Équations aux Dérivées Partielles

Cours I - Systèmes dynamiques continus, Problèmes de Cauchy

CentraleSupélec - Cursus ingénieur

26 novembre 2019

CentraleSupélec

- **Alexandre RICHARD**
  Maître de conférences
  Labo MICS et fédération de mathématiques de CS
  Bâtiment Bouygues, SC.101
  `alexandre.richard@centralesupelec.fr`
- **Recherche** :
  Analyse stochastique, Équa diff stochastiques/rugueuses,
  Temps long et Théorèmes limites,
  Systèmes de particules.
- **Enseignement** :
  1A : CM+TD de CIP en anglais, CM (1, 2 et 4) d'EDP + TD
  2A : TD d'Opérateurs et distributions (2A), TD de Probabilités avancées (2A)

. Ces slides sont préparées à partir de celles du cours CIPEDP (2018-2019) de P. Lafitte et J. Cagnol. Toute erreur ou typo ne relève en revanche que de ma responsabilité, merci dès lors de me les signaler !

Pour poser vos questions **pendant** et **entre** les cours, Daskit :

daskit.com/edp19-20

Mathématique

Mathématiques

Les mathématiques sont essentielles dans de nombreuses industries traditionnelles et en science

- Simulation numérique (industries automobile et aéronautique, finance, pharmacie, etc.) ;

Mathématiques

Les mathématiques sont essentielles dans de nombreuses industries traditionnelles et en science

- Simulation numérique (industries automobile et aéronautique, finance, pharmacie, etc.) ;
- Fiabilité des systèmes (nucléaire, réseaux électriques, etc.) ;

Mathématiques

Les mathématiques sont essentielles dans de nombreuses industries traditionnelles et en science

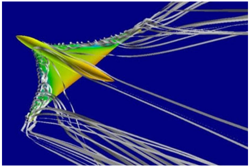
- Simulation numérique (industries automobile et aéronautique, finance, pharmacie, etc.) ;
- Fiabilité des systèmes (nucléaire, réseaux électriques, etc.) ;
- Science : physique (tous les domaines ! $\to$ φQ, Relat., théorie des champs, mécanique statistique, ...), biologie, mécanique (e.g. turbulence), cryptographie, etc.

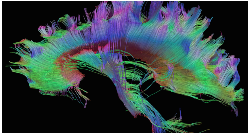
Mathématiques

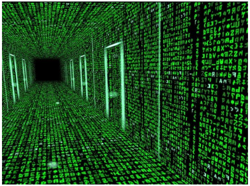
Les mathématiques sont essentielles dans de nombreuses industries traditionnelles et en science

- Simulation numérique (industries automobile et aéronautique, finance, pharmacie, etc.) ;
- Fiabilité des systèmes (nucléaire, réseaux électriques, etc.) ;
- Science : physique (tous les domaines ! $\rightarrow \varphi$Q, Relat., théorie des champs, mécanique statistique, ...), biologie, mécanique (e.g. turbulence), cryptographie, etc.

Et plus récemment : neuroscience, data science, marketing, médecine, imagerie, etc.







Les mathématiques et l'ingénieur

Exemples plus poussés

- Turbulence : Résoudre les équations de Navier-Stokes ou d'Euler aux petites échelles est extrêmement coûteux, mais essentiel. Les techniques modernes reposent sur des techniques numériques poussées ou des modèles stochastiques pour reproduire les propriétés fines de la turbulence.

Les mathématiques et l'ingénieur

Exemples plus poussés

- Turbulence : Résoudre les équations de Navier-Stokes ou d'Euler aux petites échelles est extrêmement coûteux, mais essentiel. Les techniques modernes reposent sur des techniques numériques poussées ou des modèles stochastiques pour reproduire les propriétés fines de la turbulence.

- Résolution d'EDP par des techinques de machine learning : La complexité des algorithmes déterministes augmentent drastiquement avec la dimension (paramètres, espace). Les méthodes de ML peuvent fournir des algorithmes plus rapides, mais ne sont pas maîtrisées actuellement.

Organisation des séances d'EDP

Le cours s'inscrit dans la continuité de CIP. Il apporte quelques outils indispensables au cours de Modélisation.

Organisation des séances d'EDP

Le cours s'inscrit dans la continuité de CIP. Il apporte quelques outils indispensables au cours de Modélisation.

I. Systèmes dynamiques continus, étude théorique des EDO.
II. Analyse numérique des EDO.
III. Modélisation par des EDP.
IV. Distributions.
V. Résolution théorique des problèmes elliptiques.
VI. Méthode des éléments finis I.
VII. Méthode des éléments finis II.
VIII. Analyse numérique matricielle.
IX. Différences finies.
X. Problèmes paraboliques.

Introduction

Définition

Un **problème de Cauchy** *est une équation d'évolution donnée avec* **une condition initiale***.*

Introduction

Définition

Un **problème de Cauchy** *est une équation d'évolution donnée avec* **une condition initiale**.

Définition

Une **équation différentielle ordinaire (EDO)** *est une égalité reliant une fonction dépendant d'***une seule variable réelle** *(t dans la suite) à sa ou ses dérivées.*

Introduction

Définition

Un **problème de Cauchy** *est une équation d'évolution donnée avec* **une condition initiale**.

Définition

Une **équation différentielle ordinaire (EDO)** *est une égalité reliant une fonction dépendant d'***une seule variable réelle** *(t dans la suite) à sa ou ses dérivées.*

Remarque

- *On considère souvent les conditions initiales en $t_0 = 0$.*

Introduction

Définition

Un **problème de Cauchy** *est une équation d'évolution donnée avec* **une condition initiale***.*

Définition

Une **équation différentielle ordinaire (EDO)** *est une égalité reliant une fonction dépendant d'***une seule variable réelle** *(t dans la suite) à sa ou ses dérivées.*

Remarque

- *On considère souvent les conditions initiales en $t_0 = 0$.*
- *Dans un phénomène d'évolution (i.e. dépendant du temps), un problème de Cauchy spécifie l'évolution du système à partir de conditions initiales données.*

Introduction

Définition

Un **problème de Cauchy** *est une équation d'évolution donnée avec* **une condition initiale**.

Définition

Une **équation différentielle ordinaire (EDO)** *est une égalité reliant une fonction dépendant d'***une seule variable réelle** *(t dans la suite) à sa ou ses dérivées.*

Remarque

- *On considère souvent les conditions initiales en $t_0 = 0$.*
- *Dans un phénomène d'évolution (i.e. dépendant du temps), un problème de Cauchy spécifie l'évolution du système à partir de conditions initiales données.*
- *Une EDO, associée à une CI, forment un problème de Cauchy.*

Notation : $\dfrac{d}{dt}u\,,\ \mathbf{u}'\,,\ \dot{u}$

Notation : $\dfrac{d}{dt}u\,,\ \mathbf{u}'\,,\ \dot{u}$

Ex : $y' = ay$ avec $a \in \mathbb{R}$ fixé. Les solutions sont des fonctions y.

Notation : $\dfrac{d}{dt}u\,,\ \mathbf{u}'\,,\ \dot{u}$

Ex : $y' = ay$ avec $a \in \mathbb{R}$ fixé. Les solutions sont des fonctions y.
Il existe une infinité de solutions à cette EDO : $\forall \lambda \in \mathbb{R}$,

$$y : t \in \mathbb{R} \mapsto \lambda \exp(at) \ \text{ est solution.}$$

Notation : $\dfrac{d}{dt}u$, $\mathbf{u}'$, $\dot{u}$

Ex : $y' = ay$ avec $a \in \mathbb{R}$ fixé. Les solutions sont des fonctions y.
Il existe une infinité de solutions à cette EDO : $\forall \lambda \in \mathbb{R}$,

$$y : t \in \mathbb{R} \mapsto \lambda \exp(at) \ \text{ est solution.}$$

En revanche, si on spécifie $y(0)$, cela fixe $\lambda = y(0)$ et la solution au problème de Cauchy est unique.

Notation : $\dfrac{d}{dt}u\,,\ \mathbf{u}'\,,\ \dot{u}$

Ex : $y' = ay$ avec $a \in \mathbb{R}$ fixé. Les solutions sont des fonctions y.
Il existe une infinité de solutions à cette EDO : $\forall \lambda \in \mathbb{R}$,

$$y : t \in \mathbb{R} \mapsto \lambda \exp(at) \quad \text{est solution.}$$

En revanche, si on spécifie $y(0)$, cela fixe $\lambda = y(0)$ et la solution au problème de Cauchy est unique.

EDO : infinité de solutions (exemple : $y' = y$)

$\downarrow$

Problème : EDO + conditions

$\downarrow$

Problème de Cauchy : EDO + **condition initiale**

Ordre d'une EDO

Définition I.1.1

*L'*ordre *d'une EDO est le* **plus grand** *ordre de dérivation présent dans l'équation, qui correspond au* **nombre de conditions initiales** *nécessaires pour obtenir un problème de Cauchy.*

Ordre d'une EDO

Définition I.1.1

*L'***ordre** *d'une EDO est le* **plus grand** *ordre de dérivation présent dans l'équation, qui correspond au* **nombre de conditions initiales** *nécessaires pour obtenir un problème de Cauchy.*

Exemple

- $y'' + \sin(y) = 0$ *est une équation d'ordre 2*
  $\rightarrow$ *deux conditions initiales scalaires* $y(0)$ *et* $y'(0)$.

- $Y' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} Y$ *est d'ordre 1*
  $\rightarrow$ *une seule condition initiale* $Y(0) \in \mathbb{R}^2$.

1**er** champ de modèles : **systèmes dynamiques** décrivant des **phénomènes d'évolution** (ex : principe fondamental de la dynamique)

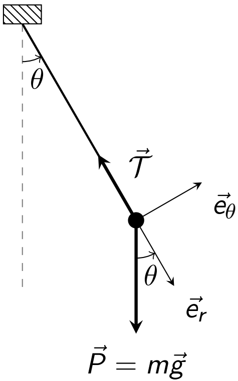
- mécanique
- automatique
- chimie
- biologie
- économie
- etc.

