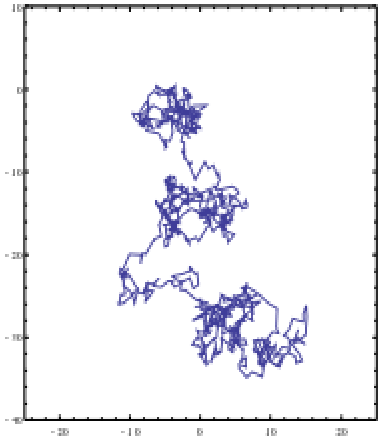
WIKIPÉDIA

Mouvement brownien

Le **mouvement brownien**, ou processus de Wiener, est une description mathématique du mouvement aléatoire d'une « grosse » particule immergée dans un fluide et qui n'est soumise à aucune autre interaction que des chocs avec les « petites » molécules du fluide environnant. Il en résulte un mouvement très irrégulier de la grosse particule, qui a été décrit pour la première fois en 1827 par le botaniste Robert Brown en observant des mouvements de particules à l'intérieur de grains de pollen de *Clarkia pulchella* (une espèce de fleur sauvage nord-américaine), puis de diverses autres plantes[1].

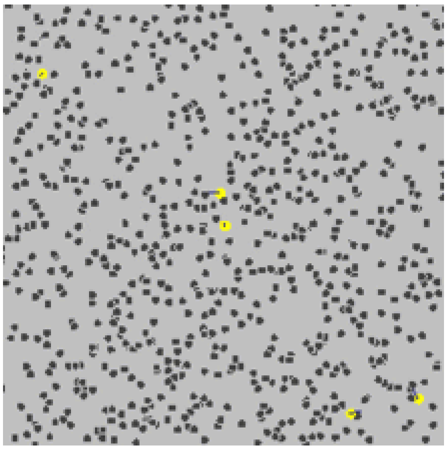


Mouvement brownien d'une particule.

La description physique la plus élémentaire du phénomène est la suivante :

- entre deux chocs, la grosse particule se déplace en ligne droite avec une vitesse constante ;
- la grosse particule est accélérée lorsqu'elle rencontre une molécule de fluide ou une paroi.

Ce mouvement permet de décrire avec succès le comportement thermodynamique des gaz (théorie cinétique des gaz), ainsi que le phénomène de diffusion. Il est aussi très utilisé dans des modèles de mathématiques financières.



Simulation de mouvement brownien pour cinq particules (jaunes) qui entrent en collision avec un lot de 800 particules. Les cinq chemins bleus représentent leur trajet aléatoire dans le fluide.

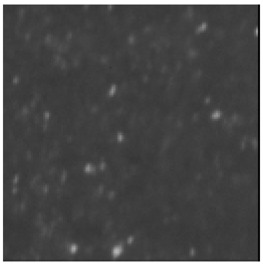
Sommaire

Aspects historiques

Le philosophe et poète latin Lucrèce (60 av. J.-C.) donne une remarquable description du mouvement des particules selon les principes d'Épicure dans son œuvre *De la nature des choses* :

> « [2,80] Si tu penses que les atomes, principes des choses, peuvent trouver le repos et dans ce repos engendrer toujours de nouveaux mouvements, tu te trompes et t'égares loin de la vérité. Puisqu'ils errent dans le vide, il faut qu'ils soient tous emportés, soit par leur pesanteur propre, soit par le choc d'un autre corps. Car s'il leur arrive dans leur agitation de se rencontrer avec choc, aussitôt ils rebondissent en sens opposés : ce qui n'a rien d'étonnant puisqu'ils sont des corps très durs, pesants, denses, et que rien derrière eux ne les arrête. Et pour mieux comprendre comment s'agitent sans fin [2,90] tous les éléments de la matière, souviens-toi qu'il n'y a dans l'univers entier aucun fond ni aucun lieu où puissent s'arrêter les atomes, puisque l'espace sans limite ni mesure est infini en tous sens, ainsi que je l'ai montré abondamment avec la plus sûre doctrine. Puisqu'il en est ainsi, il ne peut y avoir aucun repos pour les atomes à travers le vide immense ; au contraire agités d'un mouvement continuel et divers, ils se heurtent, puis rebondissent, les uns à de grandes distances, les autres faiblement, et s'éloignent peu. »

À l'été 1827, le naturaliste écossais Robert Brown aperçut dans le fluide situé à l'intérieur des grains de pollen de la *Clarkia pulchella*, de très petites particules agitées de mouvements apparemment chaotiques et non pas les grains de pollen eux-mêmes comme souvent mentionné. Brown n'est pas exactement le premier à avoir fait cette observation. Il signale lui-même que plusieurs auteurs avaient suggéré l'existence d'un tel mouvement (en lien avec les théories vitalistes de l'époque). Parmi ceux-ci, certains l'avaient effectivement décrit. On peut mentionner en particulier l'abbé John Turberville Needham (1713-1781), célèbre à son époque pour sa grande maîtrise du microscope, qui attribua ce mouvement à une activité vitale.

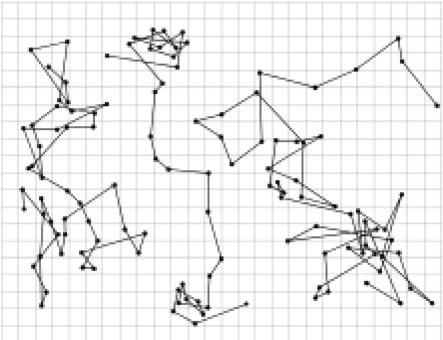


Mouvement de sphères (20 nm de diamètre) de latex fluorescentes dans de l'eau.

La réalité des observations de Brown a été discutée tout au long du xx^{e} siècle. Compte tenu de la médiocre qualité de l'optique dont il disposait, certains ont contesté qu'il ait pu voir véritablement le mouvement brownien, qui intéresse des particules de quelques micromètres au plus. Les expériences ont été refaites par l'Anglais Brian Ford au début des années 1990, avec le matériel employé par Brown et dans les conditions les plus semblables possibles[2]. Le mouvement a bien été observé dans ces conditions, ce qui valide les observations de Brown (et justifie le nom de Mouvement Brownien).

