Séance VII : Mesures produits

A) Objectifs de la séance

A la fin de cette séance,

- je connais la notion de tribu produit;
- je connais la caractérisation de la mesure produit, par ses valeurs sur les produits cartésiens;
- je suis capable de vérifier qu'une fonction de plusieurs variables est mesurable et intégrable;
- je maîtrise l'application des théorèmes de Fubini-Tonelli et Fubini-Lebesgue, pour calculer des intégrales de fonctions de plusieurs variables;
- je suis capable d'appliquer l'intégration par rapport à une mesure produit, au cas particulier des lois de variables aléatoires;
- je sais effectuer un changement de variables dans une intégrale multiple.

B) Pour se familiariser avec les concepts (à traiter avant les séances de TD)

Les questions VII.1 et VII.2 sont à traiter avant la séance de TD. Les corrigés sont disponibles sur internet.

Question VII.1

Q. VII.1.1 Trouver une fonction $f \in L^1(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ qui ne soit pas dans $L^p(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$, $\forall p > 1$. Trouver une fonction $f \in L^p(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ pour un certain $p > 1$ qui ne soit pas dans $L^1(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$.

Question VII.2

Soit $\lambda^{(2)}$ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^2$ et f la fonction définie par

$$f(x, y) = \sin(2\pi x)e^{-y}.$$

Q. VII.2.1 On considère le domaine $D = [0, 1] \times \mathbb{R}_+$.

(a) En utilisant précisément les théorèmes du cours, montrer que $f \in L^1(D, \lambda^{(2)})$.

(b) Calculer $\int_D f \, d\lambda^{(2)}$.

C) Exercices

La théorie de Lebesgue (et plus généralement la théorie de la mesure) fournit un cadre plus naturel et cohérent pour l'étude des intégrales multiples que celui de l'intégrale de Riemann. A travers ce TD, on observera, sur des exemples simples, que les théorèmes de Tonelli et Fubini constituent des outils efficaces pour l'étude de l'intégrabilité des fonctions de plusieurs variables.

Exercice VII.1 (Intégrabilité)

E. VII.1.1 La fonction g définie par $g(x,y,z) = \frac{1}{1-xyz}$ est-elle intégrable sur $]0,1[^3$?

E. VII.1.2 Pour quelles valeurs de α la fonction h définie $h(x,y) = \frac{1}{(x^2+y^2)^\alpha}$ est-elle intégrable sur $D = \{(x,y) \in]0,+\infty[^2 /\ x^2+y^2 < 1\}$?

Exercice VII.2 (Tribu et mesure de $\mathbb{R}^3$)
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction borélienne.
On considère $\Gamma = \{(x, f(x));\ x \in \mathbb{R}^2\}$ le graphe de f.

E. VII.2.1 Montrer que Γ est un borélien de $\mathbb{R}^3$.

E. VII.2.2 Montrer que Γ est négligeable dans $\mathbb{R}^3$ (pour la mesure de Lebesgue).

Le but de l'exercice qui suit est d'étendre le lemme de Riemann-Lebesgue des fonctions Riemann-intégrables sur un segment aux fonctions Lebesgue-intégrables sur un intervalle quelconque. Outre le résultat de cet exercice, on retiendra la méthode qui repose sur un raisonnement de densité.

Exercice VII.3 (Lemme de Riemann-Lebesgue)

E. VII.3.1 (a) Soit f une fonction en escalier sur $[a,b]$. Montrer que:

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f(x)\cos(nx)\, dx = 0 = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f(x)\sin(nx)\, dx.$$

(b) Etendre le résultat au cas d'une fonction Riemann-intégrable (ou réglée ou continue par morceaux).

E. VII.3.2 Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.

(a) Soit f une fonction indéfiniment dérivable à support compact dans I. Montrer que:

$$\lim_{n\to\infty} \int_I f(x)\cos(nx)\, \lambda(dx) = 0 = \lim_{n\to\infty} \int_I f(x)\sin(nx)\, \lambda(dx).$$

(b) Etendre le résultat au cas d'une fonction Lebesgue-intégrable.

Exercice VII.4

E. VII.4.1 La fonction f définie par $f(0,0) = 0$ et $f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$ est-elle intégrable sur $[0,1]^2$?

