Séance VIII : Convolution, probabilités dans $\mathbb{R}^d$ et indépendance

A) Objectifs de la séance

A la fin de cette séance,

- je suis capable d'étudier la convolution de deux fonctions (intégrabilité, convergence);
- je suis capable d'exprimer l'indépendance de variables aléatoires en terme de mesure produit;
- je suis capable de vérifier que deux variables aléatoires sont indépendantes;
- je suis capable de déterminer la loi d'une variable aléatoire définie comme fonction de deux variables aléatoires indépendantes;
- je distingue parfaitement les notions d'indépendance et de non corrélation;
- je suis capable d'étudier un vecteur de variables aléatoires réelles, dont la loi est donnée (loi de chaque composante, indépendance).

B) Pour se familiariser avec les concepts (à traiter avant les séances de TD)

Les questions VIII.1 et VIII.2 sont à traiter avant la séance de TD. Les corrigés sont disponibles sur internet.

Question VIII.1
Soient $m_1, m_2 \in \mathbb{R}$ et $\sigma_1, \sigma_2 > 0$. Soient X et Y deux variables aléatoires independantes telles que $X \sim \mathcal{N}(m_1, \sigma_1^2)$ et $Y \sim \mathcal{N}(m_2, \sigma_2^2)$, i.e. X (resp. Y) suit une loi gaussienne de moyenne m_1 (resp. m_2) et d'écart type σ_1 (resp. σ_2).

Q. VIII.1.1 Déterminer la loi de $X + Y$.

La question suivante illustre le fait que la non-corrélation entre des variables aléatoires n'implique pas nécessairement leur indépendance.

Question VIII.2
Soient X et Y deux variables aléatoires de Bernoulli independantes de paramètre $\frac{1}{2}$.

Q. VIII.2.1 Déterminer la loi de $X + Y$, $|X - Y|$ et $(X + Y)|X - Y|$.

Q. VIII.2.2 Montrer que $X + Y$ et $|X - Y|$ sont des variables aléatoires non-corrélées.

Q. VIII.2.3 Montrer que $X + Y$ et $|X - Y|$ ne sont pas indépendantes. *[Indication: on pourra par exemple calculer $\mathbb{P}(X + Y = 0, |X - Y| = 0)$].*

C) Exercices

Exercice VIII.1
Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes distribuées suivant la même loi exponentielle de paramètre 1.

E. VIII.1.1 Déterminer la loi jointe de $U = X + Y$ et $V = \dfrac{X}{X+Y}$.

E. VIII.1.2 Les variables aléatoires U et V sont-elles indépendantes?

E. VIII.1.3 En déduire que V suit la loi uniforme sur $[0,1]$.

Le produit de convolution est un outil très utilisé en analyse ainsi qu'en sciences de l'ingénieur. Voici un petit exercice permettant de le manipuler avec des noyaux régularisants, dont on verra plus tard certaines applications pour les EDP et que vous rencontrerez également en traitement du signal.

Exercice VIII.2 (Noyau régularisant)
On note $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}$ qui sont indéfiniment dérivables et à support compact. Autrement dit, $f \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ sssi f est continuement dérivable à tout ordre et si il existe $R > 0$ tel que f est nulle en dehors de la boule fermée $\overline{B(0,R)}$.

On appelle *noyau régularisant* une fonction $j \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ telle que:

- $j \geq 0$;
- $\int_{\mathbb{R}^d} j(x)\lambda(dx) = 1$;
- $|x| \geq 1 \Rightarrow j(x) = 0$.

On définit alors une famille régularisante $\{j_\epsilon\}_{\epsilon>0}$ par la relation: $\forall \epsilon > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}^d,\ j_\epsilon(x) = \epsilon^{-d} j(\frac{x}{\epsilon})$.

E. VIII.2.1 Que peut-on dire du support de j_ϵ? Combien vaut $\int_{\mathbb{R}^d} j_\epsilon(x)\lambda(dx)$?

E. VIII.2.2 On se place dans le cas $d = 1$. On considère la fonction

$$j(x) = \begin{cases} C \exp\left(-\frac{1}{1-|x|^2}\right) & \text{si } |x| < 1\,, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

où $C = \left(\int_{]-1,1[} \exp\left(-\frac{1}{1-|x|^2}\right)\lambda(dx)\right)^{-1}$.
Vérifier que j est un noyau régularisant.

E. VIII.2.3 Dans le reste de l'exercice, j désigne le noyau particulier défini à la question précédente. Montrer que si f est continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, alors $j_\epsilon * f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ pour tout $\epsilon > 0$.

E. VIII.2.4 Pour la même fonction f, montrer que $j_\epsilon * f$ converge ponctuellement vers f lorsque $\epsilon \to 0$. Soit $\varrho > 0$, montrer que la convergence est uniforme sur la boule fermée $\overline{B(0,\varrho)}$ (on dit que la convergence est uniforme sur les compacts).

