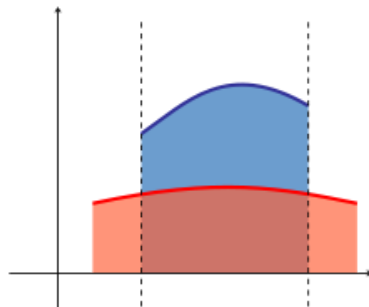


多重积分

维基百科，自由的百科全书

多重积分是**定积分**的一类，它将定积分扩展到多元函数（多变量的函数），例如求 $f(x,y)$ 或者 $f(x,y,z)$ 类型的多元函数的积分。



该积分是两条曲线之间的面积。



作为曲面下的体积的双重积分。该体积底部的矩形区域是积分的域，而曲面是被积的双变量函数的图像。

目录

简介

范例

数学定义

性质

特例

积分方法

直接检验

常数

利用可能的对称性

简化公式

R²中的常规区域

x轴

y轴

范例

\mathbb{R}^3 中的分解

变量替换

极坐标

柱极坐标

球极坐标

数学应用范例-体积计算

多重广义积分

多重积分和累次积分

一些实际应用

参看

参考

外部链接

简介

正如单变量的正函数的定积分代表函数图像和 x 轴之间区域的面积一样，正的双变量函数的**双重积分**代表函数所定义的曲面和包含函数定义域的平面之间所夹的区域的**体积**。（注意同样的体积也可以通过三变量常函数 $f(x, y, z) = 1$ 在上述曲面和平面之间的区域中的**三重积分**得到。若有更多变量，则多元函数的多重积分给出超体积。

n 元函数 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 在定义域 D 上的多重积分通常用嵌套的积分号按照演算的逆序标识（最左边的积分号最后计算），后面跟着被积函数和正常次序的积分变量（最右边的变量最后使用）。积分域或者对每个积分变量在每个积分号下标识，或者用一个变量标在最右边的积分号下：

$$\int \dots \int_{\mathbf{D}} f(x_1, x_2, \dots, x_n) \, dx_1 \dots dx_n$$

因为不可能计算多于一个自变量的函数的不定积分，“不定”多重积分是不存在的。因此所有多重积分都是“定”积分。

通常在坐标系中，多重积分都利用嵌套的累次积分计算。而累次积分为了简便可记为：

$$\int_{\varphi_1}^{\psi_1} \mathrm{d}x_1 \int_{\varphi_2(x_1)}^{\psi_2(x_1)} \mathrm{d}x_2 \dots \int_{\varphi_n(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})}^{\psi_n(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})} f(x_1, x_2, \dots, x_n) \mathrm{d}x_n$$

其中积分域为：

$$D = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) | \varphi_1 \leq x_1 \leq \psi_1, \varphi_2(x_1) \leq x_2 \leq \psi_2(x_1), \dots, \varphi_n(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) \leq x_n \leq \psi_n(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})\}$$

注意的是，该式一般情况下并不表示多个定积分的积，在实际计算中从最右侧积分变量开始积分，其结果会作为外一层积分的被积函数。

范例

譬如，边长为 $4 \times 6 \times 5$ 的长方体的体积可以通过两种方法得到：

- 通过函数 $f(x, y) = 5$ 在 xy 平面中的区域 D ，也就是长方体的底上的双重积分

$$\iint_D 5 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$$

- 或者是常函数1在长方体上的三重积分

$$\iiint 1 \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z \text{ (1可以省略不写)}$$

数学定义

令 n 为大于1的自然数。考虑所谓的半开 n 维矩形（下面简称**矩形**）。对于平面， $n = 2$ 。

$$T = [a_1, b_1) \times [a_2, b_2) \times \dots \times [a_n, b_n) \subset \mathbb{R}^n \text{。}$$

将每个区间 $[a_i, b_i)$ 分成有限个不重叠的子区间，每个都是左闭右开。将子区间记为 I_i 。则，所有所有如下形式的子矩形的族

$$C = I_1 \times I_2 \times \dots \times I_n$$

是 T 的一个划分，也即，子矩形 C 是互不重叠的，而且它们联集为 T 。 C 中的子矩形的**直径**按照定义是 C 中最大的边长，而 T 的划分的直径定义成划分中的所有子矩形的最大直径。