Exercice VII.5
Soit X une variable aléatoire positive de densité de probabilité f.
E. VII.5.1 Montrer que pour tout $r \geq 1$, on a

$$\mathbb{E}[X^r] = \int_{\mathbb{R}_+} r\, x^{r-1}\, \mathbb{P}(X > x)\, \lambda(dx),$$

lorsque l'intégrale est finie (λ désigne la mesure de Lebesgue).

Les deux exercices qui suivent montrent que les théorèmes usuels sur les intégrales multiples permettent d'obtenir rapidement et facilement des résultats classiques.

Exercice VII.6 (Calcul d'intégrales simples)
Soient $0 < a < b$.
E. VII.6.1 Calculer $\displaystyle\int_a^b e^{-xy}\, dy$. En déduire la valeur de

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x}\, dx.$$

E. VII.6.2 Adapter la méthode précédente pour calculer

$$J = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(ax) - \cos(bx)}{x}\, dx.$$

Exercice VII.7 (Calcul d'une intégrale classique)
Soit $a > 0$ et $D_a =]0, a[\times]0, +\infty[$.
E. VII.7.1 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(u,v) = \frac{\sin(u)}{u} e^{-v}$ pour $(u,v) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ et $f(0,v) = e^{-v}$ pour $v \in \mathbb{R}$. Montrer que f est intégrable sur D_a.

E. VII.7.2 Montrer que l'application T définie par $T(x,y) = (x, xy)$ est un difféomorphisme de D_a sur lui-même.

E. VII.7.3 Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}^2$ par $g(x,y) = e^{-xy}\sin(x)$. Montrer que g est intégrable sur D_a. Comparer son intégrale à celle de f.

E. VII.7.4 Exprimer $\displaystyle\int_0^a \frac{\sin(u)}{u}\, du$ en fonction de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ay}}{1+y^2}\, dy$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{y\, e^{-ay}}{1+y^2}\, dy$.

E. VII.7.5 En déduire l'existence et la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u}\, du$.

Exercice VII.8

E. VII.8.1 Soient X et Y deux variables aléatoires réelles dont la loi jointe admet la densité $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$. Déterminer la loi de Y/X.

D) Approfondissement

La formule d'intégration par parties est valable pour des fonctions C^1. Nous allons généraliser cette formule à une classe plus large de fonctions.

Exercice VII.9 (Généralisation de la formule d'intégration par parties)
Dans cet exercice, on note $L^1 = L^1([0,1])$.

Soit f une fonction de L^1. Pour tout x de $[0,1]$, on pose:

$$F(x) = \int_{[0,x]} f(t)\, \lambda(dt).$$

E. VII.9.1 La formule d'intégration par parties est-elle valable pour des fonctions dérivables presque partout ou même partout?

E. VII.9.2 (a) La fonction F est-elle dérivable presque partout sur $]0,1[$?

(b) La fonction F est-elle nécessairement dérivables partout sur $]0,1[$?

E. VII.9.3 Soit g une fonction de L^1. Pour tout x de $[0,1]$, on pose

$$G(x) = \int_{[0,x]} g(t)\, \lambda(dt).$$

(a) Montrer que, pour tout couple (u,t) de $[0,1]^2$,

$$\mathbf{1}_{[0,t]}(u)\, \mathbf{1}_{[0,x]}(t) = \mathbf{1}_{[0,x]}(u) \left(\mathbf{1}_{[0,x]}(t) - \mathbf{1}_{[0,u[}(t) \right).$$

(b) Montrer que $(t,u) \mapsto |f(t)g(u)|$ est intégrable sur $[0,1]^2$.

(c) En déduire que, pour tout x de $[0,1]$,

$$\int_{[0,x]} G(t) f(t)\, \lambda(dt) = G(x)F(x) - \int_{[0,x]} g(t)F(t)\, \lambda(dt).$$

(d) Démontrer alors que pour tout couple (a,b) de $]0,1[^2$, on a

$$\int_{[a,b]} G(t) f(t)\, \lambda(dt) = [GF]_a^b - \int_{[a,b]} g(t)F(t)\, \lambda(dt).$$

Séance 7 : Eléments de correction des exercices

Solution de Q. VII.1.1 Dans le premier cas, on peut par exemple considérer la fonction qui à $x \in \mathbb{R}$ associe $\mathbf{1}_{]0,\frac{1}{2}[}(x)\frac{1}{x(\ln(x))^2}$.