***E. VIII.2.5** Étendre les résultats précédents au cas $d > 1$.

Les deux exercices suivants s'intéressent à la composée de variables aléatoires.

Exercice VIII.3
Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité. Soient N une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires.

On définit X_N par

$$\forall \omega \in \Omega, \quad X_N(\omega) = X_{N(\omega)}(\omega).$$

E. VIII.3.1 Montrer que X_N est une variable aléatoire.

Exercice VIII.4
On suppose que l'intensité d'un tremblement de terre est une variable aléatoire X suivant une loi exponentielle de paramètre a et que le nombre de tremblements de terre par an N est une variable de Poisson de paramètre λ.

E. VIII.4.1 On considère la variable Y représentant l'intensité maximale annuelle de ces tremblements de terre. Quelle est la loi de Y?

On étudie maintenant les liens entre indépendances de variables aléatoires, lois marginales et lois conditionnelles.

Exercice VIII.5
Dans l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, on considère un couple de v. a. (X, Y), dont la loi est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue, défini sur le domaine

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ 0 < y \leq 1 \text{ et } 0 \leq x \leq y\right\},$$

by the probability density function $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_+$,

$$f(x, y) = \begin{cases} 1/y & \text{si } (x, y) \in D \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

E. VIII.5.1 Montrer que f définit bien une densité de probabilité.

E. VIII.5.2 Exprimer la fonction de répartition du couple (X, Y).

E. VIII.5.3 Calculer les densités de probabilité marginales des variables aléatoires X et Y.

E. VIII.5.4 Calculer les densités de probabilité des variables $Y \mid X = x$ et $X \mid Y = y$.

E. VIII.5.5 Les variables X et Y sont-elles indépendantes?

D) Approfondissement

Exercice VIII.6 (Convolution)
Soient f un élément de $L^1(\mathbb{R})$ et g et h deux éléments de $L^2(\mathbb{R})$. On définit $\check{f}$ en posant $\check{f}(x) = f(-x)$.

E. VIII.6.1 Montrer que $|f| * |g| \in L^2(\mathbb{R})$.

E. VIII.6.2 Montrer que la fonction $(x, y) \mapsto f(x-y)g(y)h(x)$ est intégrable sur $\mathbb{R}^2$.

E. VIII.6.3 En déduire que:

$$\int_{\mathbb{R}} (f * g)h \, d\lambda = \int_{\mathbb{R}} g(\check{f} * h) \, d\lambda.$$

***E. VIII.6.4** Démontrer que si f et g sont des fonctions à supports compacts notés A et B, alors $f * g$ est à support compact inclus dans $A + B$.

Exercice VIII.7 (Noyau régularisant (suite) - Lemme d'Urysohn et conséquence)

***E. VIII.7.1** On va prouver le Lemme d'Urysohn: soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$ et $K \subset \Omega$ un compact, alors il existe $\psi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ avec $\psi(x) = 1$ pour tout $x \in K$.

(a) Soit $\delta > 0$ tel que l'ensemble $K^{2\delta} = \{x : \ |x-y| \leq 2\delta$ pour un $y \in K\}$ est inclus dans Ω. Vérifier que $K^{2\delta}$ est compact.

(b) Soit j le noyau de l'exercice VIII.2 et $\{j_\epsilon\}_{\epsilon>0}$ la famille régularisante. Montrer que pour $\epsilon = \delta$, la fonction $\psi_K = j_\epsilon * \mathbf{1}_{K^\delta}$ est une solution au problème d'Urysohn.

***E. VIII.7.2** On admet la densité des fonctions $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$ dans $L^p(\mathbb{R}^d)$. A l'aide de la question précédente, montrer que $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ est dense dans $L^p(\mathbb{R}^d)$. *[Indication: considérer une suite croissante de compacts $\{K_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tel que $\cup K_n = \mathbb{R}$ et la suite de fonctions $\{\psi_{K_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$.]*

Séance 8 : Eléments de correction des exercices

Solution de Q. VIII.1.1 Nous allons montrer que $X+Y \sim \mathcal{N}(m_1+m_2, \sigma_1^2+\sigma_2^2)$.
Dans un premier temps, supposons que $m_1 = m_2 = 0$. Soit f une fonction mesurable bornée. Par le théorème de transfert,

$$\mathbb{E}[f(X+Y)] = \int_{\mathbb{R}^2} f(x+y) P_{(X,Y)}(dx, dy).$$

Comme X et Y sont indépendantes, $P_{(X,Y)} = P_X \otimes P_Y$. Ainsi,

$$\mathbb{E}[f(X+Y)] = \int_{\mathbb{R}^2} f(x+y) \frac{e^{-\frac{x^2}{2\sigma_1^2}}}{\sqrt{2\pi\sigma_1^2}} \frac{e^{-\frac{y^2}{2\sigma_2^2}}}{\sqrt{2\pi\sigma_2^2}} \lambda^{(2)}(dx, dy).$$