En 1901, Louis Bachelier propose un premier modèle mathématique du mouvement brownien et l'applique à la finance.

En 1905, Albert Einstein donne une description quantitative du mouvement brownien et indique notamment que des mesures faites sur le mouvement permettent d'en déduire leur dimension moléculaire. Jean Perrin réalise ce programme et publie en 1909 une valeur du nombre d'Avogadro, ce qui lui vaut un prix Nobel en 1926. Il décrit également l'extrême irrégularité des trajectoires qui n'ont de tangente en aucun point. On peut trouver un *célèbre* dessin de Perrin d'observations de particules.



Reproduction d'un dessin de Perrin dans *Mouvement brownien et réalité moléculaire*. Sont représentées ici trois trajectoires de particules de mastic d'environ 1 µm de diamètre. Les positions successives des particules, pointées toutes les 30 secondes, sont reliées par des segments.

> « C'est un cas où il est vraiment naturel de penser à ces fonctions continues sans dérivées que les mathématiciens ont imaginées, et que l'on regardait à tort comme de simples curiosités mathématiques, puisque l'expérience peut les suggérer. »

— Jean Perrin

Dans cette même période, le physicien français Paul Langevin développe une théorie du mouvement brownien suivant sa propre approche (1908).

Norbert Wiener donne une définition mathématique en 1923 en construisant une mesure de probabilité sur l'espace des fonctions continues réelles. Il étudie, de manière mathématique, la continuité et non-dérivabilité des trajectoires du mouvement brownien. Il définit également l'intégrale de Wiener (l'intégrale par rapport au mouvement brownien).

En 1933, Paul Lévy démontre que le mouvement brownien est un cas particulier de martingale continue, notion inventée par Jean Ville en 1933, celui où le carré de ce mouvement soustrait de sa valeur temps reste une martingale. Il démontre également que ce cas particulier est le seul parmi les martingales à avoir ces deux propriétés. Ce faisant, il donne la définition du mouvement brownien, c'est-à-dire ses conditions nécessaires et suffisantes. En 1948, il publie le premier grand ouvrage sur le mouvement brownien *Processus stochastiques et mouvement brownien*. Il apporte alors de nombreux résultats.

Depuis, des études fines sur le mouvement brownien ont été réalisées par de nombreux auteurs. Citons Volker Strassen ainsi que Kiyoshi Itō, lequel développe un calcul différentiel spécifique au mouvement brownien : le calcul stochastique.

Plus récemment, David Baker et Marc Yor ont démontré, à partir du processus Carr-Ewald-Xiao décrit en 2008, que les descriptions de processus aléatoires temporels et continus, en particulier les flux financiers, par le mouvement brownien procédaient bien souvent d'une naïveté basée sur une définition empirique du mouvement brownien[3], les aléas ne pouvant pas toujours être définis de manières indépendantes c'est-à-dire que le drap brownien à *n* dimensions utilisé l'est abusivement dans un phénomène qui ne possède pas ces *n* dimensions.

Approche mathématique

Notion de processus stochastique

La difficulté de modélisation du mouvement brownien réside dans le fait que ce mouvement est aléatoire et que statistiquement, le déplacement est nul : il n'y a pas de mouvement d'ensemble, contrairement à un vent ou un courant. Plus précisément :

- à un instant donné, la somme vectorielle des vitesses de toutes les particules s'annule (il n'y a pas de mouvement d'ensemble) ;
- si l'on suit une particule donnée au cours du temps, le barycentre de sa trajectoire est son point de départ, elle « virevolte » autour du même point.

Il est difficile dans ces conditions de caractériser le mouvement. La solution fut trouvée par Louis Bachelier, et présentée dans sa thèse soutenue le 29 mars 1900. Il démontra que ce qui caractérise le mouvement, ce n'est pas la moyenne arithmétique des positions <*X*> mais la moyenne quadratique $\sqrt{\langle X^2 \rangle}$: si *x*(*t*) est la distance de la particule à sa position de départ à l'instant *t*, alors :

$$\langle X^2(t) \rangle = \frac{1}{t} \int_0^t x^2(\tau)\, d\tau$$

On démontre que le déplacement quadratique moyen est *proportionnel au temps*[4] :

$$\boxed{\langle X^2(t) \rangle = 2\, d\, D\, t}$$

où *d* est la dimension du mouvement (linéaire, plan, spatial), *D* le coefficient de diffusion, et *t* le temps écoulé.

Définition

Un mouvement brownien est une martingale telle que

1. cette martingale est continue dans le temps
2. son carré soustrait de son temps est une martingale

(M_t) est un mouvement brownien si et seulement si (M_t) est une martingale continue telle que $(M_t^2 - t)$ est une martingale.

Descriptions dimensionnelles

Définition uni-dimensionnelle

Le mouvement brownien unidimensionnel $(B_t)_{t\geq 0}$ est un processus stochastique dépendant du temps t et vérifiant :

1. (accroissements indépendants) Quels que soient les temps t et s tels que $t > s$, l'accroissement $B_t - B_s$ est indépendant du processus $(B_u)_{0\leq u\leq s}$ avant le temps s.
2. (accroissements stationnaires et gaussiens) Quels que soient les temps t et s tels que $t > s$, l'accroissement $B_t - B_s$ est une variable aléatoire normale de moyenne nulle et de variance $t-s$.

3. $(B_t)_{t\geq 0}$ est presque sûrement continu, c'est-à-dire pour presque toute réalisation, la fonction $t \mapsto B_t(\omega)$ est continue.
4. Il est souvent supposé que $B_0 = 0$. On dit alors que le mouvement brownien est **standard**.

Définition équivalente

Le mouvement brownien unidimensionnel $(B_t)_{t\geq 0}$ est un processus stochastique dépendant du temps t et vérifiant :

1. Le processus $(B_t)_{t\geq 0}$ est un processus gaussien, c'est-à-dire pour tous temps $t_1 \leq t_2 \leq \ldots \leq t_n$, le vecteur $(B_{t_1}, B_{t_2}, \ldots, B_{t_n})$ est un vecteur gaussien.
2. $(B_t)_{t\geq 0}$ est presque sûrement continu. C'est-à-dire pour toute réalisation, la fonction $t \mapsto B_t(\omega)$ est continue.
3. pour tous s et t, la moyenne est $\mathbb{E}[B_t] = 0$ et la covariance est $\mathbb{E}[B_s B_t] = \min(s, t)$.

