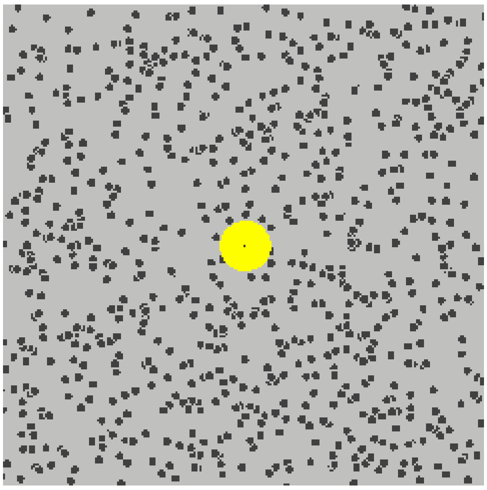
Wikipedia

布朗运动

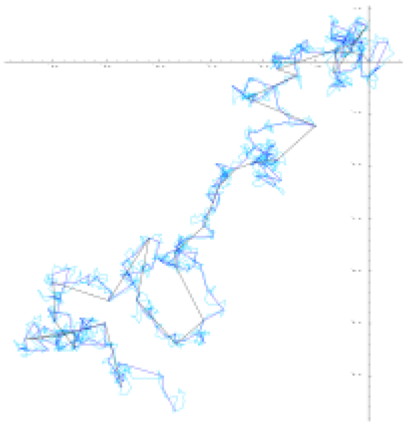
维基百科，自由的百科全书

布朗运动（Brownian motion）是微小粒子或者颗粒在流体中做的无规则运动。布朗运动过程是一种正态分布的独立增量连续随机过程。它是随机分析中基本概念之一。其基本性质为：布朗运动W(t)是期望为0、方差为t（时间）的正态随机变量。对于任意的r小于等于s，W(t)-W(s)独立于的W(r)，且是期望为0、方差为t-s的正态随机变量。可以证明布朗运动是马尔可夫过程、鞅过程和伊藤过程。



模擬的大顆粒塵埃粒子碰撞到更小的粒子，而其以不同的速度在不同方向移動的**布朗運動**。

它是在西元1827年[1]英國植物學家罗伯特·布朗利用一般的顯微鏡觀察懸浮於水中由花粉所迸裂出之微粒時，發現微粒會呈現不規則狀的運動，因而稱它布朗運動。布朗運動也能測量原子的大小，因為就是由水中的水分子對微粒的碰撞產生的，而不規則的碰撞越明顯，就是原子越大，因此根據布朗運動，定義原子的直徑為10^{-8}厘米。



粒子的立體空間進行布朗運動的示意圖。

目录

定義

自1860年以來，許多科學家都在研究此種現象，後來發現布朗運動有下列的主要特性：[2]

1. 粒子的運動由**平移**及**轉移**所構成，顯得非常沒規則而且其軌跡幾乎是處處沒有切線。
2. 粒子之移動顯然互不相關，甚至於當粒子互相接近至比其直徑小的距離時也是如此。
3. 粒子越小或液體粘性越低或溫度越高時，粒子的運動越活潑。
4. 粒子的成分及密度對其運動沒有影響。
5. 粒子的運動永不停止。