Dans le deuxième cas, on peut par exemple considérer la fonction qui à $x \in \mathbb{R}$ associe $\mathbf{1}_{[2,+\infty[}(x)\frac{1}{x}$ qui est dans L^p pour tout $p > 1$.

Solution de Q. VII.2.1

(a) On commence par remarquer que la fonction f est bien définie et mesurable (car continue) sur $\mathbb{R}^2$, donc en particulier elle l'est aussi sur D. Ainsi par le théorème de Fubini-Tonelli, on a

$$\begin{aligned}\int_D |f| \, d\lambda^{(2)} &= \int_{[0,1]} \int_{\mathbb{R}_+} |f(x,y)| \, \lambda(dy)\lambda(dx) \\ &\leq \int_{[0,1]} \int_{\mathbb{R}_+} e^{-y} \, \lambda(dy)\lambda(dx) \\ &= \int_{[0,1]} 1\lambda(dx) \\ &= 1.\end{aligned}$$

Puisque cette intégrale est finie, on en déduit que $f \in L^1(D, \lambda^{(2)})$.

(b) Comme $f \in L^1(D)$, on peut appliquer le théorème de Fubini-Lebesgue. Ainsi,

$$\int_D f \, d\lambda^{(2)} = \int_{\mathbb{R}_+} \int_{[0,1]} \sin(2\pi x) e^{-y} \, \lambda(dx)\lambda(dy).$$

Le théorème d'intégration de la dérivée donne alors

$$\int_{[0,1]} \sin(2\pi x) \, \lambda(dx) = \left[\frac{-\cos(2\pi x)}{2\pi}\right]_0^1 = 0.$$

Ainsi, $\int_D f \, d\lambda^{(2)} = 0$.

Solution de E. VII.1.1 La fonction g est mesurable sur $]0,1[^3$ (car continue) et positive.

En outre, grâce au théorème de Fubini-Tonelli (détaillez les espaces mesurés):

$$\begin{aligned}\int_{]0,1[} \frac{1}{1-xyz} \, \lambda(dx) &= \int_{]0,1[} \sum_{n=0}^{+\infty} (xyz)^n \, \lambda(dx) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} (yz)^n \int_{]0,1[} x^n \, \lambda(dx) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(yz)^n}{n+1}.\end{aligned}$$

Remarque : on a $\int_{]0,1[} x^n \, \lambda(dx) = \dfrac{1}{n+1}$ grâce au Théorème d'intégration de la dérivée.

En itérant ce calcul, on trouve :

$$\int_{]0,1[} \int_{]0,1[} \int_{]0,1[} \frac{1}{1-xyz}\, \lambda(dx)\, \lambda(dy)\, \lambda(dz) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^3} < +\infty.$$

Finalement, le théorème de Fubini-Tonelli assure que g est intégrable sur $]0,1[^3$.

Solution de E. VII.1.2 La fonction h est mesurable sur le quart de disque ouvert D car continue.

Le théorème de changement de variable implique que h est intégrable sur D si et seulement si $h \circ \varphi.|J|$ est intégrable sur $\Delta =]0,1[\times]0,\pi/2[$, où J désigne le jacobien du changement de variables $\varphi(r,\theta) = (r\cos(\theta), r\sin(\theta))$.

On a donc :

$$\int_D h(x,y)\, \lambda \otimes \lambda(dx,dy) = \int_\Delta \frac{1}{r^{2\alpha-1}}\, \lambda \otimes \lambda(dr,d\theta).$$

La fonction étant positive, le théorème de Fubini-Tonelli implique

$$\int_D h(x,y)\, \lambda \otimes \lambda(dx,dy) = \int_{]0,1[} \int_{]0,\pi/2[} \frac{1}{r^{2\alpha-1}}\, \lambda(d\theta)\, \lambda(dr) = \frac{\pi}{2} \int_{]0,1[} \frac{1}{r^{2\alpha-1}}\, \lambda(dr).$$

Or, $\dfrac{1}{r^{2\alpha-1}}$ est intégrable sur $]0,1[$ si et seulement si $2\alpha - 1 < 1$.

Donc h est intégrable si et seulement si $\alpha < 1$.

Solution de E. VII.2.1 Soit φ l'application définie par

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & \varphi(x,y) = f(x) - y. \end{array}$$

La fonction φ est borélienne donc $\Gamma = \varphi^{-1}(\{0\})$ est un borélien.

