsilon * f(x)$.

Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ telle que $\mathcal{F}f \in L^1(\mathbb{R})$.
Alors, on a presque partout sur $\mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}f(y)\ e^{+ixy}\ \lambda(dy) = \overline{\mathcal{F}}\mathcal{F}f(x).$$

Preuve : [2ème étape]

On trouve donc

$$I_\epsilon(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\epsilon} \int_{\mathbb{R}} f(u)\ e^{-(x-u)^2/(2\epsilon^2)}\ \lambda(du).$$

On pose alors $\rho(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2}$ et $\rho_\epsilon(z) = \frac{1}{\epsilon}\rho(\frac{z}{\epsilon})$.
On remarque que $(\rho_\epsilon)_{\epsilon>0}$ est une approximation de la mesure de Dirac et $I_\epsilon(x) = \rho_\epsilon * f(x)$.

On a alors $I_\epsilon(x) \to f(x)$ dans L^1, lorsque $\epsilon \to 0$.

Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ telle que $\mathcal{F}f \in L^1(\mathbb{R})$.
Alors, on a presque partout sur $\mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}f(y)\ e^{+ixy}\ \lambda(dy) = \overline{\mathcal{F}}\mathcal{F}f(x).$$

Preuve : [2ème étape]
On trouve donc

$$I_\epsilon(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\epsilon} \int_{\mathbb{R}} f(u)\ e^{-(x-u)^2/(2\epsilon^2)}\ \lambda(du).$$

On pose alors $\rho(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2}$ et $\rho_\epsilon(z) = \frac{1}{\epsilon}\rho(\frac{z}{\epsilon})$.
On remarque que $(\rho_\epsilon)_{\epsilon>0}$ est une approximation de la mesure de Dirac et $I_\epsilon(x) = \rho_\epsilon * f(x)$.

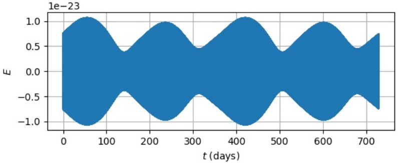
On a alors $I_\epsilon(x) \to f(x)$ dans L^1, lorsque $\epsilon \to 0$.

Donc il existe une suite $(\epsilon_n)_n$ décroissante telle que $I_{\epsilon_n}(x) \to f(x)$ p.p., lorsque $n \to \infty$. $\square$

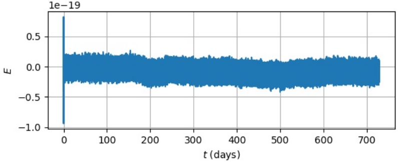
Ondes gravitationnelles : Fourier par la pratique !

- $s(t,\theta)$: réponse instrument à 1 OG (paramètres θ) à la date t,
- $n(t)$: réalisation du bruit de l'instrument à la date t,
- $E(t) = s(t,\theta) + n(t)$: mesure à la date t.

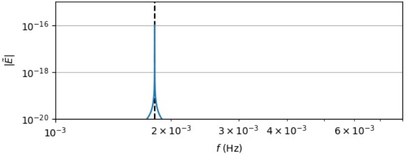
Signal en temps sans bruit



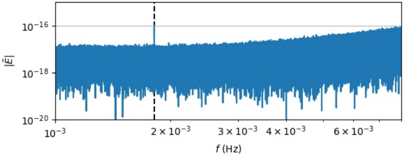
Signal en temps avec bruit



Signal en fréquence sans bruit



Signal en fréquence avec bruit



Espace de Schwartz

Introduit par L. Schwartz dans sa *théorie des distributions*...

Définition IX.2.1

L'espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ *est l'ensemble des fonctions* $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$ *qui sont à décroissance rapide, c'est-à-dire telles que :*
$\forall p, q \in \mathbb{N}, \exists M > 0 : \forall x \in \mathbb{R}, (1 + x^2)^p |\varphi^{(q)}(x)| \leq M.$

Espace de Schwartz

Introduit par L. Schwartz dans sa *théorie des distributions*...

Définition IX.2.1

L'espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ *est l'ensemble des fonctions* $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$ *qui sont à décroissance rapide, c'est-à-dire telles que :*
$\forall p, q \in \mathbb{N}, \exists M > 0 : \forall x \in \mathbb{R}, (1 + x^2)^p |\varphi^{(q)}(x)| \leq M.$

On peut écrire cette condition sous la forme :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \exists C_p > 0 : \sup_{\alpha \leq p, \beta \leq p} \|x^\alpha \varphi^{(\beta)}(x)\|_\infty \leq C_p.$$

Espace de Schwartz

Introduit par L. Schwartz dans sa *théorie des distributions*...