令 $f: T \rightarrow \mathbf{R}$ 为定义在 T 上的函数。考虑如上定义的 T 的划分

$$T = C_1 \cup C_2 \cup \dots \cup C_m$$

其中 m 是正整数。如下形式的和称为**黎曼和**

$$\sum_{k=1}^m f(P_k) \, \mathbf{m}(C_k)$$

其中，对于每个 k ，点 P_k 在 C_k 中，而 $\mathbf{m}(C_k)$ 是笛卡尔积为 C_k 的区间的边长之积。

函数 f 称为**黎曼可积**，如果如下极限存在

$$S = \lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_{k=1}^m f(P_k) \, \mathbf{m}(C_k)$$

其中极限取遍所有直径小於 δ 的 T 的划分。若 f 黎曼可积， S 称为 f 在 T 上的**黎曼积分**。记为

$$\int_T f(x) \, dx \text{。}$$

定义在任意有界 n 维集合上的函数的黎曼和可以通过将函数延拓到一个半开半闭矩形上来求出，其取值在原来的定义域之外为0。然后，原来的函数的积分就定义为延展的函数在矩形区域中的积分（如果存在的话）。

下文中 n 维黎曼积分简称**多重积分**。

性质

多重积分具有很多与单变量函数的积分一样的性质（线性，可加性，单调性，等等）。而且，和单变量情况一样，可以用多重积分找出函数在给定集合上的积分。具体来讲，给定集合 $D \subseteq \mathbf{R}^n$ 和 D 上的可积函数 f ， f 在定义域上的平均值为

$$\bar{f} = \frac{1}{m(D)} \int_D f(x) \, dx,$$

其中 $m(D)$ 是 D 的**测度**。

特例

$T \subseteq \mathbf{R}^2$ 时，积分

$$\ell = \iint_T f(x, y) \, dx \, dy$$

是 f 在 T 上的**双重积分**，而若 $T \subseteq \mathbf{R}^3$ ，积分

$$\ell = \iiint_T f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz$$

是 f 在 T 上的**三重积分**。

注意，按常规，双重积分用两个积分号，而三重积分有三个；这只是记法上方便，也是为了通过重复积分来计算多重积分（参看本条目后文）。

积分方法

多重积分问题的解决在多数情况下依赖于将多重积分转化为一系列单变量积分，而其中每个单变量积分都是直接可解的。

直接检验

有时可以直接获得积分的结果，而无需任何直接计算。

常数

在常函数的情况中，结果很直接：只要将常函数 c 乘以测度就可以了。如果 $c = 1$ ，而且是在 \mathbf{R}^2 的子集中积分，则乘积就是区域面积，而在 \mathbf{R}^3 中，它就是区域的体积。

- 例如：

$$D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : 2 \leq x \leq 4; 3 \leq y \leq 6\} \text{ and } f(x, y) = 2$$

在 D 上积分 f ：

$$\int_3^6 \int_2^4 2 \, dx \, dy = \text{area}(D) \cdot 2 = (2 \cdot 3) \cdot 2 = 12。$$

利用可能的对称性

如果定义域存在沿着某条轴的对称性而且函数对于那个变量是奇函数，则积分为0（因为相反的两部分加起来为0）。

对于 \mathbf{R}^n 中的函数，只要相关变量对于形成对称的轴是奇变量就可以了。

例一：

给定 $f(x, y) = 2 \sin(x) - 3y^3 + 5$ 以及 $T = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ 为积分区域（半径为1的圆盘，包含边界）。

利用线性性质，积分可以分解为三部分：

$$\iint_T (2 \sin x - 3y^3 + 5) dx dy = \iint_T 2 \sin x dx dy - \iint_T 3y^3 dx dy + \iint_T 5 dx dy$$