Solution de E. VII.2.2 En notant $\lambda^{(2)} = \lambda \otimes \lambda$ la mesure de Lebesgue de $\mathbb{R}^2$ et $\lambda^{(3)} = \lambda \otimes \lambda \otimes \lambda$ la mesure de Lebesgue de $\mathbb{R}^3$, on écrit, grâce au Théorème de Fubini-Tonelli,

$$\begin{aligned} \lambda^{(3)}(\Gamma) &= \int_{\mathbb{R}^3} \mathbf{1}_\Gamma(x_1,x_2,y)\, \lambda^{(3)}(dx_1,dx_2,dy) \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \left(\int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_\Gamma(x_1,x_2,y)\, \lambda(dy) \right) \lambda^{(2)}(dx_1,dx_2) \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \lambda(\{f(x_1,x_2)\})\, \lambda^{(2)}(dx_1,dx_2) \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} 0\, \lambda^{(2)}(dx_1,dx_2) = 0, \end{aligned}$$

en utilisant le fait que $\lambda(\{y\}) = 0$ pour tout $y \in \mathbb{R}$. Le borélien Γ est donc négligeable pour la mesure de Lebesgue de $\mathbb{R}^3$.

Solution de E. VII.3.1

(a) Soit f une fonction en escalier sur $[a, b]$. Elle peut s'écrire:

$$f(x) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i 1_{]a_{i-1}, a_i[}(x) + \sum_{j=0}^{N} \beta_j 1_{\{a_j\}}(x),$$

avec $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_{N-1} < a_N = b$. Ainsi:

$$\int_a^b f(x) \cos(nx)\, dx = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \int_{a_{i-1}}^{a_i} \cos(nx)\, dx = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \frac{\sin(na_{i-1}) - \sin(na_i)}{n}.$$

Et donc:

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f(x) \cos(nx)\, dx = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \lim_{n\to\infty} \frac{\sin(na_i) - \sin(na_{i-1})}{n} = 0.$$

(b) Soit f une fonction réglée (par exemple continue par morceaux). Par densité des fonctions en escalier dans l'espace des fonctions réglées (pour la norme $\|.\|_\infty$), on sait que, pour tout $\epsilon > 0$ fixé, il existe une fonction ϕ en escalier telle que

$$\|f - \phi\|_\infty < \frac{\epsilon}{2(b-a)}.$$

De plus, d'après la question précédente, on sait que $\int_a^b \phi(x) \cos(nx)\, dx$ converge vers 0. Il existe donc $N > 0$ tel que si $n > N$ alors

$$\left| \int_a^b \phi(x) \cos(nx)\, dx \right| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Ainsi pour $n > N$ on a:

$$\left| \int_a^b f(x) \cos(nx)\, dx \right| \leq \left| \int_a^b (f(x) - \phi(x)) \cos(nx)\, dx \right| + \left| \int_a^b \phi(x) \cos(nx)\, dx \right|,$$

et donc :

$$\left| \int_a^b f(x) \cos(nx)\, dx \right| \leq \frac{\epsilon}{2(b-a)} \int_a^b 1\, dx + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Ceci prouve bien la convergence de $\int_a^b f(x) \cos(nx)\, dx$ vers 0.

Solution de E. VII.3.2 Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ quelconque.

(a) Soit ϕ une fonction indéfiniment dérivable à support compact. Soient a et b deux réels tels que le support de ϕ est inclus dans $[a, b]$. Alors :

$$\int_I \phi(x) \cos(nx)\, \lambda(dx) = \int_a^b \phi(x) \cos(nx)\, dx.$$

A ce stade, on peut appliquer le résultat de la question précédente pour conclure.
D'un point de vue plus calculatoire, on peut également procéder comme suit:

$$\int_a^b \phi(x) \cos(nx)\, dx = \frac{1}{n} \left[\phi(x) \sin(nx)\right]_a^b - \frac{1}{n} \int_a^b \phi'(x) \sin(nx)\, dx.$$

Par définition du support on a $\phi(a) = 0 = \phi(b)$ et donc :

$$\frac{1}{n}\left(\phi(b)\sin(nb) - \phi(a)\sin(na)\right) = 0,$$

et comme ϕ' est continue sur $[a,b]$ et donc bornée :

$$\left|\frac{1}{n}\int_a^b \phi'(x)\sin(nx)\,dx\right| \le \frac{b-a}{n}\|\phi'\|_\infty.$$