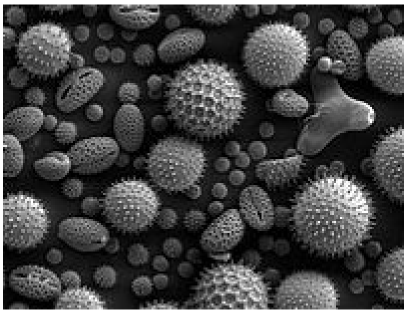
對於布朗運動之誤解

值得注意的是，布朗运动指的是花粉迸出的微粒的随机运动，而不是分子的随机运动。但是通过布朗运动的现象可以间接证明分子的无规则运动。

一般而言，花粉之直徑分布於30～50μm、最小亦有10μm之譜，相較之下，水分子直徑約0.3nm（非球形，故依部位而有些許差異。），略為花粉的十萬分之一。因此，花粉難以產生不規則振動，事實上花粉幾乎不受布朗運動之影響。在罗伯特·布朗的手稿中，「tiny particles from the pollen grains of flowers」意味著「自花粉粒中迸出之微粒子」，而非指花粉本身。然而在翻譯為諸國語言時，時常受到誤解，以為是「水中的花粉受布朗運動而呈現不規則運動」。積非成是之下，在大眾一般觀念中，此誤會已然根深蒂固。

在日本，以鶴田憲次『物理学叢話』為濫觴，岩波書店『岩波理科辞典』[3]、花輪重雄『物理学読本』、湯川秀樹『素粒子』、坂田昌一『物理学原論（上）』、平凡社『理科辞典』、福岡伸一著『生物與無生物之間』，甚至日本的理科課本等等，皆呈現錯誤之敘述。

直到1973年横浜市立大学名誉教授植物学者岩波洋造在著書『植物之SEX-不為人知的性之世界』中，點出此誤謬之前，鮮少有人注意。国立教育研究所物理研究室長板倉聖宣在參與製作岩波電影『迴動粒子』（1970年）時，實際攝影漂浮在水中之花粉，卻發現花粉完全沒有布朗運動。遂於1975年3月，以「外行人與專家之間」為題，解說有關布朗運動之誤會。



花粉具備足夠大小，幾乎無法觀測到布朗運動。

爱因斯坦的理論

在1905年，爱因斯坦提出了相关理论。他的理論有兩個部分：第一部分定義布朗粒子擴散方程，其中的擴散係數與布朗粒子平均平方位移相關，而第二部分連結擴散係數與可測量的物理量。以此方式，愛因斯坦可決定原子的大小，一莫耳有多少原子，或氣體的克分子量。根據阿伏伽德罗定律，所有理想氣體在標準溫度和壓力下體積為22.414升，其中包含的原子的數目被稱為「阿伏伽德罗常数」。由氣體的莫耳質量除以阿伏伽德罗常数等同原子量。

爱因斯坦论证的第一部分是，确定布朗粒子在一定的时间内运动的距离。[4] 经典力学无法确定这个距离，因为布朗粒子将会受到大量的撞击，每秒大约发生 10^{14} 次撞击。[5] 因此，爱因斯坦将之简化，即讨论一个布朗粒子团的运动。

他把粒子在一个的空间中，把布朗粒子在一维方向上的运动增量 (x) 视作一个随机值（Δ 或者 x，并对其坐标进行变换，让原点成为粒子运动的初始位置）并给出概率密度函数 $\varphi(\Delta)$。另外，他假设粒子的数量有限，并扩大了密度（单位体积内粒子数量)，展开成泰勒级数 。

$$\begin{aligned}\rho(x,t)+\tau\frac{\partial\rho(x)}{\partial t}+\cdots=\rho(x,t+\tau)&=\int_{-\infty}^{+\infty}\rho(x+\Delta,t)\cdot\varphi(\Delta)\,\mathrm{d}\Delta\\&=\rho(x,t)\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\Delta)\,d\Delta+\frac{\partial\rho}{\partial x}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}\Delta\cdot\varphi(\Delta)\,\mathrm{d}\Delta\\&\quad+\frac{\partial^2\rho}{\partial x^2}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\Delta^2}{2}\cdot\varphi(\Delta)\,\mathrm{d}\Delta+\cdots\\&=\rho(x,t)\cdot 1+0+\frac{\partial^2\rho}{\partial x^2}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\Delta^2}{2}\cdot\varphi(\Delta)\,\mathrm{d}\Delta+\cdots\end{aligned}$$