$2\sin(x)$ 和 $3y^3$ 都是奇函数，而且显然 T 对于 x 和 y 轴都是对称的；因此唯一有贡献的部分是常函数 5 因为它两个都贡献 0。

例二：

考虑函数 $f(x, y, z) = x \exp(y^2 + z^2)$ 以及圆心在原点的半径为 2 的球

$$T = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}.$$

该球显然是对于三条轴都对称，但是只要对于 x 轴积分就可以看出结果是 0，因为 f 对于该变量是奇函数。

简化公式

简化公式基于简单积分区域来将多重积分转化为单变量积分的序列。它们必须从右至左计算，过程中将其它变量暂时视为常数（和偏导数的计算类似）。

\mathbf{R}^2 中的常规区域

此種方法適用於滿足下述條件的任何定義域 D ：

- D 投影到 x 軸或 y 軸任一軸，形成一個有邊界的範圍，以 a, b 代表邊界值。
- 通過 a, b 兩點並與 \overline{ab} 垂直的直線與 D 相交後的兩個端點，可以用 2 個函數 α, β 定義。

x 軸

將 D 對 x 軸做垂直投影，函數 $f: D \rightarrow \mathbf{R}$ 是連續函數，並且 D 可以視為（定義在 $[a, b]$ 區間上的） $\alpha(x)$ 和 $\beta(x)$ 之間的區域。則

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, y) dy$$

y 軸

將 D 對 y 軸做垂直投影，函數 $f: D \rightarrow \mathbf{R}$ 是連續函數，並且 D 可以視為（定義在 $[a, b]$ 區間上的） $\alpha(y)$ 和 $\beta(y)$ 之間的區域。則

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b dy \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x, y) dx$$

范例

考虑区域： $D = \{(x, y) : x \geq 0, y \leq 1, y \geq x^2\}$ （参看附图）。计算

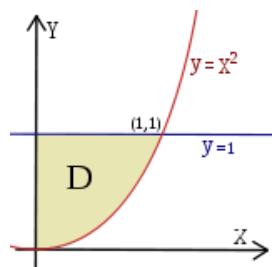
$$\iint_D (x + y) dx dy$$

该区域可以沿 x 或者 y 轴分解。要采用公式，必须先找到限制 D 的两个函数和定义区间。这个例子中，这两个函数为：

$$\alpha(x) = x^2 \text{ 和 } \beta(x) = 1$$

而区间为 $[a, b] = [0, 1]$ （这里为了直观起见采用沿 x 轴分解）。

应用简化公式，得到：



例：可以采用简化公式的 D 区域。

$$\iint_D (x+y) dx dy = \int_0^1 dx \int_{x^2}^1 (x+y) dy = \int_0^1 dx \left[xy + \frac{y^2}{2} \right]_{x^2}^1$$

(首先，第二个积分将x作为常数)。然后就是用积分的基本技术：

$$\int_0^1 \left[xy + \frac{y^2}{2} \right]_{x^2}^1 dx = \int_0^1 \left(x + \frac{1}{2} - x^3 - \frac{x^4}{2} \right) dx = \dots = \frac{13}{20}。$$

如果沿着y轴分解，可以计算

$$\int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{y}} (x+y) dx$$

并得到同样的结果。

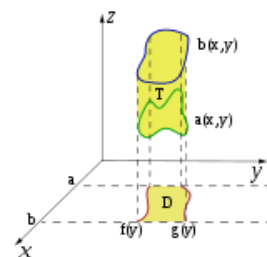
R³中的分解

这些公式可以推广到三重积分：

T是一个可以投影到xy平面的体，它夹在 $\alpha(x,y)$ 和 $\beta(x,y)$ 两个函数之间。那么：

$$\iiint_T f(x,y,z) dx dy dz = \iint_D dx dy \int_{\alpha(x,y)}^{\beta(x,y)} f(x,y,z) dz$$

(此定义和其它R³中的分解类似)。



R³中可(沿xy平面)分解区域的例子。

变量替换

积分的极限常常不易交换(区域无法分解或者公式很复杂)，这时可以采用变量替换来重写积分，令区域更加简易，从而可以用更简单的公式表达。为此，函数必须变换到新坐标系下。

例 (1-a)：

函数为 $f(x,y) = (x-1)^2 + \sqrt{y}$;

若采用替换 $x' = x - 1$, $y' = y$ 则 $x = x' + 1$, $y = y'$

可以得到新函数 $f_2(x,y) = (x')^2 + \sqrt{y}$.

