Guide de survie : Analyse

Remerciements : Réda Arab, Marion Favre D'Echallens, Santiago Gatillon, Eve Pachoud, Tristan Pham-Mariotti, Camille Raffin, Mehdi Tomas

1 Théorie de la mesure et construction de l'intégrale

1.1 Théorie de la mesure

Définition 1 (Tribu)
Une tribu $\mathcal{T}$ sur un ensemble Ω est une famille non vide de parties de Ω telle que :

- $\varnothing \in \mathcal{T}$
- *Si* $A \in \mathcal{T}$ *alors* $\Omega \backslash A \in \mathcal{T}$
- *Si* $\forall n \in \mathbb{N}\, A_n \in \mathcal{T}$ *alors* $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{T}$

Définition 2 (Mesure sur une tribu)
Une mesure sur $\mathcal{T}$ est une application $\mu : \mathcal{T} \to \mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}$ telle que :

- $\mu(\varnothing) = 0$
- *Si* $A_n \in \mathcal{T}$ *disjoints alors* $\mu(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n)$

Définition 3 (Application mesurable)
L'application $f : (\Omega, \mathcal{T}) \to (\Omega', \mathcal{T}')$ est mesurable si

$$\forall B \in \mathcal{T}' \quad h^{-1}(B) \in \mathcal{T}$$

Propriétés 1 (Conservation de la mesurabilité)
Dans $\mathcal{L}(\mathcal{T}) = \{app.\ mesurable\ de\ (\Omega, \mathcal{T}) dans\ (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))\}$,

- *Si f et g mesurables alors $f+g$ et fg mesurables.*
- *Si (f_n) mesurable alors $sup(f_n)$, $inf(f_n)$, $lim(f_n)$ et $\sum f_n$ mesurables.*
- *Si f mesurable alors $|f|$ mesurable*

Théorème 1 (Approximation mesurables par étagées)

- *Toute fonction bornée de $\mathcal{L}(\mathcal{T})$ est limite uniforme d'une suite de fonction étagées.*
- *Tout fonction de $\overline{\mathcal{L}}_+(\mathcal{T})$ est limite simple d'une suite croissante de fonctions étagées positives.*

1.2 Construction d'une intégrale par rapport à une mesure

Soit μ une mesure sur $\mathcal{T}$. On va construire l'intégrale par rapport à μ pour un grand nombre de fonctions de $\mathcal{L}(\mathcal{T})$. On commence par des fonctions simples, puis par des arguments de limite notamment, on élargit notre définition pour d'autres fonctions.

Etape 1 : Pour $f = \sum_{i=1}^n \alpha_i 1_{A_i}$ (où $A_i \in \mathcal{T}$ et $\alpha_i \in \mathbb{R}$), on définit :

$$\int_\Omega f(x)\mu(dx) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mu(A_i)$$

Etape 2 : Pour f $\mathcal{T}$-mesurable positive, on définit :

$$\int_\Omega f(x)\mu(dx) = sup\{\int_\Omega \phi(x)\mu(dx); \phi \,\text{étagée telle que}\, \phi \le f\}$$

Etape 3 : Pour f $\mathcal{T}$-sommable, i.e. $\mathcal{T}$-mesurable et $\int_\Omega |f(x)|\mu(dx) < \infty$, on définit :

$$\int_\Omega f(x)\mu(dx) = \int_\Omega max(f(x),0)\mu(dx) - \int_\Omega min(f(x),0)\mu(dx)$$

Remarque 1
Lors de l'étape 1 et 2, l'intégrale peut éventuellement prendre la valeur $+\infty$ mais pas pour une fonction sommable dans l'étape 3.

2 Lien entre Riemann et Lebesgue

L'intégrale par rapport à la mesure de Lebesgue $\lambda : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to \overline{\mathbb{R}}_+$, vérifiant notamment $\lambda([a,b]) = b-a$, correspond dans certains cas à l'intégrale de Riemann.

