Cours d'Équations aux Dérivées Partielles

Séance V - Résolution théorique des problèmes elliptiques par formulation variationnelle.

Séance V - Formulation variationnelle

CentraleSupélec - Cursus ingénieur

14 janvier 2020

Amphis EDP 5

- Ludovic Goudenège

  Chargé de Recherche CNRS

  Fédération de Mathématiques de CentraleSupélec.

  Bâtiment Bouygues. Laboratoire MICS. Bureau SC.102.

  goudenege@math.cnrs.fr

Des questions ?

- daskit.com/edp19-20 puis section "Amphi 5'.

Support

- Support amphi V en version vierge disponible dès à présent sur edunao.
- Support amphi V en version annotée disponible ultérieurement.

Quelques éléments des CMs et TDs précédents

- Adimensionnement des équations
- Classification des problèmes
- Formes bilinéaires coercives
- Lax-Milgram
- Distributions
- Espace de Sobolev en dimension 1

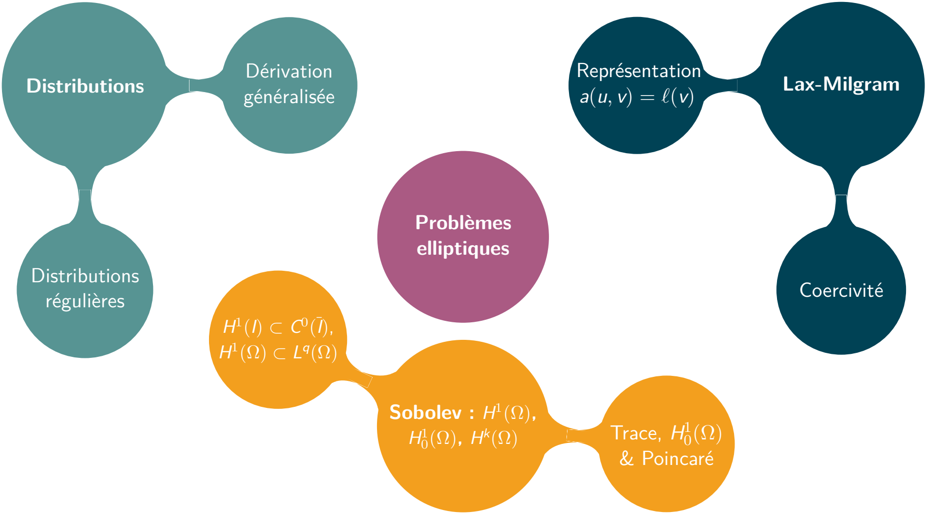
Programme

- Formulation variationnelle
- Résolution des EDP elliptiques en dimension 1
- Espace de Sobolev en dimension d
- Résolution des EDP elliptiques en dimension d

Objectifs de la séance

- Je sais définir une dérivée partielle au sens des distributions.
- Je sais définir la trace d'une fonction de H^1 sur le bord.
- Je connais les formules d'intégration par parties étendues.
- Je sais trouver une formulation variationnelle à partir d'un problème elliptique linéaire, en prenant en compte correctement les conditions au bord.
- Je sais résoudre une formulation variationnelle.
- Je sais retourner au problème elliptique de départ et le résoudre théoriquement.

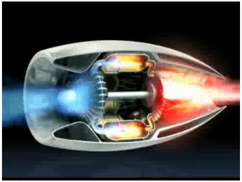
Concepts

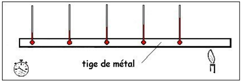

Distributions
Dérivation généralisée
Distributions régulières
Représentation $a(u, v) = \ell(v)$
Lax-Milgram
Coercivité
Problèmes elliptiques
$H^1(I) \subset C^0(\bar{I})$, $H^1(\Omega) \subset L^q(\Omega)$
Sobolev : $H^1(\Omega)$, $H^1_0(\Omega)$, $H^k(\Omega)$
Trace, $H^1_0(\Omega)$ & Poincaré

1. Motivation
   - Phénomènes
   - Enjeux

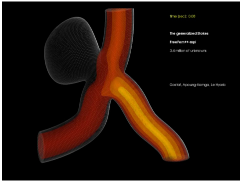
2. Résolution théorique de problèmes elliptiques
   - Programme de résolution des problèmes elliptiques
   - Problème unidimensionnel
   - Régularité et Trace
   - Résolution en dimension d, $d \geq 2$

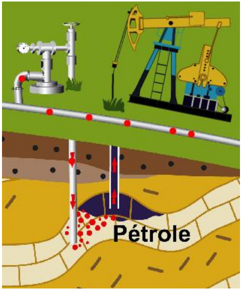
1. Motivation
   - Phénomènes
   - Enjeux
2. Résolution théorique de problèmes elliptiques





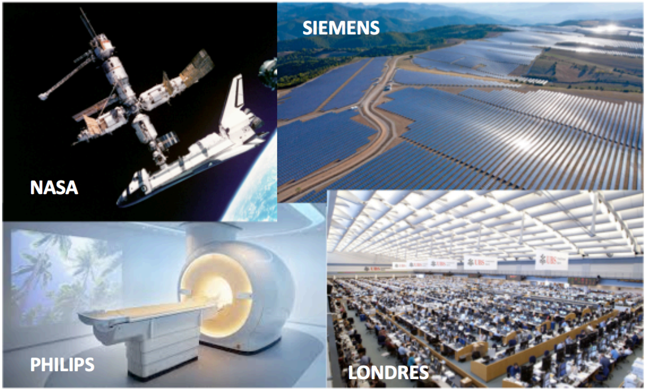
Problèmes **elliptiques** : $\begin{cases} -\mathrm{div}(\lambda\, \mathrm{grad}(u)) + \kappa u = f \text{ dans } \Omega \\ \text{conditions sur } \partial\Omega \end{cases}$





- **Enjeux :** Observation/description de nombreux phénomènes en astronomie, physique, chimie, biologie, économie, finance...