Définition IX.2.1

L'espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ *est l'ensemble des fonctions* $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$ *qui sont à décroissance rapide, c'est-à-dire telles que :* $\forall p, q \in \mathbb{N}, \exists M > 0 : \forall x \in \mathbb{R}, (1 + x^2)^p |\varphi^{(q)}(x)| \leq M.$

On peut écrire cette condition sous la forme :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \exists C_p > 0 : \sup_{\alpha \leq p, \beta \leq p} \|x^\alpha \varphi^{(\beta)}(x)\|_\infty \leq C_p.$$

Proposition IX.2.2

L'espace $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ *est stable par dérivation et par multiplication par les polynômes.*

Densité

Proposition IX.2.3 (Admis)

L'espace $C_c^\infty(\mathbb{R})$ est dense dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Densité

Proposition IX.2.3 (Admis)

L'espace $C_c^\infty(\mathbb{R})$ est dense dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Preuve : Quelle topologie considérer sur $\mathcal{S}(\mathbb{R})$?

Densité

Proposition IX.2.3 (Admis)

L'espace $C_c^\infty(\mathbb{R})$ est dense dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Preuve : Quelle topologie considérer sur $\mathcal{S}(\mathbb{R})$?

- On a $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset L^p(\mathbb{R})$ pour tout $p \geq 1$, car : pour $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, on a $|\varphi(x)| \leq \frac{M}{1+x^2}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, ce qui implique $\varphi \in L^p(\mathbb{R})$ pour tout $p \geq 1$.

Densité

Proposition IX.2.3 (Admis)

L'espace $C_c^\infty(\mathbb{R})$ est dense dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Preuve : Quelle topologie considérer sur $\mathcal{S}(\mathbb{R})$?

- On a $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset L^p(\mathbb{R})$ pour tout $p \geq 1$, car :
  pour $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, on a $|\varphi(x)| \leq \frac{M}{1+x^2}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$,
  ce qui implique $\varphi \in L^p(\mathbb{R})$ pour tout $p \geq 1$.
- La topologie de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ est définie par une famille de *semi-normes* (*i.e.* la semi-norme d'un vecteur non nul peut être nulle)
  $(\|.\|_{\alpha,\beta})_{\alpha,\beta\in\mathbb{N}}$, où $\|f\|_{\alpha,\beta} := \|x^\alpha \; f^{(\beta)}\|_\infty$.

Densité

Proposition IX.2.3 (Admis)

L'espace $C_c^\infty(\mathbb{R})$ est dense dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Preuve : Quelle topologie considérer sur $\mathcal{S}(\mathbb{R})$?

- On a $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset L^p(\mathbb{R})$ pour tout $p \geq 1$, car :
  pour $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, on a $|\varphi(x)| \leq \frac{M}{1+x^2}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$,
  ce qui implique $\varphi \in L^p(\mathbb{R})$ pour tout $p \geq 1$.
- La topologie de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ est définie par une famille de *semi-normes* (*i.e.* la semi-norme d'un vecteur non nul peut être nulle)
  $(\|.\|_{\alpha,\beta})_{\alpha,\beta\in\mathbb{N}}$, où $\|f\|_{\alpha,\beta} := \|x^\alpha \; f^{(\beta)}\|_\infty$.
  On définit la convergence d'une suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ par :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad \lim_{n\to\infty} N_p(\varphi_n - \varphi) = 0,$$

où $N_p(.) = \sum_{\alpha,\beta\leq p} \|.\|_{\alpha,\beta}$.

Densité

Corollaire IX.2.4

Pour tout $p \geq 1$, toute fonction de $L^p(\mathbb{R})$ est limite, au sens de la norme L^p, d'une suite de fonctions dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Densité

Corollaire IX.2.4

Pour tout $p \geq 1$, toute fonction de $L^p(\mathbb{R})$ est limite, au sens de la norme L^p, d'une suite de fonctions dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Preuve : On a $C_c^\infty(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R})$

Densité

Corollaire IX.2.4

Pour tout $p \geq 1$, toute fonction de $L^p(\mathbb{R})$ est limite, au sens de la norme L^p, d'une suite de fonctions dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Preuve : On a $C_c^\infty(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R})$ et $C_c^\infty(\mathbb{R})$ est dense dans $L^p(\mathbb{R})$. $\square$

Transformation de Fourier dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$

Théorème IX.2.5

La transformation de Fourier $\mathcal{F}$ est un isomorphisme de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ sur lui-même, d'inverse $\overline{\mathcal{F}}$.

Transformation de Fourier dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$

Théorème IX.2.5

La transformation de Fourier $\mathcal{F}$ est un isomorphisme de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ sur lui-même, d'inverse $\overline{\mathcal{F}}$.

