Guide pour comprendre : Equations aux dérivées partielles

Ecrit par Tristan Pham-Mariotti.
Ce guide a été crée dans le but d'éclaircir les EDP. Il se base entièrement sur le cours de Pauline Lafitte et n'est pas un substitut à celui-ci. La référence reste et restera le polycopié.

L'objectif du cours est clair : être capable de résoudre (de manière approchée en général) des équations aux dérivées partielles. Pour cela, beaucoup de concepts abstraits vont être nécessaires, mais il parait important d'avoir toujours en tête une idée claire de pourquoi on fait ça ? Où en est-on dans la démarche de résolution ?

Voici le plan général pour résoudre une EDP :

1. **Répondre à la question "Le problème est-il bien posé ?" :** On n'a en effet pas envie de mettre en place tout ce qu'on a à faire pour rien. Il faut vérifier que l'équation qu'on a à résoudre possède une solution et que cette solution soit de plus unique pour chaque donnée (et même continue par rapport aux données).
Points du cours correspondants : Analyse hilbertienne, distributions, espaces de Sobolev, formulation variationnelle, théorème de Cauchy-Lipschitz

2. **Discrétiser le problème :** En général expliciter la solution du problème continu est trop compliqué. On va donc simplifier les choses en discrétisant le problème.
Points du cours correspondants : Méthode des éléments finis, différences finies, Euler implicite et explicite

3. **Résoudre un système linéaire :** La discrétisation du problème conduit à devoir résoudre un système linéaire.
Points du cours correspondants : Analyse numérique matricielle

4. **Vérifier que la solution approchée converge correctement vers la solution du problème réel** *Points du cours correspondants : Consistance, stabilité, convergence*

I Généralités

On commence avant tout par qualifier l'EDP que nous avons à résoudre : son équation et ses conditions.

Définition 1 (Types d'équations) *On considère l'équation :*

$$a\partial^2_{xx}\theta + b\partial^2_{xy}\theta + c\partial^2_{yy}\theta + d\partial_x\theta + e\partial_y\theta + f\theta = 0$$

- *Si $4ac - b^2 > 0$ alors équation **elliptique**.*
- *Si $4ac - b^2 < 0$ alors équation **hyperbolique**.*
- *Si $4ac - b^2 = 0$ et $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ alors équation **parabolique**.*

Il y a aussi les équations différentielles ordinaires (EDO) qui sont de la forme :

$$y^{(p)} = F(x, y, y', ..., y^{(p-1)})$$

avec $y : t \to y(t)$.

Les EDO ne sont pas tous de cette forme et en réalité la classification est plus complexe, on retiendra donc plutôt la correspondance physique suivante :

Mathématiques	Physique
Elliptique	Equation de diffusion stationnaire
Hyperbolique	Equation de transport ou des ondes
Parabolique	Equation de diffusion instationnaire

On étudiera dans ce cours uniquement les équations elliptiques, paraboliques et ordinaires.
Pour que la solution de telles équations soit unique, il faut imposer des conditions aux limites. Elles peuvent être de différents types.

Définition 2 (Types de conditions) *Les différentes conditions au bord du domaine sont :*

- *Si valeur imposée* $\forall x \in \partial\Omega\ \theta(x) = f(x)$ *alors* ***condition de Dirichlet***
- *Si dérivée imposée* $\forall x \in \partial\Omega\ \vec{grad}\, y(x) \cdot \vec{n}(x) = f(x)$ *alors* ***condition de Neumann***
- *Si mélange des deux alors* ***condition mêlée*** *(ou mixte)*

Enfin concernant les EDO : une EDO avec une condition initiale est appelée ***problème de Cauchy****.*

Voici maintenant la définition de ce que l'on devra vérifier pour notre problème dans la suite.

Définition 3 (Problème bien posé) *On cherche une solution* $u \in E$ *au problème* $\mathcal{A}(u) = f$ *où* $\mathcal{A} : E \to F$ *problème (i.e. impose l'équation et les conditions) et* $f \in F$ *donnée.*
Ce problème est bien posé au sens de Hadamard si pour toute donnée f il existe une unique solution u et qu'elle dépend continûment de f.

La dépendance continue de f signifie qu'il existe $C > 0$ telle que $\|u\| \leq C\,\|f\|$.
Elle est nécessaire pour des raisons de stabilité (on n'a pas envie qu'en modifiant un tout petit peu notre donnée, la solution se mette à changer complètement).

II Le problème est-il bien posé ?

La manière de répondre à cette question dépend du type de problème rencontré.

1 Problèmes elliptiques

On va, tout au long de cette partie, considérer l'exemple de problème elliptique suivant :

$$\begin{cases} -u'' + cu = f & \text{dans }]0,1[\\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

où $f \in L^2(0,1)$ et $c \in \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R}^+)$.

Il s'agit d'un problème de Dirichlet (conditions aux bords imposées à u). On verra plus tard ce qui change lorsqu'on a un problème de Neumann ou un problème mêlé.

L'objectif va être de réécrire le problème de sorte à appliquer le théorème fondamental suivant :

Théorème 1 (Théorème de Lax-Milgram) *Si*

- *H espace de Hilbert*
- $a : H \times H \to \mathbb{R}$ *forme bilinéaire continue et coercive*
- $l : H \to \mathbb{R}$ *forme linéaire continue*

Alors
Il ***existe*** *un* ***unique*** $u \in H$ *tel que* $\forall v \in H \quad a(u,v) = l(v)$.

Ainsi, si on arrive à réécrire notre problème en terme de a et de l vérifiant les hypothèses, on aura réussi à montrer l'existence et l'unicité d'une solution d'un coup et donc que le problème est bien posé ! Facile !

Remarque 1 *Les étapes qui suivent ne correspondent pas à la numérotation du cours. Je présente les choses à ma manière, en reformulant le cours comme je le comprends. Je reparle de comment cela est présenté dans le cours à la fin de mes 4 étapes (au lieu de 7).*

Etape 1 : Reformulation du problème

A priori, pour que u soit solution du problème, il faut que u soit au moins 2 fois dérivable. On va carrément la supposer C^2 pour le moment. (ce n'est pas un problème car on ne va pas raisonner par équivalence mais par implication, on remontera à notre EDP initiale ensuite)

Faisons apparaître le v du théorème. On voit qu'il devra vivre dans le même espace que u et donc doit lui ressembler, en particulier ici doit s'annuler aux bords. On le prend pour l'instant très régulier, disons $v\, C^\infty$ à support compact dans $]0,1[$ (v s'annule bien au bord car est continu sur $[0,1]$ et à support compact dans $]0,1[$).
On multiplie l'équation du problème par v puis on intègre sur le domaine :

$$\int_0^1 (-u''v) + \int_0^1 cuv = \int_0^1 fv$$

Le but est de faire apparaitre une forme a qui soit bilinéaire voire même aussi symétrique (quand c'est symétrique c'est toujours plus simple ensuite). Pour symétriser le terme de gauche (c'est à dire donner le même rôle à u et à v) on fait une intégration par parties :

$$\int_0^1 u'v' - (u'(1)v(1) - u'(0)v(0)) + \int_0^1 cuv = \int_0^1 fv$$

Or, comme dit précédemment, $v(0) = v(1) = 0$.
Ainsi :

$$\int_0^1 u'v' + \int_0^1 cuv = \int_0^1 fv$$

Ceci est appelé **formulation faible** du problème.
On est alors tenté de poser :

$$\begin{array}{cccc} a: & H \times H & \to & \mathbb{R} \\ & (u,v) & \to & \int_0^1 u'v' + \int_0^1 cuv \end{array}$$

et

$$\begin{array}{cccc} l: & H & \to & \mathbb{R} \\ & v & \to & \int_0^1 fv \end{array}$$

On aurait alors bien $\forall v \in H \quad a(u,v) = l(v)$.
Cette formulation est appelée **formulation variationnelle** du problème.

Mais il reste bien sûr à choisir l'espace H de sorte que H soit un Hilbert, que a et l soient bien définies et qu'elles vérifient les hypothèses du théorème de Lax-Milgram.
Pour que l soit continue, il faut que v soit dans L^2 (Cauchy-Schwarz) et de même pour que a soit continue il faut que v' soit dans L^2. Ceci va nous amener à définir la notion de dérivée pour les fonctions de L^2 (et même de L^1_{loc}) ainsi que les espaces de Sobolev.

Attention ! D'ici jusqu'à l'étape 2, c'est la partie difficile du cours.

1.1 Distributions et espaces de Sobolev

Par souci de simplification, on continue à se placer en dimension 1. (voir le poly pour les dimensions supérieures) On note néanmoins $\Omega =]0,1[$ pour faire plus général.

1.1.1 Distributions

On va généraliser la notion de dérivée aux fonctions de L^1_{loc}.
Pour cela on définit d'abord la notion de distribution :

Définition 4 (Distributions) *On note $\mathcal{D}(\Omega)$ l'espace des fonctions C^∞ à support compact dans Ω.*
$T : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$ est une distribution ssi T est linéaire et continue pour la convergence dans $\mathcal{D}(\Omega)$ (voir poly p.55).

Un cas particulier de distributions qui va nous intéresser est le suivant.

Définition 5 (Distribution régulière) *Si T est une distribution qui s'écrit de la forme*

$$\begin{array}{rccc} T: & \mathcal{D}(\Omega) & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & \phi & \rightarrow & \int_\Omega f\phi \end{array}$$

où $f \in L^1_{loc}(\Omega)$.
Alors T est dite régulière et on la note T_f.

On définit alors la dérivée d'une distribution de la façon suivante :

Définition 6 *Soit T une distribution.*
On définit :

$$\begin{array}{rccc} T': & \mathcal{D}(\Omega) & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & \phi & \rightarrow & -<T,\phi'> \end{array}$$

T' est appelée dérivée de T (au sens des distributions).

