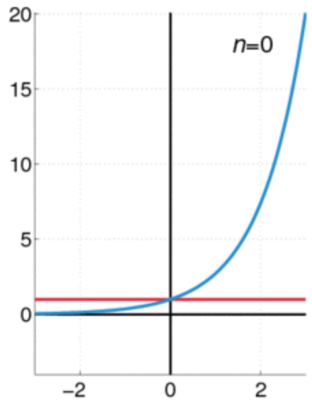
WIKIPEDIA

幂级数

维基百科，自由的百科全书

在数学中，**幂级数**（**power series**）是一类形式简单而应用广泛的函数级数，变量可以是一个或多个（见“多元幂级数”一节）。单变量的幂级数形式为：

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-c)^n$$
$$=a_0+a_1(x-c)^1+a_2(x-c)^2+a_3(x-c)^3+\cdots$$



蓝色曲线是指数函数，红色曲线是指数函数的麦克劳林展开的前n+1项和的曲线

其中的c和$a_0,a_1,a_2\cdots a_n\cdots$是常数。$a_0,a_1,a_2\cdots a_n\cdots$称为幂级数的系数。幂级数中的每一项都是一个幂函数，幂次为非负整数。幂级数的形式很像多项式，在很多方面有类似的性质，可以被看成是“无穷次的多项式”。

如果把$(x-c)$看成一项，那么幂级数可以化简为$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$的形式。后者被称为幂级数的标准形式。一个标准形式的幂级数完全由它的系数来决定。

将一个函数写成幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-c)^n$的形式称为将函数在$c$处展开成幂级数。不是每个函数都可以展开成幂级数。

幂级数是分析学研究的重点之一，然而在组合数学中，幂级数也占有一席之地。作为母函数，由幂级数概念发展出来的形式幂级数是许多组合恒等式的来源[1]。在电力工程学中，幂级数则被称为Z-变换。实数的小数记法也可以被看做幂级数的一种，只不过这里的x被固定为$\frac{1}{10}$。在p-进数中则可以见到x被固定为10的幂级数。

目录

例子

多项式可以看做系数从某一项开始全是零的幂级数，例如多项式$f(x)=x^2+2x+3$可以写成标准形式的幂级数：

$$f(x)=3+2x+1x^2+0x^3+0x^4+\cdots$$

也可以写成（$c=1$）：

$$f(x)=6+4(x-1)+1(x-1)^2+0(x-1)^3+0(x-1)^4+\cdots$$

实际上，多项式可以写成在任意c附近展开的幂级数。就这个意义上说，幂级数是多项式的推广。

等比级数的公式给出了对$|x|<1$，有

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n=1+x+x^2+x^3+\cdots$$，是幂级数中基本而又重要的一类。同样重要的还有指数的幂级数展开：

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots,$$

以及正弦函数（对所有实数x成立）：

$$\sin(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^nx^{2n+1}}{(2n+1)!}=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots,$$

这些幂级数都属于泰勒级数。

幂级数里不包括负的幂次。例如$1+x^{-1}+x^{-2}+\cdots$就不是幂级数（它是一个洛朗级数）。同样的，幂次为分数的级数也不是幂级数。系数a_n必须是和x无关，比如$\sin(x)x+\sin(2x)x^2+\sin(3x)x^3+\cdots$就不是一个幂级数。

敛散性

作为级数的一种，幂级数的敛散性也是研究幂级数的重点之一。对同一个幂级数，当变量x在复数中变化时，幂级数可能收敛，也可能发散。作为判断的依据，有：

> **阿贝尔引理**：给定一个幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$，如果对实数$r_0>0$，数列$(|a_n|r_0^n)_{n\geq 0}$有界，那么对任意复数$|x|<r_0$，$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$绝对收敛。
>
> **证明**：
>
> 如果$|x|<r_0$，那么由于数列$(|a_n|r_0^n)_{n\geq 0}$有界，存在正实数M使得对任意的n，总有$0\leq |a_n|r_0^n\leq M$。所以：
>
> $$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}|a_n\, x^n| &= \sum_{n=1}^{\infty}\left(|a_n|\, r_0^n\right)\cdot\left(\frac{|x|}{r_0}\right)^n\\ &\leq \sum_{n=0}^{\infty} M\cdot\left(\frac{|x|}{r_0}\right)^n\\ &= M\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{|x|}{r_0}\right)^n\end{aligned}$$
>
> 正数比值$\frac{|x|}{r_0}$严格小于1，因此上面的等比级数收敛，于是$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$绝对收敛。