Donc par le changement de variable $\Phi(x,z) = (x, z-x)$ (vérifiez et calculez le jacobien), on obtient

$$\mathbb{E}[f(X+Y)] = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \int_{\mathbb{R}^2} f(z) e^{-\frac{x^2}{2\sigma_1^2}} e^{-\frac{(x-z)^2}{2\sigma_2^2}} \lambda^{(2)}(dx, dz).$$

Or on vérifie que

$$\exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_1^2} - \frac{(x-z)^2}{2\sigma_2^2}\right) = \exp\left(-\frac{\left(x - \frac{\sigma_1^2 z}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}\right)^2}{2\Sigma^2}\right) \times \exp\left(-\frac{z^2}{2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}\right),$$

où on a noté $\Sigma^2 = \frac{\sigma_1^2\sigma_2^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}$. Comme pour tout z, la fonction

$$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi\Sigma^2}} \exp\left(-\frac{\left(x - \frac{\sigma_1^2 z}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}\right)^2}{2\Sigma^2}\right)$$

est la densité d'une gaussienne de moyenne $\frac{\sigma_1^2 z}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}$ et de variance Σ^2, on en déduit que l'intégrale de cette fonction est 1. Or par les théorèmes de Fubini, on a

$$\mathbb{E}[f(X+Y)] = \frac{\sqrt{2\pi\Sigma^2}}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \int_{\mathbb{R}} f(z) e^{-\frac{z^2}{2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi\Sigma^2}} \exp\left(-\frac{\left(x - \frac{\sigma_1^2 z}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}\right)^2}{2\Sigma^2}\right) \lambda(dx)\, \lambda(dz),$$

et donc grâce à la remarque précédente,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[f(X+Y)] &= \frac{\sqrt{2\pi\Sigma^2}}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \int_{\mathbb{R}} f(z) e^{-\frac{z^2}{2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}} \lambda(dz) \\
&= \int_{\mathbb{R}} f(z) \frac{e^{-\frac{z^2}{2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}}}{\sqrt{2\pi(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}} \lambda(dz) \\
&= \mathbb{E}[f(Z)],
\end{aligned}$$

où $Z \sim \mathcal{N}(0, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$.

Si maintenant $(m_1, m_2) \neq (0,0)$, on sait que $X - m_1 \sim \mathcal{N}(0, \sigma_1^2)$ et $Y - m_2 \sim \mathcal{N}(0, \sigma_2^2)$, donc d'après le paragraphe précédent,

$$(X - m_1) + (Y - m_2) \sim \mathcal{N}(0, \sigma_1^2 + \sigma_2^2).$$

Or $X + Y$ est une gaussienne dont on montre facilement qu'elle est de moyenne $m_1 + m_2$.

Solution de Q. VIII.2.1 $|X - Y|$ est une variable aléatoire discrète qui prend les valeurs : 0 avec probabilité $1/2$ ($X = Y = 0$ ou $X = Y = 1$), 1 avec probabilité $1/2$ ($X = 0$ et $Y = 1$, ou $X = 1$ et $Y = 0$). C'est donc une variable de Bernoulli.

$(X + Y)\,|X - Y|$ est une variable aléatoire discrète qui prend les valeurs : 0 avec probabilité $1/2$, 1 avec probabilité $1/2$.

Solution de Q. VIII.2.2 On calcule la covariance entre $X + Y$ et $|X - Y|$,

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(X+Y, |X-Y|) &= \mathbb{E}\left[(X+Y)|X-Y|\right] - \mathbb{E}\left[(X+Y)\right]\ \mathbb{E}\left[|X-Y|\right] \\ &= \frac{1}{2} - 1 \times \frac{1}{2} = 0.\end{aligned}$$

Les v.a. $X + Y$ et $|X - Y|$ sont donc non-corrélées.

Solution de Q. VIII.2.3

$$\mathbb{P}(X+Y=0, |X-Y|=0) = \frac{1}{4} \neq \mathbb{P}(X+Y=0)\ \mathbb{P}(|X-Y|=0) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}.$$

Donc $X + Y$ et $|X - Y|$ ne sont pas indépendantes.