Ainsi on a la formule :

$$\boxed{\forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega) \quad <T',\phi>=-<T,\phi'>}$$

Cette formule peut paraître étrange, mais elle se justifie notamment par les deux points suivants :

- Lorsqu'une fonction est dérivable au sens classique, sa dérivée au sens classique correspond à sa dérivée au sens des distributions. *(voir poly p. 58)*
- La formule ressemble à une intégration par parties (sachant que ϕ s'annule aux bords du domaine). En effet, prenons T_f une distribution régulière. On a :

  $$<T_{f'},\phi>=\int_\Omega f'\phi=-\int_\Omega f\phi'=-<T_f,\phi'>$$

  Ainsi, en se disant que $T'_f=T_{f'}$, on a l'intuition que cette définition a un sens.

Maintenant le théorème important qui va nous permettre de dériver les fonctions $L^1_{loc}(\Omega)$ est le suivant :

Théorème 2 *On note $\mathcal{D}'(\Omega)$ l'espace des distributions.*
L'application

$$\begin{array}{rccc} \Phi: & L^1_{loc}(\Omega) & \rightarrow & \mathcal{D}'(\Omega) \\ & f & \rightarrow & T_f \end{array}$$

est injective et ainsi on peut identifier $L^1_{loc}(\Omega)$ à un sous-espace vectoriel de $\mathcal{D}'(\Omega)$.

A présent quand on parlera de dérivée de $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ (au sens des distributions) cela signifiera qu'on parle de la dérivée de T_f. Remarquons tout de suite que si $f \in L^2(\Omega)$ alors $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ (appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz).

Exemple 1 (Dérivation d'une indicatrice)
Entraînons nous en dérivant une fonction qu'on ne pouvait jusque là dériver : $1_{[\frac{1}{2},1]}$.
Cette fonction est bien dans $L^1_{loc}(\Omega)$ donc on peut la dériver au sens des distributions.
Pour cela, prenons $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$,

$$\begin{aligned} <1'_{[\frac{1}{2},1]},\phi> &= -<1_{[\frac{1}{2},1]},\phi'> \\ &= -\int_\Omega 1_{[\frac{1}{2},1]}\phi' \\ &= -\int_{[\frac{1}{2},1]}\phi' \\ &= -(\phi(1)-\phi(\frac{1}{2})) \\ &= \phi(\frac{1}{2}) \\ &= <\delta_{\frac{1}{2}},\phi> \end{aligned}$$

D'où $1'_{[\frac{1}{2},1]}=\delta_{\frac{1}{2}}$.

1.1.2 Espaces de Sobolev

Maintenant qu'on a cette notion de dérivée, on définit un espace qui va nous être utile :

Définition 7 (Espace de Sobolev) *L'espace de Sobolev (d'ordre 1) est défini par :*

$$H^1(\Omega) = \{v \in L^2(\Omega), v' \in L^2(\Omega)\}$$

On définit de la même manière les espaces de Sobolev d'ordre k (les dérivées d'ordre $\leq k$ sont toutes dans L^2).

Et là c'est super, on trouve une norme pour laquelle l'espace H^1 est un Hilbert.

Théorème 3 *L'espace $H^1(\Omega)$ muni du produit scalaire*

$$\begin{array}{rrcl} < \cdot, \cdot >_{H^1}: & H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & (u, v) & \rightarrow & < u, v >_{L^2} + < u', v' >_{L^2} \end{array}$$

est un espace de Hilbert.

Etant donné que notre fonction u de départ s'annule au bord, il y a un autre espace intéressant à considérer.

Définition 8 *On définit $H_0^1(\Omega) = \{v \in H^1,\, v_{|\partial\Omega} = 0\}$.*

Et il s'agit encore d'un espace de Hilbert avec même une nouvelle norme possible.

Théorème 4

- *H_0^1 muni de $|| \cdot ||_{H^1}$ est un Hilbert*
- *H_0^1 muni de la norme associée au produit scalaire*

$$\begin{array}{rrcl} < \cdot, \cdot >_{H_0^1}: & H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & (u, v) & \rightarrow & < u', v' >_{L^2} \end{array}$$

est un Hilbert.

Remarque 2 *On a*

$$H_0^1(\Omega) \subset H^1(\Omega) \subset L^2(\Omega) \subset L^1_{loc}(\Omega)$$

Lorsqu'on parle de dérivée d'une fonction appartenant à l'un de ces espaces, il s'agit de dérivée au sens des distributions.

1.1.3 Retour à la démarche étape par étape

On a maintenant les moyens de choisir un H qui convient. Puisque on recherche une solution qui s'annule au bord du domaine, on prend $H = H_0^1(0, 1)$.

Etape 2 : Vérification des hypothèses de Lax-Milgram

L'application a (resp. l) est clairement bilinéaire (resp. linéaire).

Continuité de l :
Soit $v \in H$. On a :

$$|l(v)| = |\int_0^1 uv| \leq \|u\|_{L^2} \|v\|_{L^2}$$

Pour montrer la continuité, il faudrait avoir $|l(v)| \leq C \|v\|_{H_0^1}$ où C constante. Donc on aimerait majorer $\|v\|_{L^2}$ par $\|v\|_{H_0^1} = \|v'\|_{L^2}$ à un facteur près. Cela tombe bien car il existe une inégalité pour cela :

Théorème 5 (Inégalité de Poincaré) *Il existe $C_\Omega > 0$ tel que :*

$$\forall v \in H_0^1(\Omega) \quad \|v\|_{L^2} \leq C_\Omega \|v'\|_{L^2}$$

Ainsi

$$|l(v)| \leq C_\Omega \|u\|_{H_0^1} \|v\|_{H_0^1}$$

Donc l est continue.

Continuité de a :
Soit $(u,v) \in H \times H$. On a :

$$|a(u,v)| = |\int_0^1 u'v' + \int_0^1 cuv| \leq \|u'\|_{L^2} \|v'\|_{L^2} + \|c\|_\infty \|u\|_{L^2} \|v\|_{L^2} \leq (1 + C_\Omega \|c\|_\infty) \|u\|_{H_0^1} \|v\|_{H_0^1}$$

Donc a est continue.

Coercivité de a :
Rappelons la définition :

Définition 9 (Coercivité) *Soit $a : H \times H \to \mathbb{R}$ forme bilinéaire.*
a est coercive s'il existe $\alpha > 0$ telle que

$$\forall u \in H \quad a(u,u) \geq \alpha \|u\|_H^2$$

On fera bien attention à ne pas mettre des valeurs absolues autour de $a(u,u)$ et à mettre la norme de u au carré (penser à l'homogénéité).

On a :

$$a(u,u) = \int_0^1 u'^2 + \int_0^1 cu^2 \geq \int_0^1 u'^2 = \|u\|_{H_0^1}^2$$

car $c \geq 0$ par hypothèse.

Ainsi on a vérifié toutes les hypothèses de Lax-Milgram :

- $H = H_0^1$ muni de $\|\cdot\|_{H_0^1}$ espace de Hilbert
- $a : H \times H \to \mathbb{R}$ forme bilinéaire continue et coercive
- $l : H \to \mathbb{R}$ forme linéaire continue

Donc on peut appliquer le théorème : Il existe une unique solution $u \in H_0^1$ de la formulation variationnelle.

Dépendance continue de la solution par rapport à la donnée

Enfin, on vérifie que cette solution dépend continûment de f. En effet $a(u,u) = l(u)$ donc

$$\int_0^1 u'^2 + \int_0^1 cu^2 = \int_0^1 fu$$

D'où

$$\int_0^1 u'^2 = \int_0^1 fu - \int_0^1 cu^2 \leq \int_0^1 fu$$

car $c \geq 0$. Donc

$$\|u\|_{H_0^1}^2 \leq \|f\|_{L^2} \|u\|_{L^2} \leq C_\Omega \|f\|_{L^2} \|u\|_{H_0^1}$$

D'où finalement

$$\|u\|_{H_0^1} \leq C_\Omega \|f\|_{L^2}$$

c'est à dire que u dépend continûment de la donnée f.

Etape 3 : Retour à l'EDP initiale
Etant donné qu'on n'a pas raisonné par équivalence pour passer de la formulation du problème initial à la formulation variationnelle, il s'agit maintenant de voir si la solution du problème variationnel répond à notre problème initial.
On notera bien qu'on a une solution $u \in H_0^1$ et que u' désigne alors la dérivée au sens des distributions de u.
Puisque $\mathcal{D}(\Omega) \subset H_0^1(\Omega)$ on a :

$$\forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega) \quad a(u,\phi) = l(\phi)$$

C'est à dire

$$\forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega) \quad \int_0^1 u'\phi' + \int_0^1 cu\phi = \int_0^1 u\phi)$$

Donc

$$\forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega) \quad < u', \phi' > + < cu, \phi > = < f, \phi >$$

Or $< u', \phi' > = - < u'', \phi >$ d'où

$$\forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega) \quad < -u'' + cu - f, \phi > = 0$$

Ainsi, au sens des distributions,

$$-u'' + cu = f$$

Notre solution u trouvé grâce à Lax-Milgram satisfait donc notre EDP de départ au sens des distributions.

Etape 4 : Etude de la régularité de la solution
Il est toujours intéressant de savoir à quel point notre solution est régulière.
On a $u'' = cu - f$ avec $cu \in L^2$ et $f \in L^2$ donc $u'' \in L^2$.
Ainsi $u \in H^2(0,1)$.

On peut remarquer que la solution $u \in H^2(0,1)$ (donc $u, u', u'' \in L^2$) est plus régulière que la donnée $f \in L^2$. On dit que l'EDP a un **effet régularisant**.