Preuve (stabilité) : Pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, les fonctions φ et $x \mapsto x\varphi(x)$ sont dans L^1. Donc $\mathcal{F}\varphi \in C^1$ et $(\mathcal{F}\varphi)' = \mathcal{F}(x \mapsto -ix\varphi(x))$.

Transformation de Fourier dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$

Théorème IX.2.5

La transformation de Fourier $\mathcal{F}$ est un isomorphisme de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ sur lui-même, d'inverse $\overline{\mathcal{F}}$.

Preuve (stabilité) : Pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, les fonctions φ et $x \mapsto x\varphi(x)$ sont dans L^1. Donc $\mathcal{F}\varphi \in C^1$ et $(\mathcal{F}\varphi)' = \mathcal{F}(x \mapsto -ix\varphi(x))$.
Par récurrence, on en déduit : $\forall \beta \geq 1$, $(\mathcal{F}\varphi)^{(\beta)} = (-i)^\beta \mathcal{F}(x \mapsto x^\beta \varphi(x))$.

Transformation de Fourier dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$

Théorème IX.2.5

La transformation de Fourier $\mathcal{F}$ est un isomorphisme de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ sur lui-même, d'inverse $\overline{\mathcal{F}}$.

Preuve (stabilité) : Pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, les fonctions φ et $x \mapsto x\varphi(x)$ sont dans L^1. Donc $\mathcal{F}\varphi \in C^1$ et $(\mathcal{F}\varphi)' = \mathcal{F}(x \mapsto -ix\varphi(x))$. Par récurrence, on en déduit : $\forall \beta \geq 1$, $(\mathcal{F}\varphi)^{(\beta)} = (-i)^\beta \mathcal{F}(x \mapsto x^\beta \varphi(x))$.

De plus, comme φ est intégrable et dans C^1, et comme φ' est intégrable, on a $\mathcal{F}(\varphi')(y) = iy\mathcal{F}\varphi(y)$ pour tout $y \in \mathbb{R}$.

Transformation de Fourier dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$

Théorème IX.2.5

La transformation de Fourier $\mathcal{F}$ est un isomorphisme de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ sur lui-même, d'inverse $\overline{\mathcal{F}}$.

Preuve (stabilité) : Pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, les fonctions φ et $x \mapsto x\varphi(x)$ sont dans L^1. Donc $\mathcal{F}\varphi \in C^1$ et $(\mathcal{F}\varphi)' = \mathcal{F}(x \mapsto -ix\varphi(x))$.
Par récurrence, on en déduit : $\forall \beta \geq 1$, $(\mathcal{F}\varphi)^{(\beta)} = (-i)^\beta \mathcal{F}(x \mapsto x^\beta \varphi(x))$.

De plus, comme φ est intégrable et dans C^1, et comme φ' est intégrable, on a $\mathcal{F}(\varphi')(y) = iy\mathcal{F}\varphi(y)$ pour tout $y \in \mathbb{R}$.
Par récurrence, $\forall \beta \geq 1$, on a $\mathcal{F}(\varphi^{(\beta)})(y) = (iy)^\beta \mathcal{F}\varphi(y)$, $\forall y \in \mathbb{R}$.

Transformation de Fourier dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$

Théorème IX.2.5

La transformation de Fourier $\mathcal{F}$ est un isomorphisme de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ sur lui-même, d'inverse $\overline{\mathcal{F}}$.

Preuve (stabilité) : Pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, les fonctions φ et $x \mapsto x\varphi(x)$ sont dans L^1. Donc $\mathcal{F}\varphi \in C^1$ et $(\mathcal{F}\varphi)' = \mathcal{F}(x \mapsto -ix\varphi(x))$.
Par récurrence, on en déduit : $\forall \beta \geq 1$, $(\mathcal{F}\varphi)^{(\beta)} = (-i)^\beta \mathcal{F}(x \mapsto x^\beta \varphi(x))$.

De plus, comme φ est intégrable et dans C^1, et comme φ' est intégrable, on a $\mathcal{F}(\varphi')(y) = iy\mathcal{F}\varphi(y)$ pour tout $y \in \mathbb{R}$.
Par récurrence, $\forall \beta \geq 1$, on a $\mathcal{F}(\varphi^{(\beta)})(y) = (iy)^\beta \mathcal{F}\varphi(y)$, $\forall y \in \mathbb{R}$.

$$\forall \alpha \in [1,p], \forall \beta \in [1,p] \quad y^\alpha \underbrace{(\mathcal{F}\varphi)^{(\beta)}}_{(-i)^\beta \mathcal{F}(x^\beta \varphi)} = (-i)^{\alpha+\beta} \underbrace{\mathcal{F}\big((x^\beta \varphi)^{(\alpha)}\big)}_{(iy)^\alpha \mathcal{F}(x^\beta \varphi)},$$

Transformation de Fourier dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$

Théorème IX.2.5

La transformation de Fourier $\mathcal{F}$ est un isomorphisme de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ sur lui-même, d'inverse $\overline{\mathcal{F}}$.