2**ème** champ de modèles : **modèles stationnaires** décrits par des équations différentielles spatiales, on les verra comme des EDP

- déformations
- thermique

Mécanique : pendule

Pendule simple inélastique de longueur ℓ

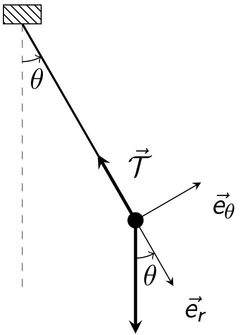


$\vec{P}$ poids, $\vec{T}$ tension du fil, amortissement et frottement lié à l'air négligés

- θ : angle, en radian (rad)
- $t \in I$: temps, en seconde (s)
- m : masse, en kilogramme (kg)
- ℓ : longueur, en mètre (m)
- g : constante de gravité terrestre, en $m.s^{-2}$

Mécanique : pendule

Pendule simple inélastique de longueur ℓ



$$\vec{P} = m\vec{g}$$

$\vec{P}$ poids, $\vec{T}$ tension du fil, amortissement et frottement lié à l'air négligés

- θ : angle, en radian (rad)
- $t \in I$: temps, en seconde (s)
- m : masse, en kilogramme (kg)
- ℓ : longueur, en mètre (m)
- g : constante de gravité terrestre, en $m.s^{-2}$

Équation et condition initiale

$$\begin{cases} (m\ell\ddot{\theta} + mg\sin(\theta))\vec{e}_\theta = 0 \\ \left(\theta(0), \dot{\theta}(0)\right) = (\theta^0, \theta^1) \end{cases}$$

Adimensionnement

Remarque : $\ddot{\theta}$ en s^{-2}, g/ℓ en s^{-2}.

On pose

- T un temps d'observation en s,
- $t^* := \frac{t}{T}$ le temps adimensionné, sans unité,
- $\theta^*(t^*) := \theta(t)$,
- $\omega := \sqrt{\dfrac{g\,T^2}{\ell}}$ une constante sans unité .

Adimensionnement

Remarque : $\ddot{\theta}$ en s^{-2}, g/ℓ en s^{-2}.

On pose

- T un temps d'observation en s,
- $t^* := \frac{t}{T}$ le temps adimensionné, sans unité,
- $\theta^*(t^*) := \theta(t)$,
- $\omega := \sqrt{\dfrac{g\,T^2}{\ell}}$ une constante sans unité .

Alors θ^* est solution du problème de Cauchy, dont l'**équation mathématique** (adimensionnée) est

$$\begin{cases} \theta^{*\,\prime\prime}(t^*) + \omega^2 \sin(\theta^*(t^*)) = 0, \ \forall t^* \in I^*, \\ (\theta^*(0), \theta^{*\,\prime}(0)) = (\theta^0, T\,\theta^1) = ((\theta^*)^0, (\theta^*)^1). \end{cases}$$

Problème mathématique du pendule

$$(\mathrm{P}) \begin{cases} \theta^{*\,\prime\prime}(t^*) + \omega^2 \sin(\theta^*(t^*)) = 0, \ \forall t^* \in I^*, \\ (\theta^*(0), \theta^{*\,\prime}(0)) = ((\theta^*)^0, (\theta^*)^1). \end{cases}$$

- Problème **non linéaire**
- Existence et unicité de la solution
- Pas de résolution **explicite**, **mais** des solutions périodiques
- Simplification **angle faible** :

$$\begin{cases} \theta^{*\,\prime\prime} = -\omega^2 \theta^* \\ (\theta^*(0), \theta^{*\,\prime}(0)) = ((\theta^*)^0, (\theta^*)^1) \end{cases}$$

$\longrightarrow$ Théorèmes de linéarisation.

Problème mathématique du pendule

$$(P)\begin{cases} \theta^{*\,\prime\prime}(t^*) + \omega^2 \sin(\theta^*(t^*)) = 0, \ \forall t^* \in I^*, \\ (\theta^*(0), \theta^{*\,\prime}(0)) = ((\theta^*)^0, (\theta^*)^1). \end{cases}$$

- Problème **non linéaire**
- Existence et unicité de la solution
- Pas de résolution **explicite**
- Simplification **angle faible** :

$$\begin{cases} \theta^{*\,\prime\prime} = -\omega^2 \theta^* \\ (\theta^*(0), \theta^{*\,\prime}(0)) = ((\theta^*)^0, (\theta^*)^1) \end{cases}$$

$\longrightarrow$ Théorèmes de linéarisation.

Approche **qualitative** !

Problème mathématique du pendule

$$(\mathrm{P})\begin{cases}\theta^{*\,\prime\prime}(t^*)+\omega^2\sin(\theta^*(t^*))=0, \ \forall t^*\in I^*,\\ (\theta^*(0),\theta^{*\,\prime}(0))=((\theta^*)^0,(\theta^*)^1).\end{cases}$$

- Problème **non linéaire**
- Existence et unicité de la solution
- Pas de résolution **explicite**
- Simplification **angle faible** :

$$\begin{cases}\theta^{*\,\prime\prime}=-\omega^2\theta^*\\ (\theta^*(0),\theta^{*\,\prime}(0))=((\theta^*)^0,(\theta^*)^1)\end{cases}$$

$\longrightarrow$ Théorèmes de linéarisation.

Approche **qualitative** !

Approche **quantitative** ? Schémas numériques.

Chimie : solutions périodiques

Réaction(s) de Briggs-Rauscher

- eau H_2O,
- iodate de sodium $NaIO_3$,
- acide malonique $HOOCCH_2COOH$,
- acide sulfamique $HOSO_2NH_2$,
- sulfate de manganèse $MnSO_4(H_2O)$
- peroxyde d'hydrogène H_2O_2

Chimie : solutions périodiques

Réaction(s) de Briggs-Rauscher

http://pcsi.emperi.free.fr

Chimie : solutions périodiques (Équations)

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}[HOI] &= -k_{I_1}[HOI][I^-][H^+] + k_{I_1}[I_2][H_2O] + k_{I_2}[H^+][HIO_2][I^-] + k_{I_3}[H^+]^2[IO_3^-][I^-] \\
&\quad + k_{I_4}[HIO_2]^2 - k_{D1}[HOI][H_2O_2] \\
\frac{d}{dt}[I^-] &= -k_{I_1}[HOI][I^-][H^+] + k_{I_1}[I_2][H_2O] - k_{I_2}[H^+][HIO_2][I^-] - k_{I_3}[H^+]^2[IO_3^-][I^-] \\
&\quad + k_{C_5}[C_2H_2O_2][I_2] + k_{D_1}[HOI][H_2O_2] \\
\frac{d}{dt}[H^+] &= -k_{I_1}[HOI][I^-][H^+] + k_{I_1}[I_2][H_2O] - k_{I_2}[H^+][HIO_2][I^-] - k_{I_3}[H^+]^2[IO_3^-][I^-] \\
&\quad + k_{I_4}[HIO_2]^2 - k_{I_5}[H^+][IO_3^-][HIO_2] + kc5[C_3H_6O_4][I_2] + k_{D_1}[HOI][H_2O_2] \\
\frac{d}{dt}[I_2] &= k_{I_1}[HOI][I^-][H^+] - k_{I_1}[I_2][H_2O] - k_{C_5}[C_3H_6O_4][I_2] \\
\frac{d}{dt}[H_2O] &= k_{I_1}[HOI][I^-][H^+] - k_{I_1}[I_2][H_2O] + k_{D_1}[HOI][H_2O_2] \\
\frac{d}{dt}[HIO_2] &= -k_{I_2}[H^+][HIO_2][I^-] + k_{I_3}[H^+]^2[IO_3][I^-] - k_{I_4}[HIO_2]^2 + k'_{I_5}[H^+][IO_3^-][HIO_2] \\
\frac{d}{dt}[IO_3^-] &= -k_{I_3}[H^+]^2[IO_3^-][I^-] + k_{I_4}[HIO_2]^2 - k_{I_5}[H^+][IO_3^-][HIO_2] \\
\frac{d}{dt}[C_3H_6O_4] &= -k_{C_5}[C_3H_6O_4][I_2] \\
\frac{d}{dt}[C_3H_5IO_4] &= k_{C_5}[C_3H_6O_4][I_2] \\
\frac{d}{dt}[O_2] &= k_{I_5}(1/2)[H^+][IO_3^-][HIO_2] + k_{D_1}[HOI][H_2O_2] \\
\frac{d}{dt}[H_2O_2] &= -k_{D_1}[HOI][H_2O_2]
\end{aligned}$$

Chimie : solutions périodiques (Équations)

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}[HOI] &= -k_{I_1}[HOI][I^-][H^+] + k_{I_1}[I_2][H_2O] + k_{I_2}[H^+][HIO_2][I^-] + k_{I_3}[H^+]^2[IO_3^-][I^-] \\
&\quad + k_{I_4}[HIO_2]^2 - k_{D1}[HOI][H_2O_2] \\
\frac{d}{dt}[I^-] &= -k_{I_1}[HOI][I^-][H^+] + k_{I_1}[I_2][H_2O] - k_{I_2}[H^+][HIO_2][I^-] - k_{I_3}[H^+]^2[IO_3^-][I^-] \\
&\quad + k_{C_5}[C_2H_2O_2][I_2] + k_{D_1}[HOI][H_2O_2] \\
\frac{d}{dt}[H^+] &= -k_{I_1}[HOI][I^-][H^+] + k_{I_1}[I_2][H_2O] - k_{I_2}[H^+][HIO_2][I^-] - k_{I_3}[H^+]^2[IO_3^-][I^-] \\
&\quad + k_{I_4}[HIO_2]^2 - k_{I_5}[H^+][IO_3^-][HIO_2] + kc5[C_3H_6O_4][I_2] + k_{D_1}[HOI][H_2O_2] \\
\frac{d}{dt}[I_2] &= k_{I_1}[HOI][I^-][H^+] - k_{I_1}[I_2][H_2O] - k_{C_5}[C_3H_6O_4][I_2] \\
\frac{d}{dt}[H_2O] &= k_{I_1}[HOI][I^-][H^+] - k_{I_1}[I_2][H_2O] + k_{D_1}[HOI][H_2O_2] \\
\frac{d}{dt}[HIO_2] &= -k_{I_2}[H^+][HIO_2][I^-] + k_{I_3}[H^+]^2[IO_3][I^-] - k_{I_4}[HIO_2]^2 + k'_{I_5}[H^+][IO_3^-][HIO_2] \\
\frac{d}{dt}[IO_3^-] &= -k_{I_3}[H^+]^2[IO_3^-][I^-] + k_{I_4}[HIO_2]^2 - k_{I_5}[H^+][IO_3^-][HIO_2] \\
\frac{d}{dt}[C_3H_6O_4] &= -k_{C_5}[C_3H_6O_4][I_2] \\
\frac{d}{dt}[C_3H_5IO_4] &= k_{C_5}[C_3H_6O_4][I_2] \\
\frac{d}{dt}[O_2] &= k_{I_5}(1/2)[H^+][IO_3^-][HIO_2] + k_{D_1}[HOI][H_2O_2] \\
\frac{d}{dt}[H_2O_2] &= -k_{D_1}[HOI][H_2O_2]
\end{aligned}
$$

$$\Rightarrow \begin{cases} Y' = f(Y) \\ Y(0) = Y^0 \end{cases}, \text{ EDO d'ordre 1 avec } Y(t) \in \mathbb{R}^{11}.$$