- 对于定义域要进行类似处理，因为原来是采用变换前的变量表达的(本例中的x和y)。
- 微分dx和dy要通过包含被替换的变量对于新变量的偏微分的雅可比行列式来变换。(譬如，极坐标的微分变换)。

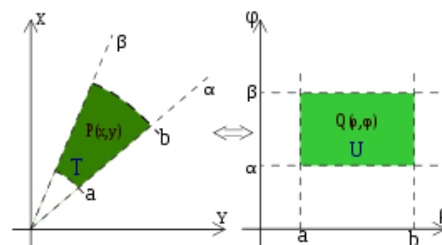
常用的变量替换有三种(R²中一种，R³中两种)；但是，更普遍的变化可以用同样的原理来发现。

极坐标

在R²中，若定义域有某种圆形对称性而函数也有某种特征，则可以采用极坐标变换(参看图中的例子)，也就是说将点P(x,y)从笛卡尔坐标变换到相应的极坐标中。这使得定义域的形状改变，从而简化运算。

该变换的基本关系如下：

$$f(x,y) \rightarrow f(\rho \cos \phi, \rho \sin \phi)。$$



从笛卡尔坐标系变换到极坐标系。

例 (2-a) :

函数为 $f(x, y) = x + y$

应用该变换得到

$$f(\rho, \phi) = \rho \cos \phi + \rho \sin \phi = \rho (\cos \phi + \sin \phi).$$

例 (2-b) :

函数为 $f(x, y) = x^2 + y^2$

这裡有 :

$$f(\rho, \phi) = \rho^2 (\cos^2 \phi + \sin^2 \phi) = \rho^2$$

这里使用了勾股定理 (在简化操作时很有用)。

定义域的变换是根据x和y通过环厚和角度的幅度来限定 ρ , ϕ 的区间。

例 (2-c) :

区域为 $D = x^2 + y^2 \leq 4$, 圆周半径2; 很明显, 这个区域所覆盖的角度是整个圆周角, 所以 ϕ 从0变化到 2π , 而环半径从0变化到2 (内环为0的环形就是圆)。

例 (2-d) :

区域为 $D = \{x^2 + y^2 \leq 9, x^2 + y^2 \geq 4, y \geq 0\}$, 这是在正y半平面中的圆环 (参看示意图); 注意 ϕ 表示平面角而 ρ 从2变化到3。因此变换出来的区域为矩形:

$$T = \{2 \leq \rho \leq 3, 0 \leq \phi \leq \pi\}.$$

该变换的雅可比行列式为:

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(\rho, \phi)} = \begin{vmatrix} \cos \phi & -\rho \sin \phi \\ \sin \phi & \rho \cos \phi \end{vmatrix} = \rho$$

这可以通过将 $x = \rho \cos(\phi)$, $y = \rho \sin(\phi)$ 代入关于 ρ 的第一行和关于 ϕ 的第二行的偏微分中得到, 所以微分 $dx dy$ 变换为 $\rho d\rho d\phi$ 。

一旦函数和区域的变换完成后, 可以定义极坐标中的变量变换公式:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_T f(\rho \cos \phi, \rho \sin \phi) \rho d\rho d\phi.$$

注意 ϕ 在 $[0, 2\pi]$ 区间中有效, 而 ρ 测量长度, 因此只能取非负值。

此外, 应用变量变换公式的前提是, 雅可比行列式的值在变换后的积分变量(如此例中的 ρ 和 ϕ)组成的有界闭区域(如此例中 ϕ 和 ρ 构成的二维域)上恒不为零。但是在极坐标中当且仅当 ρ 为零时, 才有雅可比行列式为零, 故可证明该变量变换公式成立。

例 (2-e):

函数为 $f(x, y) = x$ 区域和例2-d相同。

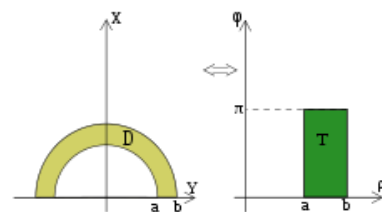
从前面对 D 的分析, 我们知道 ρ 的区间为 $[2, 3]$, 而 ϕ 的为 $[0, \pi]$. 函数变换为:

$$f(x, y) = x \rightarrow f(\rho, \phi) = \rho \cos \phi.$$

最后, 应用积分公式:

$$\iint_D x dx dy = \iint_T \rho \cos \phi \rho d\rho d\phi.$$

一旦区间给定, 就可以得到



从笛卡尔到极坐标的区域变换。

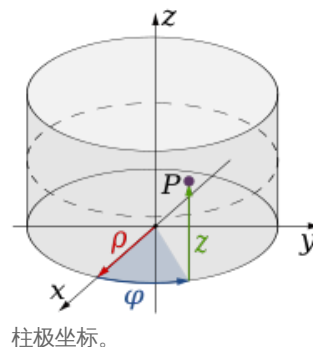
$$\int_0^\pi \int_2^3 \rho^2 \cos \phi \, d\rho \, d\phi = \int_0^\pi \cos \phi \, d\phi \left[\frac{\rho^3}{3} \right]_2^3 = [\sin \phi]_0^\pi \left(9 - \frac{8}{3} \right) = 0.$$

柱极坐标

\mathbf{R}^3 中，在有圆形底面的定义域上的积分可以通过变换到柱极坐标系来完成；函数的变换用如下的关系进行：

$$f(x, y, z) \rightarrow f(\rho \cos \phi, \rho \sin \phi, z)$$

区域的变换可以从图形中得到，因为底面的形状可能不同，而高遵循初始区域的形状。



柱极坐标。

例 (3-a)：

区域为 $D = \{x^2 + y^2 \leq 9, x^2 + y^2 \geq 4, 0 \leq z \leq 5\}$ (也即底面为例2-d中的圆环的高度为5的“管道”)；如果采用变换，可以得到区域 $T = \{2 \leq \rho \leq 3, 0 \leq \phi \leq \pi, 0 \leq z \leq 5\}$ (这是一个底面为例2-d中的矩形而高为5的长方体)。

因为z分量没有变化， $dx \, dy \, dz$ 和在极坐标中一样变化：变为 $\rho \, d\rho \, d\phi \, dz$ 。

最后，变换到柱极坐标的最后公式为：

$$\iiint_D f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \iiint_T f(\rho \cos \phi, \rho \sin \phi, z) \rho \, d\rho \, d\phi \, dz.$$

这个方法在柱形或者锥形区域的情况较为适用，也适用于容易分辨z区间和变换圆形底面和函数的其它情况。

例 (3-b)：函数为 $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z$ 而积分区域为圆柱： $D = \{x^2 + y^2 \leq 9, -5 \leq z \leq 5\}$ 。将D变换到柱极坐标如下：

$$T = \{0 \leq \rho \leq 3, 0 \leq \phi \leq 2\pi, -5 \leq z \leq 5\}.$$

函数变为

$$f(\rho \cos \phi, \rho \sin \phi, z) = \rho^2 + z$$

最有应用积分公式：

$$\iiint_D (x^2 + y^2 + z) \, dx \, dy \, dz = \iiint_T (\rho^2 + z) \rho \, d\rho \, d\phi \, dz;$$

推演一下公式，得到

$$\int_{-5}^5 dz \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^3 (\rho^3 + \rho z) \, d\rho = 2\pi \int_{-5}^5 \left[\frac{\rho^4}{4} + \frac{\rho^2 z}{2} \right]_0^3 dz = 2\pi \int_{-5}^5 \left(\frac{81}{4} + \frac{9}{2} z \right) dz = \dots = 405\pi.$$

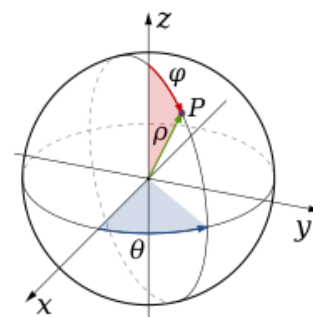
球极坐标

\mathbf{R}^3 中，有些区域有球形对称性，所以将积分区域的每点用两个角度和一个距离标识较为合适。因此可以采用变换到球极坐标系；函数变换由如下关系产生：

$$f(x, y, z) \rightarrow f(\rho \cos \theta \sin \phi, \rho \sin \theta \sin \phi, \rho \cos \phi)$$

注意z轴上的点没有唯一表示， θ 可以在0到 2π 间变化。

这个方法最为适用的区域显然是球。



球极坐标。【注意某些地区（如北美）角度标识相反】

例 (4-a) :