Solution de E. VIII.1.1 Par définition de la loi exponentielle, on a

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathbb{P}(X \leq x) = (1 - e^{-x})\ \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x)$$

et

$$\forall y \in \mathbb{R}, \quad \mathbb{P}(Y \leq y) = (1 - e^{-y})\ \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(y).$$

D'abord, remarquons que $V = +\infty$ sur l'évènement $\{X = 0,\ Y = 0\}$. Comme $X \geq 0$ et $Y \geq 0$, c'est bien le seul évènement sur lequel $Y = +\infty$. Or $\mathbb{P}(X = 0, Y = 0) = \mathbb{P}(X = 0)\mathbb{P}(Y = 0)$ par indépendance. De plus, $\mathbb{P}(X = 0) = \mathbb{P}(Y = 0) = 0$ car X et Y admettent une densité. Donc $\mathbb{P}(X = 0, Y = 0) = 0$. En fait on a même $\mathbb{P}(\{X = 0\} \cup \{Y = 0\}) \leq \mathbb{P}(X = 0) + \mathbb{P}(Y = 0) = 0$. Ainsi une définition plus convenable de V serait

$$\frac{X}{X+Y} \mathbb{1}_{\{X>0,\ Y>0\}},$$

qui est bien mesurable. De plus, on vient de remarquer que $V = \frac{X}{X+Y}\mathbb{1}_{\{X>0,\ Y>0\}}$ p.s.

Pour $U = X+Y$ et $V = \dfrac{X}{X+Y}$, la loi (jointe) du couple (U,V) est déterminée par

$$\mathbb{E}[h(U,V)] = \int_{\mathbb{R}^2} h(u,v)\ P_{(U,V)}(du,dv),$$

pour toute fonction $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mesurable bornée. On cherche donc à exprimer $\mathbb{E}[h(U,V)]$ pour identifier la loi de (U,V).

Notons qu'il est également possible de considérer les quantités $\mathbb{P}((U,V) \in A)$ pour $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$, comme dans l'exercice suivant, ce qui revient à prendre $h = \mathbb{1}_A$.

Or, on a $h(U,V) = h(X+Y, X/(X+Y))$ et par la remarque précédente, $h(X+Y, X/(X+Y)) = h(X+Y, X/(X+Y))\mathbb{1}_{\{X>0,\ Y>0\}}$ p.s. . Donc en appliquant le théorème de transfert pour le couple (X,Y),

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[h(U,V)] &= \mathbb{E}\left[h\left(X+Y, \frac{X}{X+Y}\right)\mathbb{1}_{\{X>0,\ Y>0\}}\right]\\ &= \int_{\mathbb{R}^2} h\left(x+y, \frac{x}{x+y}\right)\mathbb{1}_{\{x>0,\ y>0\}}\ P_{(X,Y)}(dx,dy)\\ &= \int_{\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}_+^*} h\left(x+y, \frac{x}{x+y}\right)\ P_{(X,Y)}(dx,dy).\end{aligned}$$

Comme X et Y sont indépendantes,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}_+^*} h\left(x+y, \frac{x}{x+y}\right)\ P_{(X,Y)}(dx,dy) &= \int_{\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}_+^*} h\left(x+y, \frac{x}{x+y}\right)\ P_X\otimes P_Y(dx,dy)\\ &= \int_{\mathbb{R}_+^*}\int_{\mathbb{R}_+^*} h\left(x+y, \frac{x}{x+y}\right)\ P_X(dx)P_Y(dy).\end{aligned}$$

En utilisant le fait que les lois $\mathbb{P}_X$ et $\mathbb{P}_Y$ admettent une densité par rapport à la mesure de Lebesgue λ, on trouve

$$\mathbb{E}[h(U,V)] = \int_{\mathbb{R}_+^*}\int_{\mathbb{R}_+^*} h\left(x+y, \frac{x}{x+y}\right)\ e^{-(x+y)}\ \lambda(dx)\ \lambda(dy).$$

On peut remarquer que cette dernière expression s'écrit aussi

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[h(U,V)] &= \int_{\mathbb{R}_+^*}\int_{\mathbb{R}_+^*} H\left(x+y, \frac{x}{x+y}\right)\ \lambda(dx)\ \lambda(dy)\\ &= \int_{\mathbb{R}_+^*}\int_{\mathbb{R}_+^*} H\circ T(x,y)\ \lambda(dx)\ \lambda(dy),\end{aligned}$$

où pour tous $a,b \in \mathbb{R}_+^*$, $H(a,b) = h(a,b)e^{-a}$ et

$$\begin{aligned}T : \mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}_+^* &\to \mathbb{R}_+^*\times]0,1]\\ (x,y) &\mapsto (x+y, x/(x+y)).\end{aligned}$$

Ainsi, pour tout changement de variable (i.e. tout difféomorphisme) $\varphi : D \subseteq \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$, on obtient par la formule de changement de variable:

$$\mathbb{E}[h(U,V)] = \int_D |J\varphi(u,v)| \times H \circ T \circ \varphi(u,v)\ \lambda^{(2)}(du,dv).$$

Notons maintenant que T est C^1 et bijectif, d'inverse $T^{-1}(u,v) = (uv, u - uv)$ qui est également C^1. Ainsi T^{-1} est un difféomorphisme et on peut choisir $\varphi = T^{-1}$, avec $D = \mathbb{R}_+^* \times]0,1]$. De plus, le jacobien de φ est $J\varphi(u,v) = -u$.

