WIKIPÉDIA

Pi-système

En mathématiques, un **π-système** (ou **pi-système**) sur un ensemble X est un ensemble de parties de X stable par intersection[1]. Les π-systèmes font parties des familles d'ensembles que l'on rencontre en théorie de la mesure et théorie des probabilités. On sait par exemple grâce au lemme de classe monotone que deux mesures finies, et en particulier deux mesures de probabilités, dont les valeurs coïncident sur un π-système, coïncident également sur la tribu engendrée par le dit π-système[2]. Les π-systèmes offrent donc une famille d'ensembles de prédilection, et relativement simple[3], pour vérifier l'égalité de deux mesures ou bien l'unicité de la construction d'une mesure.

Sommaire

Définition

Définition[1, 4] — Soit X un ensemble. On appelle **π-système** sur X, un ensemble $\mathcal{C}$ de parties de X qui vérifie la propriété suivante :

$$A,\ B \in \mathcal{C} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{C}\,.$$

Il est important de remarquer que certains auteurs requièrent dans la définition la condition supplémentaire que $\mathcal{C}$ ne soit pas vide [3], ou bien encore que X appartienne à $\mathcal{C}$ [2]. Ceci évitant la manipulation du π-système vide dans les preuves. On peut faire remonter l'usage du terme π-système au moins jusqu'au mathématicien Eugene Dynkin en 1961[1].

Exemples

- Une algèbre d'ensemble est un π-système, et par conséquent une tribu l'est aussi.
- Une topologie est un π-système.
- L'ensemble des intervalles semi-ouverts à droite, $\{[a,b) \mid a,\ b \in \mathbf{R},\ a < b\}$(en y adjoignant l'intervalle vide) est un π-système. Il en va de même pour les autres familles d'intervalles même non bornés.

Propriétés

Dans cette section établissons quelques propriétés des π-systèmes qui ne sont pas étrangères à celle des tribus.

Propriété — L'intersection d'une famille quelconque de π-systèmes sur un même ensemble est un π-système.

Démonstration

Soit Λ un ensemble non-vide et $(P_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ une famille de π-systèmes sur un ensemble X. Si A et B appartiennent à l'intersection de cette famille, ils appartiennent à chacun de ses membres et donc l'intersection $A\cap B$ appartient aussi à chacun de ses membres. On conclut aisément que l'intersection $A\cap B$ appartient à l'intersection de cette famille de π-système. Dans le cas où Λ est l'ensemble vide, l'intersection correspond à l'ensemble des parties de X qui forment un π-système[5].

Comme conséquence directe de cette propriété, on obtient que pour toute famille $\mathcal{E}$ de parties d'un ensemble X il existe un plus petit π-système qui la contient, au sens de l'inclusion des ensembles. On pourrait l'appeler le π-système engendré par $\mathcal{E}$ par analogie avec les tribus engendrées. Il est unique et se construit comme l'intersection de tous les π-systèmes qui contiennent $\mathcal{E}$.

Propriété — L'image réciproque d'un π-système sur un ensemble X par une fonction d'un ensemble Y dans X est un π-système sur Y.

Démonstration

Cette propriété est évidente de part les propriétés élémentaires des fonctions réciproques, cependant on rappelle que si P est le π-système et f la fonction, l'image réciproque du π-système est constituée des ensembles $f^{-1}(A)$ pour A dans P.

Dans le cas remarquable d'une variable aléatoire réelle X définie sur un espace de probabilité Ω, les ensembles $\{X\leq a\}=\{\omega\mid X(\omega)\leq a\}$ pour a réel est un π-système. Par ailleurs on obtient la fonction de répartition F_X de X comme les probabilités des ensembles de ce π-système en posant $F_X(x)=\mathbf{P}(\{X\leq x\})$ pour tout x réel où $\mathbf{P}$ désigne la mesure de probabilité considérée sur Ω. Celle-ci permet de caractériser la loi de la variable aléatoire X.

Propriété — Soit $(X_t)_{t\in T}$ une famille d'ensembles indexée par un ensemble T. Si l'on se donne pour chaque t dans T un π-système P_t sur X_t alors, sur le produit cartésien $\Pi_{t\in T}X_t$, la famille de tous les ensembles cylindriques[4]

$$C_{t_1,\ldots,t_n}(A_{t_1},\ldots,A_{t_n})=\{x\in\Pi_{t\in T}X_t\mid x(t_i)\in A_{t_i},\,i=1,\ldots,n\}$$

où n est un entier, $t_1,\ldots,t_n$ sont éléments de T et pour chaque entier j jusqu'à n, A_{t_j} est un élément de P_{t_j}, forme un π-système.

Démonstration

La démonstration de ce fait consiste essentiellement en un changement de l'indexation du cylindre formé par l'intersection de deux cylindres. Soit deux cylindres $C_{t_1,\ldots,t_n}(A_{t_1},\ldots,A_{t_n})$ et $C_{s_1,\ldots,s_m}(B_{s_1},\ldots,B_{s_m})$, leur intersection est un cylindre $C_{r_1,\ldots,r_k}(D_{r_1},\ldots,D_{r_k})$ où $k\leq n+m$ et les ensembles D_{r_i} sont de la forme A_{t_j} ou B_{s_j} ou $A_{t_j}\cap B_{t_j}$ pour un certain j.

En particulier, lorsque $T=\{1,\ldots,n\}$ est fini, respectivement. $T=\mathbb{N}$, on obtient une construction plus simple de telle manière que l'on peut écrire le π-système comme suit : $\{A_1\times\cdots\times A_n\mid A_i\in P_i\text{ ou }A_i=X_i,\,i=1,\ldots n\}$, respectivement $\{\Pi_{i\in\mathbb{N}}A_i\mid A_i\in P_i\text{ ou }A_i=X_i,\,i\in\mathbb{N}\}$. On remarque aisément en supposant X_i dans P_i pour chaque i que l'on peut simplifier encore ces expressions.

De tels systèmes se rencontrent bien souvent lorsque P_t est en fait une tribu sur X_t, et donc en particulier un π-système. Dans ce cas la famille des cylindres est génératrice de la tribu cylindrique sur l'espace produit qui est une tribu d'usage classique dans l'étude des processus stochastiques [6].

Notes et références

1. Eugene Dynkin (trad. D. E. Brown), *Theory of Markov processes*, Prentice Hall, Inc., 1961, p.1.
2. Marc Briane et Gilles Pagès, *Théorie de l'intégration*, Vuibert, 2006 (4ème edition), p. 81.
3. Lawrence Evans et Ronald Gariepy, *Measure theory and fine properties of functions*, CRC Press, 2015 (revised edition), p.7.
4. Olav Kallenberg, *Foundations of Modern Probability*, Springer, 2002 (2nd edition), p.2
5. Voir la section *Famille indexée de parties d'un ensemble* de la page Tribu.
6. E. Dynkin (1961), *Op. cit.*, p.6.