Objectifs :

- Savoir quand est-ce qu'on peut passer de l'un à l'autre
- Savoir pourquoi passer de l'un à l'autre

2.1 2 théorèmes pour passer de l'un à l'autre

Théorème 2 (Sur un segment)
Si une fonction est Riemann-intégrable sur un segment $[a,b]$, alors elle est Lebesgue-sommable sur ce segment et $\int_a^b f(x)dx = \int_{[a,b]} f(x)\lambda(dx)$.

Théorème 3 (Sur un intervalle quelconque)
Si une fonction f est localement Riemann-intégrable sur $[a,b[$ où $(a,b) \in \overline{\mathbb{R}}^2$, alors on a l'équivalence :

$$f \text{ Lebesgue-sommable} \Leftrightarrow f \text{ Riemann ACV}$$

De plus on a alors $\int_a^b f(x)dx = \int_{[a,b]} f(x)\lambda(dx)$.

2.2 Raisons d'utiliser l'un ou l'autre

Raisons d'utiliser Riemann :
- Calcul par primitivation *(cf. 1.a. ex 1 TD 2)*
- Intégration par parties *(cf. 2.b. ex 6 TD 2)*

Raisons d'utiliser Lebesgue :
- Permuter les intégrales (intégrales multiples) *(cf. 1. ex 4 TD 3)*
- Facilité d'utilisation des théorèmes : convergence monotone, dominée, etc. *(cf. 1.b. ex 1 TD 2)*

3 Théorèmes de Tonelli-Fubini

3.1 Enoncé des théorèmes

Les énoncés rigoureux sont à lire dans le poly. Mais voici leur idée générale.

Théorème 4 (Tonelli 1)
Si f est mesurable et positive
Alors on peut intervertir les intégrales :

$$\int_{\Omega_1}\int_{\Omega_2} f(x,y)\lambda(dx)\lambda(dy) = \int_{\Omega_2}\int_{\Omega_1} f(x,y)\lambda(dy)\lambda(dx)$$

Théorème 5 (Tonelli 2)
Si f est mesurable
Alors, si le calcul dans l'ordre qu'on veut de l'intégrale multiple de |f| est $< \infty$, f est sommable.

Théorème 6 (Fubini)
Si f est sommable
Alors on peut intervertir les intégrales :

$$\int_{\Omega_1}\int_{\Omega_2} f(x,y)\lambda(dx)\lambda(dy) = \int_{\Omega_2}\int_{\Omega_1} f(x,y)\lambda(dy)\lambda(dx)$$

3.2 Utilisation

Lorsqu'on veut permuter des intégrales :

1. On regarde si f est positive
2. Si oui, on applique Tonelli 1
3. Si non, on montre qu'elle est sommable avec Tonelli 2 puis on applique Fubini

3.3 Exemple

On veut calculer $I = \int_{\mathbb{R}^+}\int_{[a,b]} e^{-xy}\lambda(dy)\lambda(dx)$.
La fonction $(x,y) \to e^{-xy}$ est positive et mesurable (car continue) donc on peut appliquer Tonelli 1. On a :

$$I = \int_{[a,b]}\int_{\mathbb{R}^+} e^{-xy}\lambda(dx)\lambda(dy)$$

On passe ensuite à Riemann pour pouvoir calculer par primitivation. Cela est possible car on a l'absolue convergence de $x \to e^{-xy}$ sur $\mathbb{R}^+$ et la continuité de $y \to \int_0^\infty e^{-xy}dy = \frac{1}{y}$sur $[a,b]$.

$$I = \int_a^b\int_0^\infty e^{-xy}dxdy = \int_a^b [\frac{e^{-xy}}{-y}]_0^\infty dy = \int_a^b \frac{1}{y}dy = ln(\frac{b}{a})$$

4 Propriétés fondamentales de l'intégrale de Lebesgue

Objectifs

- Intervertir l'intégrale et un autre élément (limite, série...).
- Déterminer la sommabilité

Théorème 7 (Beppo-Levi ou convergence monotone)

- *Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante de fonctions mesurables positives dans $\overline{\mathbb{R}}_+$, alors:*

$$\lim \int f_n = \int \lim f_n$$

- *Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante/décroissante de fonctions sommables, alors:*

$$\lim \int f_n = \int \lim f_n$$

Exemple :
Exercice 2.1 - 1.b) : $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^\pi \sin^n(t)\,dt$ où $(\sin^n(t))_n$ suite décroissante sommable sur $[0,\pi]$.