On a donc

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[h(U,V)] &= \int_{\mathbb{R}_+^* \times]0,1]} h(u,v)\ u\, e^{-u}\ \lambda^{(2)}(du,dv) \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} h(u,v)\ u\, e^{-u}\ \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^* \times]0,1]}(u,v)\ \lambda^{(2)}(du,dv) \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} h(u,v)\ u\, e^{-u}\ \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^* \times [0,1]}(u,v)\ \lambda^{(2)}(du,dv).
\end{aligned}$$

On en déduit que la loi de (U,V) admet la densité de probabilité

$$(u,v) \mapsto f_{U,V)}(u,v) = u\, e^{-u}\ \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^* \times [0,1]}(u,v).$$

Solution de E. VIII.1.2 On déduit de 1) que la loi de U admet la densité f_U définie par

$$\forall u \in \mathbb{R}, \quad f_U(u) = \int_{\mathbb{R}} f_{(U,V)}(u,v)\ \lambda(dv) = u\, e^{-u}\ \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^*}(u)$$

et que la loi de V admet la densité f_V définie par

$$\forall v \in \mathbb{R}, \quad f_V(v) = \int_{\mathbb{R}} f_{(U,V)}(u,v)\ \lambda(du) = \mathbb{1}_{[0,1]}(v).$$

Comme $f_{(U,V)}(u,v) = f_U(u)\ f_V(v)$ pour tout $(u,v) \in \mathbb{R}^2$, les variables aléatoires U et V sont indépendantes.

Solution de E. VIII.1.3 V admet $\mathbb{1}_{[0,1]}$ comme densité de probabilité, c'est-à-dire V suit la loi uniforme sur $[0,1]$.

Solution de E. VIII.2.1 Montrons que supp$j_\epsilon \subset \overline{B(0,\epsilon)}$. Pour cela il suffit de montrer que pour $x \in \mathbb{R}^d \setminus \overline{B(0,\epsilon)}$, $j_\epsilon(x) = 0$. Soit donc un tel x. Alors $|\frac{x}{\epsilon}| > 1$, donc par hypothèse sur j, $j(\frac{x}{\epsilon}) = 0$, ce qui suffit à montrer le résultat.

Par un simple changement de variable ($y = \frac{x}{\epsilon}$), on montre alors que

$$\int_{\mathbb{R}^d} j_\epsilon(x)\lambda(dx) = \int_{\mathbb{R}^d} j(y)\lambda(dy) = 1.$$

Solution de E. VIII.2.2 La fonction j est positive, à support inclus dans $[-1,1]$. Il reste donc à vérifier qu'elle est infiniment dérivable en tout point de $\mathbb{R}$ et qu'elle est intégrable, le second point se déduisant facilement du premier. De plus, on voit facilement que j est infiniment dérivable en tout point autre que $x = 1$ ou $x = -1$. Etudions ce qui se passe en $x = 1$ (l'analyse est la même en $x = -1$).

On remarque d'abord que j est bien continue. En effet, $\lim_{x\to 1^-} j(x) = 0 = \lim_{x\to 1^+} j(x)$.

Ensuite, les dérivées à droite étant toutes nulles, il faut donc montrer que les dérivées à gauche successives sont elles aussi nulles. On le fait pour la première dérivée, les suivantes pouvant se déduire par une simple récurrence. Ainsi, pour $x \in]0,1[$,

$$j'(x) = \frac{-2x}{(1-x^2)^2} \exp\left(-\frac{1}{1-|x|^2}\right) = \frac{-2x}{(1-x^2)^2} j(x).$$

Ainsi, $\lim_{x\to 1^-} j'(x) = 0 = \lim_{x\to 1^+} j'(x)$.

Solution de E. VIII.2.3 On montre ce résultat en procédant par récurrence sur l'ordre de dérivation n, et en utilisant le théorème de dérivation sous le signe intégral à chaque étape.
Pour tout $\epsilon > 0$, notons $f_\epsilon = f * j_\epsilon = \int_{\mathbb{R}} j_\epsilon(\cdot - y) f(y) \lambda(dy)$.
Pour $n = 0$, la fonction $(x,y) \mapsto j_\epsilon(x-y)f(y)$ est continue en tout point. A x fixé, le support de $y \mapsto j_\epsilon(x-y)f(y)$ est inclus dans $[x-\epsilon, x+\epsilon]$. Comme f est continue, elle est bornée sur cet intervalle et la fonction $y \mapsto j_\epsilon(x-y)f(y)$ est donc dominée par la fonction $y \mapsto \sup_{z\in[x-\epsilon,x+\epsilon]} |f(z)| \mathbf{1}_{[x-\epsilon,x+\epsilon]}(y)$ qui est dans L^1. Donc f_ϵ est continue sur $\mathbb{R}$.
On procède de façon identique pour $n \geq 1$, la fonction $j_\epsilon^{(n)}$ possédant les mêmes propriétés essentielles (support compact, continuité) que j_ϵ.
Ainsi, $f_\epsilon \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$.