第一行中的第二个等式是被 φ 这个函数定义的。第一项中的积分等于一个由概率定义函数，第二项和其他偶数项（即第一项和其他奇数项）由于空间对称性而消失。化简可以得到以下关系关系：

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}=\frac{\partial^2\rho}{\partial x^2}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\Delta^2}{2\,\tau}\cdot\varphi(\Delta)\,\mathrm{d}\Delta+(\text{更高阶的项})$$

拉普拉斯算子之前的系数，是下一刻的随机位移量 Δ，让 D 为质量扩散系数：

$$D = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\Delta^2}{2\,\tau} \cdot \varphi(\Delta)\,\mathrm{d}\Delta$$

那么在 t 时刻 x 处的布朗粒子密度 ρ 满足扩散方程：

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = D \cdot \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2},$$

假設在初始時刻t = 0時，所有的粒子從原點開始運動，擴散方程的解

$$\rho(x,t) = \frac{\rho_0}{\sqrt{4\pi Dt}} e^{-\frac{x^2}{4Dt}}.$$

数学模型

定义

满足下列条件的鞅我们称之为布朗运动

1. 这个鞅是关于时间连续的。
2. 他的平方减去时间项也是一个鞅。

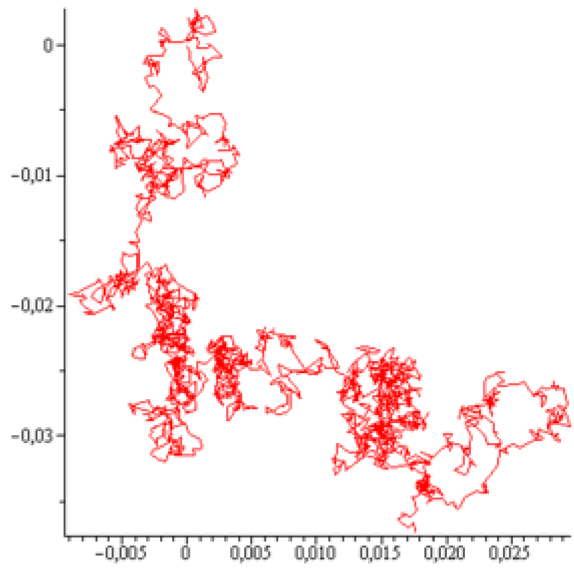
(M_t)是一个布朗运动当且仅当(M_t)为鞅，且$(M_t^2 - t)$也为鞅.

其他定义

一维的定义

一维布朗运动$(B_t)_{t\geq 0}$是关于时间t的一个随机过程，他满足 ：

1. （独立增量）设时间t和s满足$t > s$,增量$B_t - B_s$独立于时间s前的过程$(B_u)_{0\leq u\leq s}$。
2. （稳定增量和正态性）设时间t和s满足$t > s$,增量$B_t - B_s$服从均值为0方差为$t-s$的正态分布。
3. $(B_t)_{t\geq 0}$几乎处处连续， 也就是说在任何可能性下， 函数$t \mapsto B_t(\omega)$是连续的.
4. 通常假设$B_0 = 0$。这种布朗运动我们称它为标准的。