Théorème 8 (Convergence dominée)
Soit $(\Omega,\mathcal{F},\mu)$. Si (f_n) vérifie:

- *$\forall n \in \mathbb{N}, f_n$ est mesurable sur Ω.*
- *La suite (f_n) converge μ-pp vers f mesurable sur Ω*
- *$\exists g$ sommable sur Ω t.q. $\forall n \in \mathbb{N}$ et $\forall t$ de Ω : $|f_n(t)| \leq g(t)$.*

alors f est sommable sur Ω et $\left(\int f_n \mathrm{d}\mu\right)$ converge vers $\int f\mathrm{d}\mu$

Exemple : Exercice 2.2 - 2)

$$u_n = \int_{]0,+\infty[} \frac{\sin(t^n)}{t^n(1+t)}\lambda(\mathrm{d}t).$$

Théorème 9 (Intégration terme à terme des séries)
Si (f_n) est une suite de fonctions de $\mathcal{L}^1(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),\lambda)$ et si $\sum_0^\infty \int |f_n|\mathrm{d}\lambda < \infty$ alors:

- *$\sum f_n$ A.C.V λ-p.p*
- *$\sum_0^\infty f_n$ est sommable*
- *$\int \sum_0^\infty f_n \mathrm{d}\lambda = \sum \int f_n \mathrm{d}\lambda$*

5 Fonctions définies par des intégrales

Théorème 10 (Continuité sous le signe $\int$ en un point)
Si

- *$\forall x \in]a,b[\quad f(t,x)$ est sommable sur Ω*
- *$\forall t$ p.p de Ω, $f(t,x)$ est continue en x_0*
- *$\exists$ un voisinage $]a',b'[$ de x_0 et g sommable telle que $\forall x \in]a',b'[$ et $\forall t \in \Omega : |f(t,x)| \leq g(t)$.*

alors la fonction $x \mapsto \int_\Omega f(t,x)\mathrm{d}\mu(t)$ est continue en x_0

Théorème 11 (Dérivabilité sous le signe $\int$)
Si

- *$\forall x \in]a,b[\quad f(t,x)$ est sommable sur Ω*
- *$\exists N$ partie négligeable dans Ω t.q. $\forall$ t de $\Omega\backslash N$ $f(t,x)$ est dérivable sur $]a,b[$.*
- *$\exists g$ sommable sur Ω telle que $\forall x \in]a,b[$ et $\forall t \in \Omega\backslash N$: $|\frac{\partial f(t,x)}{\partial x}| \leq g(t)$.*

Alors

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_\Omega f(t,x)\,\mathrm{d}\mu(t) = \int_\Omega \frac{\partial}{\partial x} f(t,x)\,\mathrm{d}\mu(t)$$

Exemple : Exercice 2.4 - 2)

6 Le changement de variable

Objectif :

- Se ramener à une forme connue, que l'on sait intégrer.

Définition 4 (Matrice Jacobienne)
Soit g une fonction de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}^d$.
La matrice jacobienne J de g en x est la matrice associée à $g = (g_1, g_2, ..., g_d)$ et à $x = (x_1, ..., x_d)$:

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial g_1}{\partial x_2} & ... & \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial g_2}{\partial x_2} & ... & \frac{\partial g_2}{\partial x_d} \\ ... & ... & ... & \\ \frac{\partial g_d}{\partial x_1}(x) & ... & ... & \end{pmatrix}$$

Théorème 12 (Changement de variable)
*Soit U et V deux ouverts de $\mathbb{R}^d$ et Φ un C^1-**difféomorphisme** (bijective, C^1et réciproque C^1) de V sur U et de jacobien J.*
Soit f une fonction borélienne définie sur U. On a:

- *f sommable sur U ssi $f \circ \Phi.|J|$ est sommable sur V*
- $\int_U f(y)d\mu(y) = \int_V f \circ \Phi(x).|J(x)|d\mu(x)$

Exemples d'application :
- Exercice 3.1 question 2)
- Exercice 3.7 question 3)

7 Espaces L^p

Théorème 13 (Inégalité de Hölder)
Soit $1 \leq p \leq +\infty$ et $1 \leq q \leq +\infty$ deux entiers tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Si $f \in L^p$ et $g \in L^q$
Alors $fg \in L^1$ et $\int |fg| \leq (\int |f|^p)^{\frac{1}{p}} (\int |f|^q)^{\frac{1}{q}}$.