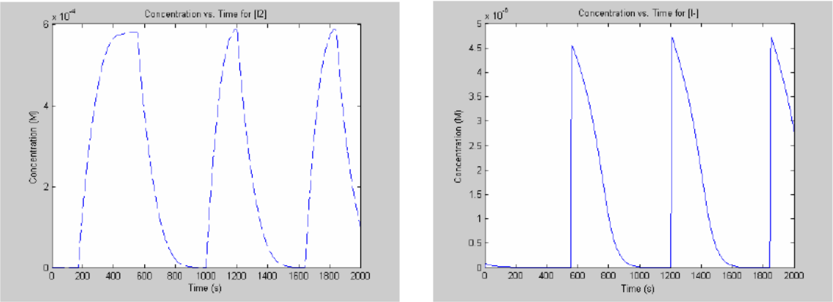


Figure – Concentrations en temps de I_2 (jaune) et de I^- (incolore)

Biologie : potentiel neuronal

Équations d'Hodgkin-Huxley (Nobel 1963) décrivant le potentiel de membrane d'un neurone :

$\rightarrow$ déduites par analogie avec un circuit électrique,

$\rightarrow$ validées grâce à des mesures sur l'axone géant d'un calamar.

Biologie : potentiel neuronal

Équations d'Hodgkin-Huxley (Nobel 1963) décrivant le potentiel de membrane d'un neurone :
→ déduites par analogie avec un circuit électrique,
→ validées grâce à des mesures sur l'axone géant d'un calamar.

$$\begin{cases} C\frac{d}{dt}V & = -g_{NA}m^3h\,(V-E_{NA}) + g_K n^4\,(V-E_K) + g_L\,(V-E_L) + I_{\text{input}} \\ \frac{d}{dt}m & = \phi_m(V)(1-m) - \psi_m(V)m \\ \frac{d}{dt}h & = \phi_h(V)(1-h) - \psi_h(V)h \\ \frac{d}{dt}n & = \phi_n(V)(1-n) - \psi_n(V)n. \end{cases}$$

Comportements très différents (bifurcations) selon la valeur des paramètres g_{NA}, g_K, g_L, E_{NA}, E_K, E_L et des paramètres des fonctions ϕ_i, ψ_i, $i \in \{m, h, n\}$.

Biologie : potentiel neuronal

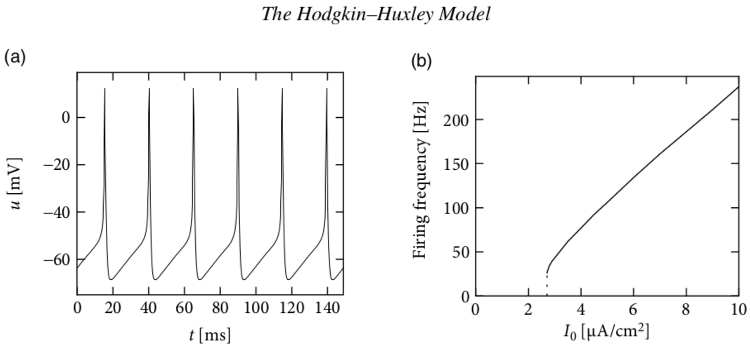


Figure – (a) Train de décharges du modèle d'Hodgkin–Huxley pour un courant d'entrée constant I_0. (b) Fonction de gain. Le taux de décharge moyen ν est tracé en fonction de I_0. ©Gerstner et al., *Neuronal dynamics*.

Quelques remarques

- Dans les EDO, on ne dérive que par rapport à une seule variable (de $\mathbb{R}$).

Quelques remarques

- Dans les EDO, on ne dérive que par rapport à une seule variable (de $\mathbb{R}$).
- Vous rencontrerez dans la suite du cours des équations aux dérivées partielles (EDP), qui sont des équations faisant intervenir des dérivées par rapport à plusieurs variables (par exemple le temps et l'espace).

Quelques remarques

- Dans les EDO, on ne dérive que par rapport à une seule variable (de $\mathbb{R}$).
- Vous rencontrerez dans la suite du cours des équations aux dérivées partielles (EDP), qui sont des équations faisant intervenir des dérivées par rapport à plusieurs variables (par exemple le temps et l'espace).
- Dans les exemples précédents, la variable modélisait le temps. C'est souvent le cas, mais pas nécessairement.

Quelques remarques

- Dans les EDO, on ne dérive que par rapport à une seule variable (de $\mathbb{R}$).
- Vous rencontrerez dans la suite du cours des équations aux dérivées partielles (EDP), qui sont des équations faisant intervenir des dérivées par rapport à plusieurs variables (par exemple le temps et l'espace).
- Dans les exemples précédents, la variable modélisait le temps. C'est souvent le cas, mais pas nécessairement.
- Dans une EDO, l'inconnue est une fonction (ainsi que son intervalle de définition).

Quelques remarques

- Dans les EDO, on ne dérive que par rapport à une seule variable (de $\mathbb{R}$).
- Vous rencontrerez dans la suite du cours des équations aux dérivées partielles (EDP), qui sont des équations faisant intervenir des dérivées par rapport à plusieurs variables (par exemple le temps et l'espace).
- Dans les exemples précédents, la variable modélisait le temps. C'est souvent le cas, mais pas nécessairement.
- Dans une EDO, l'inconnue est une fonction (ainsi que son intervalle de définition).
- La plupart du temps, on ne sait pas résoudre explicitement une EDO (cf les trois exemples précédents).

Analyse et questions liées aux EDO

- **localement** : existe-t-il une solution ? est-elle unique ?
  - Sensibilité/continuité par rapport aux paramètres de l'équation ?

Analyse et questions liées aux EDO

- **localement** : existe-t-il une solution ? est-elle unique ?
  - Sensibilité/continuité par rapport aux paramètres de l'équation ?
- **globalement** : y a-t-il une limite en temps long ? Périodicité ?

Analyse et questions liées aux EDO

- **localement** : existe-t-il une solution ? est-elle unique ?
  - Sensibilité/continuité par rapport aux paramètres de l'équation ?
- **globalement** : y a-t-il une limite en temps long ? Périodicité ?
  - on étudie des points v tels que $f(v) = 0$ / des invariants

Analyse et questions liées aux EDO

- **localement** : existe-t-il une solution ? est-elle unique ?
  - Sensibilité/continuité par rapport aux paramètres de l'équation ?
- **globalement** : y a-t-il une limite en temps long ? Périodicité ?
  - on étudie des points v tels que $f(v) = 0$ / des invariants
    - propriétés **asymptotiques**.

Analyse et questions liées aux EDO

- **localement** : existe-t-il une solution ? est-elle unique ?
  - Sensibilité/continuité par rapport aux paramètres de l'équation ?
- **globalement** : y a-t-il une limite en temps long ? Périodicité ?
  - on étudie des points v tels que $f(v) = 0$ / des invariants
    - propriétés **asymptotiques**.
- **quantitativement** : comment avoir des valeurs ?

  en temps court, on fait des **simulations numériques**,

Analyse et questions liées aux EDO

- **localement** : existe-t-il une solution ? est-elle unique ?
  - Sensibilité/continuité par rapport aux paramètres de l'équation ?
- **globalement** : y a-t-il une limite en temps long ? Périodicité ?
  - on étudie des points v tels que $f(v) = 0$ / des invariants
    - propriétés **asymptotiques**.
- **quantitativement** : comment avoir des valeurs ?

  en temps court, on fait des **simulations numériques**,
  - on approche le problème,

Analyse et questions liées aux EDO

- **localement** : existe-t-il une solution ? est-elle unique ?
    - Sensibilité/continuité par rapport aux paramètres de l'équation ?
- **globalement** : y a-t-il une limite en temps long ? Périodicité ?
    - on étudie des points v tels que $f(v) = 0$ / des invariants
        - propriétés **asymptotiques**.
- **quantitativement** : comment avoir des valeurs ?

  en temps court, on fait des **simulations numériques**,
    - on approche le problème,
        - écriture du **schéma**.

Analyse et questions liées aux EDO

- **localement** : existe-t-il une solution ? est-elle unique ?
  - Sensibilité/continuité par rapport aux paramètres de l'équation ?
- **globalement** : y a-t-il une limite en temps long ? Périodicité ?
  - on étudie des points v tels que $f(v) = 0$ / des invariants
    - propriétés **asymptotiques**.
- **quantitativement** : comment avoir des valeurs ?

  en temps court, on fait des **simulations numériques**,
  - on approche le problème,
    - écriture du **schéma**.
  - on résout le **problème approché**,

Analyse et questions liées aux EDO

- **localement** : existe-t-il une solution ? est-elle unique ?
  - Sensibilité/continuité par rapport aux paramètres de l'équation ?
- **globalement** : y a-t-il une limite en temps long ? Périodicité ?
  - on étudie des points v tels que $f(v) = 0$ / des invariants
    - propriétés **asymptotiques**.
- **quantitativement** : comment avoir des valeurs ?

  en temps court, on fait des **simulations numériques**,
  - on approche le problème,
    - écriture du **schéma**.
  - on résout le **problème approché**,
    - mise en œuvre du schéma.

