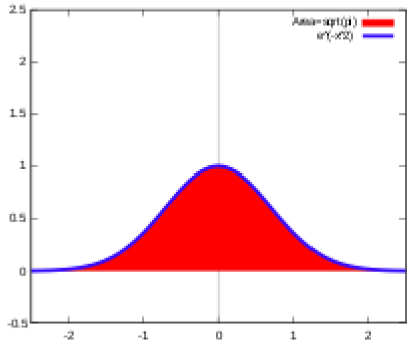
WIKIPÉDIA

Intégrale de Gauss

En mathématiques, une **intégrale de Gauss** est l'intégrale d'une fonction gaussienne sur l'ensemble des réels. Sa valeur est reliée à la constante π par la formule

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha\, x^2}\, \mathrm{d}x = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}},$$

où α est un paramètre réel strictement positif. Elle intervient dans la définition de la loi de probabilité appelée loi gaussienne, ou loi normale.



La surface comprise entre la courbe d'équation $y = \exp(-x^2)$ et l'axe des abscisses vaut √π.

Cette formule peut être obtenue grâce à une intégrale double et un changement de variable polaire. Sa première démonstration connue est donnée par Pierre-Simon de Laplace.

Ainsi on a par exemple, avec les notations classiques :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{|\sigma|\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\, \mathrm{d}x = 1\,.$$

Si l'on travaille à n dimensions, la formule se généralise sous la forme suivante :

$$\int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{-\alpha\,\|x\|^2}\, \mathrm{d}x = \left(\frac{\pi}{\alpha}\right)^{\frac{n}{2}} \text{ avec } x = (x_1, \ldots, x_n) \text{ et } \|x\| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}.$$

Sommaire

Intégrabilité de la fonction

Comme l'intégrande est pair, il suffit, pour montrer qu'il est intégrable sur $\mathbb{R}$, de prouver qu'il est intégrable sur $\mathbb{R}_+$. Cela résulte de ce qu'il est positif, continu, et négligeable à l'infini devant, par exemple, la fonction $x \mapsto x^{-2}$, intégrable sur $[1, +\infty[$.

Calcul de l'intégrale de Gauss

Un théorème de Liouville montre que l'intégrande de l'intégrale de Gauss n'admet aucune primitive s'exprimant à l'aide des fonctions usuelles (exponentielle, etc.). Cela oblige pour calculer cette intégrale à recourir à des méthodes plus ou moins « détournées », dont la plus classique et directe est celle qui utilise des intégrales doubles ; d'autres méthodes classiques existent dont une élémentaire, mais nettement plus longue, qui fait appel aux intégrales de Wallis et une autre qui utilise une fonction définie par une intégrale.

Cas particulier α = 1

La méthode classique de calcul utilise une intégrale double qu'on exprime en coordonnées cartésiennes, puis en coordonnées polaires.

Démonstration

Soient

$$G=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x \text{ et } H=\iint_{\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+}\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Compte tenu de ce que les variables x et y se séparent, le théorème de Fubini donne :

$$H=\iint_{\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+}\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{e}^{-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\left(\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x\right)\left(\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-y^2}\,\mathrm{d}y\right)=G^2\,.$$

On passe en coordonnées polaires en posant $x=r\cos\theta$ et $y=r\sin\theta$; les variables r et θ se séparent elles aussi :

$$H=\iint_{\mathbb{R}_+\times\left[0,\,\frac{\pi}{2}\right]}\mathrm{e}^{-r^2}\,r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta=\left(\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-r^2}\,r\,\mathrm{d}r\right)\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\,\mathrm{d}\theta\right)=\left[\frac{-\mathrm{e}^{-r^2}}{2}\right]_0^{+\infty}.$$

On en déduit :

$$G^2=\frac{\pi}{4},\quad \text{d'où}\quad G=\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\quad\text{puisque}\quad G\geq 0,\quad\text{et}\quad\text{enfin}\quad: \int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x=2\,G=\sqrt{\pi}\text{ par parité.}$$

Une variante utilise une fonction définie par une intégrale[1]. Cette seconde méthode n'utilise que des résultats sur les intégrales simples (à une seule variable) usuelles (sur un intervalle fermé borné) et est donc plus élémentaire. Elle est cependant plus technique.