Définition multi-dimensionnelle

Le mouvement brownien d-dimensionnel est un processus $(B_t)_{t\geq 0} := (B_t^1, B_t^2, \ldots, B_t^d)_{t\geq 0}$ où les processus $B^1, B^2, \ldots, B^d$ sont des mouvements browniens indépendants.

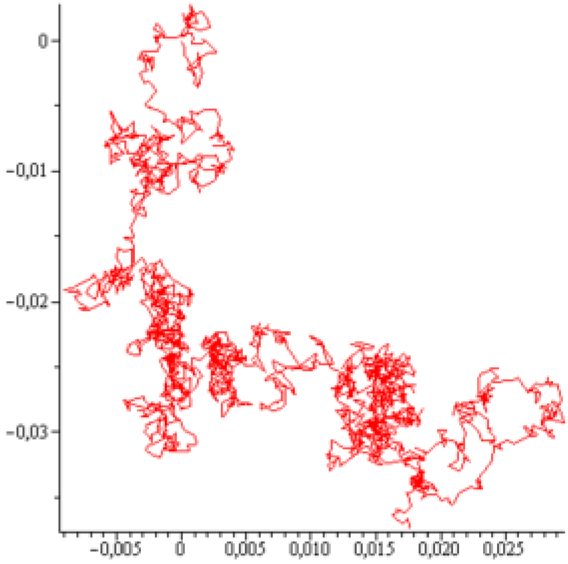
Autrement dit le mouvement brownien d-dimensionnel est à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ et ses projections sur les espaces $\mathbb{R}, \mathbb{R}^2, \ldots, \mathbb{R}^{d-1}$ sont respectivement des mouvements browniens uni-, bi-, ..., d-1-dimensionnels.

Définition de la mesure de Wiener

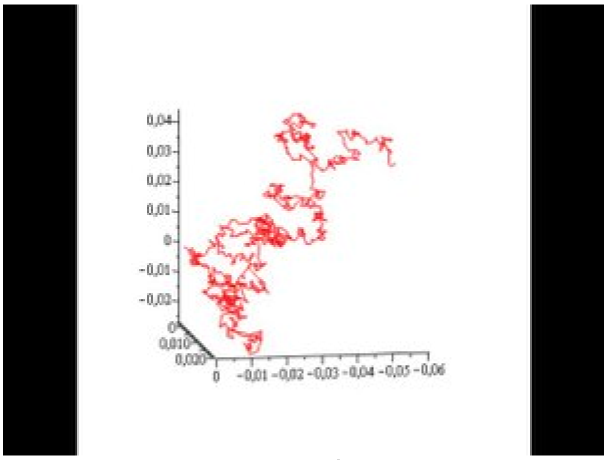
Considérons $\mathcal{C}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ et $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Le mouvement brownien est l'application

$$\begin{array}{rccl} B: & \Omega & \longrightarrow & \mathcal{C}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}) \\ & \omega & \mapsto & (t \mapsto B_t(\omega)) \end{array}.$$

La mesure de Wiener (ou loi du mouvement brownien), souvent notée $W(\mathrm{d}\omega)$, est la mesure-image de $\mathbb{P}(\mathrm{d}\omega)$ par cette application B.



Approximation d'un mouvement brownien bidimensionnel par une marche aléatoire de 3 000 pas dont chaque pas est gaussien en abscisse et en ordonnée.



Lire le média

Approximation d'un mouvement brownien tridimensionnel par une marche aléatoire de 1 000 pas dont chaque pas est gaussien en abscisse, en ordonnée et en cote.

Autrement dit, c'est la mesure de probabilité W sur $\mathcal{C}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ telle que pour tout $A \subset \mathcal{C}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$,

$$W(A) = \mathbb{P}((B_t)_{t\geq 0} \in A).$$

Remarques

- Le mouvement brownien est un processus de Lévy à accroissements gaussiens.
- Cette définition permet de démontrer des propriétés du mouvement brownien, par exemple sa continuité (presque sûre), le fait que presque sûrement, la trajectoire n'est différentiable nulle part, et de nombreuses autres propriétés.

- On pourrait également définir le mouvement brownien par rapport à sa variation quadratique moyenne. Cette définition, classiquement appelée théorème de Lévy, donne la caractérisation suivante: un processus stochastique à trajectoires continues dont la variation quadratique est *t* est un mouvement brownien. Ceci se traduit mathématiquement par le fait que pour une filtration donnée, $(B_t)_{t\geq 0}$ et $(B_t^2 - t)_{t\geq 0}$ sont des martingales.

Propriétés

- Les trajectoires du mouvement brownien sont presque-sûrement nulle part dérivables, c'est-à-dire que pour presque tout $\omega \in \Omega$, la fonction $t \mapsto B_t(\omega)$ est une fonction continue nulle part dérivable.
- La covariance est donnée par $\mathbb{E}[B_s B_t] = \min(s,t)$ pour tous réels *s* et *t*.
- Le mouvement brownien a la propriété de Markov forte : pour tout temps d'arrêt *T*, conditionnellement à $[T < \infty]$, le processus $(B_t^T)_{t\geq 0} := (B_{T+t} - B_T)_{t\geq 0}$ est un mouvement brownien indépendant du processus $(B_s)_{0\leq s<T}$.
- Sa transformée de Fourier ou fonction caractéristique est donnée par $\mathbb{E}\left[e^{iuB_t}\right] = e^{-\frac{tu^2}{2}}$. On retrouve le fait que le mouvement brownien soit un processus de Lévy sans drift, sans sauts et de coefficient quadratique 1/2.
- Le mouvement brownien est homogène en temps : pour tout *s* > 0, $(B_{t+s} - B_s)_{t\geq 0}$ est un mouvement brownien indépendant de $(B_u)_{0\leq u\leq s}$.
- Le processus -*B* est un mouvement brownien.
- **Propriété de stabilité** - Pour tout *c* > 0, le processus $\left(cB_{\frac{t}{c^2}}\right)_{t\geq 0}$ est un mouvement brownien. On dit que le mouvement brownien est stable d'indice 2.
- **Inversion du temps** - Le processus $\left(tB_{\frac{1}{t}}\right)_{t>0}$ qui s'annule en *t*=0 est un mouvement brownien.
- **Récurrence** Le mouvement brownien *d*-dimensionnel est récurrent si et seulement si *d*=1 ou *d*=2. C'est-à-dire

  si $d \in \{1,2\}$, l'ensemble $\{t \geq 0, ||B_t - x|| \leq r\}$ est non borné pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ et tout $r \gneq 0$,
  si $d \geq 3$, $\lim\limits_{t\to\infty} \|B_t\| = +\infty$ presque sûrement.

