Séance VI : Méthode des éléments finis I

A) Objectifs de la séance

A la fin de cette séance,

- Je connais le principe d'une approximation variationnelle interne (lemme de Céa, opérateur d'interpolation).
- Je sais définir la méthode des éléments finis $\mathbb{P}_1$ en dimension 1.
- Je sais calculer la matrice de rigidité.
- J'ai installé et testé la plateforme Python FEniCS.
- Je sais programmer en Python ou en Matlab ou en FEniCS la résolution approchée d'un problème elliptique en dimension 1.
- Je sais déterminer numériquement l'ordre de la méthode.

B) Pour se familiariser avec les concepts (à traiter avant les séances de TD)

Les questions VI.1, VI.2 et VI.3 sont à traiter avant la séance de TD 6. Les corrigés sont disponibles sur internet.

Attention ! La plateforme FEniCS doit être installée et testée sur votre ordinateur avant d'aller au TD 6. Les instructions d'installation sont sur edunao. Vous devez apporter votre ordinateur en TD.

Question VI.1
Soit $f \in L^2(0,1)$. Appliquer la méthode des éléments finis $\mathbb{P}_1$ au problème

$$\text{(E)} \quad \begin{cases} -u'' = f & \text{dans }]0,1[, \\ u(0) = a \quad \text{et} \quad u(1) = b. \end{cases}$$

avec $a, b \in \mathbb{R}$. Vérifier que les conditions aux limites de Dirichlet non homogènes apparaissent dans le second membre du système linéaire qui en découle.

Question VI.2

On considère le problème
$$\text{(E)} \quad \begin{cases} -u'' + bu' + cu = f & \text{dans }]0,1[, \\ u(0) = 0 \quad \text{et} \quad u(1) = 0. \end{cases}$$

Les fonctions f et (b,c) sont données respectivement dans $L^2(0,1)$ et dans $C^0([0,1])^2$. On discrétise $[0,1]$ de manière uniforme en $J+1$ intervalles, $J \geq 1$.

Q. VI.2.1 Mettre (E) sous la forme d'un problème variationnel symétrique (PV). Donner une condition suffisante sur $c(\cdot)$ pour qu'il existe une solution unique dans un espace de Hilbert H approprié.

Soit $H_h \subset H$, le sous-espace vectoriel de dimension finie J défini par

$$H_h = \{v \in H \;/\; v_{|[x_j,x_{j+1}]} \in \mathbb{P}_1, j \in \{0, \cdots, J\}, \quad \text{et} \quad v(0) = v(1) = 0\}.$$

Q. VI.2.2 Construire le système linéaire associé au problème variationnel approché dans la base des "fonctions-chapeaux" :

$$(\text{PV}_h) \quad \text{Trouver } u_h \in H_h \text{ tel que } \quad \forall\, v_h \in\, H, \quad a(u_h, v_h) = \ell(v_h),$$

où $a(\cdot,\cdot)$ (resp. $\ell(\cdot)$) est la forme bilinéaire (resp. linéaire) qui apparaît dans (PV).

Question VI.3
On considère l'équation du problème (E) de l'exercice précédent avec conditions aux limites de Neumann :

$$u'(0) = 0 \quad \text{et} \quad u'(1) = 0.$$

Q. VI.3.1 Définir H et donner une condition suffisante sur c pour que le nouveau problème admette une unique solution.

Q. VI.3.2 Définir H_h et le système linéaire associé au nouveau problème variationnel discret.

C) Exercices

Les exercices sont disponibles sous forme de Jupyter notebooks sur edunao.

Chapitre VI : Corrections des exercices

Solution de Q. VI.1 Suivant la technique de relèvement, il suffit de choisir une fonction u_0 valant a en 0 et b en 1, puis de chercher une solution du problème homogène

$$(\mathrm{E}_0)\quad \begin{cases} -\tilde{u}'' = g & \text{dans }]0,1[, \\ \tilde{u}(0) = 0 \quad \text{et} \quad \tilde{u}(1) = 0. \end{cases}$$

avec $g : x \mapsto f(x) + u_0''(x)$.
Mettons en œuvre la méthode $\mathbb{P}_1$ sur le problème (E_0) (on omet le ˜= pour simplifier les notations). On a déjà établi en cours que ce problème est bien posé dans $H^2(0,1) \cap H_0^1(0,1)$ et que la formulation variationnelle associée est :

Trouver $u \in H_0^1(0,1)$ telle que

$$\forall v \in H_0^1(0,1), \qquad \int_{]0,1[} u'v' = \int_{]0,1[} gv.$$

Voici les étapes **pratiques** qui composent la méthode $\mathbb{P}_1$:

(i) Soit $J \geq 1$. On définit une discrétisation $(x_j)_{j\in\{0,\dots,J+1\}}$, avec $x_0 = 0$ et $x_{J+1} = 1$, de $[0,1]$. On note $h = \max_{j\in\{0,\dots,J\}}(x_{j+1} - x_j)$.