区域为 $D = x^2 + y^2 + z^2 \leq 16$ (球心在原点半径为4的球) ; 应用变换后得到 :
 $T = \{0 \leq \rho \leq 4, 0 \leq \phi \leq \pi, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$ 。

坐标变换的雅可比行列式为 :

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \theta, \phi)} = \begin{vmatrix} \cos \theta \sin \phi & -\rho \sin \theta \sin \phi & \rho \cos \theta \cos \phi \\ \sin \theta \sin \phi & \rho \cos \theta \sin \phi & \rho \sin \theta \cos \phi \\ \cos \phi & 0 & -\rho \sin \phi \end{vmatrix} = -\rho^2 \sin \phi$$

因此 $dx \, dy \, dz$ 变换为 $\rho^2 \sin(\phi) \, d\rho \, d\theta \, d\phi$ 。

得到最后公式:

$$\iiint_D f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \iiint_T f(\rho \sin \theta \cos \phi, \rho \sin \theta \sin \phi, \rho \cos \theta) \rho^2 \sin \phi \, d\rho \, d\theta \, d\phi。$$

应当在积分区域为球形对称并且函数很容易通过基本三角公式简化的时候才使用这个方法。(参看例4-b) ; 其它情况下, 可能使用柱极坐标更为合适(参看例4-c)。

$$\iiint_T f(a, b, c) \rho^2 \sin \phi \, d\rho \, d\theta \, d\phi。$$

注意从雅可比行列式来的 ρ^2 和 $\sin \phi$ 因子。

注意下面例子中, ϕ 和 θ 的作用反过来了。

例 (4-b) :

D 和例4-a相同, 而 $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ 是被积函数。

很容易变换为:

$$f(\rho \sin \theta \cos \phi, \rho \sin \theta \sin \phi, \rho \cos \theta) = \rho^2, ,$$

而从 D 到 T 的变换是已知的:

$$(0 \leq \rho \leq 4, 0 \leq \phi \leq 2\pi, 0 \leq \theta \leq \pi)。$$

应用积分公式:

$$\iiint_D (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz = \iiint_T \rho^2 \rho^2 \sin \theta d\rho d\theta d\phi,$$

并展开:

$$\begin{aligned} \iiint_T \rho^4 \sin \theta d\rho d\theta d\phi &= \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^4 \rho^4 d\rho \int_0^{2\pi} d\phi = 2\pi \int_0^\pi \sin \theta \left[\frac{\rho^5}{5} \right]_0^4 d\theta \\ &= 2\pi \left[\frac{\rho^5}{5} \right]_0^4 [-\cos \theta]_0^\pi = 4\pi \cdot \frac{1024}{5} = \frac{4096\pi}{5}。 \end{aligned}$$

例 (4-c) :

区域 D 是球心在原点半径为 $3a$ 的球 ($D = x^2 + y^2 + z^2 \leq 9a^2$) 而 $f(x, y, z) = x^2 + y^2$ 是被积函数。

看起来采用球极坐标变换较为合适, 但是事实上, 限定新区域 T 的变量很明显应该是:

$$0 \leq \rho \leq 3a, 0 \leq \phi \leq 2\pi, 0 \leq \theta \leq \pi。$$

但是采用这个变换就有

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 \rightarrow \rho^2 \sin^2 \theta \cos^2 \phi + \rho^2 \sin^2 \theta \sin^2 \phi = \rho^2 \sin^2 \theta。$$

应用积分公式得到:

$$\iiint_T \rho^2 \sin^2 \theta \rho^2 \sin \theta d\rho d\theta d\phi = \iiint_T \rho^4 \sin^3 \theta d\rho d\theta d\phi$$

这很难求解。而如果采用柱极坐标, 新的 T 区间为:

$$0 \leq \rho \leq 3a, 0 \leq \phi \leq 2\pi, -\sqrt{9a^2 - \rho^2} \leq z \leq \sqrt{9a^2 - \rho^2};$$

z 区间可以通过将球切成两个半球并求解从 D 的公式来的不等式得到 (然后直接变换 $x^2 + y^2$ 到 ρ^2)。新函数就是 ρ^2 . 采用积分公式

$$\iiint_T \rho^2 \rho d\rho d\phi dz。$$

得到

$$\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{3a} \rho^3 d\rho \int_{-\sqrt{9a^2 - \rho^2}}^{\sqrt{9a^2 - \rho^2}} dz = 2\pi \int_0^{3a} 2\rho^3 \sqrt{9a^2 - \rho^2} d\rho。$$