- **Principe de réflexion**

$$\mathbb{P}[\sup_{0\leq s\leq t} B_s \geq a] = 2\mathbb{P}[B_t \geq a] = \mathbb{P}[|B_t| \geq a].$$

Construction mathématique

Donnons d'autres manières de construire le mouvement brownien.

Au moyen du théorème de consistance de Kolmogorov

Soit $(f_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ une famille de fonctions à valeurs réelles appartenant à $L^2(\mathbb{R}_+)$. Posons alors :

$$\forall (u,v) \in \mathbb{R}_+,\, s(u,v) = \langle f_u, f_v \rangle_{L^2(\mathbb{R}_+)} = \int_{\mathbb{R}_+} f_u(x) f_v(x) \mathrm{d}x$$

Alors, la fonction satisfait la propriété suivante :

$\forall k \in \mathbb{N}^*$ et tous $t_1, \ldots, t_k \in \mathbb{R}_+$, la matrice $\left(s(t_i,t_j)\right)_{1\leq i,j\leq k}$ est symétrique et semi-définie positive.

Au moyen du théorème de consistance de Kolmogorov, on peut construire un processus gaussien $\{Y_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ dont la fonction moyenne *m* est arbitraire et dont la fonction de covariance est *s* définie au-dessus.

Lorsque $(f_t)_{t\in\mathbb{R}_+} = \left(\sqrt{c}\,\mathbb{1}_{[0,t]}\right)_{t\in\mathbb{R}_+}$ où $c > 0$ est une constante ne dépendant pas de *t* et où $\mathbb{1}_{[0,t]}$ est la fonction indicatrice sur [0,*t*]. Il résulte alors de l'expression de *s* que pour tout $(u,v) \in \mathbb{R}^2{}_+$:

$$s(u,v) = c\int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{[0,u]}(s)\mathbb{1}_{[0,v]}(s)\mathrm{d}s = c\,\min(u,v)$$

Dans ce cas-là, la matrice $(s(t_i,t_j))_{1\le i,j\le k}$ est symétrique et définie positive pour tout $k\in\mathbb{N}^*$ et $t_1,\dots,t_k$ 2 à 2 distincts.

On dit qu'un processus gaussien à valeur réelle indexé par $\mathbb{R}_+$ est un **mouvement brownien** lorsque le processus est centré (i.e. l'application $t\mapsto \mathbb{E}X_t$ est nulle identiquement) et que sa fonction de covariance *s* est donnée ci-dessus. D'habitude, un mouvement brownien est noté par $\{B_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$. Signalons que $c = \mathrm{Var}(B_1)$. Lorsque *c* = 1, le mouvement brownien est dit **standard**.

Au moyen d'une marche aléatoire

Le théorème de Donsker (1951) montre qu'une marche aléatoire convenablement renormalisée converge en loi vers le mouvement brownien.

$$\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{n}}\left(\sum_{k=1}^{[nt]} U_k + (nt-[nt])U_{[nt]+1}\right)\right)_{0\le t\le 1} \underset{n\to\infty}{\Longrightarrow} (B_t)_{0\le t\le 1}$$

où [.] est la partie entière et les variables aléatoires (U_n, $n \ge 1$) sont iid, centrées, de carré intégrable et de variance σ^2. La convergence $\underset{n\to\infty}{\Longrightarrow}$ est la convergence en loi dans l'espace $\boldsymbol{C}$ ([0,1]) des fonctions continues sur [0,1] muni de sa tribu borélienne.

Cette convergence donne une définition du mouvement brownien comme l'unique limite (en loi) de marches aléatoires renormalisées.

Au moyen d'une série de Fourier

Donnons une construction du mouvement brownien fondée sur les séries de Fourier.

Soient deux suites indépendantes $(N_k, k\in\mathbb{N})$ et $(N'_k, k\in\mathbb{N})$ de variables aléatoires indépendantes de loi normale $\mathcal{N}(0,1)$. Le processus $(B_t)_{t\ge 0}$ défini par la série

$$B_t := tN_0 + \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\sqrt{2}}{2\pi k}\left(N_k\cos(2\pi kt-1) + N'_k\sin(2\pi kt)\right)$$

est un mouvement brownien.

Excursion brownienne

Considérons $\mathcal{B} := \{t\ge 0, B_t = 0\}$ l'ensemble des zéros du mouvement brownien unidimensionnel (ensemble des temps où le mouvement brownien s'annule). Le complémentaire de $\mathcal{B}$ est une suite d'intervalles ouverts que l'on note $\bigcup_{n\ge 1}\mathcal{B}_n$. Chaque intervalle a une longueur notée $|\mathcal{B}_n|$.