Preuve (stabilité) : Pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, les fonctions φ et $x \mapsto x\varphi(x)$ sont dans L^1. Donc $\mathcal{F}\varphi \in C^1$ et $(\mathcal{F}\varphi)' = \mathcal{F}(x \mapsto -ix\varphi(x))$.
Par récurrence, on en déduit : $\forall \beta \geq 1$, $(\mathcal{F}\varphi)^{(\beta)} = (-i)^\beta \mathcal{F}(x \mapsto x^\beta \varphi(x))$.

De plus, comme φ est intégrable et dans C^1, et comme φ' est intégrable, on a $\mathcal{F}(\varphi')(y) = iy\mathcal{F}\varphi(y)$ pour tout $y \in \mathbb{R}$.
Par récurrence, $\forall \beta \geq 1$, on a $\mathcal{F}(\varphi^{(\beta)})(y) = (iy)^\beta \mathcal{F}\varphi(y)$, $\forall y \in \mathbb{R}$.

$$\forall \alpha \in [1, p], \forall \beta \in [1, p] \quad y^\alpha \underbrace{(\mathcal{F}\varphi)^{(\beta)}}_{(-i)^\beta \mathcal{F}(x^\beta \varphi)} = (-i)^{\alpha+\beta} \underbrace{\mathcal{F}\big((x^\beta \varphi)^{(\alpha)}\big)}_{(iy)^\alpha \mathcal{F}(x^\beta \varphi)},$$

en utilisant le fait que pour tout $y \in \mathbb{R}$,

$$(x \mapsto x^\beta \varphi(x))^{(\alpha)}(y) = \sum^{\alpha} \binom{\alpha}{k} (x \mapsto x^\beta)^{(k)} \varphi^{(\alpha-k)}(y) \Rightarrow (x \mapsto x^\beta \varphi(x))^{(\alpha)} \in L^1.$$

La transformation de Fourier $\mathcal{F}$ est un isomorphisme de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ sur lui-même, d'inverse $\overline{\mathcal{F}}$.

Preuve (inversion) :
Ainsi, pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$, la fonction $y \mapsto y^\alpha (\mathcal{F}\varphi)^{(\beta)}(y)$ est bornée, puis $\mathcal{F}\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

La transformation de Fourier $\mathcal{F}$ est un isomorphisme de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ sur lui-même, d'inverse $\overline{\mathcal{F}}$.

Preuve (inversion) :

Ainsi, pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$, la fonction $y \mapsto y^\alpha (\mathcal{F}\varphi)^{(\beta)}(y)$ est bornée, puis $\mathcal{F}\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

On peut donc appliquer le Théorème d'inversion de Fourier, puisque φ et $\mathcal{F}\varphi$ sont dans L^1.

On trouve donc $\varphi = \overline{\mathcal{F}}\mathcal{F}\varphi = \mathcal{F}\overline{\mathcal{F}}\varphi$ p.p. $\square$

Corollaire IX.2.6 (Formule de Plancherel)

Pour tous φ *et* ψ *dans* $\mathcal{S}(\mathbb{R})$*, on a* $(\mathcal{F}\varphi, \mathcal{F}\psi)_{L^2} = (\varphi, \psi)_{L^2}$.

Remarque : On a également, pour tous $\varphi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$,
$(\mathcal{F}\varphi, \psi)_{L^2} = (\varphi, \overline{\mathcal{F}}\psi)_{L^2}$.
Ainsi, $\overline{\mathcal{F}}$ est l'opérateur adjoint de $\mathcal{F}$.

Corollaire IX.2.6 (Formule de Plancherel)

Pour tous φ et ψ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, on a $(\mathcal{F}\varphi, \mathcal{F}\psi)_{L^2} = (\varphi, \psi)_{L^2}$.

Remarque : On a également, pour tous $\varphi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$,
$(\mathcal{F}\varphi, \psi)_{L^2} = (\varphi, \overline{\mathcal{F}}\psi)_{L^2}$.
Ainsi, $\overline{\mathcal{F}}$ est l'opérateur adjoint de $\mathcal{F}$.
Preuve :

$$(\varphi, \psi)_{L^2} = \int_{\mathbb{R}} \overline{\varphi(x)}\psi(x)\lambda(dx) = \int_{\mathbb{R}} \overline{\int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}\varphi(y)e^{+ixy}\lambda(dy)}\ \frac{\psi(x)}{\sqrt{2\pi}}\lambda(dx).$$

Corollaire IX.2.6 (Formule de Plancherel)

Pour tous φ *et* ψ *dans* $\mathcal{S}(\mathbb{R})$*, on a* $(\mathcal{F}\varphi, \mathcal{F}\psi)_{L^2} = (\varphi, \psi)_{L^2}$.