On en déduit que:

$$\lim_{n\to\infty}\int_I \phi(x)\cos(nx)\,\lambda(dx) = 0.$$

(b) Soit maintenant f une fonction intégrable sur I. Comme l'ensemble des fonctions indéfiniment dérivables à support compact est dense dans l'ensemble $L^1(I)$ des fonctions intégrables (pour la norme $\|.\|_1$, cf Théorème du cours), il existe une fonction ϕ indéfiniment dérivable à support compact telle que :

$$\|f-\phi\|_1 \le \frac{\epsilon}{2}.$$

Or

$$\left|\int_I f(x)\cos(nx)\,\lambda(dx)\right| \le \left|\int_I (f(x)-\phi(x))\cos(nx)\,\lambda(dx)\right| + \left|\int_I \phi(x)\cos(nx)\,\lambda(dx)\right|,$$

donc

$$\left|\int_I f(x)\cos(nx)\,dx\right| \le \|f-\phi\|_1 + \left|\int_I \phi(x)\cos(nx)\,\lambda(dx)\right|.$$

Le résultat de la question 2)(a) assure qu'il existe un entier N tel que si $n > N$ alors :

$$\left|\int_I \phi(x)\cos(nx)\,\lambda(dx)\right| \le \frac{\epsilon}{2}.$$

Finalement, si $n > N$ alors:

$$\left|\int_I f(x)\cos(nx)\,\lambda(dx)\right| \le \epsilon,$$

d'où la convergence de $\int_I f(x)\cos(nx)\,\lambda(dx)$ vers 0.

Solution de E. VII.4.1 On considère pour $n \ge 1$,

$$\forall x,y \in [0,1], \quad f_n(x,y) = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2+\frac{1}{n}}.$$

Pour tout $n \ge 1$, les fonctions f_n sont mesurables (car continues) sur $[0,1]^2$ donc leur limite (simple) f l'est aussi.

Pour $y \neq 0$, on a :

$$\begin{aligned}
\int_{[0,1]} f(x,y)\,\lambda(dx) &= \int_{[0,1]} \frac{2x^2-(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2}\,\lambda(dx)\\
&= \int_{[0,1]} \frac{-1}{x^2+y^2}\,\lambda(dx) + \int_{[0,1]} \frac{2x^2}{(x^2+y^2)^2}\,\lambda(dx)\\
&= -\int_{[0,1]} \frac{1}{x^2+y^2}\,\lambda(dx) + \left[\frac{-1}{x^2+y^2}\,x\right]_0^1 + \int_{[0,1]} \frac{1}{x^2+y^2}\,\lambda(dx),
\end{aligned}$$

où on a réalisé une intégration par parties à la dernière ligne.

Donc on a, pour presque tout y :

$$\int_{[0,1]} f(x,y)\,\lambda(dx) = \frac{-1}{1+y^2},$$

puis:

$$\int_{[0,1]}\int_{[0,1]} f(x,y)\,\lambda(dx)\,\lambda(dy) = -\frac{\pi}{4}.$$

De même (ou par symétrie) on trouve

$$\int_{[0,1]}\int_{[0,1]} f(x,y)\,\lambda(dy)\,\lambda(dx) = \frac{\pi}{4}.$$

Ces résultats “contradictoires” avec les conclusions du théorème de Fubini montrent que la fonction f n'est pas intégrable sur $[0,1]^2$.

Solution de E. VII.5.1 Par définition de la densité f, on a

$$\mathbb{P}(X > x) = \int_{]x,+\infty[} f(y)\,\lambda(dy).$$

Ainsi, en utilisant le théorème de Tonelli, on a

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}_+} r\,x^{r-1}\,\mathbb{P}(X>x)\,\lambda(dx) &= \int_{\mathbb{R}_+} r\,x^{r-1}\left(\int_{]x,+\infty[} f(y)\,\lambda(dy)\right)\lambda(dx)\\
&= \int_{\mathbb{R}_+} f(y)\left(\int_{[0,y[} r\,x^{r-1}\,\lambda(dx)\right)\lambda(dy)\\
&= \int_{\mathbb{R}_+} y^r\,f(y)\,\lambda(dy).
\end{aligned}$$

Lorsque $\mathbb{E}[X^r] < +\infty$, on a $\mathbb{E}[X^r] = \int_{\mathbb{R}_+} y^r\,f(y)\,\lambda(dy)$.Le résultat suit.