Pour chaque $n \ge 1$, on définit les processus $e_n := (e_n(t), 0\le t\le |\mathcal{B}_n|)$ et $e_n^{norm} := (e_n^{norm}(t), 0\le t\le 1)$ par

$$e_n(t) := B_{t+\inf\mathcal{B}_n} \text{ pour tout } 0\le t\le |\mathcal{B}_n|,$$

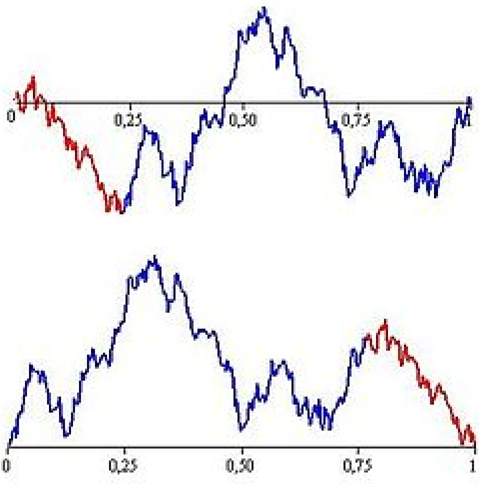
$$e_n^{norm}(t) := \frac{B_{t|\mathcal{B}_n|+\inf \mathcal{B}_n}}{\sqrt{|\mathcal{B}_n|}} \text{ pour tout } 0 \leq t \leq 1.$$

e_n est appelée l'**excursion brownienne**, e_n^{norm} est l'**excursion brownienne normalisée** (voir le livre de Itô et McKean[5]).

Les excursions sont soit "au-dessus" de 0 (s'il existe un *t* tel que $e_n(t) > 0$) soit "au-dessous" de 0 (s'il existe un *t* tel que $e_n(t) < 0$).

Propriétés

- Les excursions $(e_n, n \geq 1)$ sont indépendantes et de même loi. De même pour $(e_n^{norm}, n \geq 1)$. e_1^{norm} est markovien avec :



en haut : simulation d'un pont brownien standard.
en bas : simulation d'une excursion brownienne normalisée.

$$\mathbb{P}_0[e_1^{norm}(t) \in \mathrm{d}x |\operatorname{sgn}(e_1) > 0] = \frac{2x^2}{\sqrt{2\pi t^2(1-t)^2}} e^{\frac{-x^2}{2t(1-t)}} \,\mathrm{d}x.$$

- Les signes des excursions sont indépendantes et de loi $\mathbb{P}[\operatorname{sgn}(e_1) > 0] = \mathbb{P}[\operatorname{sgn}(e_1) < 0] = \frac{1}{2}$.
- Il existe des liens entre l'excursion brownienne et le pont brownien.

Estimation du nombre d'Avogadro

La formule précédente permet de calculer le coefficient de diffusion d'un couple particule-fluide par la loi de Stokes-Einstein :

$$D = \frac{k_B T}{6\pi\eta r}$$

où *T* est la température, η la viscosité dynamique du fluide, *r* le rayon de la particule, k_B la constante de Boltzmann.

Considérations énergétiques

La quantité d'énergie mise en œuvre par le mouvement brownien est négligeable à l'échelle macroscopique. On ne peut pas en tirer de l'énergie pour réaliser un mouvement perpétuel de seconde espèce, et violer ainsi le deuxième principe de la thermodynamique.

Toutefois, il a été démontré que certains processus biologiques à l'échelle cellulaire peuvent orienter le mouvement brownien afin d'en soutirer de l'énergie[6]. Cette transformation ne contrevient pas au deuxième principe de la thermodynamique tant et aussi longtemps qu'un échange de rayonnement peut maintenir la température du milieu (système dissipatif) donc la vitesse moyenne des particules. Il faut aussi considérer que la dissipation de ce mouvement brownien sous forme d'énergie utilisable engendre une croissance de l'entropie globale du système (ou de l'univers).

Quelques modélisations dans un espace euclidien

Équation de Langevin (1908)

Dans l'approche de Langevin[7], la grosse particule brownienne de masse *m* animée à l'instant *t* d'une vitesse $v(t)$ est soumise à deux forces :

- une force de frottement fluide du type $f = -k\,v$, où *k* est une constante positive ;
- un bruit blanc gaussien $\eta(t)$

Bruit blanc gaussien :

Un bruit blanc gaussien $\eta(t)$ est un processus stochastique de moyenne nulle :

$$\langle\, \eta(t)\, \rangle \;=\; 0$$

et totalement décorrélé dans le temps ; sa fonction de corrélation à deux points vaut en effet :

$$\langle\, \eta(t_1)\; \eta(t_2)\, \rangle \;=\; \Gamma\; \delta(t_1 - t_2)$$

Dans cette formule, Γ est une constante positive, et $\delta(t)$ est la distribution de Dirac.

Dans ces deux formules, la moyenne est prise sur *toutes les réalisations possibles du bruit blanc gaussien*. On peut formaliser ceci en introduisant une intégrale fonctionnelle, encore appelée intégrale de chemin d'après Feynman, définie pour la mesure gaussienne dite « mesure de Wiener »[8]. Ainsi, on écrit :

$$\langle\, \eta(t_1)\; \eta(t_2)\, \rangle \;=\; \int [\, \mathcal{D}\eta(t)\,]\;\; \eta(t_1)\; \eta(t_2)\; \mathrm{e}^{-\frac{1}{2\Gamma}\int_{t_1}^{t_2} \dot{\eta}^2(\tau) d\tau}$$

où $\dot{\eta}$ est la dérivée de η par rapport au temps *t*.

Le principe fondamental de la dynamique de Newton conduit à l'équation stochastique de Langevin :

$$\boxed{m\,\frac{dv(t)}{dt} \;=\; -\; k\,v(t) \;+\; \eta(t)}$$

Processus d'Ornstein-Uhlenbeck

Le processus d'Ornstein-Uhlenbeck est un processus stochastique décrivant (entre autres) la vitesse d'une particule dans un fluide, en dimension 1.

On le définit comme étant la solution X_t de l'équation différentielle stochastique suivante : $dX_t = \sqrt{2}dB_t - X_t dt$, où B_t est un mouvement brownien standard, et avec X_0 une variable aléatoire donnée. Le terme dB_t traduit les nombreux chocs aléatoires subis par la particule, alors que le terme $-X_t dt$ représente la force de frottement subie par la particule.