然后应用变换

$$9a^2 - \rho^2 = t \rightarrow dt = -2\rho d\rho \rightarrow d\rho = \frac{dt}{-2\rho}$$

(新区间变为 $0, 3a \rightarrow 9a^2, 0$)。得到

$$-2\pi \int_{9a^2}^0 \rho^2 \sqrt{t} dt$$

因为 $\rho^2 = 9a^2 - t$ ，所以

$$-2\pi \int_{9a^2}^0 (9a^2 - t)\sqrt{t} dt,$$

将积分限反过来，然后分配括号中的项，很容易将积分分解为可以直接积分的两部分：

$$\begin{aligned} 2\pi \left[\int_0^{9a^2} 9a^2 \sqrt{t} dt - \int_0^{9a^2} t\sqrt{t} dt \right] &= 2\pi \left[9a^2 \frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{5} t^{\frac{5}{2}} \right]_0^{9a^2} \\ &= 2 \cdot 27\pi a^5 \left(6 - \frac{18}{5} \right) = \frac{648\pi}{5} a^5. \end{aligned}$$

由于采用柱极坐标，很容易就将这个三重积分变换为简单的单变量积分。

参看柱极和球极坐标下的∇中讨论的不同的体积元。

数学应用范例-体积计算

利用上面描述的方法，很容易计算一些立体的体积。

- **圆柱**：半径为 R 的圆形底面作为定义域，将等于高度 h 的常函数作为积分对象。可以在极坐标中将体积写作：

$$\text{体积} = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^R h \rho d\rho = h 2\pi \left[\frac{\rho^2}{2} \right]_0^R = \pi R^2 h$$

验证：体积=底面积×高 = $\pi R^2 \cdot h$

- **球**：可以作为常函数1在球极坐标下的半径为 R 的球中积分：

$$\text{体积} = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^R \rho^2 d\rho = 2\pi \int_0^\pi \sin \theta \frac{R^3}{3} d\theta = \frac{2}{3} \pi R^3 [-\cos \theta]_0^\pi = \frac{4}{3} \pi R^3.$$

- **四面体** (三棱锥或者说3维单纯形)：顶点在原点，三条长度为 ℓ 的边沿着各个笛卡尔坐标系轴向的四面体的体积可以通过简化公式计算，因为 xy 平面和 z 轴互相垂直， x 和 y 垂直，被积函数是常数1。

$$\begin{aligned} \text{体积} &= \int_0^\ell dx \int_0^{\ell-x} dy \int_0^{\ell-x-y} dz = \int_0^\ell dx \int_0^{\ell-x} (\ell - x - y) dy \\ &= \int_0^\ell (\ell^2 - 2\ell x + x^2 - \frac{(\ell-x)^2}{2}) dx = \ell^3 - \ell\ell^2 + \frac{\ell^3}{3} - \left[\frac{\ell^2}{2} - \ell x + \frac{x^2}{2} \right]_0^\ell = \\ &= \frac{\ell^3}{3} - \frac{\ell^3}{6} = \frac{\ell^3}{6} \end{aligned}$$

验证：体积 = 底面积×高/3 = $\frac{\ell^2}{2} \cdot \ell/3 = \frac{\ell^3}{6}$ 。

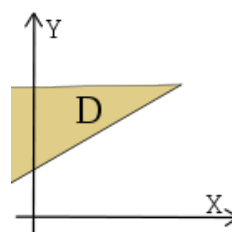
多重广义积分

定义域无界或者函数值在靠近定义域边界时无界的情况下，可以引入二重广义积分或者三重广义积分。

多重积分和累次积分

富比尼定理断言若

$$\int_{A \times B} |f(x, y)| d(x, y) < \infty,$$



反常区间的例子。

也即，积分绝对收敛，则多重积分和累次积分给出同样的结果，

$$\int_{A \times B} f(x, y) d(x, y) = \int_A \left(\int_B f(x, y) dy \right) dx = \int_B \left(\int_A f(x, y) dx \right) dy.$$