Définition 5 (Produit de convolution)
Soit $f \in L^1$ et $g \in L^p$.
Alors, pour presque tout $x \in \mathbb{R}^N$, la fonction $y \to f(x-y)g(y)$ est sommable et on définit :

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^N} f(x-y)g(y)\lambda(dy)$$

Théorème 14 (Densité des fonctions à support compact indéfiniment dérivables)
Pour Ω ouvert connexe de $\mathbb{R}^N$. Soit $p < \infty$.
$\mathcal{D}(\Omega)$ = ensemble fonctions à support compact indéfiniment dérivables sur Ω.

$$\mathcal{D}(\Omega) \text{ dense dans } L^p(\Omega)$$

Exemples d'application :
- Exercice 2.5 question 2)
- Exercice 3.6
- Problème séance 5 question 1)*b*)

8 Transformée de Fourier

8.1 Définition et propriétés dans L^1

Définition 6 (Transformée de Fourier)
La transformée de Fourier d'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ sommable est la fonction $\mathcal{F}f$ définie par :

$$\mathcal{F}f(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-ixy}\lambda(dx)$$

Propriétés 2
f,g sommables.

- *Si $x \to xf(x)$ sommable alors $\mathcal{F}f$ est C^1 et $(\mathcal{F}f)' = \mathcal{F}(-ixf(x))$.*
- *Si f C^1 et f' sommable alors $\mathcal{F}(f') = iy\mathcal{F}f$.*
- *Si $\mathcal{F}f$ **sommable** alors $f = \bar{\mathcal{F}}\mathcal{F}f$ p.p.*
- $\mathcal{F}(f * g) = \sqrt{2\pi}\mathcal{F}(f)\mathcal{F}(g)$

8.2 Transformée de Fourier dans L^2

La transformée de Fourier définie sur $L^1 \cap L^2$ peut se prolonger à L^2 en une **isométrie** (i.e conserve la norme et le produit scalaire) que l'on définit comme étant la transformée de Fourier dans L^2 (de même pour $\bar{\mathcal{F}}$).

Théorème 15 (Théorème d'interversion)
Si $f \in L^2$ alors $f = \bar{\mathcal{F}}\mathcal{F}f = \mathcal{F}\bar{\mathcal{F}}f$.'

9 Analyse hilbertienne

9.1 Généralités

Définition 7 (Espace de Hilbert)
Un espace de Hilbert est un couple (H, ϕ) où H $\mathbb{C}-ev$ et ϕ produit scalaire hermitien i.e. :

- $\forall y \in H \quad x \to \phi(x,y)$ *linéaire*
- $\forall x \in H \quad y \to \phi(x,y)$ *anti-linéaire i.e.* $\forall (x,y,z) \in H^3 \quad \phi(x, \lambda y + \mu z) = \overline{\lambda}\phi(x,y) + \overline{\mu}\phi(x,z)$
- $\forall (x,y) \in H^2 \quad \phi(x,y) = \overline{\phi(y,x)}$ *(symétrique hermitienne)*
- $\forall x \in H \quad \phi(x,x) \geq 0$ *(positive)*
- $\forall x \in H \quad \phi(x,x) = 0 \Longrightarrow x = 0$ *(définie)*

*et H est **complet** pour $\|x\| = \sqrt{\phi(x,x)}$.*

Propriétés 3 (Egalités, inégalités)
Valables aussi dans un espace préhilbertien.

- $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2Re(< x, y >)$
- *Cauchy-Schwarz :* $|< x, y >| \leq \|x\| \, \|y\|$
- *Identité du parallèlogramme :* $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$

Théorème 16 (Exemples d'espaces de Hilbert)
$\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ fonctions de carré sommable. $H^1(\Omega)$ espace de Sobolev.