Remarque : On a également, pour tous $\varphi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$,
$(\mathcal{F}\varphi, \psi)_{L^2} = (\varphi, \overline{\mathcal{F}}\psi)_{L^2}$.
Ainsi, $\overline{\mathcal{F}}$ est l'opérateur adjoint de $\mathcal{F}$.
Preuve :

$$(\varphi, \psi)_{L^2} = \int_{\mathbb{R}} \overline{\varphi(x)}\psi(x)\lambda(dx) = \int_{\mathbb{R}} \overline{\int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}\varphi(y)e^{+ixy}\lambda(dy)}\ \frac{\psi(x)}{\sqrt{2\pi}}\lambda(dx).$$

On applique le Théorème de Fubini à $(x, y) \mapsto \overline{\mathcal{F}\varphi(y)}\psi(x) \in L^1(\mathbb{R}^2)$,

Corollaire IX.2.6 (Formule de Plancherel)

Pour tous φ et ψ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, on a $(\mathcal{F}\varphi, \mathcal{F}\psi)_{L^2} = (\varphi, \psi)_{L^2}$.

Remarque : On a également, pour tous $\varphi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$,
$(\mathcal{F}\varphi, \psi)_{L^2} = (\varphi, \overline{\mathcal{F}}\psi)_{L^2}$.
Ainsi, $\overline{\mathcal{F}}$ est l'opérateur adjoint de $\mathcal{F}$.

Preuve :

$$(\varphi, \psi)_{L^2} = \int_{\mathbb{R}} \overline{\varphi(x)}\psi(x)\lambda(dx) = \int_{\mathbb{R}} \overline{\int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}\varphi(y)e^{+ixy}\lambda(dy)}\ \frac{\psi(x)}{\sqrt{2\pi}}\lambda(dx).$$

On applique le Théorème de Fubini à $(x, y) \mapsto \overline{\mathcal{F}\varphi(y)}\psi(x) \in L^1(\mathbb{R}^2)$,

$$\begin{aligned}(\varphi, \psi)_{L^2} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ixy}\overline{\mathcal{F}\varphi(y)}\psi(x)\ \lambda(dx)\lambda(dy) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \overline{\mathcal{F}\varphi(y)} \left(\int_{\mathbb{R}} \psi(x)e^{-ixy}\ \lambda(dx) \right) \lambda(dy) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \overline{\mathcal{F}\varphi(y)}\mathcal{F}\psi(y)\ \lambda(dy). \quad \square\end{aligned}$$

Transformation de Fourier dans $L^2(\mathbb{R})$

Passage de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ à $L^2(\mathbb{R})$: **Transformée de Fourier-Plancherel**

Définition IX.2.7

La transformation de Fourier sur $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ se prolonge de manière unique en une isométrie $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$.

Transformation de Fourier dans $L^2(\mathbb{R})$

Passage de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ à $L^2(\mathbb{R})$: **Transformée de Fourier-Plancherel**

Définition IX.2.7

La transformation de Fourier sur $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ se prolonge de manière unique en une isométrie $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$.

Remarque : La transformation de Fourier sur $L^2(\mathbb{R})$ peut également être définie à partir de $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, qui est dense dans $L^2(\mathbb{R})$ *(voir T.D.)*. La transformation obtenue $L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ coincide avec celle de la def. IX.2.7.

Transformation de Fourier dans $L^2(\mathbb{R})$

Passage de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ à $L^2(\mathbb{R})$: **Transformée de Fourier-Plancherel**

Définition IX.2.7

La transformation de Fourier sur $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ se prolonge de manière unique en une isométrie $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$.

Remarque : La transformation de Fourier sur $L^2(\mathbb{R})$ peut également être définie à partir de $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, qui est dense dans $L^2(\mathbb{R})$ *(voir T.D.)*. La transformation obtenue $L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ coincide avec celle de la def. IX.2.7.

Preuve : Hypothèses du Théorème de prolongement (CM2) :

Transformation de Fourier dans $L^2(\mathbb{R})$

Passage de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ à $L^2(\mathbb{R})$: **Transformée de Fourier-Plancherel**

Définition IX.2.7

La transformation de Fourier sur $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ se prolonge de manière unique en une isométrie $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$.

Remarque : La transformation de Fourier sur $L^2(\mathbb{R})$ peut également être définie à partir de $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, qui est dense dans $L^2(\mathbb{R})$ *(voir T.D.)*. La transformation obtenue $L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ coincide avec celle de la def. IX.2.7.

