WIKIPÉDIA

Vecteur aléatoire

Un **vecteur aléatoire** est aussi appelé **variable aléatoire multidimensionnelle**.

Sommaire

Définition

Un vecteur aléatoire est une généralisation à *n* dimensions d'une variable aléatoire réelle. Alors qu'une variable aléatoire réelle est une fonction qui à chaque éventualité fait correspondre un nombre réel, le vecteur aléatoire est une fonction *X* qui à chaque éventualité fait correspondre un vecteur de $\mathbb{R}^n$:

$$X : \omega \mapsto X(\omega) = (X_1(\omega), X_2(\omega), \ldots, X_n(\omega))$$

où ω est l'élément générique de Ω, l'espace de toutes les éventualités possibles.

Les applications X_1, ..., X_n sont des variables aléatoires réelles appelées *composantes* du vecteur aléatoire *X*. On note alors $X = (X_1, ..., X_n)$.

Une application X de $(\Omega, \mathcal{F})$ (définie sur Ω), à valeurs dans l'espace $\mathbb{R}^n$ muni de la tribu des boréliens de $\mathbb{R}^n$, est un vecteur aléatoire si elle est mesurable.

Fonction de répartition

Soit $X = (X_1, \ldots, X_n)$ un vecteur aléatoire. Sa fonction de répartition $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est ainsi définie :

$$F(x_1, \ldots, x_n) = \mathbb{P}((X_1 \leq x_1) \cap \cdots \cap (X_n \leq x_n))$$

Indépendance de vecteurs aléatoires

Définition

Deux vecteurs aléatoires sont indépendants si et seulement si la probabilité que ces vecteurs prennent une valeur donnée est égale au produit des probabilités que chaque vecteur prenne une valeur donnée. De plus si la covariance des deux vecteur est nul.

Exemple

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. On pose trois vecteurs aléatoires.

$$X(\Omega) = \{x_1, \ldots, x_p\},\ Y(\Omega) = \{y_1, \ldots, y_q\},\ Z(\Omega) = \{z_1, \ldots, z_r\}.$$

Par leur indépendance, on a :

$$\mathbb{P}(X = x_i, Y = y_j, Z = z_k) = \mathbb{P}(X = x_i) \cdot \mathbb{P}(Y = y_j) \cdot \mathbb{P}(Z = z_k),\ \forall i \in [\![1;p]\!], j \in [\![1;q]\!], k \in [\![1;r]\!].$$

Vecteur gaussien

Définition

Un vecteur aléatoire de dimension n est un *vecteur gaussien* si toute combinaison linéaire de ses composantes est une variable gaussienne.

Définition — Soit $X = (X_1, \ldots, X_n)$ un vecteur aléatoire. X est *gaussien* si et seulement si, pour toute suite $(a_1, \ldots, a_n)$ de nombres réels, la variable aléatoire

$$Z = a_1 X_1 + a_2 X_2 + \cdots + a_n X_n$$

est une variable gaussienne.

Construction d'un vecteur gaussien à partir de sa matrice de covariance

Il est notable que toute matrice définie positive est la matrice de covariance d'un vecteur gaussien. De plus on peut déterminer un unique vecteur gaussien à partir de cette matrice et d'un vecteur réel (correspondant au vecteur des moyennes du vecteur gaussien)[1].

Propriété — Soit Γ une matrice réelle définie positive de taille $d \times d$, et μ un vecteur de taille d.

Il existe un unique vecteur gaussien $X = (X_1, \ldots, X_n)$ dont Γ est la matrice de covariance et μ est le vecteur de moyenne.

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \mathrm{Var}(X_1) & \mathrm{Cov}(X_1, X_2) & \ldots & \mathrm{Cov}(X_1, X_n) \\ \mathrm{Cov}(X_1, X_2) & \ldots & \ldots & \\ \ldots & & & \\ \mathrm{Cov}(X_1, X_n) & \ldots & \ldots & \mathrm{Var}(X_n) \end{pmatrix} \text{ et } \mu = \begin{pmatrix} \mathbb{E}(X_1) \\ \mathbb{E}(X_2) \\ \ldots \\ \mathbb{E}(X_n) \end{pmatrix}$$

On note $X \sim \mathcal{N}(\mu, \Gamma)$ le vecteur gaussien associé à μ et Γ.

De plus on peut calculer la fonction caractéristique et la densité de ce vecteur gaussien.

Propriété — Soit $X \sim \mathcal{N}(\mu, \Gamma)$.

Sa fonction caractéristique $\Phi_X(u)$ s'exprime (avec $u \in \mathbb{R}^d$) :

$$\Phi_X(u) = \exp\left(iu^t\mu - \frac{1}{2}u^t\Gamma u\right)$$

Sa densité $f_X(u)$ s'exprime (avec $x \in \mathbb{R}^d$ et d dimension de X) :

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^d \det(\Gamma_X)}} \exp\left(-\frac{1}{2}(x-\mu)^t \Gamma^{-1}(x-\mu)\right)$$

Enfin, on peut noter cette relation entre X vecteur gaussien et un vecteur de lois normales centrées réduites indépendantes :

Propriété — Soit $X \sim \mathcal{N}(\mu, \Gamma)$.

$$X = AZ + \mu$$

avec A matrice racine carrée de Γ, μ vecteur des moyennes et Z vecteur aléatoire dont les composantes sont indépendantes et suivent une loi normale $\mathcal{N}(0,1)$

Notes et références

1. Vecteurs Gaussiens, Préparation à l'Agrégation Bordeaux 1, Jean-Jacques Ruch (https://www.math.u-bordeaux.fr/~mchabano/Agreg/ProbaAgreg1213-COURS1-VectGauss.pdf)

Bibliographie

- Patrick Bogaert, Probabilités pour scientifiques et ingénieurs, De Boeck Université, 2006, Bruxelles
- Alain Cambrouze, Probabilités1, Presses Universitaires de France, 1996, Paris
- Yves Ducel, Introduction à la théorie mathématique des probabilités, Ellipses , 1998, (ISBN 2-7298-9820-4)
- Jean-Pascal Ansel, Yves Ducel, Exercices corrigés en théorie des probabilités, Ellipses , 1996, (ISBN 2-7298-4688-3)

Liens internes

- Variable aléatoire
- Variable aléatoire réelle

Liens externes

- Vecteurs aléatoires gaussiens (http://labomathlens.free.fr/Liens/ProbaM1/PROBA02.pdf)
- Vecteurs aléatoires - rappels et compléments (http://www.hds.utc.fr/sy19/documents/cours/vect_aleatoires.pdf)