- *L'espace $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ muni de $< f, g >_{\mathcal{L}^2} = \int_{\mathbb{R}} \overline{f(t)}g(t)\lambda(dt)$ est un espace de Hilbert.*
- *L'espace $H^1(\Omega)$ muni de $< f, g >_{H^1} = < f, g >_{\mathcal{L}^2} + < \nabla f, \nabla g >_{\mathcal{L}^2}$ est un espace de Hilbert.*

9.2 Projection

Théorème 17 (Projection sur un convexe fermé)
H Hilbert. C convexe fermé de H.

$$\forall x \in H \quad \exists! c_0 \in C \, tq \quad \|x - c_0\| = \min_{c \in C} \|x - c\| = d(x, C)$$

c_0 est appelé projeté de x sur C et noté $p_C(x)$.

Remarque 2
Un s.e.v. F est convexe (et même beaucoup plus que ça). De plus, si F est fermé alors le projeté de x sur F existe et est la projection orthogonale de x sur F.

Propriétés 4 (Propriétés de la projection)
H Hilbert. C convexe fermé de H.

- *c_0 projeté de x sur C si et seulement si $c_0 \in C$ et $\forall c \in C \, Re(< x - c_0, c - c_0 >) \leq 0$*
- *L'application p_C qui à tout x de H associe son projeté sur C est continue (et même 1−lipschitzienne)*

9.3 Bases hilbertiennes

Définition 8 (Vocabulaire)
H Hilbert. $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ famille d'éléments de H.

- *Orthonormalité : $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ famille orthonormale si $\forall(i,j)\in\mathbb{N} \quad <e_i,e_j>=\delta_{i,j}$*
- *Totalité : $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ famille totale si $\overline{Vect((e_n)_{n\in\mathbb{N}})}=H$ (i.e. tout élément de H peut être approché aussi près que souhaité par une combinaison linéaire des e_n)*
- *Base hilbertienne : $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ base hilbertienne de H si famille orthonormale totale de H.*

Théorème 18 (Egalités de Parseval)
$(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ base Hilbertienne de H. Alors :

- $\forall x\in H \quad x=\sum_{n\in\mathbb{N}}<e_n,x>e_n$
- $\forall x\in H \quad \|x\|^2=\sum_{n\in\mathbb{N}}|<e_n,x>|^2$
- $\forall(x,y)\in H \quad <x,y>=\sum_{n\in\mathbb{N}}\overline{<e_n,x>}<e_n,y>$

10 Compléments ECP+R

10.1 Théorème de Carathéodory

Définition 9 (Pré-mesure)
$\mathcal{C}$ collection de sous-ensembles de Ω contenant $\varnothing$.
Une fonction $\tau:\mathcal{C}\to\overline{\mathbb{R}}_+$ est une pré-mesure si $\tau(\varnothing)=0$.

Définition 10 (Mesure extérieure)
Une fonction $\mu:\mathcal{P}(\Omega)\to\overline{\mathbb{R}}_+$ est une mesure extérieure si :

- $\mu(\varnothing)=0$
- *Si $E_1\subset E_2$ alors $\mu(E_1)\le\mu(E_2)$*
- *Si $(E_i)_{i\in\mathbb{N}}$ suite de $\mathcal{P}(\Omega)$ alors $\mu(\bigcup_i E_i)\le\sum_i E_i$*

Remarque : Une mesure extérieure est définie sur l'ensembles des parties de Ω et non simplement sur une tribu.

Définition 11 (Ensemble mesurable)
Soit μ mesure extérieure. Un ensemble $E\subset\Omega$ est μ-mesurable si

$\forall(A,B)\in\mathcal{P}(\Omega)$ *tq* $A\subset E$ *et* $B\subset\Omega\backslash E$ $\mu(A\cup B)=\mu(A)+\mu(B)$

Théorème 19 (Construction d'une mesure extérieure)
Si τ est une pré-mesure sur $\mathcal{C}$ alors

$$\mu:E\to\mu(E)=\inf_{\substack{C_i\in\mathcal{C}\\ E\subset\bigcup C_i}}\sum_{i=1}^{\infty}\tau(C_i) \text{ est une mesure extérieure.}$$

Théorème 20 (Extension d'une mesure - Théorème de Carathéodory)
Soit τ pré-mesure.
Soit λ^* mesure extérieure construite à partir de τ par la méthode précédente.
Alors la restriction de λ^* à la tribu des ensembles λ^*-mesurables est une extension de τ.