Quelle que soit la technique utilisée, on a bien démontré que $\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x=\sqrt{\pi}$.

Cas générique

De cette formule, on peut déduire par changement de variable la formule générique pour toute intégrale gaussienne :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-ax^2+bx+c)\mathrm{d}x = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\exp\left(\frac{b^2}{4a}+c\right)$$ (où a, b, c sont réels et $a > 0$).

L'intégrale de Gauss comme valeur particulière de la fonction Gamma

La valeur en $\frac{1}{2}$ de la fonction Gamma d'Euler est

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} t^{\frac{1}{2}-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = 2\int_0^{+\infty} u^{2\times\frac{-1}{2}+1}\mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u = \int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u = \sqrt{\pi}\,.$$

Transformée de Fourier d'une fonction gaussienne

Soit la fonction gaussienne

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ x\mapsto \mathrm{e}^{-\alpha\,x^2}\text{, avec }\alpha>0.$$

Elle est intégrable sur $\mathbb{R}$. Sa transformée de Fourier

$$F=\mathcal{F}(f):\mathbb{R}\to\mathbb{C}$$

définie par

$$F(\xi)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{e}^{-i\,\xi\,x}\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\alpha\,x^2}\,\mathrm{e}^{-i\,\xi\,x}\mathrm{d}x$$

est telle que

$$\forall\xi\in\mathbb{R}\quad F(\xi)=\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\,\mathrm{e}^{-\frac{\xi^2}{4\alpha}}.$$

On propose ci-dessous deux démonstrations de ce résultat.

Par une équation différentielle linéaire

On utilise une équation différentielle vérifiée par la fonction *f*.

Par définition : $F(0)=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\alpha\,x^2}\mathrm{d}x\text{ donc }F(0)=\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}.$

D'autre part, *f* est (au moins) de classe C^1 et vérifie l'équation différentielle linéaire

$$\forall x\in\mathbb{R}\quad f'(x)=-2\alpha\,xf(x)=-2\alpha g(x),\ \text{en notant } g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, x\mapsto xf(x).$$

On justifie (comme plus haut) que *g* (donc *f'*) est intégrable sur $\mathbb{R}$. Dès lors (propriétés de la transformation de Fourier relatives à la dérivation) :

- Comme *f*, *f'* sont intégrables et *f* tend vers 0 à l'infini,

$$\forall\xi\in\mathbb{R}\quad \mathcal{F}(f')(\xi)=\mathrm{i}\xi\,F(\xi).$$

- Comme *f* et *g* sont intégrables, *F* est dérivable et

$$\forall \xi \in \mathbb{R} \quad \mathcal{F}(g)(\xi) = \mathrm{i}F'(\xi).$$

De l'équation différentielle ci-dessus, on déduit que $\mathcal{F}(f') = -2\alpha\mathcal{F}(g)$, qui s'écrit :

$$\forall \xi \in \mathbb{R} \quad \mathrm{i}\xi F(\xi) = -2\alpha \mathrm{i} F'(\xi), \text{ ou encore :}$$
$$\forall \xi \in \mathbb{R} \quad F'(\xi) = -2\beta\, \xi\, F(\xi), \text{ avec } \beta = \frac{1}{4\alpha}.$$

Ainsi, *F* vérifie une équation différentielle analogue à la précédente : il existe *K*, constante telle que

$$\forall \xi \in \mathbb{R} \quad F(\xi) = K\, \mathrm{e}^{-\beta\, \xi^2}.$$

On conclut en remarquant que $K = F(0) = \sqrt{\dfrac{\pi}{\alpha}}$.

Par le théorème intégral de Cauchy pour les fonctions holomorphes

On note encore *f* le prolongement holomorphe à ℂ de la fonction gaussienne *f* :

$$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto \mathrm{e}^{-\alpha\, z^2}.$$

On calcule $F(\xi)$ en supposant $\xi > 0$ (le cas où $\xi < 0$ se traite de même ou avec la parité ; le cas où $\xi = 0$ est immédiat).