Preuve : Hypothèses du Théorème de prolongement (CM2) :

- $L^2(\mathbb{R})$ est un espace de Banach ;

Transformation de Fourier dans $L^2(\mathbb{R})$

Passage de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ à $L^2(\mathbb{R})$: **Transformée de Fourier-Plancherel**

Définition IX.2.7

La transformation de Fourier sur $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ se prolonge de manière unique en une isométrie $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$.

Remarque : La transformation de Fourier sur $L^2(\mathbb{R})$ peut également être définie à partir de $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, qui est dense dans $L^2(\mathbb{R})$ *(voir T.D.)*. La transformation obtenue $L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ coincide avec celle de la def. IX.2.7.

Preuve : Hypothèses du Théorème de prolongement (CM2) :

- $L^2(\mathbb{R})$ est un espace de Banach ;
- $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ est dense dans $L^2(\mathbb{R})$;

Transformation de Fourier dans $L^2(\mathbb{R})$

Passage de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ à $L^2(\mathbb{R})$: **Transformée de Fourier-Plancherel**

Définition IX.2.7

La transformation de Fourier sur $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ se prolonge de manière unique en une isométrie $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$.

Remarque : La transformation de Fourier sur $L^2(\mathbb{R})$ peut également être définie à partir de $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, qui est dense dans $L^2(\mathbb{R})$ *(voir T.D.)*. La transformation obtenue $L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ coincide avec celle de la def. IX.2.7.

Preuve : Hypothèses du Théorème de prolongement (CM2) :

- $L^2(\mathbb{R})$ est un espace de Banach ;
- $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ est dense dans $L^2(\mathbb{R})$;
- $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}(\mathbb{R})$ est une isométrie (pour la norme L^2).

Transformation de Fourier dans $L^2(\mathbb{R})$

Passage de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ à $L^2(\mathbb{R})$: **Transformée de Fourier-Plancherel**

Définition IX.2.7

La transformation de Fourier sur $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ se prolonge de manière unique en une isométrie $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$.

Remarque : La transformation de Fourier sur $L^2(\mathbb{R})$ peut également être définie à partir de $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, qui est dense dans $L^2(\mathbb{R})$ *(voir T.D.)*. La transformation obtenue $L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ coincide avec celle de la def. IX.2.7.

Preuve : Hypothèses du Théorème de prolongement (CM2) :

- $L^2(\mathbb{R})$ est un espace de Banach ;
- $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ est dense dans $L^2(\mathbb{R})$;
- $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}(\mathbb{R})$ est une isométrie (pour la norme L^2).

Donc $\mathcal{F}$ se prolonge de manière unique en une isométrie $L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$.
□

Propriétés de $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$

Proposition IX.2.8 (Admis, voir TD)

Pour tout $f \in L^2(\mathbb{R})$, les égalités de fonctions de y dans $L^2(\mathbb{R})$ suivantes sont vérifiées :

$$\mathcal{F}f(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{a\to-\infty, b\to+\infty} \int_{[a,b]} f(x)\ e^{-ixy}\ \lambda(dx)$$

$$\mathcal{F}f(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{d}{dy} \int_{\mathbb{R}} f(x)\ \frac{1-e^{-ixy}}{ix}\ \lambda(dx).$$

Propriétés de $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$

Proposition IX.2.8 (Admis, voir TD)

Pour tout $f \in L^2(\mathbb{R})$, les égalités de fonctions de y dans $L^2(\mathbb{R})$ suivantes sont vérifiées :

$$\mathcal{F}f(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{a\to-\infty, b\to+\infty} \int_{[a,b]} f(x)\ e^{-ixy}\ \lambda(dx)$$

$$\mathcal{F}f(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{d}{dy} \int_{\mathbb{R}} f(x)\ \frac{1 - e^{-ixy}}{ix}\ \lambda(dx).$$

Proposition IX.2.9 (Isométrie, norme)

Pour tout $f \in L^2(\mathbb{R})$, on a $\mathcal{F}f \in L^2(\mathbb{R})$ et $\|f\|_{L^2} = \|\mathcal{F}f\|_{L^2}$.

Proposition IX.2.10 (Isométrie, produit scalaire)

Pour tout $f, g \in L^2(\mathbb{R})$, on a $(f, g)_{L^2} = (\mathcal{F}f, \mathcal{F}g)_{L^2}$.

Inversion

Proposition IX.2.11

Le prolongement de $\overline{\mathcal{F}}$, de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ à $L^2(\mathbb{R})$, est la réciproque de $\mathcal{F}$: $f = \overline{\mathcal{F}}\mathcal{F}f = \mathcal{F}\overline{\mathcal{F}}f$.