Résumé

Bon pour rester cohérent avec le cours, récapitulons les différentes étapes avec la numérotation du cours :

1. Obtention de la formulation faible
2. Obtention de la formulation variationnelle
3. Continuité de a et de l
4. Coercivité de a
5. Application de Lax-Milgram
6. Retour à l'EDP initial
7. Etude de la régularité de la solution

1.2 Qu'est ce qui change en dimension supérieure ?

Notre exemple serait alors :

$$\begin{cases} -\Delta u + cu = f \text{ dans } \Omega \\ u = 0 \; p.p. \text{ sur } \partial\Omega \end{cases}$$

où $f \in L^2(\Omega)$, $c \in \mathcal{C}^0(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^+)$ et Ω ouvert borné de $\mathbb{R}^d$.
On reprend exactement la même démarche que précédemment avec les changements suivants :

- Pour faire une intégration par parties, il nous faut une formule plus générale.

  Théorème 6 (Intégration par parties généralisée) *Soit $u \in C^2(\overline{\Omega})$ et $v \in C^1(\overline{\Omega})$ à support compact dans $\overline{\Omega}$.*

  $$\int_\Omega (\triangle u)v = -\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v + \int_{\partial\Omega} v \nabla u \cdot n$$

  où n normale extérieure au bord.

- a devient

  $$\begin{array}{rccl} a: & H \times H & \to & \mathbb{R} \\ & (u,v) & \to & \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v + \int_\Omega cuv \end{array}$$

- Finalement, on a toujours $-\triangle u \in L^2(\Omega)$ mais ça ne suffit plus pour conclure que $u \in H^2(\Omega)$ car la somme de dérivées partielles dans L^2 n'implique pas que chaque dérivée partielle soit dans L^2.

1.3 Et si plus généralement $u(0) = a$ et $u(1) = b$?

Si on a le problème

$$\begin{cases} -u'' + cu = f \text{ dans } \Omega \\ u(0) = a \quad u(1) = b \end{cases}$$

où $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $f \in L^2(\Omega)$ et $c \in \mathcal{C}^0(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^+)$.
Alors on utilise une technique appelée **relèvement** pour se ramener au cas du problème homogène.
On considère une fonction u_0 qui soit $C^2([0,1])$ et telle que $u_0(0) = a$ et $u_0(1) = b$. Alors $u = u_0 + \tilde{u}$ est l'unique solution du problème avec $\tilde{u}$ solution de :

$$\begin{cases} -\tilde{u}'' + c\tilde{u} = g \text{ dans } \Omega \\ \tilde{u}(0) = 0 \quad \tilde{u}(1) = 0 \end{cases}$$

où $g = f + u_0'' - cu_0 \in L^2(\Omega)$ et $c \in \mathcal{C}^0(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^+)$
(voir preuve exercice 3 TD3)

1.4 Et pour des conditions de Neumann ?

On va voir qu'un certain nombre de choses changent et cela permet de voir si on a bien compris les idées. On va donc reprendre presque intégralement la démarche.

Considérons l'exemple :

$$\begin{cases} -u'' + cu = f \quad \text{dans }]0,1[\\ u'(0) = \alpha \quad u'(1) = 0 \end{cases}$$

où $\alpha \in \mathbb{R}, c \in \mathcal{C}^0(\overline{\Omega}, \mathbb{R}_*^+)$ et $f \in L^2(0,1)$.

Les conditions aux bords sont sur la dérivée de u donc on a des conditions de Neumann. On remarque aussi que les conditions ne sont pas homogènes ($u'(0) = \alpha$). Contrairement au cas de Dirichlet, on ne va pas utiliser une technique semblable au relèvement mais simplement écrire les choses en faisant attention.

Bon, c'est parti refaisons la démarche et voyons ce qui change !

On suppose que u est $C^2([0,1]$. On va ici prendre $\phi \in C^\infty([0,1])$ et non $\phi \in C^\infty(]0,1[)$ car rien ne nous dit que la fonction u s'annule aux bords (et je rappelle qu'on veut que ϕ lui ressemble).
On multiplie par la fonction ϕ et on fait une intégration par parties ce qui donne :

$$-(u'(1)\phi(1) - u'(0)\phi(0)) + \int_0^1 (u'\phi' + cu\phi) = \int_0^1 f\phi$$

On ne sait rien sur $\phi(0)$ et $\phi(1)$ contrairement au cas de Dirichlet. On sait néanmoins que $u'(0) = \alpha$ et $u'(1) = 0$ ce qui donne :

$$\int_0^1 (u'\phi' + cu\phi) = \int_0^1 f\phi - \alpha\phi(0)$$

Pour applique Lax-Milgram, on va prendre :

- $H = H^1(0,1)$ et non pas $H_0^1(0,1)$ car on n'a pas d'annulation aux bords.
- $$\begin{array}{rccc} a: & H \times H & \to & \mathbb{R} \\ & (u,v) & \to & \int_0^1 u'v' + \int_0^1 cuv \end{array}$$
- $$\begin{array}{rccc} l: & H & \to & \mathbb{R} \\ & v & \to & \int_0^1 fv - \alpha v(0) \end{array}$$

Mais là il faut faire attention ! Notre espace $H^1(0,1)$ est un sous-espace de L^2, or lorsqu'on parle de fonctions de L^2, celles-ci sont définies à un ensemble de mesure nulle près, i.e. presque partout. On ne peut donc pas normalement parler de valeur en un point de ces fonctions. Or ici on écrit "$v(0)$".
Cela se justifie par le théorème page 62 dont on retiendra notamment les idées suivantes :

Théorème 7 (Théorème de Rellich) ***En dimension 1*** *(généralement faux en dimension supérieure),*

- *Les fonctions de $H^1(0,1)$ sont prolongeables par continuité à $[0,1]$. On a, en un sens, $H^1(0,1) \subset C^0([0,1])$.*
- *On a, pour $u \in H^1(0,1)$ l'inégalité,*
$$\|u\|_\infty \leq C \|u\|_{H^1}$$
où $C > 0$ constante.

On n'a donc pas de problème de définition dans ce qu'on a écrit.

On montre que a est continue.
Pour la continuité de l, on se sert de l'inégalité du théorème précédent en disant que $v(0) \leq \|v\|_\infty \leq C\|v\|_{H^1}$.

Montrons que a est coercive. Soit $u \in H^1(0,1)$. On a

$$a(u,u) = \int_0^1 ((u')^2 + cu^2) \geq \|u'\|_{L^2}^2 + (\min_{[0,1]} c) \|u\|_{L^2}^2$$

Rappelons nous qu'on travaille ici dans $H^1(0,1)$ et que la norme qu'on utilise sur cet espace est $\|u\|_{H^1}^2 = \|u\|_{L^2}^2 + \|u'\|_{L^2}^2$. On a donc

$$a(u,u) \geq \min(1, \min_{[0,1]} c) \|u\|_{H^1}^2$$

On voit que si $\min_{[0,1]} c = 0$ on a un problème avec la coercivité. Heureusement on a supposé que $c > 0$ (je ne vous l'avais pas fait remarquer mais vous pouvez allez vérifier plus haut !) donc on a bien la coercivité de a.
Une fois qu'on a tout ça, on peut appliquer Lax-Milgram.

On souhaite maintenant remonter à notre EDP initiale. On veut montrer qu'elle est vérifiée au sens des distributions et on prend pour cela $\phi \in \mathcal{D}(]0,1[)$. Ce ϕ s'annule aux bords, mais on n'a plus le même objectif que plus haut. Ici on veut montrer une égalité au sens des distributions et par définition il faut que l'égalité soit valable pour tout $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$.
Puisque $\mathcal{D}(]0,1[) \subset H^1(0,1)$ on a :

$$\int_{]0,1[} (u'\phi' + cu\phi) = \int_{]0,1[} f\phi - \alpha\phi(0) = \int_{]0,1[} f\phi$$

D'où

$$< -u'' + cu, \phi > = < f, \phi >$$

Et donc $-u'' + cu = f$ au sens des distributions.

Enfin contrairement au cas de Dirichlet où, puisqu'on travaillait sur $H_0^1(0,1)$, il était évident que les conditions aux bords étaient vérifiées et on n'a donc même pas pris la peine de le dire ; ici il faut vérifier que $u'(0) = \alpha$ et $u'(1) = 0$.
Pour cela, utilisons une équation faisant intervenir $u'(0)$ et $u'(1)$: l'équation de la formulation faible. Soit $v \in H^1(0,1)$. On a :

$$\begin{aligned}
0 &= \int_{]0,1[} (u'v' + cuv - fv) + \alpha v(0) \\
&= u'(1)v(1) - u'(0)v(0) + \int_{]0,1[} (-u'' + cu - f)v + \alpha v(0) \\
&= u'(1)v(1) - (u'(0) - \alpha)v(0)
\end{aligned}$$

Cette dernière égalité est valable pour tout $v \in H^1(0,1)$ donc en tatônnant un peu et en prenant $v(x) = x$ et $v(x) = 1 - x$ on déduit que $u'(1) = 0$ et $u'(0) = \alpha$.

Remarque 3 *On a utilisé une intégration par parties alors que les fonctions sont $v \in H^1$ et $u \in H^2$. Ceci est licite, voir le poly page 65.*

Pour finir notre démarche, on montre que u dépend continûment des données (α, f). (voir correction ex 4 TD 3)

Récapitulons les principales modifications :

- Pour aboutir à la formulation variationnelle, on prend $\phi \in C^\infty(]0,1[)$ (ne s'annulant pas aux bords)
- On fait attention à justifier qu'on prend la valeur d'une fonction L^2 en un point
- On se sert de l'inégalité du théorème cité dessus
- Il faut que $c > 0$ et non $c \geq 0$ comme dans Dirichlet
- On doit vérifier que la solution trouvée vérifie les conditions aux bords

1.5 Et pour des conditions mêlées ?

"Mon dieu... Ne me dis pas qu'on va refaire encore une fois toute la démarche, il y en a marre..."