Analyse et questions liées aux EDO

- **localement** : existe-t-il une solution ? est-elle unique ?
  - Sensibilité/continuité par rapport aux paramètres de l'équation ?
- **globalement** : y a-t-il une limite en temps long ? Périodicité ?
  - on étudie des points v tels que $f(v) = 0$ / des invariants
    - propriétés **asymptotiques**.
- **quantitativement** : comment avoir des valeurs ?

  en temps court, on fait des **simulations numériques**,
  - on approche le problème,
    - écriture du **schéma**.
  - on résout le **problème approché**,
    - mise en œuvre du schéma.
  - on utilise un théorème de **convergence** :
    - la solution du problème approché est-elle proche de la solution exacte ?

Soient $\mathcal{U}$ ouvert de $\mathbb{R}^d$, $d \geq 1$, et I intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, $0 \in I$.

Soit $f : (t, y) \in I \times \mathcal{U} \to f(t, y) \in \mathbb{R}^d$ un **champ de vecteurs**.

Définition I.2.1 (Problème de Cauchy)

Soit $y^0 \in \mathcal{U}$ donné. Trouver $J \subset I$ et $y : t \in J \mapsto y(t) \in \mathcal{U}$ tels que

$$\begin{cases} y'(t) = f\,(t, y\,(t)), & \forall t \in J, \\ y(0) = y^0. \end{cases}$$

Soient $\mathcal{U}$ ouvert de $\mathbb{R}^d$, $d \geq 1$, et I intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, $0 \in I$.

Soit $f : (t, y) \in I \times \mathcal{U} \to f(t, y) \in \mathbb{R}^d$ un **champ de vecteurs**.

Définition I.2.1 (Problème de Cauchy)

Soit $y^0 \in \mathcal{U}$ donné. Trouver $J \subset I$ et $y : t \in J \mapsto y(t) \in \mathcal{U}$ tels que

$$\begin{cases} y'(t) = f\left(t, y\left(t\right)\right), & \forall t \in J, \\ y(0) = y^0. \end{cases}$$

Quelle régularité pour f, y ? Comment définir J ?

Définition I.2.2

Une EDO est dite **linéaire** *si f est linéaire en la variable d'état y.*

Définition I.2.2

Une EDO est dite **linéaire** *si f est linéaire en la variable d'état y.*

Exemple

- $y' = -ty + \sin(t)$ *est une EDO linéaire.*
- $y' = y^2$ *est une EDO non linéaire (équation de Riccati).*

Définition I.2.2

Une EDO est dite **linéaire** *si f est linéaire en la variable d'état y.*

Exemple

- $y' = -ty + \sin(t)$ *est une EDO linéaire.*
- $y' = y^2$ *est une EDO non linéaire (équation de Riccati).*
- *Les trois principaux exemples de la partie I sont des EDO non linéaires.*

Remarque

Les EDO linéaires sont "plus faciles" à résoudre que les EDO non linéaires ! (cf le pendule linéarisé)

Proposition I.2.3 (Formule de Duhamel)

Pour $a, b \in C^0(I, \mathbb{R})$ et $y^0 \in \mathbb{R}$, le problème

$$(P) \begin{cases} y'(t) = a(t)y(t) + b(t), \\ y(0) = y^0 \end{cases}$$

a pour **unique solution globale**, *c'est-à-dire définie et de classe C^1 sur l'intervalle I tout entier,*

$$y : t \mapsto \exp\left(\int_0^t a(s)ds\right) y^0 + \int_0^t \exp\left(\int_s^t a(\tau)d\tau\right) b(s)ds.$$

Proposition I.2.3 (Formule de Duhamel)

Pour $a, b \in C^0(I, \mathbb{R})$ et $y^0 \in \mathbb{R}$, le problème

$$(P) \begin{cases} y'(t) = a(t)y(t) + b(t), \\ y(0) = y^0 \end{cases}$$

a pour **unique solution globale**, *c'est-à-dire définie et de classe C^1 sur l'intervalle I tout entier,*

$$y : t \mapsto \exp\left(\int_0^t a(s)ds\right) y^0 + \int_0^t \exp\left(\int_s^t a(\tau)d\tau\right) b(s)ds.$$

Preuve : Pour l'existence, il suffit de vérifier que la fonction y proposée vérifie l'équation.

Proposition I.2.3 (Formule de Duhamel)

Pour $a, b \in C^0(I, \mathbb{R})$ et $y^0 \in \mathbb{R}$, le problème

$$(P) \quad \begin{cases} y'(t) = a(t)y(t) + b(t), \\ y(0) = y^0 \end{cases}$$

a pour **unique solution globale**, *c'est-à-dire définie et de classe C^1 sur l'intervalle I tout entier,*

$$y : t \mapsto \exp\left(\int_0^t a(s)ds\right) y^0 + \int_0^t \exp\left(\int_s^t a(\tau)d\tau\right) b(s)ds.$$

Preuve : Pour l'existence, il suffit de vérifier que la fonction y proposée vérifie l'équation.

Pour l'unicité, soient y et z deux solutions globales, et $x := y - z$. On a $\left(\exp\left\{-\int_0^\cdot a(s)ds\right\} x\right)' = 0$,

Proposition I.2.3 (Formule de Duhamel)

Pour $a, b \in C^0(I, \mathbb{R})$ et $y^0 \in \mathbb{R}$, le problème

$$(P) \quad \begin{cases} y'(t) = a(t)y(t) + b(t), \\ y(0) = y^0 \end{cases}$$

a pour **unique solution globale**, *c'est-à-dire définie et de classe C^1 sur l'intervalle I tout entier,*

$$y : t \mapsto \exp\left(\int_0^t a(s)ds\right) y^0 + \int_0^t \exp\left(\int_s^t a(\tau)d\tau\right) b(s)ds.$$

Preuve : Pour l'existence, il suffit de vérifier que la fonction y proposée vérifie l'équation.

Pour l'unicité, soient y et z deux solutions globales, et $x := y - z$. On a $\left(\exp\left\{-\int_0^\cdot a(s)ds\right\} x\right)' = 0$, et comme $x(0) = 0$, on en conclut que $y = z$.

Si a est une fonction constante égale à $m \in \mathbb{C}$ et $b = 0$,

Corollary I.2.4

Le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = my(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}, \\ y(0) = y^0 \in \mathbb{C}, \end{cases}$$

admet une unique solution sur $\mathbb{R}$ tout entier : $y : t \mapsto e^{mt} y^0$.

Si a est une fonction constante égale à $m \in \mathbb{C}$ et $b = 0$,

Corollary I.2.4

Le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = my(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}, \\ y(0) = y^0 \in \mathbb{C}, \end{cases}$$

admet une unique solution sur $\mathbb{R}$ *tout entier :* $y : t \mapsto e^{mt} y^0$.

Remarque

Si $y^0 = 0$, *alors la solution est nulle. Elle est dite* **stationnaire**.
0 *est un* **point d'équilibre** *de l'équation.*

Comportement en temps long

Soit le problème de Cauchy $\begin{cases} y'(t) = my(t), & \forall t \in \mathbb{R}, \\ y(0) = y^0 \in \mathbb{C}. \end{cases}$

Comportement en temps long

Soit le problème de Cauchy $\begin{cases} y'(t) = my(t), & \forall t \in \mathbb{R}, \\ y(0) = y^0 \in \mathbb{C}. \end{cases}$

$\mathrm{Re}(m) > 0$	$\mathrm{Re}(m) = 0$	$\mathrm{Re}(m) < 0$
$\lim\limits_{t \to +\infty} \lvert y(t) \rvert = +\infty$	$\forall t \in \mathbb{R}, \lvert y(t) \rvert = \lvert y^0 \rvert$	$\lim\limits_{t \to +\infty} \lvert y(t) \rvert = 0$

Comportement en temps long

Soit le problème de Cauchy $\begin{cases} y'(t) = my(t), & \forall t \in \mathbb{R}, \\ y(0) = y^0 \in \mathbb{C}. \end{cases}$

$\mathrm{Re}(m) > 0$	$\mathrm{Re}(m) = 0$	$\mathrm{Re}(m) < 0$
$\lim\limits_{t\to+\infty} \lvert y(t)\rvert = +\infty$	$\forall t \in \mathbb{R}, \lvert y(t)\rvert = \lvert y^0\rvert$	$\lim\limits_{t\to+\infty} \lvert y(t)\rvert = 0$

Si y^0 est dans un voisinage de 0, alors on a :

- si $\mathrm{Re}(m) = 0$, la solution y reste au voisinage de 0
  $\rightarrow$ 0 est un **point d'équilibre stable**.
- si $\mathrm{Re}(m) < 0$, la solution y tend vers 0
  $\rightarrow$ 0 est un **point d'équilibre asymptotiquement stable** (a-stable).
- Et si $\mathrm{Re}(m) > 0$? La solution y tend vers $+\infty$ (quand $t \rightarrow +\infty$)
  $\rightarrow$ 0 est un **point d'équilibre instable**.

Soit l'EDO d'ordre p : $\displaystyle y^{(p)} = \sum_{j=0}^{p-1} a_k y^{(k)}$, $t \in \mathbb{R}$. Un problème de Cauchy nécessite la donnée de $(y(0), y'(0), \dots, y^{(p-1)}(0)) \in \mathbb{R}^p$.

Remarque I.2.5

Ce problème peut être reformulé en un problème de Cauchy d'ordre 1 *et de taille* p

$$\begin{cases} Y' = A\,Y, \ \forall t \in \mathbb{R} \\ Y(0) = Y^0 \end{cases} \quad , \text{ où}$$

Soit l'EDO d'ordre p : $\displaystyle y^{(p)} = \sum_{j=0}^{p-1} a_k y^{(k)},\ t \in \mathbb{R}$. Un problème de Cauchy nécessite la donnée de $(y(0), y'(0), \dots, y^{(p-1)}(0)) \in \mathbb{R}^p$.