Inversion

Proposition IX.2.11

Le prolongement de $\overline{\mathcal{F}}$, de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ à $L^2(\mathbb{R})$, est la réciproque de $\mathcal{F}$:
$f = \overline{\mathcal{F}}\mathcal{F}f = \mathcal{F}\overline{\mathcal{F}}f$.

Preuve : On note toujours par $\overline{\mathcal{F}}$ le prolongement à $L^2(\mathbb{R})$ de $\overline{\mathcal{F}}$ défini sur $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Inversion

Proposition IX.2.11

Le prolongement de $\overline{\mathcal{F}}$, de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ à $L^2(\mathbb{R})$, est la réciproque de $\mathcal{F}$:
$f = \overline{\mathcal{F}}\mathcal{F}f = \mathcal{F}\overline{\mathcal{F}}f$.

Preuve : On note toujours par $\overline{\mathcal{F}}$ le prolongement à $L^2(\mathbb{R})$ de $\overline{\mathcal{F}}$ défini sur $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.
Soit $f \in L^2(\mathbb{R})$ et $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ qui converge vers f dans $L^2(\mathbb{R})$.

Inversion

Proposition IX.2.11

Le prolongement de $\overline{\mathcal{F}}$, de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ à $L^2(\mathbb{R})$, est la réciproque de $\mathcal{F}$:
$f = \overline{\mathcal{F}}\mathcal{F}f = \mathcal{F}\overline{\mathcal{F}}f$.

Preuve : On note toujours par $\overline{\mathcal{F}}$ le prolongement à $L^2(\mathbb{R})$ de $\overline{\mathcal{F}}$ défini sur $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.
Soit $f \in L^2(\mathbb{R})$ et $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ qui converge vers f dans $L^2(\mathbb{R})$.
Par continuité de $\mathcal{F}$ et $\overline{\mathcal{F}}$ ($L^2 \to L^2$), on a

$$\overline{\mathcal{F}}\mathcal{F}f = \overline{\mathcal{F}}\mathcal{F}\lim\varphi_n = \lim\overline{\mathcal{F}}\mathcal{F}\varphi_n = \lim\varphi_n = f.$$

Inversion

Proposition IX.2.11

Le prolongement de $\overline{\mathcal{F}}$, de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ à $L^2(\mathbb{R})$, est la réciproque de $\mathcal{F}$: $f = \overline{\mathcal{F}}\mathcal{F}f = \mathcal{F}\overline{\mathcal{F}}f$.

Preuve : On note toujours par $\overline{\mathcal{F}}$ le prolongement à $L^2(\mathbb{R})$ de $\overline{\mathcal{F}}$ défini sur $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.
Soit $f \in L^2(\mathbb{R})$ et $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ qui converge vers f dans $L^2(\mathbb{R})$.
Par continuité de $\mathcal{F}$ et $\overline{\mathcal{F}}$ ($L^2 \to L^2$), on a

$$\overline{\mathcal{F}}\mathcal{F}f = \overline{\mathcal{F}}\mathcal{F}\lim\varphi_n = \lim\overline{\mathcal{F}}\mathcal{F}\varphi_n = \lim\varphi_n = f.$$

De même pour $\mathcal{F}\overline{\mathcal{F}}f = f$. $\square$

Inversion

Proposition IX.2.12

Si $f \in L^2(\mathbb{R})$ et si $f \in C^1(\mathbb{R})$ et $f' \in L^2(\mathbb{R})$, alors $\mathcal{F}(f') = iy\,\mathcal{F}f$.

Preuve :
On montre le résultat pour $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ qui converge vers f dans $L^2(\mathbb{R})$. $\square$

Définition VII.2.6 (Rappel, fonction caractéristique)

On appelle **fonction caractéristique** d'une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{R}^N$ l'application $\varphi_X : \mathbb{R}^N \to \mathbb{C}$ définie par

$$t \mapsto \varphi_X(t) = \mathbf{E}\left[e^{i\langle t,X\rangle}\right] = \int_{\mathbb{R}^N} e^{i\langle t,x\rangle} P_X(dx)$$

$$t \mapsto \varphi_X(t) = \mathbf{E}\left[e^{i\langle t,X\rangle}\right] = \int_{\mathbb{R}^N} e^{i\langle t,x\rangle} P_X(dx)$$

Proposition IX.3.1

- $\varphi_X(0) = 1$ *et pour tout* $t \in \mathbb{R}^N$, $|\varphi_X(t)| \leq 1$.
- *Pour tout* $\lambda \in \mathbb{R}$ *et tout* $a \in \mathbb{R}^N$, $\varphi_{\lambda X+a}(t) = e^{iat}\varphi_X(\lambda t)$.
- φ_X *est une fonction semi-positive, i.e. pour tous* $n \geq 1$ *et tous* $t_1, \dots, t_n \in \mathbb{R}^N$, *on a*

$$\forall z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}, \qquad \sum_{1 \leq j,k \leq n} z_j\, \varphi_X(t_j - t_k)\, \overline{z_k} \geq 0.$$

Proposition IX.3.2

La fonction caractéristique d'une v.a. X à valeurs dans $\mathbb{R}^N$ est continue sur $\mathbb{R}^N$.