Solution de E. VIII.2.4 On rappelle d'abord que par changement de variable, on a aussi l'égalité:

$$f_\epsilon(x) = \int_{\mathbb{R}} j_\epsilon(y) f(x-y) \lambda(dy).$$

Donc en utilisant que $\int_{\mathbb{R}} j_\epsilon(y)\lambda(dy) = 1$, on obtient:

$$\begin{aligned} f_\epsilon(x) - f(x) &= \int_{\mathbb{R}} j_\epsilon(y) \left(f(x-y) - f(x)\right) \lambda(dy) \\ &= \int_{[-\epsilon,\epsilon]} j_\epsilon(y) \left(f(x-y) - f(x)\right) \lambda(dy). \end{aligned}$$

Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé. Pour prouver que $f_\epsilon(x) - f(x) \to 0$ quand $\epsilon \to 0$, il suffit de montrer que pour tout $\eta > 0$, il existe $\epsilon' > 0$ tel que pour tout $\epsilon < \epsilon'$, $|f_\epsilon(x) - f(x)| < \eta$. Fixons $\eta > 0$, alors la continuité de f en x implique qu'il existe $\epsilon' > 0$ tel que si $|z - x| < \epsilon'$, alors $|f(z) - f(x)| < \eta$. Donc en reprenant l'égalité précédente appliquée au ϵ' que nous venons d'exhiber, on obtient pour tout $\epsilon < \epsilon'$,

$$\begin{aligned} |f_\epsilon(x) - f(x)| &\leq \int_{[-\epsilon,\epsilon]} j_\epsilon(y) \left|f(x-y) - f(x)\right| \lambda(dy) \\ &\leq \eta \int_{[-\epsilon,\epsilon]} j_\epsilon(y)\lambda(dy) = \eta. \end{aligned}$$

Fixons $R > 0$. Pour prouver la convergence sur le compact $K = \overline{B(0,R)}$, on utilise l'uniforme continuité de f sur K (théorème de Heine) et on procède comme pour la convergence simple.

Solution de E. VIII.2.5 La définition de la fonction j s'étend facilement à $\mathbb{R}^d$:

$$j(x) = \begin{cases} C \exp\left(-\frac{1}{1-|x|^2}\right) & \text{si } |x| < 1\,, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

où $C = \left(\int_{]-1,1[^d} \exp\left(-\frac{1}{1-|x|^2}\right) \lambda(dx)\right)^{-1}$. Vérifier que j est un noyau régularisant est à peine plus fastidieux que dans le cas 1D, car cela fait intervenir les dérivées partielles à tous ordres de j. De même pour montrer que $j_\epsilon * f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$. La démonstration de la convergence est alors tout à fait similaire au cas 1D.

Solution de E. VIII.3.1 Il s'agit de montrer que la fonction $X_N : (\Omega, \mathcal{F}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})$ est mesurable.
Soit $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. On considère

$$\begin{aligned} A = (X_N)^{-1}(B) &= \{X_N \in B\} = \{\omega \in \Omega : X_{N(\omega)}(\omega) \in B\} \\ &= \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \{\omega \in \Omega : N(\omega) = n \text{ et } X_n(\omega) \in B\} \\ &= \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} (\{N = n\} \cap \{X_n \in B\})\,. \end{aligned}$$

Comme N et X_n sont des variables aléatoires, les ensembles $\{N = n\}$ et $\{X_n \in B\}$ sont dans $\mathcal{F}$. Il s'ensuit que $A \in \mathcal{F}$ et donc que X_N est mesurable.

Solution de E. VIII.4.1 Dans une année, il y a N tremblements de terre d'intensités $X_1, X_2, \ldots, X_N$ (ou 0 s'il n'y a aucun tremblement de terre dans l'année).
L'intensité maximale annuelle est alors $Y = Y_N$, où la suite de variables aléatoires $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par $Y_0 = 0$ et

$$\forall n \geq 1, \quad Y_n = \max(0, X_1, X_2, \ldots, X_n).$$

Grâce à l'exercice précédent, on sait que Y est une variable aléatoire. Il est donc légitime de rechercher sa loi. La variable Y étant réelle, déterminer sa loi est équivalent à déterminer sa fonction de répartition

$$\mathbb{P}(Y \leq y) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(Y \leq y \mid N = n)\, \mathbb{P}(N = n).$$

On détermine donc les quantités

$$\begin{aligned} \forall n \geq 1, \forall y \geq 0, \quad \mathbb{P}(Y \leq y \mid N = n) &= \mathbb{P}(X_1 \leq y, X_2 \leq y, \ldots, X_N \leq y \mid N = n) \\ &= \mathbb{P}(X_1 \leq y, X_2 \leq y, \ldots, X_n \leq y \mid N = n) \\ &= \mathbb{P}(X_1 \leq y, X_2 \leq y, \ldots, X_n \leq y) \\ &= \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_i \leq y) \end{aligned}$$

en utilisant l'indépendance entre N et les X_i d'une part, et l'indépendance entre les X_i d'autre part.