10.2 Unicité d'une mesure

Définition 12 (π-système)
Un π-système est une collection $\mathcal{C}$ de parties de Ω telle que $\forall(A,B)\in\mathcal{C}^2 \quad A\cap B\in\mathcal{C}$

Définition 13 (Classe monotone)
Une collection $\mathcal{C}$ de sous-ensembles de Ω est une classe monotone si :

- $\Omega\in\mathcal{C}$
- *Si $A_n\subset A_{n+1}$ alors $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}A_n\in\mathcal{C}$ (stabilité par limite croissante)*
- *Si $A\subset B$ alors $B\backslash A\in\mathcal{C}$ (stabilité par différence)*

Théorème 21 (Lemme des classes monotones)
Si $\mathcal{C}$ est un π-système
Alors la plus petite classe monotone qui contient $\mathcal{C}$ est la tribu engendrée par $\mathcal{C}$.

Théorème 22 (Unicité d'une mesure)
Soit μ et ν deux mesures sur $(\Omega,\mathcal{T})$ et $\mathcal{C}$ classe d'éléments de $\mathcal{T}$ contenant Ω. Si

- *μ et ν sont égales sur $\mathcal{C}$*
- *$\mathcal{C}$ est un π-système*
- $\sigma(\mathcal{C})=\mathcal{T}$

Alors $\mu=\nu$ sur $\mathcal{T}$.

Exemple : Construction de la mesure de Borel

- On considère la pré-mesure τ définie sur l'ensemble $\mathcal{C}$ des intervalles de $\mathbb{R}$ telle que $\tau((a,b))=b-a$ (où a<b).
- On définit la mesure extérieure λ^* par

$$\forall A\subset\mathbb{R} \quad \lambda^*(A)=\inf_{\substack{(a_n,b_n)\in\mathcal{C}\\ A\subset\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(a_n,b_n)}}\sum_{n=0}^{\infty}(b_n-a_n)$$

- On appelle alors mesure de Borel la mesure λ qui est la restriction de λ^* à $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ (et le prolongement de τ à $\mathcal{B}(\mathbb{R})$). Elle est unique.

10.3 Théorème de Lebesgue-Radon-Nikodym

Définition 14 (Absolue continuité)
Soit μ et ν 2 mesures sur $\mathcal{T}$.
μ est absolument continue par rapport à ν, noté $\mu<<\nu$, si pour tout A dans $\mathcal{T}$, $\nu(A)=0\Longrightarrow\mu(A)=0$.

Définition 15 (Mesure concentrée)
μ concentrée sur A si $\forall E\in\mathcal{T}$ $\mu(E)=\mu(E\cap A)$.

Définition 16 (Mesures étrangères)
μ et ν sont étrangères si il existe A,B $\in\mathcal{T}$ tels que $A\cap B=\varnothing$, μ concentrée sur A et ν concentrée sur B. On note $\mu\perp\nu$.

Définition 17 (Mesure finie et mesure σ-finie)

- *μ est finie si $\int_\Omega d\mu<\infty$*
- *μ est σ-finie si $\Omega=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}E_n$ et $\mu(E_n)<\infty$*

Théorème 23 (Théorème de Lebesgue-Radon-Nikodym)
Soit μ mesure σ-finie sur $(\Omega,\mathcal{T})$.
Soit ν mesure finie sur $(\Omega,\mathcal{T})$.
Alors :

- *Il existe un unique couple (ν_a,ν_s) de mesures telles que $\nu=\nu_a+\nu_s$ avec $\nu_a<<\mu$ et $\nu_s\perp\mu$. Cette décomposition est appelée décomposition de Lebesgue.*
- *Il existe une unique fonction $h\in L^1$ telle que $\forall A\in\mathcal{T}\quad \nu_a(A)=\int_E hd\mu$. h est appelée dérivée de Radon-Nikodym de ν_a par rapport à μ*