按照引理，使得幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$收敛的复数的集合总是某个以原点为中心的圆（不包括边界），称为**收敛圆盘**，其边界称为**收敛圆**。具体来说，就是：

1. 要么对所有的非零复数，$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$都发散；
2. 要么存在一个正常数（包括正无穷）R，使得当$|x|<R$时，$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$绝对收敛，当$|x|>R$时，$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$发散。

这个可以用来辨别幂级数是否收敛的常数R被称为幂级数的**收敛半径**，当属于第一种情况时，规定收敛半径为零。

按照定义，对一个幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$，当$|x|<R$（在收敛圆盘内）时（如果有的话），幂级数必然收敛；而当$|x|>R$时（如果有的话），幂级数必然发散。但是如果$|x|=R$（在收敛圆上）的话，这时幂级数的敛散性是无从判断的，只能具体分析。

根据达朗贝尔审敛法，收敛半径R满足：如果幂级数$\sum a_n x^n$满足$\lim_{n\to\infty}|\frac{a_{n+1}}{a_n}|=\rho$，则：

> ρ是正实数时，$R=\frac{1}{\rho}$。
>
> $\rho=0$时，$R=\infty$。
>
> $\rho=\infty$时，$R=0$。

根据根值审敛法，则有柯西-阿达马公式：

> $R=\liminf_{n\to\infty}|a_n|^{-\frac{1}{n}}$
>
> 或者$\frac{1}{R}=\limsup_{n\to\infty}|a_n|^{\frac{1}{n}}$。

幂级数的运算

形式上，幂级数的加减法运算是将相应系数进行加减。

$$(a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots)\pm(b_0+b_1x+b_2x^2+\cdots+b_nx^n+\cdots)=(a_0+b_0)+(a_1+b_1)x+(a_2+b_2)x^2+\cdots+(a_n+b_n)x^n+\cdots$$

两个幂级数的乘积基于所谓的柯西乘积：

$$\begin{aligned}&\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-c)^n\right)\\ &=\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} a_i b_j (x-c)^{i+j}\\ &=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i}\right)(x-c)^n\text{。}\end{aligned}$$

各种运算后，得到的幂级数的收敛半径是两个幂级数中的较小者。

一致收敛性

对一个收敛半径为R的幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$，可以证明，幂级数在收敛圆盘上一致收敛。这个性质称为**内闭一致收敛**。因此，考虑幂级数函数

$$f : (-R, R) \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$. \quad x \longmapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

它在收敛区间(-R,R)上是连续函数。

幂级数函数的求导和积分

可以证明，幂级数函数f在收敛区间上无穷次可导，并且可积。此外，由于幂级数函数f在收敛圆盘内一致收敛，可以进行逐项求导和积分，而且其导函数和积分函数都是在收敛区间上连续的幂级数函数。它们的收敛半径等于$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$的收敛半径$R$。具体形式为：

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1}\,(n+1)\,x^n$$
$$\int f(x)\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n x^{n+1}}{n+1} + k = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n-1} x^n}{n} + k$$

函数的幂级数展开

鉴于幂级数函数的良好分析性质以及对之深入的研究，如能将要研究的函数以幂级数形式来表示，将有助于对其性质的研究。然而，不是所有的函数都能展开为幂级数。一个函数在一点c附近**可展**（可以展开为幂级数），当且仅当存在正实数R>0，使得在复平面中以c为圆心以R为半径的圆$D(c,R)$内（不包括边界）有：

$$\forall z \in D(c, R), \qquad f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-c)^n$$

其中a_n为确定的常数。

如果一个函数在某处可展，那么它在这点无穷可导（C^∞），并且在这点附近的展开式是唯一的。

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}$$

即是在这点的泰勒展开的第n项的值。这时展开得到的幂级数称为函数f在c点的泰勒级数。

函数的可展性

对于一般的无穷可导函数f，也可以写出幂级数$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n$，但即使这个幂级数收敛，其值也不一定等于$f$。例如函数$f$：

当x>0时，$f(x) = e^{-1/x^2}$
当$x \leq 0$时，$f(x) = 0$

可以证明f无穷可导，并且在0处的每阶导数都是零，因此相应的幂级数$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}(x)^n$恒等于0，不等于$f$。

函数可以展开成幂级数的充要条件是其泰勒展开的余项趋于零：$R_n(x) = f(x) - \sum_{n=0}^{n} \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n \to 0$，