Les variables aléatoires X_i sont i.i.d. (indépendantes et identiquement distribuées) et

$$\forall x \geq 0, \quad \mathbb{P}(X_i \leq x) = 1 - e^{-ax} \quad \text{et} \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}(N = k) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}.$$

On en déduit pour tout $y \geq 0$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Y \leq y) &= \mathbb{P}(N = 0) + \sum_{n=1}^{\infty} (1 - e^{-ay})^n . \frac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (1 - e^{-ay})^n . \frac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!} = e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[\lambda(1 - e^{-ay})]^n}{n!} \\
&= e^{-\lambda} \exp[\lambda(1 - e^{-ay})] = \exp(-\lambda e^{-ay}).
\end{aligned}$$

On peut remarquer que cette fonction de répartition n'admet pas de densité de probabilité car $\mathbb{P}(Y = 0) \neq 0$.

Solution de E. VIII.5.1 La fonction f est une densité de probabilité si elle est positive, intégrable sur $\mathbb{R}^2$ et $\int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\, \lambda^{(2)}(dx, dy) = 1$.

On calcule

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\, \lambda^{(2)}(dx, dy) &= \int_D f(x,y)\, \lambda^{(2)}(dx, dy) \\
&= \int_{[0,1]} \lambda(dy) \int_{[0,y]} \frac{1}{y}\, \lambda(dx) = 1.
\end{aligned}$$

On utilise le théorème de Tonelli pour justifier l'intégrabilité de f et le calcul précédent.

Solution de E. VIII.5.2 On distingue les 5 domaines suivants:

- $D_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq 0 \text{ ou } y \leq 0\}$: Pour tout $(x,y) \in D_1$, la fonction de répartition vaut

$$F(x,y) = \mathbb{P}(X \leq x, Y \leq y) = \int_{]-\infty,x]\times]-\infty,y]} f(u,v)\, \lambda^{(2)}(du, dv) = 0.$$

- $D_2 = D$: Pour tout $(x,y) \in D$,

$$\begin{aligned}
F(x,y) &= \int_{]-\infty,x]\times]-\infty,y]} f(u,v)\, \lambda^{(2)}(du, dv) = \int_{[0,x]} \lambda(du) \int_{[u,y]} \frac{1}{v}\, \lambda(dv) \\
&= \int_{[0,x]} (\ln y - \ln u)\lambda(du) = x \ln y - [u \ln u - u]_0^x \\
&= x + x \ln \frac{y}{x}.
\end{aligned}$$

- $D_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < y \leq 1,\ y \leq x\}$: Pour tout $(x,y) \in D_3$, en remarquant que la densité f est nulle sur l'ensemble $(]-\infty,x]\times]-\infty,y]) \setminus (]-\infty,y]\times]-\infty,y])$ (faire un dessin), on a

$$F(x,y) = F(y,y) = y,$$

en utilisant le fait que $(y,y) \in D$ et l'expression correspondant au domaine D.

- $D_4 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x \leq 1,\ 1 \leq y\}$: Par le même raisonnement que ci-dessus, pour tout $(x,y) \in D_4$,
$$F(x,y) = F(x,1) = x - x\ln x,$$
en remarquant que $(x,1) \in D$.

- $D_5 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 1 \text{ et } y \geq 1\}$: Pour tout $(x,y) \in D_5$,
$$F(x,y) = 1.$$

Solution de E. VIII.5.3 Comme le vecteur aléatoire (X,Y) n'a que deux composantes, ses lois marginales se réduisent aux lois de X et de Y.

On calcule la densité de probabilité marginale f_X de X,

$$\begin{aligned}
&\forall x \in]0,1], \quad f_X(x) = \int_{[x,1]} f(x,y)\,\lambda(dy) = \int_{[x,1]} \frac{1}{y}\,\lambda(dy) = -\ln x \\
&\forall x \notin]0,1], \quad f_X(x) = 0.
\end{aligned}$$

La fonction de répartition F_X de X est alors (par définition de la densité)

$$F_X(x) = \int_{]-\infty,x]} f_X(u)\,\lambda(du) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0, \\ x - x\ln x & \text{si } x \in]0,1], \\ 1 & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

Pour Y, la densité f_Y se calcule

$$\begin{aligned}
&\forall y \in [0,1], \quad f_Y(y) = \int_{[0,y]} \frac{1}{y}\,\lambda(dx) = 1 \\
&\forall y \notin [0,1]; \quad f_Y(y) = 0.
\end{aligned}$$

Solution de E. VIII.5.4 On définit la densité conditionnelle de $Y \mid X = x$ où $x \in [0,1]$ par

$$y \mapsto f(y \mid x) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)}.$$

On a alors
$$\forall y \in [x,1], \quad f(y \mid x) = -\frac{1}{y\ln x}.$$

De même, on définit la densité conditionnelle de $X \mid Y = y$ où $y \in [0,1]$ par

$$x \mapsto f(x \mid y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)}.$$

On a alors
$$\forall x \in [0,y], \quad f(x \mid y) = \frac{1}{y}.$$

Solution de E. VIII.5.5 On a vu en cours que les variables aléatoires X et Y sont indépendantes si et seulement si $f(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$ pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, c'est-à-dire si $f(y \mid x) = f_Y(y)$.