(ii) On choisit l'espace d'approximation $H_{0,h} \subset H_0^1(0,1)$, de base $(\phi_j)_{j\in\{1,\dots,J\}}$.

(iii) On écrit l'approximation variationnelle :

Trouver $u_h \in H_{0,h}$ telle que

$$\forall v_h \in H_{0,h}, \qquad \int_{]0,1[} u_h'v_h' = \int_{]0,1[} gv_h.$$

(iv) On écrit cette approximation variationnelle sur la base $(\phi_j)_{j\in\{1,\dots,J\}}$ (le problème étant linéaire, c'est équivalent) et le problème devient :

Trouver $u_h = \sum_{j=1}^J \mathbf{u}_j\phi_j \in H_{0,h}$ telle que

$$\forall i \in \{1,\dots,J\}, \qquad \sum_{j=1}^J \int_{]0,1[} \mathbf{u}_j\phi_j'\phi_i' = \int_{]0,1[} g\phi_i.$$

(v) Il s'agit d'un système linéaire de matrice de rigidité $\mathbf{A}_h \in \mathcal{M}_J(\mathbb{R})$

$$\forall (i,j) \in \{1,\dots,J\}^2, \qquad [\mathbf{A}_h](i,j) = \int_{]0,1[} \phi_i'\phi_j'.$$

(vi) Il faut évaluer également le second membre :

$$\forall i \in \{1,\dots,J\}, \qquad [\mathbf{b}_h](i) = \int_{]0,1[} g\phi_i = \int_{]x_{i-1},x_{i+1}[} g\phi_i = \int_{]x_{i-1},x_{i+1}[} f\phi_i + \int_{]x_{i-1},x_{i+1}[} u_0''\phi_i.$$

Les conditions aux limites apparaissent donc effectivement au second membre sous la forme de u_0''.

On trouve donc un vecteur $U_h = (\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_J)^T \in \mathbb{R}^J$. La solution élements finis cherchée est la fonction continue affine par morceaux

$$a\phi_0 + \sum_{j=1}^{J} (\mathbf{u}_j + u_0(x_j))\phi_j + b\phi_{J+1}.$$

Solution de Q. VI.2.1 On multiplie l'équation par la fonction (ne s'annulant pas) $\zeta : x \mapsto \exp(-\int_0^x b)$: on obtient

$$-(\zeta u')' + c\zeta u = \zeta f.$$

En reprenant les techniques de démonstration, on obtient la formulation variationnelle : *trouver* $u \in H_0^1(0,1)$ *telle que*

$$\forall v \in H_0^1(0,1), \qquad \int_{]0,1[} \zeta u'v' + \int_{]0,1[} c\zeta uv = \int_{]0,1[} \zeta f v,$$

les formes bilinéaire et linéaire associées étant

$$\begin{cases} a : (u,v) \mapsto \int_{]0,1[} \zeta u'v' + \int_{]0,1[} c\zeta uv \\ \\ \ell : v \mapsto \int_{]0,1[} \zeta f v. \end{cases}$$

Une condition suffisante pour pouvoir appliquer le théorème de Lax-Milgram est que la fonction c soit à valeurs positives ou nulles (dans ce cas, ζf l'est également et, en effet, on montre, grâce à l'inégalité de Poincaré que a est coercive sur $H_0^1(0,1)$). On en déduit qu'il existe une unique solution $u \in H_0^1(0,1)$. En appliquant les techniques de résolution, on montre que $u \in H^2(0,1)$ et que, si $f \in C^0([0,1])$, $u \in C^2([0,1])$.