Non on a fait le plus dur ne vous inquiétez pas, on va se contenter de faire une liste de changements notables.
Considérons le problème

$$\begin{cases} -u'' + cu = f & \text{dans }]0,1[\\ u(0) = 0 \quad u'(1) = 0 \end{cases}$$

où $f \in L^2(0,1)$ et $c \in \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R}^+)$.

Si vous avez bien compris, il faut travailler dans un espace qui convient à u, H_0^1 pour Dirichlet et H^1 pour Neumann. Ici on veut un mixte des deux donc on va prendre :

$$H = H^1(0,1) \cap \{v \in C^0([0,1]), v(0) = 0\}$$

Le seul point délicat va être de montrer que H muni du produit scalaire $< u, v >= \int_{]0,1[} u'v'$ est un Hilbert. (on montrera notamment pour cela que H est un sous-espace fermé de $H^1(0,1)$)

Je vous invite à consulter la correction de l'exercice 5 du TD 3 si vous n'y arrivez pas.

1.6 Et si l'équation de Dirichlet est $-u'' + bu' + cu = f$?

On considère le problème :

$$\begin{cases} -u'' + bu + cu = f & \text{dans }]0,1[\\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

où $f \in L^2(0,1)$, $c \in \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R}^+)$ et $b \in \mathbb{R}$.

On va alors se ramener au cas précédent par une astuce à connaître.
On fait un **changement d'inconnue** : on considère $v : x \to e^{-\delta x} u(x)$.
On a alors

$$\begin{cases} u'(x) = e^{\delta x}(\delta v(x) + v'(x)) \\ u''(x) = e^{\delta x}(\delta^2 v(x) + 2\delta v(x) + v''(x)) \end{cases}$$

En remplaçant dans l'équation, on a v solution de

$$\begin{cases} -v''(x) + (b - 2\delta)v'(x) + (c(x) - \delta^2 + b\delta)v(x) = f(x)e^{-\delta x} \\ v(0) = 0 \quad v(1) = 0 \end{cases}$$

Pour annuler le terme devant v' il suffit alors de choisir $\delta = \frac{b}{2}$ et alors v est solution de

$$\begin{cases} -v''(x) + (c(x) + \frac{b^2}{4})v(x) = f(x)e^{-\delta x} \\ v(0) = 0 \quad v(1) = 0 \end{cases}$$

On se retrouve dans le cas précédent car $c + \frac{b^2}{4}$ est bien une fonction continue positive.

2 Problèmes de Cauchy

On s'intéresse maintenant aux équations différentielles ordinaires (EDO). On possède un théorème aussi puissant que Lax-Milgram qui va nous assurer l'existence et l'unicité d'une solution, de plus on aura beaucoup moins à se fatiguer. Il s'agit du théorème de Cauchy-Lipschitz.

2.1 Théorème de Cauchy-Lipschitz

Sans plus attendre, voici le théorème :

Théorème 8 (Théorème de Cauchy-Lipschitz) *Soit $t_0 \in \mathbb{R}$ et I intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ contenant t_0.*
Soit U ouvert de $\mathbb{R}^d$ et $y^0 \in U$.
Soit $f : (t, y) \in I \times U \to f(t, y) \in U$. Si

- *f est **continue** par rapport à t*
- *f est **localement lipschitzienne** par rapport à y*

Alors il existe un intervalle ouvert $J \subset I$ tel que le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(t_0) = y^0 \end{cases}$$

admette une unique solution maximale $u : J \to U$.

Commentaires importants sur le théorème

Bon ce théorème est tellement puissant qu'il nous dit plein de choses méritant des commentaires.

- Une solution maximale est une solution qu'on ne peut prolonger davantage, i.e. si $v : K \to U$ autre solution telle que $J \subset K$ et $v_{|J} = u$ alors K=J.
  Une des conséquences est que la solution va diverger aux bords de J (car sinon on pourrait la prolonger) : il s'agit du lemme des bouts (voir compléments à la fin du guide).
- L'intervalle J du théorème est un intervalle contenant obligatoirement t_0 (sinon la solution n'est pas définie pour la condition initiale...). Cela a une importance qu'on comprendra dans les exemples un peu plus loin.
- **Si f est C^1 alors f est localement lipschitzienne**. On se servira très souvent de cela pour valider l'hypothèse du théorème.
- Si f est C^k alors y est C^{k+1}.
- Contrairement au théorème vu en prépa, on ne se limite pas ici à un f linéaire ! C'est vraiment très puissant !
- **L'unicité de la solution implique que 2 solutions avec une condition initiale différente ne peuvent se couper.** En effet si elles se coupent alors en prenant t_0 le temps auquel elles se coupent, le théorème nous dit que ces 2 solutions sont identiques car il y a unicité de la solution et elles ont même condition initiale.
- L'hypothèse "localement lipschitzienne" permet d'assurer l'unicité de la solution. (Sans elle on a tout de même l'existence d'une solution)

Cas particuliers où le résultat est encore plus fort

- Si f est globalement lipschitzienne sur $I \times \mathbb{R}^d$ alors la solution est globale (J=I).
- Si f est uniformément bornée sur $I \times \mathbb{R}^d$ alors la solution est globale.
- Si f est linéaire, i.e. de la forme $f : (t, y) \in I \times \mathbb{R}^d \to A(t)y + b(t)$ où $A : I \to \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ et $b : I \to \mathbb{R}^d$ sont continues, alors la solution est globale.

Exemple 2 *Bon regardons tout de suite un exemple de problème où on va pouvoir appliquer notre théorème.*
Le problème

$$\begin{cases} y'(t) = e^{y(t)} sin(t) \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

admet une unique solution maximale.
En effet $t \to e^{y(t)} sin(t)$ *est continue et* $y \to e^{y(t)} sin(t)$ *est* C^1 *donc localement lipschitzienne en* y.

2.2 Finalement un problème de Cauchy c'est un problème elliptique en dimension 1 ?

Je me suis personnellement posé cette question et la réponse est bien sûr non.

Ce n'est pas pour rien qu'on utilise la variable t pour les problèmes de Cauchy (qui fait penser au temps) et la variable x (qui fait penser à l'espace) pour les problèmes elliptiques.

Dans les problèmes elliptiques on a des conditions aux bords du type $u(0) = 0$ et $u'(1) = 0$. Si on voyait ça d'un point de vue temporel, on aurait une condition au temps 0 et une condition au temps 1. Les problèmes de Cauchy ont eux des conditions initiales, qui sont donc définies au même temps, par exemple $u(0) = 0$ et $u'(0) = 0$, ce n'est donc pas pareil et même pas du tout pareil vu les différentes théories qu'on utilise.

Néanmoins on peut parfois se ramener d'un cas à l'autre, comme le montre l'exercice 3 du TD 5 avec la méthode de tir.

2.3 Expliciter la solution

Très souvent il est impossible d'expliciter la solution d'une équation différentielle, c'est à dire qu'on n'est pas capable de l'écrire avec nos fonctions usuelles.

Remarque 4 *On arrive à montrer qu'on ne peut pas expliciter la solution, il s'agit d'une théorie de galois différentielle. C'est du lourd !*

Ce n'est pas vraiment un problème car même sans expliciter la solution on sait extraire des propriétés qualitatives de l'équation puis l'approcher de façon précise numériquement.

Néanmoins, pour les EDO, il y a plusieurs cas particuliers notables où ceci est possible. Et ce qui est quand même bien c'est qu'on n'a pas besoin alors de continuer notre démarche exposée au tout début. Pas besoin de discrétiser, etc. on a directement notre solution !

Remarque 5 *Pour évaluer sa valeur en un point, il faudra probablement faire des approximations mais bref là n'est pas le problème pour nous.*

Equations différentielles linéaires

Lorsque la matrice A de notre f linéaire (voir plus haut) ne dépend pas du temps, on a une formule explicite de la solution.

Théorème 9 (Formule de Duhamel) *Le problème*

$$\begin{cases} y'(t) = Ay(t) + b(t) \\ y(0) = y^0 \end{cases}$$

a pour unique solution globale

$$y : t \to exp(tA)y^0 + \int_0^t exp((t-s)A)b(s)ds$$

Et là vous vous dîtes peut être (ou peut être pas) : *"Eh mais cette forme avec une intégrale comme ça, ça me rappelle vaguement des résultats qu'on obtenait en prépa. On utilisait quoi déjà... Ah oui la variation de la constante ! Mais c'est quoi déjà ?"*
En effet, en fait cette formule se trouve grâce à la méthode de variation de la constante. Vu que c'est censé être connu, pour ceux qui ont besoin d'un rappel, je mets ça à la fin de ce guide.

Plein d'autres cas particuliers

Il y a beaucoup d'autres cas où on est capable de faire des choses : équations de Ricatti, de Bernoulli, etc. Mais comme dit plus haut, expliciter une solution n'est pas si indispensable que ça et mieux vaut savoir bien faire les choses numériquement qu'apprendre 36 astuces pour réussir à expliciter une solution.

2.4 Continuité de la solution par rapport à la condition initiale

Le théorème de Cauchy-Lipschitz nous donne l'existence et l'unicité, mais dans la définition d'un problème bien posé, il nous manque encore la continuité de la solution par rapport aux données.

C'est le **théorème du flot** dont l'énoncé est compliqué qui nous permet de répondre à cela. (voir énoncé page 83)

L'idée à retenir est que si f est C^2 alors la solution dépendra de façon C^1 de la condition initiale.

