WIKIPEDIA

简单函数

维基百科，自由的百科全书

简单函数又稱**單純函數**，（英語：simple function），在數學的实分析中是指值域只有有限個值的实函数，類似階梯函數。有些作者要求简单函数是可测的，因為在實際應用上，特別在討論勒貝格積分時，必須是可測函數，要不然積分的定義沒有意義。

一个简单函数的基本例子，是半开区间[1,9)上的取整函数，它唯一的值是{1,2,3,4,5,6,7,8}。一个更加高级的例子是实直线上的狄利克雷函数，如果x是有理数，则函数的值为1，否则为0。

目录

定义

嚴格的講，一个简单函数是可测集合的指示函数的有限线性组合。更加精确地，设(X, Σ)为可测空间。设A_1，……，$A_n \in \Sigma$ 皆为可测集合，并设a_1，……，a_n 皆为实数或复数。简单函数是以下形式的函数：

$$f(x)=\sum_{k=1}^{n} a_k \mathbf{1}_{A_k}(x).$$

其中 $\mathbf{1}_A$ 代表集合 A 的指示函數。

性质

根据定义，两个简单函数的和、差与积，以及一个简单函数与常数的积也是简单函数，因此可推出所有简单函数在复数域上形成了一个交换代数。

在积分的理论的发展中，以下的结果是很重要的。任何非负的可测函数 $f\colon X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ 都會是單調遞增的非負簡單函數序列的逐點極限。事实上，设 f 为定义在测度空间 $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ 上的非负可测函数。对于每一个 $n \in \mathbb{N}$，我们把 f 的對應域分成 $2^{2n}+1$個區間，其中 2^{2n} 個區間长度为 2^{-n}（除了 $I_{n,2^{2n}}$ 以外，其他區間長度都為 2^{-n}）。讓

$$I_{n,k}=\left[\frac{k}{2^n},\frac{k+1}{2^n}\right),\ k=0,1,\ldots,2^{2n}-1,\quad \text{以及} \quad I_{n,2^{2n}}=[2^n,\infty].$$

定义可测集合

$A_{n,k}=f^{-1}(I_{n,k})$，对于 $k=0,1,\ldots,2^{2n}$。

則我們定義简单函数 s_n 如下

$$s_n = \sum_{k=0}^{2^{2n}} \frac{k}{2^n} \cdot \mathbf{1}_{A_{n,k}}$$

如果對每個 $n \in \mathbb{N}$ 都構造如此的函數 s_n，則我們得到一組單調遞增的簡單函數序列 $\{s_n\}$，

当 $n \to \infty$ 时，這序列會逐点收斂至 f。

注意如果 f 是有界的，则序列是一致收斂。

這種用簡單函數逼近非負函數 f 的方法，可以用來定義 f 的勒貝格積分，因為相對來講，簡單函數的積分很好計算。詳情請參閱勒貝格積分。

简单函数的积分

如果一个测度 μ 定义在空间(X,Σ)上，則簡單函數 $f(x)=\sum_{k=1}^{n} a_k \mathbf{1}_{A_k}(x)$ 關於 μ 的勒贝格积分是：

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \mu(A_k),$$

如果所有的加数都是有限的。

参考文献

- J. F. C. Kingman, S. J. Taylor. *Introduction to Measure and Probability*, 1966, Cambridge.
- S. Lang. *Real and Functional Analysis*, 1993, Springer-Verlag.
- W. Rudin. *Real and Complex Analysis*, 1987, McGraw-Hill.
- H. L. Royden. *Real Analysis*, 1968, Collier Macmillan.