Remarque I.2.5

Ce problème peut être reformulé en un problème de Cauchy d'ordre 1 et de taille p

$$\begin{cases} Y' = A\,Y,\ \forall t \in \mathbb{R} \\ Y(0) = Y^0 \end{cases},\ \text{où}$$

$$Y(t)=\begin{bmatrix} y(t) \\ y'(t) \\ \vdots \\ \vdots \\ y^{(p-2)}(t) \\ y^{(p-1)}(t) \end{bmatrix},\ A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & & 0 & 1 \\ a_0 & a_1 & \dots & \dots & a_{p-2} & a_{p-1} \end{bmatrix} \text{et}\, Y^0=\begin{bmatrix} y(0) \\ y'(0) \\ \vdots \\ \vdots \\ y^{(p-2)}(0) \\ y^{(p-1)}(0) \end{bmatrix}$$

Équations linéaires

Définition I.2.6 (Exponentielle de matrice)

Soit $A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$. *On définit* $\exp(A) := \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$.

Équations linéaires

Définition I.2.6 (Exponentielle de matrice)

Soit $A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$*. On définit* $\exp(A) := \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$.

Théorème I.2.7 (Formule de Duhamel homogène)

Pour $A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ *et* $Y^0 \in \mathbb{R}^d$*, le problème*

$$\begin{cases} Y'(t) = A\,Y(t), \\ Y(0) = Y^0 \end{cases}$$

a pour **unique solution globale** $Y : t \mapsto \exp(tA)\ Y^0$.

Équations linéaires

Définition I.2.6 (Exponentielle de matrice)

Soit $A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$. *On définit* $\exp(A) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$.

Théorème I.2.7 (Formule de Duhamel homogène)

Pour $A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ *et* $Y^0 \in \mathbb{R}^d$, *le problème*

$$\begin{cases} Y'(t) = A\,Y(t), \\ Y(0) = Y^0 \end{cases}$$

a pour **unique solution globale** $Y : t \mapsto \exp\left(tA\right)\ Y^0$.

$$\frac{d}{dt}\exp(tA) = \frac{d}{dt}\left(I + tA + \frac{t^2}{2!}A^2 + \frac{t^3}{3!}A^3 + \dots\right)$$

Équations linéaires

Définition I.2.6 (Exponentielle de matrice)

Soit $A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$. *On définit* $\exp(A) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$.

Théorème I.2.7 (Formule de Duhamel homogène)

Pour $A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ *et* $Y^0 \in \mathbb{R}^d$, *le problème*

$$\begin{cases} Y'(t) = A\,Y(t), \\ Y(0) = Y^0 \end{cases}$$

a pour **unique solution globale** $Y : t \mapsto \exp(tA)\; Y^0$.

$$\frac{d}{dt}\exp(tA) = A + tA^2 + \frac{t^2}{2}A^3 + \ldots. = A\exp(tA).$$

Théorème I.2.8 (Formule de Duhamel)

Pour $A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$, $b \in C^0(I, \mathbb{R}^d)$ *et* $Y^0 \in \mathbb{R}^d$, *le problème*

$$\begin{cases} Y'(t) = A\,Y(t) + b(t), \\ Y(0) = Y^0 \end{cases}$$

a pour **unique solution globale**

$$Y : t \longmapsto \exp(tA)\,Y^0 + \int_0^t \exp((t-s)A)\,b(s)ds.$$

Théorème I.2.8 (Formule de Duhamel)

Pour $A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$, $b \in C^0(I, \mathbb{R}^d)$ et $Y^0 \in \mathbb{R}^d$, le problème

$$\begin{cases} Y'(t) = A\,Y(t) + b(t), \\ Y(0) = Y^0 \end{cases}$$

a pour **unique solution globale**

$$Y : t \longmapsto \exp{(tA)}\,Y^0 + \int_0^t \exp{((t-s)A)}\,b(s)ds.$$

Preuve : Unicité et existence grâce à l'utilisation de $t \mapsto \exp(-tA)\,Y(t)$.

Solution explicite

Toute matrice $A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ est semblable à une matrice triangulaire supérieure T à coefficients dans $\mathbb{C}$, dont la diagonale contient les valeurs propres de A : il existe $P \in GL_d(\mathbb{C})$ telle que $A = P^{-1}TP$.

Conséquence : $A^k = (P^{-1}TP)(P^{-1}TP)\dots(P^{-1}TP),$

Solution explicite

Toute matrice $A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ est semblable à une matrice triangulaire supérieure T à coefficients dans $\mathbb{C}$, dont la diagonale contient les valeurs propres de A : il existe $P \in GL_d(\mathbb{C})$ telle que $A = P^{-1}TP$.

Conséquence : $A^k = (P^{-1}TP)(P^{-1}TP)\dots(P^{-1}TP)$, donc

$$\forall k \in \mathbb{N},\ A^k = P^{-1}T^kP \text{ et } \exp(A) = P^{-1}\exp(T)P,$$

et $\exp(T)$ est calculable (voir `cagnol.link/expmat`).

Solution explicite

Toute matrice $A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ est semblable à une matrice triangulaire supérieure T à coefficients dans $\mathbb{C}$, dont la diagonale contient les valeurs propres de A : il existe $P \in GL_d(\mathbb{C})$ telle que $A = P^{-1}TP$.

Conséquence : $A^k = (P^{-1}TP)(P^{-1}TP)\dots(P^{-1}TP)$, donc

$$\forall k \in \mathbb{N},\ A^k = P^{-1}T^kP \text{ et } \exp(A) = P^{-1}\exp(T)P,$$

et $\exp(T)$ est calculable (voir `cagnol.link/expmat`).

Exemple

Résolution explicite de $y'' + \omega^2 y = 0$, $y(0) = y^0$ et $y'(0) = y^1$:

$$y : t \mapsto y^0 \cos(\omega t) + \frac{y^1}{\omega}\sin(\omega t).$$

Un exemple plus détaillé (1/3)

$$\left\{ \begin{array}{l} y'' - 4y' + 3y = 0 \\ y(0) = 2,\ y'(0) = 4 \end{array} \right.$$

peut s'écrire $Y' = AY$ avec

$$Y = \begin{bmatrix} y \\ y' \end{bmatrix}, \quad Y(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} \text{ et } A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}.$$

Un exemple plus détaillé (1/3)

$$\begin{cases} y'' - 4y' + 3y = 0 \\ y(0) = 2, \ y'(0) = 4 \end{cases}$$

peut s'écrire $Y' = AY$ avec

$$Y = \begin{bmatrix} y \\ y' \end{bmatrix}, \quad Y(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} \text{ et } A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}.$$

Or $\det(A - \lambda I) = \lambda^2 - 4\lambda + 3$ et les valeurs propres de A sont donc $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = 3$ ($\Rightarrow \mathrm{Sp}(A) = \{1, 3\}$).

Un exemple plus détaillé (1/3)

$$\left\{ \begin{array}{l} y'' - 4y' + 3y = 0 \\ y(0) = 2, \;\; y'(0) = 4 \end{array} \right.$$

peut s'écrire $Y' = AY$ avec

$$Y = \begin{bmatrix} y \\ y' \end{bmatrix}, \quad Y(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} \text{ et } A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}.$$

Or $\det(A - \lambda I) = \lambda^2 - 4\lambda + 3$ et les valeurs propres de A sont donc $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = 3$ ($\Rightarrow \mathrm{Sp}(A) = \{1, 3\}$).

Les vecteurs propres associés sont $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$, et avec

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix},$$

on obtient $A = P^{-1}DP$.

Un exemple plus détaillé (2/3)

$$\exp(tD) = \begin{bmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{3t} \end{bmatrix},$$

Un exemple plus détaillé (2/3)

$$\exp(tD) = \begin{bmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{3t} \end{bmatrix},$$

$$\exp(tA) = P^{-1} \exp(tD) P$$

Un exemple plus détaillé (2/3)

$$\exp(tD) = \begin{bmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{3t} \end{bmatrix},$$

$$\exp(tA) = P^{-1}\exp(tD)P = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 3e^t - e^{3t} & e^{3t} - e^t \\ 3e^t - 3e^{3t} & 3e^{3t} - e^t \end{bmatrix}.$$

Un exemple plus détaillé (2/3)

$$\exp(tD) = \begin{bmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{3t} \end{bmatrix},$$

$$\exp(tA) = P^{-1}\exp(tD)P = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 3e^t - e^{3t} & e^{3t} - e^t \\ 3e^t - 3e^{3t} & 3e^{3t} - e^t \end{bmatrix}.$$

Or par le théorème de Duhamel,

$$Y(t) = \exp(tA)Y(0)$$

Un exemple plus détaillé (2/3)

$$\exp(tD) = \begin{bmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{3t} \end{bmatrix},$$

$$\exp(tA) = P^{-1}\exp(tD)P = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 3e^t - e^{3t} & e^{3t} - e^t \\ 3e^t - 3e^{3t} & 3e^{3t} - e^t \end{bmatrix}.$$

Or par le théorème de Duhamel,

$$Y(t) = \exp(tA)Y(0) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 3e^t - e^{3t} & e^{3t} - e^t \\ 3e^t - 3e^{3t} & 3e^{3t} - e^t \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Un exemple plus détaillé (2/3)

$$\exp(tD) = \begin{bmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{3t} \end{bmatrix},$$

$$\exp(tA) = P^{-1}\exp(tD)P = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 3e^t - e^{3t} & e^{3t} - e^t \\ 3e^t - 3e^{3t} & 3e^{3t} - e^t \end{bmatrix}.$$