2.5 Propriétés qualitatives

Pour les EDO, on est capable de dire plein de choses sur notre solution (croissance, comportement asymptotique, etc.) sans avoir aucune idée de son expression explicite.
On trouvera dans les compléments de ce guide quelques outils d'analyse qualitative des EDO.
Dans le cadre du cours de Centrale, on retiendra toute de même le lemme important suivant :

Théorème 10 (Lemme de Gronwall) *Soit* $u \in C^0([0,T])$.
Supposons qu'il existe $a \in C^0([0,T];\mathbb{R}^+)$ *et* $c \in C^0([0,T];\mathbb{R})$ *tels que*

$$\forall t \in [0,T] \quad u(t) \leq c(t) + \int_0^t a(s)u(s)ds$$

Alors

$$\forall t \in [0,T] \quad u(t) \leq c(t) + \int_0^t c(s)a(s)exp(\int_s^t a(\tau)d\tau)ds$$

"What ? D'où tu veux qu'on retienne un truc aussi immonde ?! En plus je m'en souviens c'était un exercice de prépa classique, mon prof m'avait aussi dit que c'était utile mais j'ai jamais compris pourquoi..."

Bon ok c'est moche. Mais ce n'est pas pour rien si les profs disent que c'est utile. Ce qui est important de remarquer c'est que dans l'inégalité fournie par le théorème, on s'est débarrassé dans le terme de droite de la fonction u. D'une inégalité qui faisait intervenir u et son intégrale (ou u et sa dérivée) on arrive à obtenir une inégalité faisant uniquement intervenir u !

Par exemple, supposons qu'on ait :

$$f'(t) \leq -\nu f(t) \quad \forall t \geq 0$$

Si on avait une égalité, on pourrait dire que $f(t) = f(0)e^{-\nu t}$. Ici on va montrer, grâce au lemme de Gronwall, que $f(t) - f(0) \leq f(0)e^{-\nu t}$.
En effet on a :

$$\begin{aligned} f(t) &= f(0) + \int_0^t f'(s)ds \\ &\leq f(0) + \int_0^t -\nu f(s)ds \end{aligned}$$

Appliquons alors le lemme de Gronwall,

$$\begin{aligned} f(t) &\leq f(0) + \int_0^t f(0)(-\nu)exp(\int_s^t -\nu d\tau)ds \\ &= f(0) - \nu f(0)\int_0^t exp(-\nu(t-s))ds \\ &= f(0) - \nu f(0)[\frac{e^{-\nu(t-s)}}{\nu}]_0^t \\ &= f(0)(1 + e^{-\nu t}) \end{aligned}$$

D'où

$$f(t) - f(0) \leq f(0)e^{-\nu t}$$

On retiendra donc que **lorsqu'on a une inégalité faisant intervenir f et sa dérivée f' on utilisera le lemme de Gronwall** pour se ramener à une inégalité sur f. L'application du lemme de Gronwall dans ce cas là n'est pas directe, donc on pourra retenir le corollaire suivant :

Théorème 11 (Lemme de Gronwall "linéaire") *Soit a, b constantes avec $a > 0$. I intervalle de $\mathbb{R}$. $y : I \to \mathbb{R}C^1$. Supposons que*

$$\forall t \in I \quad |y'(t)| \leq a|y(t)| + b$$

Alors

$$\forall t, t_0 \in I \quad |y(t)| \leq |y(t_0)|e^{a|t-t_0|} + b\frac{e^{a|t-t_0|} - 1}{a}$$

Remarque 6 *Cela n'a rien de mystérieux car si $y' = ay + b$ avec a, b constantes alors $y(t) = y(t_0)e^{a(t-t_0)} + b\frac{e^{a(t-t_0)}-1}{a}$.*

3 Problèmes paraboliques

Maintenant qu'on est devenu super fort, on va pouvoir utiliser tout ce qu'on a appris pour s'attaquer aux équations paraboliques !

3.1 Théorème

On s'intéresse au problème, appelé problème mixte, suivant :

$$\begin{cases} \partial_t u(t,x) - \nu \Delta_x u(t,x) = f(t,x) & \forall (t,x) \in \mathbb{R}_*^+ \times \Omega \\ u(\cdot, x) = 0 \quad \forall x \in \partial\Omega \\ u(0, \cdot) = u^0 \end{cases}$$

où $\nu \in \mathbb{R}$.

On se ramène à la forme d'un problème de Cauchy en considérant la fonction $u : (t,x) \to u(t,xt)$ comme une fonction $u : t \to u(t, \cdot)$ à valeurs dans un espace fonctionnel Hilbertien X (par exemple $X = L^2(\Omega)$).

On montre alors que l'espace $L^2(0,T;X)$, muni du produit scalaire $< u, v >= \int_0^T < u(t), v(t) >_X dt$ est un espace de Hilbert.

Puis on a le théorème suivant :

Théorème 12 *$F = \{(u^0, f)/u^0 \in L^2(\Omega), f \in L^2(0,T; L^2(\Omega)\}$*
$E = L^2(0,T; H_0^1(\Omega)) \cap C^0([0,T], L^2(\Omega))$
Le problème mixte ci-dessus admet une unique solution dans E.
On a de plus l'estimation de l'énergie :

$$\forall t \in [0,T] \quad \int_\Omega u(t,x)^2 dx + \int_0^t \int_\Omega |\nabla u(s,x)|^2 dx ds \leq C(\int_\Omega u^0(x)^2 dx + \int_0^t \int_\Omega f(s,x)^2 dx ds)$$

3.2 Propriétés qualitatives

On peut montrer les propriétés suivantes :

- L'équation de la chaleur est dissipative, i.e. l'énergie décroît et la solution tend vers 0 quand $t \to +\infty$.
- L'équation de la chaleur est très régularisante, même si la donnée initiale est très peu régulière, la solution sera C^∞ en t et en x.
- Il y a un principe du maximum, si $f \geq 0$ et $u^0 \geq 0$ alors $u \geq 0$.

III Discrétiser le problème

On arrive (enfin) à la deuxième étape de la grande démarche exposée en introduction.
Ne sachant pas résoudre le problème continu, on va s'intéresser à un autre problème, un problème approché (qui on l'espère bien sûr aura un lien, qu'on devra préciser, avec notre problème continu).

On va distinguer les cas des problèmes elliptiques, des problèmes de Cauchy et des problèmes paraboliques.

4 Problèmes elliptiques

On doit discrétiser deux choses : le domaine de l'espace et les équations.
On va continuer à se baser sur notre exemple de départ :

$$\begin{cases} -u'' + cu = f \text{ dans }]0,1[\\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

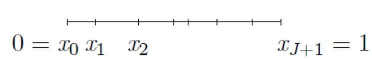
où $f \in L^2(0,1)$ et $c \in \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R}^+)$.

4.1 Discrétisation du domaine

Si notre domaine est continu, on a un nombre infini de valeurs à calculer, c'est impossible. On va donc découper notre domaine en mailles et calculer les valeurs seulement aux noeuds des mailles.

4.1.1 En dimension 1

C'est le cas de notre exemple. On découpe notre intervalle en $J+1$ intervalles :



$$[0,1] = \bigcup_{0 \leq j \leq J} [x_j, x_{j+1}]$$

On pose $h = \max_{0 \leq j \leq J} (x_{j+1} - x_j)$.
Dans le cas d'un maillage uniforme (où les intervalles sont de même longueur) on a donc :

$$h = \frac{1}{J+1} \quad \text{et} \quad x_j = jh$$

4.1.2 En dimension supérieure

C'est un problème plus compliqué, on laissera des logiciels (comme FreeFem++) faire ça pour nous.

4.2 Discrétisation des équations

On dispose pour cela deux méthodes : les éléments finis et les différences finies.

4.2.1 Méthode des éléments finis

On se place dans le cadre où on a obtenu la formulation variationnelle :

$$\text{Trouver } u \in H \text{ tel que } \forall v \in H \quad a(u,v) = l(v)$$

Le but va être d'approximer H par un sous-espace de dimension finie H_h. Le problème en dimension finie devient une "simple" résolution de système linéaire car on a alors une base finie à notre disposition.

La dimension finie ou résoudre un système linéaire

Puisque H_h est un sous-espace de dimension finie de H alors il est fermé et donc il est complet (muni du produit scalaire induit par celui de H).
Le théorème de Lax-Milgram s'applique alors également :

$$\exists! u_h \in H_h \ \ tq \ \ \forall v_h \in H_h \quad a(u_h, v_h) = l(v_h)$$

On est en dimension finie donc, en notant n la dimension de H_h, on dispose d'une base $(\phi_1, ..., \phi_n)$ de H_h.
De manière équivalente, u_h est l'unique élement de H_h vérifiant

$$\forall i \in \{1, ..., n\} \quad a(u_h, \phi_i) = l(\phi_i)$$

On écrit $u_h = \sum_{j=1}^{n} u_j \phi_j$.
Alors

$$a(\sum_{j=1}^{n} u_j \phi_j, \phi_i) = l(\phi_i)$$

Puis

$$\sum_{j=1}^{n} u_j a(\phi_j, \phi_i) = l(\phi_i)$$

D'où finalement :

$$\boxed{A_h u_h = b_h \quad \text{où } A_h = (a(\phi_j, \phi_i))_{1 \le i,j \le n} \text{ et } b_h = (l(\phi_i))_{1 \le i \le n}}$$

Remarque 7 *Attention on a $A_{h,ij} = a(\phi_j, \phi_i)$ et non $A_{h,ij} = a(\phi_i, \phi_j)$. Ceci revient au même seulement si a est symétrique.*

La matrice A_h est appelée **matrice de rigidité**, elle est inversible (car le système est équivalent à la formulation variationnelle qui possède une unique solution).

Si de plus a est symétrique alors A_h est symétrique définie positive.

Ainsi il ne reste plus qu'à :

- Trouver une famille de bons espaces d'approximation (H_h) pour que la solution approchée converge bien vers la solution réelle.
- Résoudre le système linéaire $A_h u_h = b_h$ *(voir section 4)*

La méthode des éléments finis est une méthode choisissant des espaces H_h basés sur les polynômes.