Or

$$\left.\begin{array}{l} f(y \mid x) = -\frac{1}{y \ln x} \\ f_Y(y) = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow f(y \mid x) \neq f_Y(y).$$

Solution de E. VIII.6.1 Il suffit de développer l'intégrale et d'appliquer le Théorème de Tonelli, puis le théorème de Cauchy-Schwarz:

$$\begin{aligned}\int (|f| * |g|)^2 d\lambda &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} |f|(x)|g|(y-x)dx \right)^2 dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |f|(x_1)|f|(x_2) \int_{\mathbb{R}} |g|(y-x_1)|g|(y-x_2)dy\, dx_1 dx_2 \\ &\leq \|g\|_{L^2}^2 \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |f|(x_1)|f|(x_2)\, dx_1 dx_2 \\ &= \|g\|_{L^2}^2 \|f\|_{L^1}^2\end{aligned}$$

et le théorème de Tonelli permet de conclure que $|f| * |g| \in L^2$.

Solution de E. VIII.6.2 On a, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\int_{\mathbb{R}} |h(x)| \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x-y)||g(y)|\, \lambda(dy) \right) \lambda(dx) = \int_{\mathbb{R}} |h|(|f| * |g|)\, d\lambda \leq \|h\|_{L^2} \|\, |f| * |g|\, \|_{L^2} < \infty$$

puisque $|f| * |g|$ est L^2 d'après la question précédente.

Le théorème de Fubini-Tonelli nous assure donc l'intégrabilité de la fonction considérée sur $\mathbb{R}^2$.

Solution de E. VIII.6.3 En appliquant maintenant le théorème de Fubini, on trouve :

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} (f * g)h\, d\lambda &= \iint_{\mathbb{R}^2} h(x)f(x-y)g(y)\, \lambda(dx,dy) \\ &= \int_{\mathbb{R}} g(y) \left(\int_{\mathbb{R}} f(x-y)h(x) \right) \lambda(dy) \\ &= \int_{\mathbb{R}} g(\hat{f} * h)\, d\lambda.\end{aligned}$$

Solution de E. VIII.6.4

Solution de E. VIII.7.1

(a) Pour commencer, on justifie qu'il existe $\delta > 0$ tel que $K^{2\delta} \subset \Omega$. Ceci est dû au fait que puisque Ω est ouvert, il est voisinage de chacun de ses points. Donc pour tout $x \in K$, il existe $r_x > 0$ tel que $B(x, r_x) \subset \Omega$. Ainsi $\bigcup_{x \in K} B(x, r_x)$ est un recouvrement ouvert de K. Par la propriété de Riemann-Lebesgue, on peut donc en extraire un recouvrement fini. Soit donc $x_1, \ldots, x_n \in K$ tels que $K \subset \bigcup_{i=1}^n B(x_i, r_{x_i})$. Comme chacune de ces boules est incluse dans Ω, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $i = 1, \ldots, n$, $B(x_i, r_{x_i} + 2\delta) \subset \Omega$. On a alors

$$K^{2\delta} \subset \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, r_{x_i} + 2\delta) \subset \Omega.$$

De plus, $K^{2\delta}$ est borné et fermé, donc compact (caractérisation des compacts en dimension finie).

(b) On déduit de la question 3) de l'Exercice VIII.2 que la fonction $\psi_K \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ (à ceci près que f était supposée continue dans l'Exercice VIII.2, mais on vérifiera que le résultat tient également pour une fonction L^1).
Si $x \in K$, on vérifie facilement que $\psi_K(x) = 1$.
On peut par exemple utiliser la question 3) de l'Exercice VIII.6 (ou le voir directement) pour déduire que $\mathrm{supp}\psi_K \subset K^{2\delta}$, qui est inclus dans Ω par construction. Donc ψ_K est à support compact.

Solution de E. VIII.7.2 Prenons une suite de fonctions $(\psi_{K_n})_{n\in\mathbb{N}}$ comme suggérée dans l'énoncé. Soit $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d))^{\mathbb{N}}$ telle que $\|f_n - f\|_p \to 0$ quand $n \to \infty$ (qui existe par densité de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$ dans $L^p(\mathbb{R}^d)$). Considérer alors la suite de fonctions définies pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $\tilde{f}_n = f_n \psi_{K_n}$ et conclure.