La formule d'Itô appliquée au processus $e^t X_t$ nous donne : $d(e^t X_t) = e^t X_t dt + e^t(\sqrt{2}dB_t - X_t dt) = e^t\sqrt{2}dB_t$, soit, sous forme intégrale : $X_t = X_0 e^{-t} + \sqrt{2}e^{-t}\displaystyle\int_0^t e^s dB_s$

Par exemple, si X_0 vaut presque sûrement x, la loi de X_t est une loi gaussienne de moyenne xe^{-t} et de variance $1 - e^{-2t}$, ce qui converge en loi quand t tend vers l'infini vers la loi gaussienne centrée réduite.

Marches aléatoires

On peut aussi utiliser un modèle de marche aléatoire (ou au hasard), où le mouvement se fait par sauts *discrets* entre positions définies (on a alors des mouvements en ligne droite entre deux positions), par exemple dans le cas de la diffusion dans les solides. Si les x_i sont les positions successives d'une particule, alors on a après n sauts :

$$\langle X_n^2 \rangle = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

Marche aléatoire à une dimension d'espace (*Exemple*)

Considérons la marche aléatoire d'une particule sur l'axe Ox. On suppose que cette particule effectue des sauts de longueur a entre deux positions contigües situées sur le réseau : $\{ n\,a \, , n \in \mathbb{Z} \}$ de maille a sur l'axe, chaque saut ayant une durée τ.

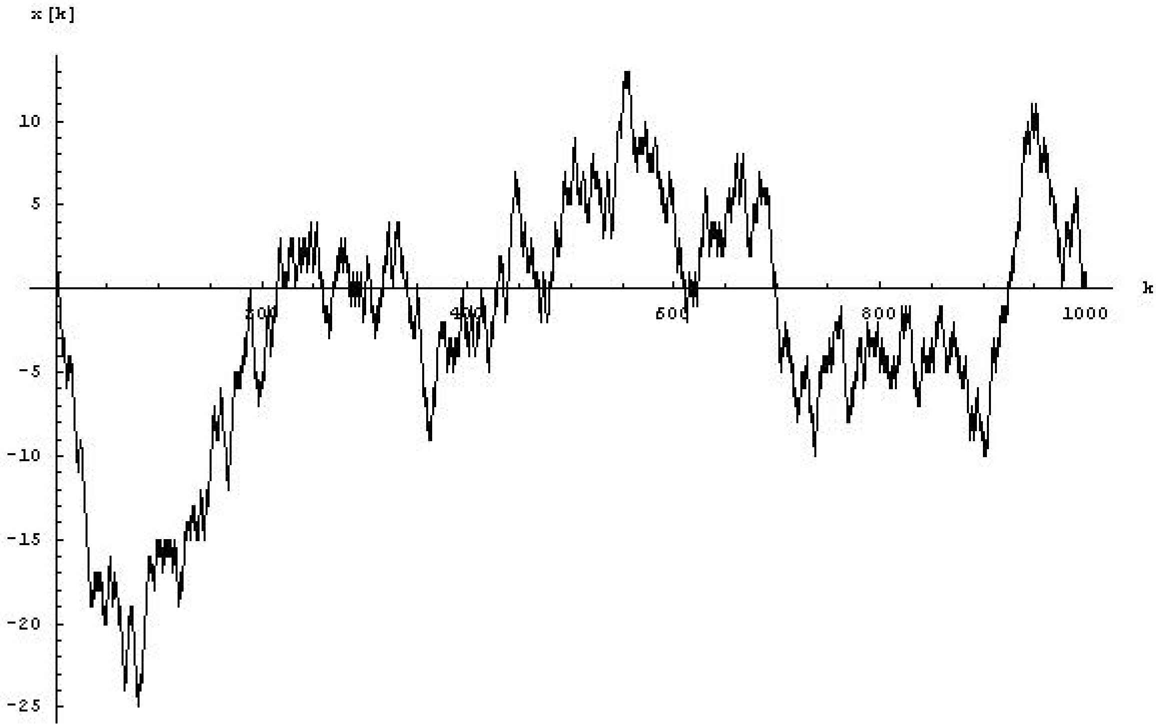
Il faut encore se donner un nombre p tel que : $0 < p < 1$. L'interprétation physique de ce paramètre est la suivante :

- p représente la probabilité que la particule fasse un saut *vers la droite* à chaque instant ;
- $q = 1 - p$ représente la probabilité que la particule fasse un saut *vers la gauche* à chaque instant.

Le cas du mouvement brownien correspond à faire l'hypothèse d'*isotropie spatiale*. Toutes les directions de l'espace physique étant *a priori* équivalentes, on pose l'équiprobabilité :

$$p = q = \frac{1}{2}$$

La figure ci-dessous montre un exemple typique de résultat : on trace les positions successives $x(k)$ de la particule aux instants k, partant de la condition initiale $x(0)=0$.



Probabilités de transition conditionnelle

On définit la probabilité de transition conditionnelle :

$$P(n|m,s) = P(na|ma,s\tau)$$

comme étant la probabilité de trouver la particule au site ma à l'instant $s\tau$ sachant qu'elle était au site na à l'instant initial 0.

L'hypothèse d'isotropie conduit à écrire la loi d'évolution de cette probabilité de transition conditionnelle :

$$\boxed{P(n|m,s+1) \;=\; \frac{1}{2}\;[\;P(n|m+1,s)\;+\;P(n|m-1,s)\;]}$$

On en déduit la relation suivante :

$$P(n|m,s+1)\;-\;P(n|m,s)\;=\;\frac{1}{2}\;[\;P(n|m+1,s)\;+\;P(n|m-1,s)\;-\;2\;P(n|m,s)\;]$$

Convergence vers le mouvement brownien. Équation de Fokker-Planck

Prenons la limite continue de l'équation précédente lorsque les paramètres :

- $\tau \;\to\; 0$
- $a \;\to\; 0$

On verra à la fin du calcul que la combinaison $a^2/2\tau$ doit en fait rester constante dans cette limite continue.