Cas de la dimension 1

Reprenons notre exemple favori :

$$\begin{cases} -u'' + cu = f \text{dans }]0,1[\\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

où $f \in L^2(0,1)$ et $c \in \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R}^+)$. On avait aboutit à la formulation variationnelle suivante :

$$\forall v \in H_0^1 \quad a(u,v) = l(v)$$

où

$$\begin{array}{rccl} a: & H_0^1 \times H_0^1 & \to & \mathbb{R} \\ & (u,v) & \to & \int_0^1 u'v' + \int_0^1 cuv \end{array}$$

et

$$\begin{array}{rccl} l: & H_0^1 & \to & \mathbb{R} \\ & v & \to & \int_0^1 fv \end{array}$$

On réalise un maillage de $]0,1[$:

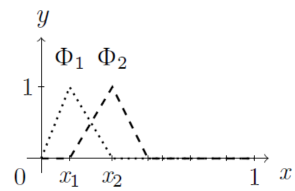
$$(x_j)_{j \in \{0,\ldots,J\}} \quad \text{avec } x_0 = 0 \ \text{ et } \ x_{J+1} = 1 \quad \text{et} \quad h = \max_{j \in \{0,\ldots,J\}} (x_{j+1} - x_j)$$

La méthode des éléments finis $\mathbb{P}_1$ en dimension 1 consiste à considérer comme H_h l'espace des fonctions continues et affines sur chaque maille, i.e.

$$H_h = \{v \in C^0([0,1]), \forall j \in \{0, ..., J\} \;\; v_{|[x_j, x_{j+1}]} \text{ affine}\}$$

Cet espace est un sous-espace vectoriel de H^1 de dimension $J+2$ et une base est formée par les fonctions chapeaux $(\phi_j)_{j\in\{0,...,J+1\}}$ où

$$\forall j \in \{0, ..., J+1\} \; \phi_j \in H_h \quad \text{et} \quad \forall i \in \{0, ..., J+1\} \phi_j(x_i) = \delta_{ij}$$



Remarque 8 *La qualification $\mathbb{P}_1$ vient du fait qu'on utilise des fonctions affines. Si on utilise la méthode $\mathbb{P}_2$ on utilisera des fonctions paraboliques par morceaux.*

Précédemment, comme nos fonctions s'annulaient aux bords, on avait fait correspondre à H^1 l'espace H^1_0. De même ici, on fait correspondre à H_h l'espace $H_{0,h}$ définie de la façon intuitive suivante :

$$H_{0,h} = \{v \in H_h, \; v(0) = 0 \quad v(1) = 0\}$$

Comme on a supprimé 2 degrés de liberté, l'espace $H_{0,h}$ est un sous-espace vectoriel de H^1_0 de dimension J.
On a l'approximation variationnelle :

$$\text{Trouver } u_h \in H_{0,h} \text{ tel que } \forall v_h \in H_{0,h} \quad a(u_h, v_h) = l(v_h)$$

On a vu alors que le problème revenait alors à résoudre le système linéaire

$$A_h u_h = b_h \quad \text{où } A_h = (\int_0^1 \phi'_j \phi'_i + \int_0^1 c\phi_j\phi_i)_{1\leq i,j\leq J} \text{ et } b_h = (\int_0^1 f\phi_i)_{1\leq i\leq J}$$

Une particularité de cette méthode est que les supports des fonctions ϕ_i sont très localisés, ce qui entraîne que la matrice A_h est tridiagonale et que le système linéaire sera plus rapide à résoudre.

En dimension supérieure

C'est la même idée mais en nettement plus technique, on se reportera à la page 122 du poly.

4.2.2 Méthode des différences finies

Contrairement aux éléments finis, on ne se place pas du tout dans le cadre de la formulation variationnelle mais dans celui de notre EDP initiale.
On va discrétiser les opérateurs dérivée et dérivée seconde.

Reprenons notre exemple favori :

$$\begin{cases} -u'' + cu = f \text{ dans }]0,1[\\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

où $f \in C^2([0,1], \mathbb{R})$ et $c \in \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R}^+)$.

Remarque 9 *On prend f plus régulière que d'habitude car on va notamment avoir besoin de sa valeur en un point, ce qui, je le rappelle, n'est pas possible généralement pour les fonctions de L^2.*

On considère qu'on a discrétisé notre domaine uniformément et qu'on possède donc une suite $(x_j)_{0\leq j\leq J+1}$ de points de discrétisation avec $x_{j+1} - x_j = h = \frac{1}{J+1}$.

On a alors envie de donner une formule approchée de $u''(x_j)$ en chacun des points x_j.
Pour cela on se sert des formules de Taylor, on a :

$$u(x_{j+1}) = u(x_j) + hu'(x_j) + \frac{h^2}{2}u''(x_j) + \frac{h^3}{6}u'''(x_j) + O(h^4)$$

$$u(x_{j-1}) = u(x_j) - hu'(x_j) + \frac{h^2}{2}u''(x_j) - \frac{h^3}{6}u'''(x_j) + O(h^4)$$

En sommant les deux et en divisant par h^2 on aboutit à :

$$u''(x_j) = \frac{u(x_{j+1}) - 2u(x_j) + u(x_{j-1})}{h^2} + O(h^2)$$

Ainsi il parait logique de considérer le problème approché suivant :
"Trouver un vecteur $(v_j)_{0\leq j\leq J+1}$ tel que

$$\begin{cases} -\frac{v_{j+1}-2v_j+v_{j-1}}{h^2} + c_j v_j = f_j \quad \forall 1 \leq j \leq J \\ v_0 = 0 \quad v_{J+1} = 0 \end{cases}$$

où $f_j = f(x_j)$ et $c_j = c(x_j)$."
A ce stade, on n'a encore montré aucun lien entre ce problème approché et le vrai problème continu. (cela sera fait dans la section 5 de ce guide)

Là encore, il s'agit en fait de résoudre un système linéaire. En effet l'équation du problème approché se réécrit sous la forme :

$$(A_h + C_h)V_h = F_h$$

où $V_h = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ ... \\ v_J \end{pmatrix}$, $F_h = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ ... \\ f_J \end{pmatrix}$, $C_h = diag(c_1, c_2, ..., c_J)$ et $A_h = \frac{1}{h^2}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ & ... & ... & ... \\ & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ matrice du Laplacien discret (opposé de l'opérateur Laplacien).

On verra, dans la section 5, le lien qui existe entre les deux problèmes.

Et avec un terme bu' en plus ?

Je fais un paragraphe à part pour ce cas là, car il y a trois manières différentes d'écrire la discrétisation d'une dérivée.

- Discrétisation aval :
$$u'(x_j) = \frac{u_(x_{j+1}) - u(x_j)}{h}$$
On se sert du terme "devant nous" (x_{j+1}), d'où l'appelation aval.
- Discrétisation amont :
$$u'(x_j) = \frac{u_(x_j) - u(x_{j-1})}{h}$$
On se sert du terme "derrière nous" (x_{j-1}), d'où l'appelation amont.
- Discrétisation centrée :
$$u'(x_j) = \frac{u(x_{j+1}) - u(x_{j-1})}{2h}$$

Il faudra faire attention car suivant la discrétisation choisie, les matrices du système linéaire ne s'écriront pas exactement de la même façon et on aura des propriétés différentes. (voir exercices 2 et 4 du TD 6)

4.3 Schéma d'Euler pour les EDO

Le principe ressemble légèrement à celui des différences finies, sauf que comme il n'y a pas de terme de dérivée seconde, on aboutit à une récurrence et non à un système linéaire.

Considérons l'EDO suivante sur un intervalle de temps $[0, T]$:

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(t_0) = y^0 \end{cases}$$

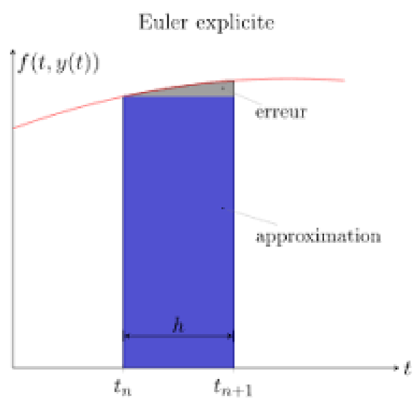
avec f continue par rapport à t et f globalement lipschitzienne par rapport à y.
On commence par discrétiser l'intervalle de temps : on définit $(t^n)_{0 \leq n \leq N}$ suite strictement croissante avec $t^0 = 0$ et $t^N = T$.
On pose $\Delta t^n = t^{n+1} - t^n$.

Remarque 10 *Le fait d'écrire t^n ne signifie pas "t à la puissance n", il s'agit juste d'un exposant indiquant que c'est le n-ème temps.*

L'idée ici est encore une fois de discrétiser l'opérateur dérivée. On a :

$$\begin{aligned} y(t^{n+1}) &= y(t^n) + \int_{t^n}^{t^{n+1}} y'(t)dt \\ &= y(t^n) + \int_{t^n}^{t^{n+1}} f(t, y(t))dt \end{aligned}$$

Et là on approxime l'aire sous la courbe (l'intégrale) par un rectangle.



On peut prendre le rectangle en se basant sur $f(t^n, y(t^n))$ c'est le schéma d'Euler explicite ou en se basant sur $f(t^{n+1}, y(t^{n+1}))$ c'est le schéma d'Euler implicite.

- **Schéma d'Euler explicite :**
  Le problème approché s'écrit alors :
  "Trouver $(z^n)_{0 \leq n \leq N}$ solution de

$$\begin{cases} z^{n+1} = z^n + \triangle t f(t^n, z^n) \quad \forall n \in \{0, ...N-1\} \\ z^0 = y^0 - e^0 \end{cases}$$

  avec e^0 donné. "

- **Schéma d'Euler implicite :**
  Le problème approché s'écrit alors :
  "Trouver $(z^n)_{0 \leq n \leq N}$ solution de

$$\begin{cases} z^{n+1} = z^n + \triangle t f(t^{n+1}, z^{n+1}) \quad \forall n \in \{0, ...N-1\} \\ z^0 = y^0 - e^0 \end{cases}$$

  avec e^0 donné. "

Remarque 11 *Il y a d'autres façon d'approcher l'intégrale, par des méthodes de quadrature, qui conduisent à des schémas d'ordre supérieur (ici l'ordre est 1 car la récurrence est d'ordre 1) plus précis. C'est par exemple le schéma de Runge-Kutta.*

Encore une fois, on n'a pour l'instant montré aucun lien entre le problème approché et le problème continu, cela sera l'objet de la section 5.