Solution de E. VII.6.1 Grâce au théorème fondamental de l'analyse, on a pour $x \neq 0$,

$$\int_{]a,b[} e^{-xy}\,\lambda(dy) = \frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}.$$

Ainsi
$$\int_{\mathbb{R}_+} \frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\,\lambda(dx) = \int_{]0,+\infty[}\int_{]a,b[} e^{-xy}\,\lambda(dy)\,\lambda(dx).$$
En utilisant le théorème de Fubini-Tonelli, on trouve
$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}_+} \frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\,\lambda(dx) &= \int_{]a,b[}\int_{]0,+\infty[} e^{-xy}\,\lambda(dx)\,\lambda(dy)\\ &= \int_{]a,b[}\frac{1}{y}\,\lambda(dy)\\ &= \int_a^b \frac{1}{y}\,dy = \ln\left(\frac{b}{a}\right).\end{aligned}$$

Solution de E. VII.6.2 L'intégrale J est une intégrale de Riemann convergente.

On va intégrer d'abord sur $[0, L]$ puis faire tendre L vers $+\infty$.

On a :
$$\int_{]a,b[} \sin(xy)\,\lambda(dy) = \int_a^b \sin(xy)\,dy = \frac{\cos(ax)-\cos(bx)}{x}.$$
Ainsi :
$$\int_0^L \frac{\cos(ax)-\cos(bx)}{x}\,dx = \int_{]0,L[}\int_{]a,b[} \sin(xy)\,\lambda(dy)\,\lambda(dx).$$
On note que la fonction qu'on intègre est mesurable et que
$$\int_{]0,L[}\int_{]a,b[} |\sin(xy)|\,\lambda(dy)\,\lambda(dx) \le L(b-a) < +\infty.$$
Ainsi, en appliquant les théorèmes de Fubini (Fubini-Tonelli pour prouver que la fonction est dans $L^1(]0,L[\times]a,b[,\lambda\otimes\lambda)$, puis Fubini-Lebesgue pour intervertir les intégrales sans la valeur absolue), on trouve :
$$\int_0^L \frac{\cos(ax)-\cos(bx)}{x}\,dx = \int_{]a,b[}\int_{]0,L[} \sin(xy)\,\lambda(dx)\,\lambda(dy) = \int_{]a,b[}\frac{1-\cos(Ly)}{y}\,\lambda(dy).$$
On a donc :
$$\int_0^L \frac{\cos(ax)-\cos(bx)}{x}\,dx = \int_{]a,b[}\frac{1}{y}\,\lambda(dy) - \int_{]a,b[}\frac{\cos(Ly)}{y}\,\lambda(dy).$$
Grâce au lemme de Riemann-Lebesgue (voir Exercice VII.3), on trouve, en faisant tendre L vers $+\infty$
$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos(ax)-\cos(bx)}{x}\,dx = \ln\left(\frac{b}{a}\right).$$

Solution de E. VII.7.1 La fonction f est mesurable sur D_a car continue. En outre :
$$\int_{]0,+\infty[}\int_{]0,a[}\left|\frac{\sin(u)}{u}\,e^{-v}\right|\,\lambda(du)\,\lambda(dv) \le a\int_{]0,+\infty[} e^{-v}\,\lambda(dv) = a < +\infty$$

Donc f est intégrable sur D_a d'après le théorème de Fubini-Tonelli.

Solution de E. VII.7.2 L'application T est définie de D_a vers D_a. Elle est bijective, en effet son inverse est donnée par:

$$T^{-1} : (u, v) \in D_a \mapsto (u, v/u) \in D_a.$$

En outre, T est indéfiniment dérivable et le jacobien de T est $\det J = x \neq 0$, donc T est un C^∞ difféomorphisme de D_a sur D_a (par le théorème d'inversion locale).

Solution de E. VII.7.3 Le théorème de changement de variable donne :

$$\int_{D_a} f(u,v)\, \lambda \otimes \lambda(du, dv) = \int_{D_a} x f(x, xy)\, \lambda \otimes \lambda(dx, dy) = \int_{D_a} g(x,y)\, \lambda \otimes \lambda(dx, dy),$$

ce qui prouve que g est intégrable sur D_a (écrire le changement de variable précédent en valeur absolue pour être complètement rigoureux).