Or par le théorème de Duhamel,

$$\begin{bmatrix} y(t) \\ y'(t) \end{bmatrix} = Y(t) = \exp(tA)Y(0) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 3e^t - e^{3t} & e^{3t} - e^t \\ 3e^t - 3e^{3t} & 3e^{3t} - e^t \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Un exemple plus détaillé (2/3)

$$\exp(tD) = \begin{bmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{3t} \end{bmatrix},$$

$$\exp(tA) = P^{-1}\exp(tD)P = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 3e^t - e^{3t} & e^{3t} - e^t \\ 3e^t - 3e^{3t} & 3e^{3t} - e^t \end{bmatrix}.$$

Or par le théorème de Duhamel,

$$\begin{bmatrix} y(t) \\ y'(t) \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 3e^t - e^{3t} & e^{3t} - e^t \\ 3e^t - 3e^{3t} & 3e^{3t} - e^t \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Un exemple plus détaillé (2/3)

$$\exp(tD) = \begin{bmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{3t} \end{bmatrix},$$

$$\exp(tA) = P^{-1}\exp(tD)P = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 3e^t - e^{3t} & e^{3t} - e^t \\ 3e^t - 3e^{3t} & 3e^{3t} - e^t \end{bmatrix}.$$

Or par le théorème de Duhamel,

$$\begin{bmatrix} y(t) \\ y'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^t + e^{3t} \\ e^t + 3e^{3t} \end{bmatrix}.$$

Un exemple plus détaillé (2/3)

$$\exp(tD) = \begin{bmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{3t} \end{bmatrix},$$

$$\exp(tA) = P^{-1}\exp(tD)P = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 3e^t - e^{3t} & e^{3t} - e^t \\ 3e^t - 3e^{3t} & 3e^{3t} - e^t \end{bmatrix}.$$

Or par le théorème de Duhamel,

$$\begin{bmatrix} y(t) \\ y'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^t + e^{3t} \\ e^t + 3e^{3t} \end{bmatrix}.$$

Ainsi $y(t) = e^t + e^{3t}$ est solution de :

$$\begin{cases} y'' - 4y' + 3y = 0 \\ y(0) = 2, \; y'(0) = 4 \end{cases}.$$

Un exemple plus détaillé (3/3)

Si on ne précise pas les conditions initiales, on obtient

$$\begin{bmatrix} y(t) \\ y'(t) \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 3e^t - e^{3t} & e^{3t} - e^t \\ 3e^t - 3e^{3t} & 3e^{3t} - e^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y(0) \\ y'(0) \end{bmatrix}$$

Un exemple plus détaillé (3/3)

Si on ne précise pas les conditions initiales, on obtient

$$y(t) = \frac{1}{2}(3e^t - e^{3t})y(0) + \frac{1}{2}(e^{3t} - e^t)y'(0).$$

L'ensemble des solutions est un espace vectoriel de dimension 2.

Un exemple plus détaillé (3/3)

Si on ne précise pas les conditions initiales, on obtient

$$y(t) = \frac{1}{2}(3e^t - e^{3t})y(0) + \frac{1}{2}(e^{3t} - e^t)y'(0).$$

L'ensemble des solutions est un espace vectoriel de dimension 2. De plus, si $(y(0), y'(0)) = (0, 0)$, on a $y(t) = 0$.

Un exemple plus détaillé (3/3)

Si on ne précise pas les conditions initiales, on obtient

$$y(t) = \frac{1}{2}(3e^t - e^{3t})y(0) + \frac{1}{2}(e^{3t} - e^t)y'(0).$$

L'ensemble des solutions est un espace vectoriel de dimension 2. De plus, si $(y(0), y'(0)) = (0, 0)$, on a $y(t) = 0$.

Que se passe-t-il si $(y(0), y'(0))$ est proche de $(0, 0)$ mais $\neq (0, 0)$?

Un exemple plus détaillé (3/3)

Si on ne précise pas les conditions initiales, on obtient

$$y(t) = \frac{1}{2}(3e^t - e^{3t})y(0) + \frac{1}{2}(e^{3t} - e^t)y'(0).$$

L'ensemble des solutions est un espace vectoriel de dimension 2. De plus, si $(y(0), y'(0)) = (0, 0)$, on a $y(t) = 0$.

Que se passe-t-il si $(y(0), y'(0))$ est proche de $(0, 0)$ mais $\neq (0, 0)$?

La solution s'éloigne de 0 à cause de e^{1t} et e^{3t}.

Or 1 et 3 sont les valeurs propres de A...

Un exemple plus détaillé (3/3)

Si on ne précise pas les conditions initiales, on obtient

$$y(t) = \frac{1}{2}(3e^t - e^{3t})y(0) + \frac{1}{2}(e^{3t} - e^t)y'(0).$$

L'ensemble des solutions est un espace vectoriel de dimension 2. De plus, si $(y(0), y'(0)) = (0, 0)$, on a $y(t) = 0$.

Que se passe-t-il si $(y(0), y'(0))$ est proche de $(0, 0)$ mais $\neq (0, 0)$?

La solution s'éloigne de 0 à cause de e^{1t} et e^{3t}.

Or 1 et 3 sont les valeurs propres de A...

Si les valeurs propres avaient été strictement négatives (ou complexes à parties réelles strictement négatives), alors la solution se serait rapprochée de 0.

EDO linéaires à coefficients constants : temps long

On note $\mathrm{Sp}(A)$ l'ensemble des valeurs propres dans $\mathbb{C}$ de A.

Proposition I.2.9

Pour l'équation $Y' = AY$ partant de $Y(0) = 0$, $Y(t) = 0$ est la **solution stationnaire**.

EDO linéaires à coefficients constants : temps long

On note $\mathrm{Sp}(A)$ l'ensemble des valeurs propres dans $\mathbb{C}$ de A.

Proposition I.2.9

Pour l'équation $Y' = AY$ partant de $Y(0) = 0$, $Y(t) = 0$ est la **solution stationnaire**. *Plus généralement, le comportement en temps long des solutions de $Y' = AY$ est décrit par*

(i) *si $\mathrm{Sp}(A) \subset \{\mu \in \mathbb{C},\ \mathrm{Re}(\mu) \leq 0\}$, la solution Y est bornée quel que soit $Y^0 \in \mathbb{R}^d$,*

EDO linéaires à coefficients constants : temps long

On note $\mathrm{Sp}(A)$ l'ensemble des valeurs propres dans $\mathbb{C}$ de A.

Proposition I.2.9

Pour l'équation $Y' = AY$ partant de $Y(0) = 0$, $Y(t) = 0$ est la **solution stationnaire**. *Plus généralement, le comportement en temps long des solutions de $Y' = AY$ est décrit par*

1. *si $\mathrm{Sp}(A) \subset \{\mu \in \mathbb{C},\ \mathrm{Re}(\mu) \leq 0\}$, la solution Y est bornée quel que soit $Y^0 \in \mathbb{R}^d$,*

2. *si de plus $\mathrm{Sp}(A) \subset \{\mu \in \mathbb{C},\ \mathrm{Re}(\mu) < 0\}$, la solution Y converge en norme vers le point d'équilibre 0 quel que soit $Y^0 \in \mathbb{R}^d$,*

EDO linéaires à coefficients constants : temps long

On note $\mathrm{Sp}(A)$ l'ensemble des valeurs propres dans $\mathbb{C}$ de A.

Proposition I.2.9

Pour l'équation $Y' = AY$ partant de $Y(0) = 0$, $Y(t) = 0$ est la **solution stationnaire**. *Plus généralement, le comportement en temps long des solutions de $Y' = AY$ est décrit par*

- (i) *si $\mathrm{Sp}(A) \subset \{\mu \in \mathbb{C},\ \mathrm{Re}(\mu) \leq 0\}$, la solution Y est bornée quel que soit $Y^0 \in \mathbb{R}^d$,*
- (ii) *si de plus $\mathrm{Sp}(A) \subset \{\mu \in \mathbb{C},\ \mathrm{Re}(\mu) < 0\}$, la solution Y converge en norme vers le point d'équilibre 0 quel que soit $Y^0 \in \mathbb{R}^d$,*
- (iii) *si $\mathrm{Sp}(A) \cap \{\mu \in \mathbb{C},\ \mathrm{Re}(\mu) > 0\} \neq \emptyset$, il existe $Y^0 \in \mathbb{R}^d$ tel que $\|Y(t)\| \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.*

Le problème de Cauchy a-t-il une solution ?

Le problème de Cauchy a-t-il une solution ?

Soient $\mathcal{U}$ ouvert de $\mathbb{R}^d$, $d \geq 1$, et I intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, $0 \in I$.

Soit $f : (t, y) \in I \times \mathcal{U} \to f(t, y) \in \mathbb{R}^d$ un **champ de vecteurs**.

Rappel : Définition I.2.1, Problème de Cauchy

Soit $y^0 \in \mathcal{U}$ donné. Trouver $J \subset I$ et $y : t \in J \mapsto y(t) \in \mathcal{U}$ tels que

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), & \forall t \in J, \\ y(0) = y^0. \end{cases}$$

Une solution est un intervalle ouvert J et une fonction y : (J, y).

Le problème de Cauchy a-t-il une solution ?

Soient $\mathcal{U}$ ouvert de $\mathbb{R}^d$, $d \geq 1$, et I intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, $0 \in I$.

Soit $f : (t, y) \in I \times \mathcal{U} \to f(t, y) \in \mathbb{R}^d$ un **champ de vecteurs**.

Rappel : Définition I.2.1, Problème de Cauchy

Soit $y^0 \in \mathcal{U}$ donné. Trouver $J \subset I$ et $y : t \in J \mapsto y(t) \in \mathcal{U}$ tels que

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), & \forall t \in J, \\ y(0) = y^0. \end{cases}$$

Une solution est un intervalle ouvert J et une fonction y : (J, y).

Comment assurer l'existence et l'unicité de la solution ?

Le problème de Cauchy a-t-il une solution ?

Soient $\mathcal{U}$ ouvert de $\mathbb{R}^d$, $d \geq 1$, et I intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, $0 \in I$.

Soit $f : (t, y) \in I \times \mathcal{U} \to f(t, y) \in \mathbb{R}^d$ un **champ de vecteurs**.