Solution de Q. VI.2.2 Rappelons que H_h a pour dimension le nombre de degrés de liberté, c'est-à-dire le nombre de points intérieurs, soit J.
L'avantage d'avoir symétrisé la formulation variationnelle est que la matrice du système linéaire sera symétrique définie positive. Du fait de la petite taille du support des fonctions-chapeaux, la matrice est de plus tridiagonale.

On cherche $u_h = \sum_{j=1}^{J} u_j\phi_j \in H_h$ solution de

$$\forall i \in \{1, \dots, J\}, \qquad a\left(\sum_{j=1}^{J} u_j\phi_j, \phi_i\right) = \ell(\phi_i).$$

La matrice cherchée est donc

$$\forall (i,j) \in \{1,\dots,J\}^2, \qquad [A_h]_{ij} = \int_{]0,1[} \zeta \phi_i' \phi_j' + \int_{]0,1[} \zeta c \phi_i \phi_j$$
$$= \int_{]x_{i-1},x_{i+1}[\cap]x_{j-1},x_{j+1}[} \zeta \phi_i' \phi_j' + \int_{]x_{i-1},x_{i+1}[\cap]x_{j-1},x_{j+1}[} \zeta c \phi_i \phi_j$$
$$= \begin{cases} 0 & \text{si } |i-j| \geq 2 \\ -\dfrac{1}{h^2} \int_{]x_{i-1},x_i[} \zeta + \int_{]x_{i-1},x_i[} \zeta c \phi_i \phi_{i-1} & \text{si } i = j+1 \\ \dfrac{1}{h^2} \int_{]x_{i-1},x_{i+1}[} \zeta + \int_{]x_{i-1},x_{i+1}[} \zeta c \phi_i^2 & \text{si } i = j. \end{cases}$$

Le second membre est alors

$$\forall i \in \{1,\dots,J\}, \quad [F_h]_i = \int_{]0,1[} \zeta f \phi_i = \int_{]x_{i-1},x_{i+1}[} \zeta f \phi_i.$$

Ces termes seront calculés par quadrature (formule des rectangles, des trapèzes, etc.).

Solution de Q. VI.3.1 Attention, il faut maintenant prendre $H = H^1(0,1)$. La forme bilinéaire est la même qu'à la question VI.2.1. Une condition suffisante assurant la coercivité de a sur $H^1(0,1)^2$ est que c soit à valeurs **strictement** positives. La condition de Neumann étant homogène, la forme linéaire est également la même qu'à la question VI.2.1.

Solution de Q. VI.3.2 Pour H_h, on va maintenant laisser “libres” les points du bord :

$$H_h := \{v \in H \,:\, v_{|[x_j,x_{j+1}]} \in \mathbb{P}_1, j \in \{0,\cdots,J\}\}.$$

Cet espace a pour dimension $J+2$, correspondant au nombre de nœuds du maillage. La matrice (encore tridiagonale) du système linéaire est donc

$$\forall (i,j) \in \{0,\dots,J+1\}^2, \qquad [A_h]_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } |i-j| \geq 2, \quad i,j \in \{1,\dots,J\} \\ -\dfrac{1}{h^2} \int_{]x_{i-1},x_i[} \zeta + \int_{]x_{i-1},x_i[} \zeta c \phi_i \phi_{i-1} & \text{si } i = j+1, \quad j \in \{0,\dots,J\} \\ \dfrac{1}{h^2} \int_{]x_{i-1},x_{i+1}[} \zeta + \int_{]x_{i-1},x_{i+1}[} \zeta c \phi_i^2 & \text{si } i = j, \quad i,j \in \{1,\dots,J\} \\ \dfrac{1}{h^2} \int_{]0,x_1[} \zeta + \int_{]0,x_1[} \zeta c \phi_0^2 & \text{si } i = j = 0 \\ \dfrac{1}{h^2} \int_{]x_J,1[} \zeta + \int_{]x_J,1[} \zeta c \phi_J^2 & \text{si } i = j = J+1 \end{cases}$$

Le second membre est alors

$$\forall i \in \{0, \dots, J+1\}, \quad [F_h]_i = \begin{cases} \int_{]x_{i-1}, x_{i+1}[} \zeta f \phi_i, & \text{si } i \in \{1, \dots, J\} \\ \int_{]0, x_1[} \zeta f \phi_0, & \text{si } i = 0 \\ \int_{]x_J, 1[} \zeta f \phi_J. & \text{si } i = J+1 \end{cases}$$