Soient trois réels x_1, x_2, h tels que $x_1 < x_2$ et $h > 0$, puis dans le plan complexe le rectangle de sommets $A = x_1, B = x_2, C = x_2 + \mathrm{i}h, D = x_1 + \mathrm{i}h$ (de côtés parallèles aux axes).

D'après le théorème intégral de Cauchy, l'intégrale de *f* sur le bord orienté du rectangle est nulle :

$$\int_{[A,B]} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{[B,C]} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{[C,D]} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{[D,A]} f(z)\,\mathrm{d}z = 0.$$

Or on a les égalités suivantes :

$$\int_{[A,B]} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{x_1}^{x_2} \mathrm{e}^{-\alpha\, x^2}\,\mathrm{d}x \qquad \text{et}$$
$$\int_{[C,D]} f(z)\,\mathrm{d}z = -\int_{x_1}^{x_2} \mathrm{e}^{-\alpha\,(x+\mathrm{i}h)^2}\,\mathrm{d}x = -\mathrm{e}^{\alpha h^2} \int_{x_1}^{x_2} \mathrm{e}^{-\alpha\, x^2}\, \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\alpha\, hx}\,\mathrm{d}x$$

(on paramétrise le segment [*C*, *D*] par $z = x + \mathrm{i}h$, où $x \in [x_1, x_2]$).

Ainsi :

$$\int_{x_1}^{x_2} \mathrm{e}^{-\alpha\, x^2}\,\mathrm{d}x - \mathrm{e}^{\alpha h^2} \int_{x_1}^{x_2} \mathrm{e}^{-\alpha\, x^2}\, \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\alpha\, hx}\,\mathrm{d}x + \int_{[B,C]} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{[D,A]} f(z)\,\mathrm{d}z =$$

L'intégrale de *f* sur [*B*, *C*] (resp. [*D*, *A*]) tend vers 0 quand x_2 tend vers +∞ (resp. x_1 tend vers –∞) (voir plus loin). D'où :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha\, x^2} \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\alpha\, hx}\, \mathrm{d}x = \mathrm{e}^{-\alpha h^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha\, x^2}\, \mathrm{d}x = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\, \mathrm{e}^{-\alpha h^2} \text{ pour tout } h > 0.$$

Le choix $h = \frac{\xi}{2\alpha}$ dans la relation précédente (re)donne l'expression cherchée de $F(\xi)$.

Reste à montrer que l'intégrale de *f* sur [*B*, *C*] tend vers 0 quand x_2 tend vers +∞ :

$$\int_{[B,C]} f(z)\, \mathrm{d}z = \int_0^h \mathrm{e}^{-\alpha\, (x_2+\mathrm{i}y)^2}\, \mathrm{i}\, \mathrm{d}y = \mathrm{i}\, \mathrm{e}^{-\alpha\, x_2^2} \int_0^h \mathrm{e}^{\alpha\, y^2} \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\alpha\, x_2 y}\, \mathrm{d}y$$

(on paramétrise le segment [*B*, *C*] par $z = x_2 + \mathrm{i}y$, avec $y \in [0, h]$).

D'où la majoration :

$$\left| \int_{[B,C]} f(z)\, \mathrm{d}z \right| \leq \mathrm{e}^{-\alpha\, x_2^2} \int_0^h |\mathrm{e}^{\alpha\, y^2}|\, |\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\alpha\, x_2 y}|\, \mathrm{d}y = \mathrm{e}^{-\alpha\, x_2^2} \int_0^h \mathrm{e}^{\alpha\, y^2}\, \mathrm{d}y,$$

qui permet de conclure (l'intégrale au second membre ne dépend pas de x_2). De même pour l'intégrale sur [*D*, *A*].

Notes et références

1. Voir cet exercice corrigé ou, pour une variante plus élémentaire, ce devoir corrigé sur Wikiversité.

Bibliographie

- **(en)** Milton Abramowitz et Irene Stegun, *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables* [détail de l'édition] (lire en ligne (http://people.math.sfu.ca/~cbm/aands/)), chap. 26
- **(en)** H. M. Antia, *Numerical Methods for Scientists and Engineers*, 2012, 3e éd. (1re éd. 1991) (lire en ligne (https://books.google.com/books?id=0_JdDwAAQBAJ&pg=PA211)), p. 211