Il vient, en réintroduisant le paramètre adéquat pour faire un développement limité :

$$P(n|m,(s+1)\tau)\;-\;P(n|m,s\tau)\;=\;\tau\;\frac{\partial P(n|m,s\tau)}{\partial t}\;+\;O(\tau^2)$$

D'autre part, on peut écrire :

$$P(n|(m\pm 1)a,s)\;=\;P(n|ma,s)\;\pm\;a\;\frac{\partial P(n|ma,s)}{\partial x}\;+\;\frac{a^2}{2}\;\frac{\partial^2 P(n|ma,s)}{\partial x^2}\;+\;O(a^3)$$

de telle sorte que le crochet se réduise à :

$$P(n|m+1,s)\;+\;P(n|m-1,s)\;-\;2\;P(n|m,s)\;=\;a^2\;\frac{\partial^2 P(n|ma,s)}{\partial x^2}\;+\;O(a^3)$$

On en déduit l'équation de Fokker-Planck :

$$\tau\;\frac{\partial P(x_0|x,t)}{\partial t}\;=\;\frac{a^2}{2}\;\frac{\partial^2 P(x_0|x,t)}{\partial x^2}$$

qu'on peut réécrire :

$$\frac{\partial P(x_0|x,t)}{\partial t}\;=\;D\;\frac{\partial^2 P(x_0|x,t)}{\partial x^2}$$

en introduisant le coefficient de diffusion :

$$D\;=\;\frac{a^2}{2\tau}$$

Solution de l'équation de Fokker-Planck

En plus de l'équation de Fokker-Planck, la densité de probabilité de transition conditionnelle $P(x_0|x,t)$ doit vérifier les deux conditions supplémentaires suivantes :

- la normalisation des probabilités totales :

$$\forall\, t \ > \ 0 \, , \quad \int_{-\infty}^{+\infty} dx \ P(x_0|x,t) \ = \ 1$$

- la condition initiale :

$$\lim_{t \to 0} P(x_0|x,t) \ = \ \delta(x - x_0)$$

où $\delta(x)$ est la distribution de Dirac.

La densité de probabilité de transition conditionnelle $P(x_0|x,t)$ est donc essentiellement une fonction de Green de l'équation de Fokker-Planck. On peut démontrer qu'elle s'écrit explicitement :

$$\boxed{P(x_0|x,t) \ = \ \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} \ \exp\left[\ - \ \frac{(x-x_0)^2}{4Dt} \ \right]}$$

Moments de la distribution :

Posons $x_0 = 0$ pour simplifier. La densité de probabilité de transition conditionnelle $P_0(x,t) = P(0|x,t)$ permet le calcul des divers moments :

$$\langle \, x^n(t) \, \rangle \ = \ \int_{-\infty}^{+\infty} dx \ x^n \ P_0(x,t)$$

La fonction P_0 étant *paire*, tous les moments d'ordre impair sont nuls. On peut facilement calculer tous les moments d'ordre pair en posant :

$$\alpha \ = \ \frac{1}{4Dt}$$

et en écrivant que :

$$\langle \, x^{2n}(t) \, \rangle \ = \ \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} \ \int_{-\infty}^{+\infty} dx \ x^{2n} \ \mathrm{e}^{-\alpha x^2} \ = \ (-1)^n \ \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} \ \frac{d^n}{d\alpha^n} \ \left[\int_{-\infty}^{+\infty} dx \ \mathrm{e}^{-\alpha x^2} \right]$$

On obtient explicitement :

$$\langle \, x^{2n}(t) \, \rangle \ = \ (-1)^n \ \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} \ \frac{d^n}{d\alpha^n} \ \left[\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \right] \ = \ (-1)^n \ \sqrt{\alpha} \ \frac{d^n}{d\alpha^n} \ \left[\frac{1}{\sqrt{\alpha}} \right]$$

On retrouve notamment pour le moment d'ordre deux :

$$\langle \, x^2(t) \, \rangle \ = \ - \ \sqrt{\alpha} \, \frac{d}{d\alpha} \left[\frac{1}{\sqrt{\alpha}} \right] \ = \ (-\sqrt{\alpha}) \ \times \ \left(- \ \frac{1}{2\alpha^{3/2}} \right) \ = \ \frac{1}{2\alpha} \ = \ 2Dt$$

Mouvement brownien sur une variété riemannienne

On appelle mouvement brownien sur une variété riemannienne *V* le processus stochastique continu markovien dont le semigroupe de transition à un paramètre est engendré par $1/2\,\Delta_V$, où Δ_V est l'opérateur de Laplace-Beltrami sur la variété *V* [réf. souhaitée].

Notes et références

1. Robert Brown ; *A brief account of microscopical observations made in the months of June, July and August, 1827, on the particles contained in the pollen of plants; and on the general existence of active molecules in organic and*

inorganic bodies., Philosophical Magazine 4 (1828), 161-173. Fac-similé disponible au format pdf (http://sciweb.nybg.org/science2/pdfs/dws/Brownian.pdf).

2. Brian J. Ford ; *Brownian movement in Clarkia pollen: a reprise of the first observations*, The Microscope, 40 (4): 235-241, 1992 Reproduction en ligne de l'article (http://www.brianjford.com/wbbrowna.htm).
3. F. Hirsch & al., Peacocks ans associated martingales with explicit constructions, Bocconi & Springer, 2011.
4. Pour un mouvement rectiligne régulier, c'est le déplacement *x(t)* qui serait proportionnel au temps.
5. **(en)** K. ITO et H.P. McKean, *Diffusion Processes and their sample paths*, Berlin, Springer Verlag - Classics in Mathematics, 1974, 2e éd., poche (ISBN 978-3-540-60629-1, LCCN 95049024 (https://lccn.loc.gov/95049024)).
6. (PESKIN C. S. (1); ODELL G. M.;OSTER G. F.;Biophysical journal (Biophys. j.), CODEN BIOJAU; 1993, vol. 65, no1, pp. 316-324 (42 ref.);Cellular motions and thermal fluctuations : the Brownian ratchet) (http://cat.inist.fr/?aModele=afficheN&cpsidt=3970250) (ISSN 0006-3495 (http://worldcat.org/issn/0006-3495&lang=fr)).
7. Paul Langevin, « Sur la théorie du mouvement brownien », *Comptes-rendus de l'Académie des Sciences* **146** (1908), 530-532. Lire en ligne sur Gallica (https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k3100t/f530).
8. Cf. e.g. : Mark Kac ; *Integration in Function Space and some of Its Applications*, Lezioni Fermiane, Accademia Nazionale dei Lincei, Scuola Normale Superiore, Pisa, Italy (1980). Texte au format pdf (http://www.cs.fsu.edu/~mascagni/Kac_Lezioni_Fermiane.pdf).