3000步的2维布朗运动的模拟。

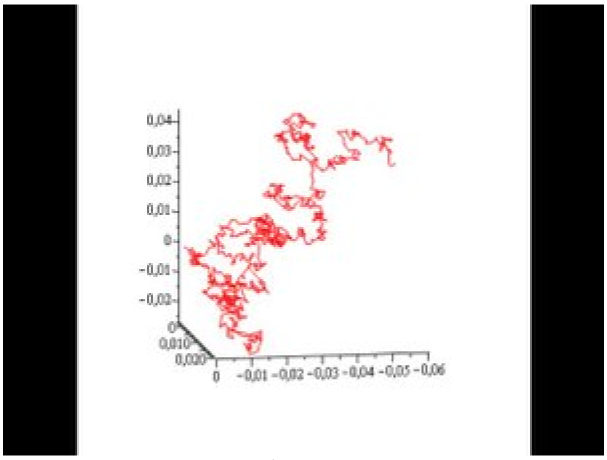
等价定义

一维布朗运动$(B_t)_{t\geq 0}$是关于时间t的一个随机过程，他满足 ：

1. $(B_t)_{t\geq 0}$是一个高斯过程，也就是说对于所有的时间列：$t_1 \leq t_2 \leq ... \leq t_n$,随机向量：$(B_{t_1}, B_{t_2}, ..., B_{t_n})$服从高维高斯分布（正态分布）。
2. $(B_t)_{t\geq 0}$几乎处处连续。
3. 对于所有s和t,均值$\mathbb{E}[B_t] = 0$，协方差$E[B_s B_t] = min(s,t)$.

高维定义

$(B_t)_{t\geq 0}:=\left(B_t^1,B_t^2,\ldots,B_t^d\right)_{t\geq 0}$是$d$维布朗运动，只需满足$B^1,B^2,\ldots,B^d$为独立的布朗运动。



播放媒体

1000步的3维布朗运动模拟。

换句话说，d维布朗运动 取值于$\mathbb{R}^d$，而它在$\mathbb{R},\mathbb{R}^2,\ldots,\mathbb{R}^{d-1}$空间上的投影均为布朗运动。

Wiener测度的定义

设$\mathcal{C}(\mathbb{R}^+,\mathbb{R})$为从$\mathbb{R}^+$到$\mathbb{R}$的连续函数空间，$(\Omega,\mathcal{T},\mathbb{P})$为概率空间。布朗运动为映射

$$\begin{aligned} B:\Omega &\longrightarrow C(\mathbb{R}^+,\mathbb{R}) \\ \omega &\mapsto (t\mapsto B_t(\omega)). \end{aligned}$$

Wiener测度 （或称为布朗运动的分布）设为$W(d\omega)$,是映射B关于$\mathbb{P}(d\omega)$的图测度。

换句话说， W是$\mathcal{C}(\mathbb{R}^+,\mathbb{R})$上的一个概率测度，满足对于任何$A\subset\mathcal{C}(\mathbb{R}^+,\mathbb{R})$，有

$$W(A)=\mathbb{P}((B_t)_{t\geq 0}\in A)。$$

备忘

- 布朗运动是一种增量服从正态分布的莱維過程。
- 这个定义可以帮助我们证明布朗运动的很多特性，比如几乎处处连续，轨迹几乎处处不可微等等。
- 我们可以利用二次变差的期望为时间来等价定义布朗运动。这个定义由Levy定理演化而来， 即： 轨迹连续且二次变差为t的随机过程为布朗运动。

性质

- 布朗运动的轨道几乎处处不可微：对于任何$\omega\in\Omega$,轨道$t\mapsto B_t(\omega)$为一个连续但是零可微的函数。
- 协方差$\mathbb{E}[B_sB_t]=min(s,t)$。
- 布朗运动具有强马氏性： 对于停时T,取条件$[T<\infty]$,过程$(B_t^T)_{t\geq 0}:=(B_{T+t}-B_T)_{t\geq 0}$为一个独立于$(B_s)_{0\leq s<T}$的布朗运动。
- 它的Fourier变换或特征函数为$\mathbb{E}[e^{iuB_t}]=e^{-\frac{tu^2}{2}}$。可见，布朗运动是一个无偏，无跳跃，二项系数为1/2的Levy过程。
- 布朗运动关于时间是齐次的： 对于$s > 0$, $(B_{t+s}-B_s)_{t\geq 0}$是一个独立于$(B_u)_{0\leq u\leq s}$的布朗运动。
- -B是一个布朗运动。
- （稳定性） 对于$c > 0$， $\left(cB_{\frac{t}{c^2}}\right)_{t\geq 0}$ 是布朗运动。
- （时间可逆性） $\left(tB_{\frac{1}{t}}\right)_{t>0}$ 在t=0之外是布朗运动。
- （常返性）只有1维和2维布朗运动是常返的：