一个特例是如果 $|f(x, y)|$ 是有界函数而A和B为有界集时。

如果积分不是绝对收敛，必须小心，不要混淆多重积分和累次积分的概念，特别是当它们采用形式上相同的记法的时候。记法

$$\int_0^1 \int_0^1 f(x, y) dy dx$$

在某些情况下表示累次积分而非真正的双重积分。累次积分中，外围的积分

$$\int_0^1 \cdots dx$$

是对于如下x的函数关于x的积分

$$g(x) = \int_0^1 f(x, y) dy.$$

双重积分却是定义在xy平面的区域上。若双重积分存在，则它等于两个累次积分中的任何一个（或者" $dy dx$ "或者" $dx dy$ "），它也就是通过其中之一来计算的。但是有时这两个累次积分存在，而双重积分不存在。这种情况下，有时两个累次积分不相等，也即，

$$\int_0^1 \int_0^1 f(x, y) dy dx \neq \int_0^1 \int_0^1 f(x, y) dx dy.$$

这是条件收敛的积分的重排序的一个例子。

如果要强调使用双重积分而非累次积分时，可以采用如下记法

$$\int_{[0,1] \times [0,1]} f(x, y) dx dy$$

一些实际应用

很普遍地，像单变量一样，我们通过多重积分可以找到给定集合上的函数的平均值。给定一个集合 $D \subseteq \mathbf{R}^n$ 和一个在D上可积的函数 f ， f 在区域上的平均值是

$$\bar{f} = \frac{1}{m(D)} \int_D f(x) dx,$$

其中 $m(D)$ 是D的测度。

此外，这些积分在物理中有大量应用。

力学中，转动惯量可以作为密度乘以刚体和转轴的距离的平方的体积分（三重积分）计算：

$$I_z = \iiint_V \rho r^2 dV.$$

与三维欧氏空间 \mathbf{R}^3 中的质量测度 dm 表示的质量分布关联的引力势：

$$V(\mathbf{x}) = - \int_{\mathbf{R}^3} \frac{G}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} dm(\mathbf{y}).$$

如果存在一个连续函数 $\rho(\mathbf{x})$ 表示 \mathbf{x} 处的密度分布, 那么 $dm(\mathbf{x}) = \rho(\mathbf{x}) d^3\mathbf{x}$, 其中 $d^3\mathbf{x}$ 是欧几里得体积元, 那么引力势就是

$$V(\mathbf{x}) = - \int_{\mathbf{R}^3} \frac{G}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \rho(\mathbf{y}) d^3\mathbf{y}.$$

在电磁学中，麦克斯韦方程组可以写作多重积分，用以计算总磁场和电场。下例中，由电荷分布产生的电场通过向量函数的三重积分得到：

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3} \rho(\vec{r}') \, \mathrm{d}^3 r'.$$

参看

- 和多重积分相关的实分析定理：
 - 散度定理
 - 斯托克斯定理
 - 格林定理

参考

- Robert A. Adams - Calculus: A Complete Course (5th Edition) ISBN 0-201-79131-5.

外部链接

- 埃里克·韦斯坦因. 多重积分. MathWorld.
- L.D. Kudryavtsev, Multiple integral, (编) Hazewinkel, Michiel, 数学百科全书, Springer, 2001, ISBN 978-1-55608-010-4
- Mathematical Assistant on Web (http://user.mendelu.cz/marik/maw/index.php?lang=en&form=integral2) 笛卡尔坐标系下和极坐标下的双重积分的在线计算 （包括求解过程中的中间步骤，由Maxima(軟體)支持）

取自“https://zh.wikipedia.org/w/index.php?title=多重积分&oldid=56247384”

本页面最后修订于2019年9月26日 (星期四) 17:27。

本站的全部文字在知识共享 署名-相同方式共享 3.0协议之条款下提供，附加条款亦可能应用。（请参阅使用条款）
Wikipedia®和维基百科标志是维基媒体基金会的注册商标；维基™是维基媒体基金会的商标。
维基媒体基金会是按美国国内稅收法501(c)(3)登记的非营利慈善机构。