Bibliographie

Aspects historiques

- Jean Perrin, *Mouvement brownien et réalité moléculaire*, Annales de Chimie et de Physique **19** (8e série), (1909), 5-104. Possibilité de consulter et de télécharger le texte complet au format pdf depuis le site Gallica (https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k349481) de la BNF.
- Jean Perrin, *Les Atomes*, Paris, Félix Alcan, 1913 [détail des éditions]
- Albert Einstein, *Investigations on the Theory of the Brownian Movement*, Dover Publications, Inc. (1985), (ISBN 0-486-60304-0). Réédition des articles originaux d'Einstein sur la théorie du mouvement brownien. [présentation en ligne (https://books.google.fr/books?id=AOIVupH_hboC)]
- J. P. Kahane, *Le mouvement brownien - Un essai sur les origines de la théorie mathématique*, Séminaires et Congrès de la SMF (1998), vol 3., p. 123-155[1] (http://www.emis.de/journals/SC/1998/3/pdf/smf_sem-cong_3_123-155.pdf)

Mouvement brownien dans l'espace euclidien

- Bertrand Duplantier ; *Le mouvement brownien*, Séminaire Poincaré : *Einstein, 1905-2005* (Paris, 8 avril 2005). Texte complet disponible ici (http://www.bourbaphy.fr/avril2005.html).
- Bernard Derrida et Eric Brunet, *Le mouvement brownien et le théorème de fluctuation-dissipation*, dans : Michèle Leduc & Michel Le Bellac (éditeurs) ; *Einstein aujourd'hui*, EDP Sciences (janvier 2005), (ISBN 2-86883-768-9).
- Jean-François Le Gall, *Mouvement brownien, martingales et calcul stochastique (https://www.springer.com/fr/book/9783642318979)*, Springer, 2013
- Jean-François Le Gall, *Intégration, Probabilités et Processus Aléatoires*, cours du Magistère de mathématiques de l'ENS (2005). Le dernier chapitre (14) est une introduction au mouvement brownien. Format pdf (http://www.dma.ens.fr/~legall/IPPA.pdf).
- Jean-François Le Gall, *Mouvement brownien et calcul stochastique*, cours de DEA donné à l'université Paris 6 (1996 et 1997). Format pdf (http://www.dma.ens.fr/~legall/DEA96.pdf).
- Jean-François Le Gall, *Mouvement brownien, processus de branchement et superprocessus*, cours de DEA donné à l'université Paris 6 (1994). Format pdf (http://www.dma.ens.fr/~legall/DEA94.pdf).
- Paul Lévy, *Processus stochastiques et mouvement brownien*, Gauthier-Villars (2e édition - 1965). Réédité par Jacques Gabay (1992), (ISBN 2-87647-091-8).
- Mark Kac, *Random Walk and the Theory of Brownian Motion*, American Mathematical Monthly **54(7)** (1947), 369-391. Texte au format pdf (http://www.cs.fsu.edu/~mascagni/Kac_AMM_1947.pdf).
- Mark Kac, *Integration in Function Space and some of Its Applications*, Lezioni Fermiane, Accademia Nazionale dei Lincei, Scuola Normale Superiore, Pisa, Italy (1980). Texte au format pdf (http://www.cs.fsu.edu/~mascagni/Kac_Lezioni_Fermiane.pdf).

- Edward Nelson, *Dynamical Theories of Brownian Motion*, Princeton University Press (1967). Texte au format pdf (http://www.math.princeton.edu/~nelson/books/bmotion.pdf).
- Daniel Revuz et Marc Yor, *Continuous martingales and Brownian motion*, 3e ed., New York Springer (1999) (ISBN 3-540-64325-7).

Mouvement brownien sur une variété riemannienne

- Elton P. Hsu ; *Stochastic Analysis on Manifolds*, American Mathematical Society (janvier 2002), (ISBN 0-8218-0802-8).
- Elton P. Hsu ; *A Brief Introduction to Brownian Motion on a Riemannian Manifold*, (2003). Cours donné à Kyoto, disponible au format pdf (http://www.math.kyoto-u.ac.jp/probability/sympo/Kyushu.pdf).
- Mark A. Pinsky ; *Isotropic transport process on a Riemannian manifold*, Transaction of the American Mathematical Society **218** (1976), 353-360.
- Mark A. Pinsky ; *Can You Feel the Shape of a Manifold with Brownian Motion ?*, Expositiones Mathematicae **2** (1984), 263-271.
- Nicolas Th. Varopoulos ; *Brownian motion and random walks on manifolds*, Annales de l'Institut Fourier **34(2)** (1984), 243-269. Texte disponible au format pdf (http://aif.cedram.org/item?id=AIF_1984__34_2_243_0).
- Alexander Grigor'yan ; *Analytic and geometric background of recurrence and non-explosion of the Brownian motion on Riemannian manifolds*, Bulletin of the American Mathematical Society **36(2)** (1999), 135-249. Texte en ligne. (http://www.ams.org/journals/bull/1999-36-02)

Articles connexes

Sur les autres projets Wikimedia :

Mouvement brownien (https://commons.wikimedia.org/wiki/Category:Brownian_motion?uselang=fr), sur Wikimedia Commons

- Diffusion
- Migration (matière)
- Marche aléatoire
- Équation de Fokker-Planck
- Équation de la chaleur
- Noyau de la chaleur
- Processus stochastique
- Chaîne de Markov
- Intégrale de chemin
- Calcul stochastique
- Pont brownien
- Théorème de Donsker
- Projecteur (physique statistique)
- Physique statistique hors d'équilibre

Liens externes

- **(en)** Article de blog sur le mouvement brownien (http://cafemath.fr/mathblog/article.php?page=BrownianMotion.php)
- **(fr)** Thermogramme du mouvement brownien visible en surface d'un bol d'eau chaude (http://www.thethermograpiclibrary.org/index.php?title=Fichier:Eau_bol.jpg)