  如果$d\in\{1,2\}$,集合$\{t\geq 0,B_t=x\}$不是有界的，对于任何$x\in\mathbb{R}^d$，
  如果$d\geq 3$, $\lim_{t\to\infty}||B_t||=+\infty$（几乎处处）。

- （反射原理）

$$\mathbb{P}[\sup_{0\leq s\leq t}B_s\geq a]=2\mathbb{P}[B_t\geq a]=\mathbb{P}[|B_t|\geq a].$$

布朗运动的数学构造

利用Kolmogorov一致性定理

设$(f_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$为$L^2(\mathbb{R}_+)$空间中一列实值函数。设：

$$\forall(u,v)\in\mathbb{R}_+, s(u,v)=\langle f_u,f_v\rangle_{L^2(\mathbb{R}_+)}=\int_{\mathbb{R}_+}f_u(x)f_v(x)dx$$

这列函数满足：

$\forall k\in\mathbb{N}^*$，任意的$t_1,\dots,t_k\in\mathbb{R}_+$,矩阵$(s(t_i,t_j))_{1\le i,j\le k}$为对称半正定的。

利用Kolmogorov一致性定理，我们可以构造高斯过程$\{Y_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$，它的均值$m$任意， 协方差为上面定义的$s$。

当$(f_t)_{t\in\mathbb{R}_+}=\left(\sqrt{c}.\mathbb{1}_{[0,t]}\right)_{t\in\mathbb{R}_+}$，$c>0$为不依赖于t的常数，$\mathbb{1}_{[0,t]}$为$[0,t]$上的示性函数。则：

$$s(u,v)=c\int_{\mathbb{R}}\mathbb{1}_{[0,u]}(s)\mathbb{1}_{[0,v]}(s)ds=\mathrm{c.min}(u,v)$$

在这个情况下，矩阵$(s(t_i,t_j))_{1\le i,j\le k}$是对称且正定的。

我们称一个高斯过程为 **布朗运动**当且仅当均值为0，协方差为s。$c=Var(B_1)$，当$c=1$时， 称之为 **标准的布朗运动**.

利用随机过程

Donsker定理（1951）证明了逐渐归一化的随机游走弱收敛于布朗运动。

$$\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{n}}\left(\sum_{k=1}^{[nt]}U_k+(nt-[nt])U_{[nt]+1}\right)\right)_{0\le t\le 1}\underset{n\to\infty}{\Longrightarrow}(B_t)_{0\le t\le 1}$$

其中（$U_n, n\ge 1$） 独立同分布， 均值为0,方差为σ的随机变量序列。

利用傅立叶级数

设2列独立的正态$\mathcal{N}(0,1)$随机变量序列$(N_k,k\in\mathbb{N})$和$(N'_k,k\in\mathbb{N})$。定义$(B_t)_{t\ge 0}$：

$$B_t:=tN_0+\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\sqrt{2}}{2\pi k}\left(N_k\cos(2\pi kt-1)+N'_k\sin(2\pi kt)\right)$$

为布朗运动。

参见

- 维纳过程

腳註

1. 部分紀錄為1828年。
2. 李育嘉. 漫談布朗運動.
3. 該辭典已於1987年所發行之第四版中修正。

4. BROWNIAN MOTION. : 5.
5. Feynman, R. The Brownian Movement. The Feynman Lectures of Physics, Volume I. 1964: 41Template:Hyphen1.

外部連結

- 漫談布朗運動 (http://psroc.phys.ntu.edu.tw/bimonth/download.php?d=1&cpid=148&did=2)

https://www.sciencedirect.com/topics/pharmacology-toxicology-and-pharmaceutical-science/brownian-motion