Rappel : Définition I.2.1, Problème de Cauchy

Soit $y^0 \in \mathcal{U}$ donné. Trouver $J \subset I$ et $y : t \in J \mapsto y(t) \in \mathcal{U}$ tels que

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), & \forall t \in J, \\ y(0) = y^0. \end{cases}$$

Une solution est un intervalle ouvert J et une fonction y : (J, y).

Comment assurer l'existence et l'unicité de la solution ?

Quelle régularité pour f, y ? Comment définir J ? Est-ce que $J = I$?

Définition I.3.1

Soient $(\mathcal{J}, y)$ et $(\mathcal{K}, z)$ deux solutions du problème de Cauchy précédent. On dit que $(\mathcal{J}, y)$ est une extension de $(\mathcal{K}, z)$, noté $(\mathcal{K}, z) \prec (\mathcal{J}, y)$, si $\mathcal{K} \subset \mathcal{J}$ et si z est la restriction de y à $\mathcal{K}$.

Définition I.3.1

Soient $(\mathcal{J}, y)$ *et* $(\mathcal{K}, z)$ *deux solutions du problème de Cauchy précédent. On dit que* $(\mathcal{J}, y)$ *est une extension de* $(\mathcal{K}, z)$*, noté* $(\mathcal{K}, z) \prec (\mathcal{J}, y)$*, si* $\mathcal{K} \subset \mathcal{J}$ *et si* z *est la restriction de* y *à* $\mathcal{K}$*.*

Une solution $(\mathcal{J}, y)$ *du problème de Cauchy est maximale si pour toute solution du problème de Cauchy* $(\mathcal{K}, z)$ *telle que* $(\mathcal{J}, y) \prec (\mathcal{K}, z)$*, on a* $(\mathcal{J}, y) = (\mathcal{K}, z)$*.*

Définition I.3.1

Soient $(\mathcal{J}, y)$ et $(\mathcal{K}, z)$ deux solutions du problème de Cauchy précédent. On dit que $(\mathcal{J}, y)$ est une extension de $(\mathcal{K}, z)$, noté $(\mathcal{K}, z) \prec (\mathcal{J}, y)$, si $\mathcal{K} \subset \mathcal{J}$ et si z est la restriction de y à $\mathcal{K}$.

Une solution $(\mathcal{J}, y)$ du problème de Cauchy est maximale si pour toute solution du problème de Cauchy $(\mathcal{K}, z)$ telle que $(\mathcal{J}, y) \prec (\mathcal{K}, z)$, on a $(\mathcal{J}, y) = (\mathcal{K}, z)$.

On rappelle qu'une fonction est de classe C^1 si elle est dérivable sur son ensemble de définition et à dérivée continue.

Théorème I.3.2 (Théorème de Cauchy-Lipschitz local)

Soit $f : (t, y) \mapsto f(t, y)$ **continue** *sur* $I \times \mathcal{U}$ *et* **de classe** C^1 **par rapport à** y. *Soit* $y^0 \in \mathcal{U}$ *fixé.*
Soit le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), \\ y(0) = y^0. \end{cases}$$

Alors ce problème admet **une unique solution maximale** $(\mathcal{J}, y)$ *(au sens de* $\prec$*).*

Théorème I.3.2 (Théorème de Cauchy-Lipschitz local)

Soit $f : (t,y) \mapsto f(t,y)$ **continue** *sur $I \times \mathcal{U}$ et* **de classe C^1 par rapport à y**. *Soit $y^0 \in \mathcal{U}$ fixé.*
Soit le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), \\ y(0) = y^0. \end{cases}$$

Alors ce problème admet **une unique solution maximale $(\mathcal{J}, y)$** *(au sens de $\prec$).*

Remarque : En particulier, si $(\mathcal{K}, z)$ est une autre solution de classe C^1, $(\mathcal{J}, y)$ est donc un prolongement de $(\mathcal{K}, z)$ car, nécessairement $\mathcal{K} \subset \mathcal{J}$ et z est la restriction de y à $\mathcal{K}$.

Théorème I.3.2 (Théorème de Cauchy-Lipschitz local)

Soit $f : (t, y) \mapsto f(t, y)$ **continue** *sur $I \times \mathcal{U}$ et* **de classe C^1 par rapport à y**. *Soit $y^0 \in \mathcal{U}$ fixé.*
Soit le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), \\ y(0) = y^0. \end{cases}$$

Alors ce problème admet **une unique solution maximale $(\mathcal{J}, y)$** *(au sens de $\prec$).*

Remarque : En particulier, si $(\mathcal{K}, z)$ est une autre solution de classe C^1, $(\mathcal{J}, y)$ est donc un prolongement de $(\mathcal{K}, z)$ car, nécessairement $\mathcal{K} \subset \mathcal{J}$ et z est la restriction de y à $\mathcal{K}$.

Rappel : toute EDO d'ordre p peut s'écrire sous la forme d'un système différentiel d'ordre 1.

Théorème I.3.2 (Théorème de Cauchy-Lipschitz local)

Soit $f : (t, y) \mapsto f(t, y)$ **continue** *sur* $I \times \mathcal{U}$ *et* **de classe** C^1 **par rapport à** y*. Soit* $y^0 \in \mathcal{U}$ *fixé.*
Soit le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), \\ y(0) = y^0. \end{cases}$$

Alors ce problème admet **une unique solution maximale** $(\mathcal{J}, y)$ *(au sens de* $\prec$*).*

Remarque : En particulier, si $(\mathcal{K}, z)$ est une autre solution de classe C^1, $(\mathcal{J}, y)$ est donc un prolongement de $(\mathcal{K}, z)$ car, nécessairement $\mathcal{K} \subset \mathcal{J}$ et z est la restriction de y à $\mathcal{K}$.

Preuve : voir Exercice I.9 de CIP, sous une hypothèse légèrement différente (f continue et globalement Lipschitz en y).

Interprétation intégrale

Remarque I.3.3

Soit $y \in C^1([0,T])$ *pour* $T > 0$. *Il est équivalent d'écrire*

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(0) = y^0 \end{cases}$$

et

$$\forall t \in [0,T], \quad y(t) = y^0 + \int_0^t f(s, y(s))ds.$$

Cette dernière expression est la forme **intégro-différentielle** *du problème de Cauchy.*

Idée de la preuve

On cherche à **construire** un point fixe de Picard de l'expression intégro-différentielle du problème de Cauchy.

Idée de la preuve

On cherche à **construire** un point fixe de Picard de l'expression intégro-différentielle du problème de Cauchy.
Soit φ_0 la fonction constante égale à y^0.
On définit alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$

$$\varphi_{k+1} : t \mapsto y^0 + \int_0^t f(s, \varphi_k(s))ds, \quad \forall t \in I.$$

Idée de la preuve

On cherche à **construire** un point fixe de Picard de l'expression intégro-différentielle du problème de Cauchy.
Soit φ_0 la fonction constante égale à y^0.
On définit alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$

$$\varphi_{k+1} : t \mapsto y^0 + \int_0^t f(s, \varphi_k(s))ds, \quad \forall t \in I.$$

Ce sont les itérées de Picard, dont on montrera en TD qu'elles convergent vers une fonction φ définie sur un intervalle $\mathcal{J}$, où

$$\varphi(t) = y^0 + \int_0^t f(s, \varphi(s))ds \ \text{ pour } t \in \mathcal{J},$$

par le théorème du point fixe de Banach (cf cours 1 de CIP).

Idée de la preuve

On cherche à **construire** un point fixe de Picard de l'expression intégro-différentielle du problème de Cauchy.
Soit φ_0 la fonction constante égale à y^0.
On définit alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$

$$\varphi_{k+1} : t \mapsto y^0 + \int_0^t f(s, \varphi_k(s))ds, \quad \forall t \in I.$$

Ce sont les itérées de Picard, dont on montrera en TD qu'elles convergent vers une fonction φ définie sur un intervalle $\mathcal{J}$, où

$$\varphi(t) = y^0 + \int_0^t f(s, \varphi(s))ds \;\text{ pour } t \in \mathcal{J},$$

par le théorème du point fixe de Banach (cf cours 1 de CIP).

Pour démontrer l'**unicité**, on utilisera le lemme de Gronwall.

Lemme de Gronwall

Théorème I.3.4 (Inégalité de Gronwall)

Soit $\phi \in C^0([0,T], \mathbb{R}^+)$ *avec* $T > 0$, *telle qu'il existe* $a \in \mathbb{R}^+$ *et* $\psi \in C^0([0,T], \mathbb{R}^+)$ *satisfaisant*

$$\forall t \in [0,T], \quad \phi(t) \leq a + \int_0^t \psi(s)\phi(s)ds.$$

Alors

$$\forall t \in [0,T], \quad \phi(t) \leq a \exp\left(\int_0^t \psi(s)ds\right).$$

Lemme de Gronwall

Théorème I.3.4 (Inégalité de Gronwall)

Soit $\phi \in C^0([0,T],\mathbb{R}^+)$ *avec* $T > 0$, *telle qu'il existe* $a \in \mathbb{R}^+$ *et* $\psi \in C^0([0,T],\mathbb{R}^+)$ *satisfaisant*

$$\forall t \in [0,T], \quad \phi(t) \leq a + \int_0^t \psi(s)\phi(s)ds.$$

Alors

$$\forall t \in [0,T], \quad \phi(t) \leq a \exp\left(\int_0^t \psi(s)ds\right).$$

Remarque : on en déduit l'unicité et des estimations sur la solution.

Lemme de Gronwall

Théorème I.3.4 (Inégalité de Gronwall)

Soit $\phi \in C^0([0,T],\mathbb{R}^+)$ *avec* $T>0$, *telle qu'il existe* $a \in \mathbb{R}^+$ *et* $\psi \in C^0([0,T],\mathbb{R}^+)$ *satisfaisant*

$$\forall t \in [0,T], \quad \phi(t) \leq a + \int_0^t \psi(s)\phi(s)ds.$$

Alors

$$\forall t \in [0,T], \quad \phi(t) \leq a \exp\left(\int_0^t \psi(s)ds\right).$$

Remarque : on en déduit l'unicité et des estimations sur la solution. Pour l'unicité, considérons le cas simple où f est globalement Lipschitz, soient deux solutions y et z, et $x = y - z$.