IV Résoudre un système linéaire

Dans les méthodes précédentes, on aboutit soit à un système linéaire soit à une récurrence. Sachant comment implémenter une récurrence, on va s'intéresser ici uniquement à rendre la résolution d'un système linéaire moins coûteuse.

Posons le cadre :
On veut résoudre le système linéaire $Ax = b$ où A matrice inversible de taille n connue, x la solution cherchée et b la donnée.
Une première idée serait d'inverser la matrice A mais cela coûte cher, la complexité est en $O(n^4)$.
On va faire appel à deux types de méthodes.

5 Méthodes directes

Ces méthodes reposent sur des décompositions matricielles.
Le concept général est le suivant :
Si A s'écrit commme $A = BC$ alors résoudre $Ax = b$ est équivalent à résoudre $By = b$ et $Cx = y$. On se retrouve avec 2 systèmes à résoudre mais si B et C sont "plus simples" que A, c'est quand même mieux.

5.0.1 Décomposition LU

Intéressons nous à une première décomposition : la décomposition LU (Lower-Upper).

Définition 10 (Décomposition LU) *Soit $A \in GL_n(\mathbb{K})$.*
A admet une décomposition LU si $A = LU$ avec L triangulaire inférieure avec une diagonale constituée de 1 et U triangulaire supérieure.
Si elle existe, cette décomposition est unique.

On se ramène ainsi à la résolution de 2 systèmes triangulaires, qui est de complexité $O(n^2)$.
La complexité de décomposer A en LU est elle en $O(n^3)$ (cela repose sur le pivot de gauss, voir algo page 45 du poly).
La complexité totale est donc en $O(n^3)$.

Cependant A n'admet pas toujours une décomposition LU. On a le théorème suivant :

Théorème 13 (Condition nécessaire et suffisante d'existence d'une décomposition LU) *A admet une décomposition LU si et seulement si tous ses mineurs principaux sont nuls.*

5.1 Décomposition de Cholesky

La décomposition LU marche assez souvent, mais il existe de meilleures décompositions lorsqu'on a affaire à certains types de matrices.

Définition 11 (Décomposition de Cholesky) *Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice symétrique réelle définie positive*
Alors A admet une décomposition de Cholesky i.e. $A = BB^T$ avec $B \in T_{inf}$ et $B_{ii} > 0 \forall i$.

Remarque 12 *Cette décomposition est un cas particulier de décomposition LU.*

L'ensemble des matrices pour lesquelles cette décomposition existe est a priori plus restreint, mais en pratique cela arrive souvent. En effet on a vu que la méthode des différences finies et la méthodes des éléments finis aboutissent (généralement) à des matrices de ce type.

5.2 Décomposition QR

Définition 12 (Décomposition QR) *Si $A \in GL_n(\mathbb{R})$ alors A admet une décomposition QR i.e. $A = QR$ avec Q orthogonale et R triangulaire supérieure.*
De plus, cette décomposition est unique.

Remarque 13 *Dans le cas où $A \in GL_n(\mathbb{C})$ c'est encore valide en remplaçant orthogonale par unitaire.*

Cette décomposition s'obtient par le procédé d'orthomalisation de Gram-Schmidt qui est en $O(n^3)$.
Puis, puisque $Q^{-1} = Q^T$, la complexité pour résoudre $Qy = b$ est en $O(n^2)$ et pour résoudre $Rx = y$ c'est en $O(n^2)$ aussi car R est triangulaire.
D'où une complexité totale en $O(n^3)$.

6 Méthodes itératives

Cette deuxième famille de méthodes repose sur la construction de suites définies par récurrence qui sont destinées à converger vers la solution du système $Ax = b$.
Plus précisément une méthode itérative consiste à écrire $A = M - N$ où M est inversible. On a donc ensuite $Ax = b$ qui se réécrit $Mx = Nx + b$.
On définit alors la suite (x_n) par récurrence :

$$x_0 \in \mathbb{K}^n \qquad \forall n \in \mathbb{N}\ Mx_{n+1} = Nx_n + b$$

On espère ensuite que la suite (x_n) va converger vers la solution x.
Posons $e_n = x_n - x$. Si (e_n) converge vers 0 (on est en dimension finie donc pas besoin de préciser pour quelle norme ça converge) alors (x_n) converge vers x. On a

$$\begin{aligned} Me_{n+1} &= M(x_{n+1} - x) \\ &= Nx_n + b - Mx \\ &= Nx_n + b - (Ax + Nx) \\ &= Ne_n \quad (car\ Ax{=}b) \end{aligned}$$

D'où finalement

$$e_{n+1} = M^{-1}Ne_n$$

On est ainsi ramené à une équation de récurrence plus simple.
Pour montrer que (e_n) tend vers 0 on a le théorème suivant.

Théorème 14 *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Les points suivants sont équivalents :*

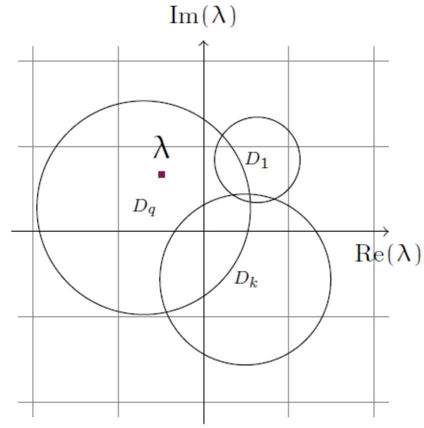
- *$\forall e_O \in \mathbb{K}^n$ la suite (e_n), définie par $\forall n \in \mathbb{N} e_{n+1} = Ae_n$, converge vers 0*
- *$\rho(A) = max\{|\lambda|, \lambda \in Sp(A)\} < 1$*
- $\lim\limits_{n \to +\infty} A^n = 0$
- *Il existe une norme matricielle subordonnée $||\cdot||$ telle que $||A|| < 1$*

Ainsi si on montre que $\rho(M^{-1}N) < 1$ on aura ce que l'on souhaite. Le problème est donc de localiser les valeurs propres (plus précisément la valeur propre de module maximal).

6.1 Localisation des valeurs propres

Pour savoir globalement où se situe les valeurs propres, on dispose du théorème suivant.

Théorème 15 (Gershgorin-Hadamard) *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.*
On pose pour $k \in \{1, ..., n\}$ $\quad D_k = \{z \in \mathbb{C}, |z - a_{kk}| \leq \sum_{j \neq n} |a_{kj}|\}$.
Alors $sp(A) \subset \bigcup_{k=1}^{n} D_k$.



On arrive à encadrer $\rho(A)$ par des normes matricielles.

Théorème 16 • *Soit $||\cdot||$ norme matricielle subordonnée. Alors pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ on a $\rho(A) \leq ||A||$*

- *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\epsilon > 0$. Alors il existe au moins une norme matricielle subordonnée telle que $||A|| \leq \rho(A) + \epsilon$.*

Enfin on a un théorème puissant qui, dans le cas où il n'y qu'une valeur propre de module $\rho(A)$, nous permet d'approximer $\rho(A)$.

Théorème 17 (Méthode de la puissance) *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $||\cdot||$ norme matricielle subordonnée et $\lambda_1, ..., \lambda_n$ les valeurs propres de A (telles que $|\lambda_1| \geq ... \geq |\lambda_n|$).*
On suppose $|\lambda_1| > |\lambda_2|$ (autrement dit $\rho(A)$ atteint par une seule des valeurs propres)
On définit la suite (x_n) par :

- *$x_0 = \mu e_1 + f$ où e_1 vecteur propre associé à λ_1, $\mu \neq 0$ et $f \in Im(A - \lambda_1 I)$.*
- *$\forall n \in \mathbb{N} \quad x_{n+1} = \frac{Ax_n}{||Ax_n||}$*

Et alors on a

$$\lim_{n \to +\infty} ||Ax_n|| = \rho(A)$$

Un cas particulier de matrice où l'on sait que $\rho(A)$ est atteint par une seule des valeurs propres est celui des matrices réelles à coefficients strictement positifs (voir théorème de Perron-Frobenius, compléments).

6.2 Exemples de méthodes itératives

On donne ici deux exemples de méthode pour décomposer intelligemment $A = M - N$.

Méthode de Jacobi :
On prend $M = diag(A)$ (et donc $N = diag(A) - A$).
Par ce qui précède, si $diag(A)$ est inversible et $\rho(diag(A)^{-1}(diag(A) - A)) < 1$ alors pour tout $x_0 \in \mathbb{K}^n$ la suite (x_n) converge vers x.
Il est très facile de savoir si $M = diag(A)$ est inversible, il faut et il suffit que tous les coefficients diagonaux de A soient non nuls.

Méthode de Gauss-Seidel :
On prend $M = triu(A)$ (et donc $N = triu(A) - A = tril(A, -1)$). (voir en Matlab ce que ça signifie)
De même, si M est inversible alors (x_n) converge vers x.

V Lien entre la solution du problème approché et la solution du problème réel

On arrive à la dernière partie de la démarche de résolution d'une EDP. Il s'agit de montrer que la solution des problèmes approchés qu'on a construit (et dont on n'a montré aucun lien avec les problèmes continus pour le moment) converge bien vers la solution de notre problème réel.

Allez c'est parti, on regarde ça pour tous les problèmes approchés vus plus haut !

7 Problèmes elliptiques

7.1 Méthode des éléments finis

On reprend les notations précédentes du guide (page 16-17).