Proposition IX.3.3

Si la loi de X admet une densité de probabilité, alors

$$\lim_{|t|\to\infty} \varphi_X(t) = 0.$$

Théorème IX.3.4 (Admis, théorème d'inversion)

Si la fonction caractéristique φ_X d'une v.a. X est dans $\mathbf{L}^1(\mathbb{R})$, alors X admet la densité $f_X : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}_+$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}^N, \quad f_X(x) = \frac{1}{(2\pi)^N} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-i\langle t,x\rangle} \varphi_X(t)\ \lambda(dt).$$

Théorème IX.3.4 (Admis, théorème d'inversion)

Si la fonction caractéristique φ_X d'une v.a. X est dans $\mathbf{L}^1(\mathbb{R})$, alors X admet la densité $f_X : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}_+$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}^N, \quad f_X(x) = \frac{1}{(2\pi)^N} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-i\langle t,x \rangle} \varphi_X(t)\ \lambda(dt).$$

Théorème IX.3.5 (Théorème d'unicité)

Deux variables aléatoires X et Y ont même loi si et seulement si $\varphi_X = \varphi_Y$.

Théorème VII.2.7 (Rappel)

Les v.a. réelles $X_1, \dots, X_N$ sont indépendantes si et seulement si leurs fonctions caractéristiques vérifient

$$\forall t \in \mathbb{R}^N, \quad \varphi_X(t) = \prod_{k=1}^{N} \varphi_{X_k}(t_k)$$

où $X = (X_1, \dots, X_N)$.

Proposition IX.3.6

Soient $X_1, \ldots, X_n$ des vecteurs aléatoires **indépendants** *à valeurs dans $\mathbb{R}^N$, de lois respectives $P_{X_1}, \ldots, P_{X_n}$.*
La loi de $X_1 + \cdots + X_n$ est le produit de convolution $P_{X_1} * \cdots * P_{X_n}$ et a pour fonction caractéristique $\varphi_{X_1+\cdots+X_n} = \prod_{j=1}^{n} \varphi_{X_j}$.

Proposition IX.3.7

Soit X une v.a. à valeurs réelles dans $\mathbf{L}^n(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ $(n \geq 1)$. Alors, sa fonction caractéristique φ_X est de classe C^n et

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \varphi_X^{(n)}(t) = i^n \, \mathbf{E}[X^n e^{itX}].$$

En particulier, $\mathbf{E}[X^n] = i^{-n} \varphi_X^{(n)}(0)$.

Objectifs de la séance

- Je connais la définition (**def. IX.1.1**) et les propriétés (**prop. IX.1.2-prop. IX.1.5**) de la **transformée de Fourier** d'une fonction intégrable.
- Je connais la transformée de Fourier d'une **gaussienne** (**TD Ex. IX.1**).
- Je comprends la **construction** de la transformation de Fourier dans L^2 et je connais la formule d'inversion (**th. IX.2.5**).
- Je sais exprimer le fait que la transformation de Fourier dans L^2 est une **isométrie** (Parseval) (**prop. IX.2.9**, **prop. IX.2.10**).
- Je connais le lien entre transformée de Fourier et **dérivation** (**prop. IX.1.4**, **prop. IX.1.5**), ainsi qu'entre transformée de Fourier et **convolution** (**prop. IX.1.3**).
- Je suis capable de déterminer la **fonction caractéristique** d'une variable aléatoire (**def. VII.2.6**).

Références bibliographiques

- T. Gallouët, R. Herbin. *Mesure, intégration, probabilités*.
  https://www.i2m.univ-amu.fr/perso/thierry.gallouet/licence.d/mes-int-pro.pdf
- F. Golse. *Distributions, analyse de Fourier, équations aux dérivées partielles*. Polycopié de l'Ecole Polytechnique. 2012.
  http://www.cmls.polytechnique.fr/perso/golse/MAT431-10/POLY431.pdf
- W. Rudin. *Real and Complex Analysis*. McGraw-Hill.
- L. Saint-Raymond. *Analyse fonctionnelle*. Polycopié de l'Ecole Normale Supérieure de Paris. 2013.