Lemme de Gronwall

Théorème I.3.4 (Inégalité de Gronwall)

Soit $\phi \in C^0([0,T],\mathbb{R}^+)$ *avec* $T>0$, *telle qu'il existe* $a \in \mathbb{R}^+$ *et* $\psi \in C^0([0,T],\mathbb{R}^+)$ *satisfaisant*

$$\forall t \in [0,T], \quad \phi(t) \leq a + \int_0^t \psi(s)\phi(s)ds.$$

Alors

$$\forall t \in [0,T], \quad \phi(t) \leq a \exp\left(\int_0^t \psi(s)ds\right).$$

Remarque : on en déduit l'unicité et des estimations sur la solution. Pour l'unicité, considérons le cas simple où f est globalement Lipschitz, soient deux solutions y et z, et $x = y - z$. Alors x vérifie

$$|x(t)| = |\int_0^t f(s,y(s)) - f(s,z(s))ds| \leq L \int_0^t |x(s)|ds...$$

Théorème des bouts

Rappelons que I est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, contenant 0, et $\mathcal{U}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^d$.

Théorème I.3.5 (Thm de sortie de tout compact, dimension finie)

Soit $f : (t, y) \mapsto f(t, y)$ **continue** *sur $I \times \mathcal{U}$ et* **de classe** C^1 **par rapport à** y. *Soit $y^0 \in \mathcal{U}$ fixé, et $(\mathcal{J}, y)$ la solution maximale du problème de Cauchy (cf Th. I.3.2). Notons $\mathcal{J} =]a, b[$.*

Théorème des bouts

Rappelons que I est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, contenant 0, et $\mathcal{U}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^d$.

Théorème I.3.5 (Thm de sortie de tout compact, dimension finie)

Soit $f : (t, y) \mapsto f(t, y)$ **continue** *sur $I \times \mathcal{U}$ et* **de classe** C^1 **par rapport à** y. *Soit $y^0 \in \mathcal{U}$ fixé, et $(\mathcal{J}, y)$ la solution maximale du problème de Cauchy (cf Th. I.3.2). Notons $\mathcal{J} =]a, b[$.*
Si $b < \inf I$, alors

$$\lim_{t \nearrow b} \|y(t)\| = +\infty.$$

Théorème des bouts

Rappelons que I est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, contenant 0, et $\mathcal{U}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^d$.

Théorème I.3.5 (Thm de sortie de tout compact, dimension finie)

Soit $f : (t, y) \mapsto f(t, y)$ **continue** *sur $I \times \mathcal{U}$ et* **de classe C^1 par rapport à y**. *Soit $y^0 \in \mathcal{U}$ fixé, et $(\mathcal{J}, y)$ la solution maximale du problème de Cauchy (cf Th. I.3.2). Notons $\mathcal{J} =]a, b[$.*
Si $b < \inf I$, alors

$$\lim_{t \nearrow b} \|y(t)\| = +\infty.$$

Corollary I.3.6

Si on montre qu'une solution (locale) maximale est bornée, alors nécessairement $\mathcal{J} = I$, et la solution est dite **globale**.

Théorème global

Définition I.3.7

g est **globalement lipschitzienne** *sur* $I \times \mathbb{R}^d$ *si*

$$\exists L > 0 : \ \forall (t,x),(t,y) \in I \times \mathbb{R}^d, \quad \|g(t,x) - g(t,y)\| \leq L\|x-y\|.$$

Théorème global

Définition I.3.7

g est **globalement lipschitzienne** *sur $I\times\mathbb{R}^d$ si*

$$\exists L>0 :\ \forall (t,x),(t,y)\in I\times\mathbb{R}^d,\quad \|g(t,x)-g(t,y)\|\leq L\|x-y\|.$$

Théorème I.3.8 (Théorème de Cauchy-Lipschitz global)

Si f est globalement lipschitzienne sur $I\times\mathcal{U}=I\times\mathbb{R}^d$, alors $J=I$ et la solution (I,y) de l'EDO est dite **globale**.

Théorème global

Définition I.3.7

g est **globalement lipschitzienne** *sur $I \times \mathbb{R}^d$ si*

$$\exists L > 0 : \ \forall (t,x),(t,y) \in I \times \mathbb{R}^d, \quad \|g(t,x) - g(t,y)\| \leq L\|x - y\|.$$

Théorème I.3.8 (Théorème de Cauchy-Lipschitz global)

Si f est globalement lipschitzienne sur $I \times \mathcal{U} = I \times \mathbb{R}^d$, alors $J = I$ et la solution (I, y) de l'EDO est dite **globale**.

Corollary I.3.9 (Cas des équations linéaires)

Si f est linéaire, c'est-à-dire de la forme $f : (t,y) \in I \times \mathbb{R}^d \mapsto A(t)y + b(t)$ où $A : I \to \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ et $b : I \to \mathbb{R}^d$ sont continues sur I, alors la solution est globale.

Problème bien posé au sens de Hadamard

Soient E et F deux espaces topologiques.
On considère le problème (P) : trouver $u \in E$ tel que

$$\mathcal{A}(u) = f, \quad \text{pour } f \in F \text{ et } \mathcal{A} : E \to F.$$

Problème bien posé au sens de Hadamard

Soient E et F deux espaces topologiques.
On considère le problème (P) : trouver $u \in E$ tel que

$$\mathcal{A}(u) = f, \quad \text{pour } f \in F \text{ et } \mathcal{A} : E \to F.$$

Définition I.3.10

Le problème (P) est dit bien posé (au sens de Hadamard) si,

- *pour toute donnée $f \in F$, il existe une et une seule solution $u \in E$;*
- *cette solution dépend continûment de f.*

Problème bien posé au sens de Hadamard

Soient E et F deux espaces topologiques.
On considère le problème (P) : trouver $u \in E$ tel que

$$\mathcal{A}(u) = f, \quad \text{pour } f \in F \text{ et } \mathcal{A} : E \to F.$$

Définition I.3.10

Le problème (P) est dit bien posé (au sens de Hadamard) si,

- *pour toute donnée $f \in F$, il existe une et une seule solution $u \in E$;*
- *cette solution dépend continûment de f.*

Ex : cas linéaire, dimension finie, $E = F = \mathbb{R}^n$, $A \in GL_n(\mathbb{R})$.

(P) : Pour $b \in \mathbb{R}^n$, trouver $u \in \mathbb{R}^n$ tel que $Au = b$.

Le problème (P) est bien posé car :
• A est inversible et • $b \mapsto A^{-1}b$ est continue sur $\mathbb{R}^n$.

Problème bien posé

Définition I.3.11

Dans le cadre des EDO, un problème est **bien posé** *si*

- *il existe une solution ;*
- *la solution est unique ;*
- *le comportement de la solution dépend continûment des conditions initiales.*

Un problème qui n'est pas "bien posé" est dit **mal posé***.*

Problème bien posé

Définition I.3.11

Dans le cadre des EDO, un problème est **bien posé** *si*

- *il existe une solution ;*
- *la solution est unique ;*
- *le comportement de la solution dépend continûment des conditions initiales.*

Un problème qui n'est pas "bien posé" est dit **mal posé**.

Le théorème de Cauchy-Lipschitz assure les deux premiers points, mais pas le troisième...

Proposition I.3.12 (Régularité)

Soient $k \geq 1$ et $f \in C^k(I \times U)$, alors la solution maximale de

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(0) = y^0 \end{cases}$$

est de classe $C^{k+1}(\mathcal{J})$.

Théorème I.3.13 (Théorème du flot)

On suppose f de classe $C^2(I \times \mathcal{U})$. Pour tout couple $(t^0, y^0) \in I \times \mathcal{U}$, il existe un voisinage $\mathcal{I} \times \mathcal{V}$ de (t^0, y^0) et une unique application $\phi^{t^0} \in C^1(\mathcal{I} \times \mathcal{V}; \mathcal{U})$ tels que

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \phi^{t^0}}{\partial t}(t, v) = f(t, \phi^{t^0}(t, v)), \quad \forall (t, v) \in \mathcal{I} \times \mathcal{V}, \\ \phi^{t^0}(t^0, v) = v, \quad \forall v \in \mathcal{V}. \end{cases}$$

Définition I.3.14

La fonction ϕ^{t^0} est appelée **flot** *(local) au point t^0 de l'EDO.*

Bibliography

- S. Benzoni-Gavage, *Calcul différentiel et équations différentielles*, Dunod, Paris, 2010.
- J. Hubbard et B. West, *Differential equations*, Springer-Verlag, Berlin, 1991.
- J. Vovelle, *Equations différentielles*, notes de cours, `http://math.univ-lyon1.fr/~vovelle/2Cours.pdf`.

Ressources pédagogiques

Les cours, les TD et les références bibliographiques sont complémentaires.

- Pendant **les cours**, les concepts sont exposés et illustrés par des examples et des preuves ;
- Les **références** (dont certaines disponibles sur EDUNAO) fournissent certaines preuves et vous permettent d'aller plus loin ;
- les **exercices** vous permettent de manipuler les concepts présentés en classe et peuvent apporter des résultats supplémentaires.

TD

12 chargés de TD : enseignants-chercheurs de l'école et chercheurs associés.

A la fin de chaque cours, vous aurez à préparer deux questions (disponibles dans le recueil d'exercices et sur Edunao).

- Le corrigé de ces deux questions est disponible immédiatement.
- Au début de chaque TD, vous pourrez poser des questions sur ces deux questions à préparer *(classes inversées)*.
- Le reste des exercices sera abordé pendant le TD.

Organisation de l'évaluation

- contrôle (note sur 20) :
  3h sans documents portant
  - **sur tous les cours**
  - **sur tous les exercices de TD**
- Mini-projet 2 pages max. **obligatoire** (note sur 20) :

  Modélisation d'un cas concret par un problème elliptique posé en 2D

  - instructions sur EDUNAO
  - choix de modélisation, simulations FEniCS++
- Note finale = 0,8*CF + 0,2*MP