Solution de E. VII.7.4 On a:

$$\int_0^a \frac{\sin(x)}{x}\, dx = \int_{D_a} f = \int_{D_a} g = \int_0^{+\infty} \int_0^a e^{-xy} \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\, dx\, dy.$$

Ainsi

$$\int_0^a \frac{\sin(x)}{x}\, dx = \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(a)\, e^{-ay} - y \sin(a)\, e^{-ay}}{1 + y^2}\, dy,$$

d'où

$$\int_0^a \frac{\sin(x)}{x}\, dx = \frac{\pi}{2} - \cos(a) \int_0^{+\infty} \frac{e^{-ay}}{1+y^2}\, dy - \sin(a) \int_0^{+\infty} \frac{y\, e^{-ay}}{1+y^2}\, dy.$$

Solution de E. VII.7.5 Le théorème de convergence dominée (dont on vérifiera les hypothèses) assure que

$$\lim_{a \to +\infty} \int_{\mathbb{R}_+} \frac{e^{-ay}}{1+y^2}\, \lambda(dy) = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{a \to +\infty} \int_{\mathbb{R}_+} \frac{y e^{-ay}}{1+y^2}\, \lambda(dy) = 0.$$

On trouve donc

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x}\, dx = \frac{\pi}{2}.$$

Solution de E. VII.8.1 Dire que la loi jointe de X et Y a pour densité f[1] signifie que pour tout borélien B de $\mathbb{R}^2$,

$$\mathbb{P}((X,Y) \in B) = P_{(X,Y)}(B) = \int_B f(x,y)\, \lambda^{(2)}(dx, dy),$$

[1] de manière équivalente on pourra dire, dans le vocabulaire de la théorie de la mesure, que $P_{(X,Y)}$ est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue (de $\mathbb{R}^2$).

où $\lambda^{(2)}$ désigne la mesure de Lebesgue de $\mathbb{R}^2$.

La loi de $U = Y/X$ est la mesure image de $P_{(X,Y)}$ par l'application $(x,y) \to y/x$. Ainsi, pour tout $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$,

$$\mathbb{P}(U \in B) = \int_{\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}} \mathbb{1}_B \left(\frac{y}{x}\right) f(x,y)\, \lambda^{(2)}(dx,dy).$$

On peut remarquer que cette dernière expression s'écrit aussi

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(U \in B) &= \int_{\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}} H\left(\frac{y}{x}, x\right)\ \lambda^{(2)}(dx,dy) \\ &= \int_{\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}} H \circ T(x,y)\, \lambda^{(2)}(dx,dy),\end{aligned}$$

où pour tous $a, b \in \mathbb{R}_+^*$, $H(a,b) = \mathbb{1}_B(a) f(b, ab)$ et[2]

$$\begin{aligned} T : \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \times \mathbb{R}^* \\ (x,y) &\mapsto (\frac{y}{x}, x). \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout difféomorphisme $\varphi : D \subseteq \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$, on obtient par la formule de changement de variable:

$$\mathbb{P}(U \in B) = \int_D |J\varphi(u,v)| \times H \circ T \circ \varphi(u,v)\, \lambda^{(2)}(du,dv).$$

Notons maintenant que T est C^1 et bijectif, d'inverse $T^{-1}(u,v) = (v, uv)$ qui est également C^1. Ainsi T^{-1} est un difféomorphisme et on peut choisir $\varphi = T^{-1}$, avec $D = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$. De plus, le jacobien de φ est $J\varphi(u,v) = -v$.

D'où

$$\int_{\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}} \mathbb{1}_B \left(\frac{y}{x}\right) f(x,y)\, \lambda^{(2)}(dx,dy) = \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*} \mathbb{1}_B(u)\ f(v,uv)\ |v|\ \lambda^{(2)}(du,dv).$$

Grâce au théorème de Fubini, on en déduit que la loi de U admet donc la densité $u \mapsto \int_{\mathbb{R}} f(v,uv)\ |v|\ \lambda(dv)$.

Solution de E. VII.9.1 La formule d'intégration par parties n'est pas valable pour toutes les fonctions dérivables presque partout ou même partout, par exemple $u = x^2 \sin(1/x^3)$ (prolongée par 0 en 0) et $v' = 1$ sur $[0,1]$.