一个更常用到的充分条件是：如果存在正实数r，使得f在区间$(c-r, c+r)$上无穷可导，并且存在正数M使得对任意的n，任意的$x \in (c-r, c+r)$都有

$|f^n(x)| \leq M$，那么f可以在c附近展开成幂级数：
$\forall x \in (c-r, c+r),\ \ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n$。

常见函数的幂级数展开

以下是一些常见函数的幂级数展开。运用这些展开可以得到一些重要的恒等式。

1. $\forall x \in \mathbb{C},\ e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}.$
2. $\forall x \in \mathbb{R},\ \cos x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$
3. $\forall x \in \mathbb{R},\ \sin x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$
4. $\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{ch}\ x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$

5. $\forall x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{sh} x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$.

6. $\forall x \in D(0,1)$, $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$.

7. $\forall x \in (-1,1]$, $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$.

8. $\forall x \in [-1,1]$, $\arctan x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ ，特别地，$\pi = 4\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$。

9. $\forall x \in (-1,1)$, $\forall \alpha \notin \mathbb{N}$, $(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n$.

10. $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall \alpha \in \mathbb{N}$, $(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\alpha} \binom{\alpha}{n} x^n$.

11. $\forall x \in (-1,1)$, $\operatorname{artanh} x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$.

12. $\forall x \in (-1,1)$, $\arcsin x = x + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{\prod_{k=1}^{n}(2k-1)}{\prod_{k=1}^{n} 2k} \right) \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$

13. $\forall x \in (-1,1)$, $\operatorname{arsinh} x = x + \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \left(\frac{\prod_{k=1}^{n}(2k-1)}{\prod_{k=1}^{n} 2k} \right) \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$

14. $\forall x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, $\tan x = \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{x}{\pi}\right)^{2n+1} (2^{2n+2}-1)\,\zeta(2n+2)$，其中$\forall p > 1$, $\zeta(p) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}$

幂级数与解析函数

局部上由收敛幂级数给出的函数叫做**解析函数**。解析函数可分成实解析函数与複解析函数。所有的幂级数函数在其收敛圆盘内都是解析函数，并且在所有点上都可展。根据*零点孤立原理*，解析函数的零点必然是孤立点。在复分析中，所有的全纯函数（即複可微函数）都是无穷可微函数，并是复解析函数，这在实分析中则不然。

形式幂级数

在抽象代数中，幂级数研究的重点是其作为一个半环的代数性质。幂级数的系数域是实数或复数或其它的域不再重要，敛散性也不再讨论。这样抽离出的代数概念被称为**形式幂级数**。形式幂级数在组合代数有重要用处，例如作为母函数而运用在许多组合恒等式的推导中。

多元幂级数

幂级数概念在多元微积分学中的一个推广是多元幂级数：

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{j_1, \dots, j_n = 0}^{\infty} a_{j_1, \dots, j_n} \prod_{k=1}^{n} (x_k - c_k)^{j_k},$$

其中$j = (j_1, ..., j_n)$是一个系数为非负整数的向量。系数$a_{(j_1,\dots,j_n)}$通常是实数或复数。$c = (c_1, ..., c_n)$和变量$x = (x_1, ..., x_n)$是实数或复数系数的向量。在多重下标的表示法中，则有

$$f(x) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} a_\alpha (x-c)^\alpha.$$

参见

- 泰勒级数
- 解析函数
- 阿贝尔定理
- 零点孤立原理

参考来源

1. 史济怀，组合恒等式，中国科学技术大学出版社，2001

参考文獻

- 幂级数介绍 (https://web.archive.org/web/20041211055858/http://www.hainnu.edu.cn/jpkc/mathans/jiaos/img/13.pdf)
- 幂级数展开 (http://218.195.112.45/jpkc/sxfx/wenjian/jiaoan/14.pdf)
- 幂级数与泰勒展开 (http://bnucourse.bnu.edu.cn/course/analysis/html/teach/ppt/3/9.ppt)
- Henri Cartan, *Théorie élémentaire des fonctions analytiques d'une ou plusieurs variables complexes*
- Jean Dieudonné, *Calcul infinitésimal*
- John H. Mathews、Russell W. Howell, COMPLEX ANALYSIS: for Mathematics and Engineering，第5版, 2006

取自“https://zh.wikipedia.org/w/index.php?title=幂级数&oldid=53694045”