Le problème approché est :

$$\text{Trouver } u_h \in H_{0,h} \text{ tel que } \forall v_h \in H_{0,h} \quad a(u_h, v_h) = l(v_h)$$

Ce qui revient à :

$$A_h u_h = b_h \quad \text{où } A_h = (\int_0^1 \phi_j' \phi_i' + \int_0^1 c\phi_j\phi_i)_{1\leq i,j\leq J} \text{ et } b_h = (\int_0^1 f\phi_i)_{1\leq i\leq J}$$

Reprécisons déjà que le théorème de Lax-Milgram s'applique à notre problème approché et donc on sait qu'une unique solution u_h existe pour notre problème approché.
Notons u la solution de notre problème continu.
Le lemme de Céa nous fournit l'erreur commise :

Théorème 18 (Lemme de Céa)

$$\|u - u_h\|_H \leq \frac{M}{\alpha} \underset{v_h\in H_h}{inf} \|u - v_h\|_H$$

avec $M = \|l\|_{H'}$ (constante de majoration lorsqu'on montre la continuité de l) et α constante de minoration lorsqu'on montre la coercivité de a.

Ce lemme est sympa théoriquement mais en pratique il est inutilisable car a besoin de connaitre u pour majorer $\|u - u_h\|_H$...

Néanmoins, de ce lemme on déduit un théorème puissant (voir poly page 109) qui en l'appliquant (avec un bon opérateur d'interpolation défini page 118) nous fournit un beau résultat pour la méthodes des éléments finis $\mathbb{P}_1$:

Théorème 19 *La méthode des éléments finis $\mathbb{P}_1$ converge i.e.*

$$\|u - u_h\|_{H^1} \underset{h\to 0}{\to} 0$$

On a de plus une estimation de la vitesse de convergence :

$$\|u - u_h\|_{H^1} \leq Ch \|f\|_{L^2}$$

avec $C > 0$ constante.

7.2 Méthode des différences finies

On reprend les notations de la page 18 du guide.

Le problème approché est :
"Trouver un vecteur $(v_j)_{0\leq j\leq J+1}$ tel que

$$\begin{cases} -\frac{v_{j+1}-2v_j+v_{j-1}}{h^2} + c_j v_j = f_j & \forall 1 \leq j \leq J \\ v_0 = 0 \quad v_{J+1} = 0 \end{cases}$$

où $f_j = f(x_j)$ et $c_j = c(x_j)$."
L'équation se réécrit sous la forme :

$$(A_h + C_h)V_h = F_h$$

où $V_h = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ ... \\ v_J \end{pmatrix}$, $F_h = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ ... \\ f_J \end{pmatrix}$, $C_h = diag(c_1, c_2, ..., c_J)$ et $A_h = \frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ & ... & ... & ... \\ & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ matrice du Laplacien discret (opposé de l'opérateur Laplacien).

Remarquons déjà que notre problème approché admet bien une unique solution. En effet on montre que la matrice $A_h + C_h$ est inversible, ce qui nous fournit le résultat.

On aimerait maintenant comparer la solution V_h du problème approché avec la solution u du problème continu. Mais là il y a un hic, le premier est un vecteur et le deuxième est une fonction !
On va en fait comparer uniquement les composantes de V_h avec les valeurs en x_j de u. On définit ainsi l'erreur de convergence :

Définition 13 (Convergence) *L'erreur de convergence est définie par :*

$$E_h = V_h - \Pi_h u$$

où $\Pi_h u = \begin{pmatrix} u(x_1) \\ u(x_2) \\ ... \\ u(x_J) \end{pmatrix}$ *(c'est une sorte de projection de u sur les points x_j).*

On dit que le schéma numérique converge si $\|E_h\|_\infty \underset{J\to\infty}{\rightarrow} 0$ pour toute donnée $f \in C^0([0,1])$.

Malheureusement la convergence n'est pas facile à montrer directement. Pour la prouver, on doit passer par deux autres notions : la consistance et la stabilité. Puis par un théorème puissant (le théorème de Lax) le fait d'avoir ces deux notions entraînera la convergence.

7.2.1 Consistance

La "consistance" est une traduction eronnée de l'anglais "consistency" qui signifie "cohérence" et c'est avec cette bonne traduction que la notion prend sens. Voici la définition de la consistance :

Définition 14 (Consistance) *L'erreur de consistance (du problème $A_h V_h = F_h$) est définie par :*

$$\epsilon_h = A_h \Pi_h u - A_h V_h = A_h \Pi_h u - F_h$$

On dit que le schéma numérique est consistant avec le problème continu si $\|\epsilon_h\|_\infty \underset{J\to\infty}{\rightarrow} 0$.

Ainsi l'erreur de consistance regarde en quelque sorte comment se comporte la vraie solution u dans le problème approché.

On montre que notre schéma numérique est consistant à l'ordre 2 (i.e. $\|\epsilon_h\|_\infty = O(h^2)$) grâce à l'inégalité de Taylor-Lagrange notamment.

Remarque 14 *Il faut toujours indiquer avec quel problème le schéma est consistant, le mot "consistant" seul n'a pas de sens.*

7.2.2 Stabilité

La notion de stabilité est l'équivalent de la continuité de la solution par rapport à la donnée. Voici sa définition :

Définition 15 (Stabilité) *On dit qu'un schéma de la forme $A_h V_h = F_h$ est stable au sens de la norme $\|\cdot\|$ s'il existe une constante $C > 0$ indépendante de la donnée F_h et de J telle que :*

$$\forall F_h \in \mathbb{R}^J \quad \|V_h\| = \left\|A_h^{-1} F_h\right\| \leq C \|F_h\|$$

Pour la matrice du Laplacien discret A_h on montre (page 99) que

$$\forall J \geq 1 \quad \left\|A_h^{-1}\right\|_\infty \leq \frac{1}{8}$$

Ce qui implique la stabilité dans notre cas, en se servant aussi du fait que $\left\|(A_h + C_h)^{-1}\right\|_\infty \leq \left\|A_h^{-1}\right\|_\infty$.

7.2.3 Convergence

La définition de la convergence a été écrite plus haut. Montrons maintenant que la consistance et la stabilité implique ici la convergence.

On a

$$\begin{aligned}(A_h + C_h)E_h &= (A_h + C_h)V_h - (A_h + C_h)\Pi_h u \\ &= F_h - \epsilon_h - F_h \\ &= -\epsilon_h\end{aligned}$$

D'où, puisque A_h est inversible,

$$\begin{aligned}\|E_h\|_\infty &\leq \left\|(A_h + C_h)^{-1}\epsilon_h\right\|_\infty \\ &\leq \left\|A_h^{-1}\right\|_\infty \|\epsilon_h\|_\infty \\ &\leq \frac{1}{8}\|\epsilon_h\|_\infty\end{aligned}$$

Or $\|\epsilon_h\|_\infty = O(h^2)$ donc notre schéma numérique est convergent d'ordre 2.

8 Problèmes de Cauchy

Reprenons les notations de la page 19 du guide. On considère ici le schéma d'Euler explicite.

Le problème approché s'écrit :
"Trouver $(z^n)_{0\leq n\leq N}$ solution de

$$\begin{cases} z^{n+1} = z^n + \triangle t f(t^n, z^n) & \forall n \in \{0, ...N-1\} \\ z^0 = y^0 - e^0 \end{cases}$$

où e^0 donné."
On note y la solution du problème continu.

De la même façon que pour les différences finies, on définit la consistance et la stabilité avant de s'attaquer à la convergence.

8.1 Consistance

Rappelons que la consistance (ou plutôt cohérence) est une évaluation de comment se comporte la solution du problème réel dans le problème approché. Voici sa définition dans le cas du schéma d'Euler explicite :

Définition 16 (Consistance) *L'erreur de consistance est définie par :*

$$\epsilon^n = y(t^{n+1}) - y(t^n) - \Delta t f(t^n, y(t^n))$$

On dit que le schéma est consistant si $\frac{\epsilon^n}{\Delta t}$ tend vers 0 quand Δt tend vers 0.
Le schéma est consistant à l'ordre p si $\epsilon^n = O((\Delta t)^{p+1})$.

Remarque 15 *Comme vous l'avez sans doute remarqué, on regarde $\frac{\epsilon^n}{\Delta t}$ pour la consistance et non juste ϵ^n, il faut faire attention.*

8.2 Stabilité

9 Problèmes paraboliques

VI Compléments

10 Algèbre linéaire

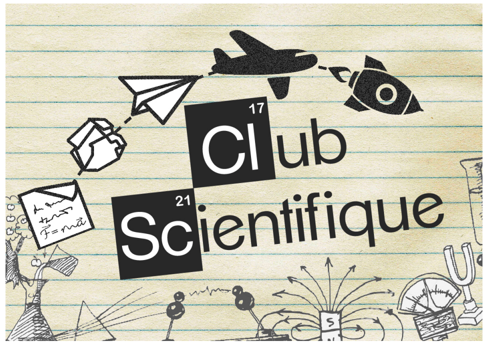
Théorème 20 (Théorème de Perron-Frobenius) *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à coefficients strictement positifs. Alors*

- *$\rho(A)$ est valeur propre de A d'espace propre associé porté par un vecteur à coeffcients strictement positifs*
- *$\rho(A)$ est la seule valeur propre de module maximal*
- *$\rho(A)$ est simple*

11 EDO

Théorème 21 (Lemme des bouts ou théorème de sortie de tout compact) *Soit $y \in C^1(I \times U)$ solution maximale de $y' = f(t, y)$.*
On pose $b = supI \in [0, +\infty]$ et $\beta = supJ \leq b$.
Alors

- *ou bien $b = \beta$*
- *ou bien "y sort de tout compact de U" i.e. $\forall K$ compact de U $\exists \eta < \beta$ tq $\forall \beta > t \geq \eta \quad y(t) \notin K$.*


17
Club
21
Scientifique