Solution de E. VII.9.2

(a) Puisque f est localement intégrable, d'après le Théorème du cours, F est dérivable presque partout et $F' = f$ presque partout.

[2] notez qu'on aurait aussi pu choisir d'écrire $\mathbb{P}(U \in B) = \int_{\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}} H\left(\frac{y}{x}, y\right)\ \lambda^{(2)}(dx,dy)$, ce qui amène à choisir plutôt $H(a,b) = \mathbb{1}_B(a) f(\frac{b}{a}, b)$, puis $T(x,y) = (\frac{y}{x}, y)$ et enfin le changement de variable $\varphi(u,v) = T^{-1}(u,v) = (\frac{v}{u}, v)$. *In fine*, on pourra vérifier que le résultat est le même.

(b) La fonction F n'est pas nécessairement dérivable partout sur $]0,1[$.
Par exemple, si $f = 1_{[0,1/2]}$ alors F n'est pas dérivable en $1/2$.

Solution de E. VII.9.3

(a) Pour montrer que, pour tout couple (u,t) de $[0,1]^2$, on a

$$1_{[0,t]}(u).1_{[0,x]}(t) = 1_{[0,x]}(u)\left(1_{[0,x]}(t) - 1_{[0,u[}(t)\right),$$

il suffit de montrer que les deux fonctions valent 1 sur un même triangle (à dessiner) et 0 en dehors.

(b) Utilisons le théorème de Fubini-Tonelli :

$$\int_{[0,1]}\int_{[0,1]} |f(t)g(u)|\ \lambda(dt)\ \lambda(du) = \|f\|_{L^1}.\|g\|_{L^1} < +\infty$$

donc $(t,u) \mapsto |f(t)g(u)|$ est intégrable sur $[0,1]^2$.

(c) Soit x dans $[0,1]$:

$$\int_{[0,x]} G(t)f(t)\ \lambda(dt) = \int_{[0,x]}\int_{[0,t]} g(u)\ \lambda(du) f(t)\ \lambda(dt).$$

Donc

$$\int_{[0,x]} G(t)f(t)\ \lambda(dt) = \int_{[0,1]}\int_{[0,1]} g(u)\ 1_{[0,t]}(u)\ \lambda(du)\ f(t)\ 1_{[0,x]}(t)\ \lambda(dt).$$

Comme, la fonction $(t,u) \mapsto |1_{[0,t]}(u).1_{[0,x]}(t)f(t)g(u)|$ est dominée par la fonction intégrable $(t,u) \mapsto |f(t)g(u)|$, on en déduit qu'elle est intégrable.
Le théorème de Fubini permet donc d'écrire :

$$\int_{[0,x]} G(t)f(t)\ \lambda(dt) = \int_{[0,1]}\int_{[0,1]} f(t)g(u)\ 1_{[0,t]}(u)\ 1_{[0,x]}(t)\ \lambda(du)\ \lambda(dt).$$

Grâce à 2a), ceci implique

$$\int_{[0,x]} G(t)f(t)\ \lambda(dt) = \int_{[0,1]}\int_{[0,1]} f(t)g(u)\ 1_{[0,x]}(u)\left(1_{[0,x]}(t) - 1_{[0,u]}(t)\right)\ \lambda(du)\ \lambda(dt)$$

et donc

$$\begin{aligned}\int_{[0,x]} G(t)f(t)\ \lambda(dt) = &\int_{[0,x]}\int_{[0,x]} f(t)g(u)\ \lambda(du)\ \lambda(dt)\\ &- \int_{[0,1]}\int_{[0,1]} 1_{[0,x]}(u)g(u)1_{[0,u]}(t)f(t)\ \lambda(du)\ \lambda(dt).\end{aligned}$$

Ceci entraîne, en appliquant à nouveau le théorème de Fubini,

$$\int_{[0,x]} G(t)f(t)\ \lambda(dt) = G(x)F(x) - \int_{[0,x]} g(u)F(u)\ \lambda(du).$$

(d) Soit $a < b$. comme $[a, b] = [0, b] \setminus [0, a]$, si on soustrait la relation précédente pour $x = a$ à celle obtenue en $x = b$, on obtient

$$\int_{[a,b]} G(t)f(t)\ \lambda(dt) = [GF]_a^b - \int_{[a,b]} g(t)F(t)\ \lambda(dt).$$