- **Enjeux :** Observation/description de nombreux phénomènes en astronomie, physique, chimie, biologie, économie, finance...



- **Enjeux :** Observation/description de nombreux phénomènes en astronomie, physique, chimie, biologie, économie, finance...
  ... afin de prédire / concevoir **via la simulation numérique**

- **Enjeux :** Observation/description de nombreux phénomènes en astronomie, physique, chimie, biologie, économie, finance...
  ... afin de prédire / concevoir **via la simulation numérique**

- **Concept :** Modèle (approché) $\longrightarrow$ Formalisation mathématique

- **Enjeux :** Observation/description de nombreux phénomènes en astronomie, physique, chimie, biologie, économie, finance...
  ... afin de prédire / concevoir **via la simulation numérique**

- **Concept :** Modèle (approché) $\longrightarrow$ Formalisation mathématique

- **Étude mathématique :**
  - Analyse mathématique et qualitative
    - existence et propriétés **qualitatives** de solutions en variables continues
  - Discrétisation et implémentation
    - résultats **quantitatifs** « concrets »
  - Analyse numérique
    - maîtrise de l'approximation - validation des simulations - convergence

1. Motivation

2. Résolution théorique de problèmes elliptiques
   - Programme de résolution des problèmes elliptiques
   - Problème unidimensionnel
   - Régularité et Trace
   - Résolution en dimension d, $d \geq 2$

Problème de Dirichlet

Soit $\Omega =]0,1[$.

$$\textbf{(D)} \begin{cases} -u''(x) + c(x)u(x) = f(x), \ 0 < x < 1 \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

Qu'est-ce qu'un problème bien posé ?
Trouver E, F des ensembles fonctionnels tels que

pour tout $f \in F$, il existe un unique $u \in E$ tel que **(D)** soit satisfait

et

il existe $C_\Omega \in \mathbb{R}$ tel que $\forall f \in F$, $\|u\|_E \leq C_\Omega \|f\|_F$.

Problème de Dirichlet

Soit Ω un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^d$ de classe C^1.

$$\textbf{(D)} \begin{cases} -\Delta u(x) + c(x)u(x) = f(x), \ x \in \Omega \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

Qu'est-ce qu'un problème bien posé ?
Trouver E, F des ensembles fonctionnels tels que

pour tout $f \in F$, il existe un unique $u \in E$ tel que **(D)** soit satisfait

et

il existe $C_\Omega \in \mathbb{R}$ tel que $\forall f \in F$, $\|u\|_E \leq C_\Omega \|f\|_F$.

Problème de Dirichlet

Soit Ω un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^d$ de classe C^1.

$$\textbf{(D)} \begin{cases} -\Delta u(x) + c(x)u(x) = f(x), \ x \in \Omega \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

Qu'est-ce qu'un problème bien posé ?
Trouver E, F des ensembles fonctionnels tels que

pour tout $f \in F$, il existe un unique $u \in E$ tel que **(D)** soit satisfait

et

il existe $C_\Omega \in \mathbb{R}$ tel que $\forall f \in F$, $\|u\|_E \leq C_\Omega \|f\|_F$.

Définition V.2.1

On dit que u est **une solution classique** *si* $u \in C^0(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$.
Sinon, on parle de **solution faible ou variationnelle**.

Problème **elliptique**

$$\begin{cases} -u'' + cu = f \ \text{ dans }]a, b[\\ u(a) = u(b) = 0 \end{cases}$$

Problème **elliptique**

$$\begin{cases} -u'' + cu = f \text{ dans }]a,b[\\ u(a) = u(b) = 0 \end{cases}$$

Green $\Downarrow$ Green

Formulation **faible**

$$\forall \phi \in \mathcal{D}(]a,b[), \ \int_{]a,b[} u'\phi' + cu\phi = \int_{]a,b[} f\phi$$

Problème **elliptique**	$\begin{cases} -u'' + cu = f \text{ dans }]a,b[\\ u(a) = u(b) = 0 \end{cases}$
Green $\Downarrow$ Green	
Formulation **faible**	$\forall \phi \in \mathcal{D}(]a,b[),\ \int_{]a,b[} u'\phi' + cu\phi = \int_{]a,b[} f\phi$
Sobolev $\Downarrow$ Sobolev	
Formulation **variationnelle**	$H = H_0^1,\ \exists ? u \in H\ :\ \big(\forall v \in H : a(u,v) = \ell(v)\big)$

Problème **elliptique**

$$\begin{cases} -u'' + cu = f \text{ dans }]a,b[\\ u(a) = u(b) = 0 \end{cases}$$

Green $\Downarrow$ Green

Formulation **faible**

$$\forall \phi \in \mathcal{D}(]a,b[), \ \int_{]a,b[} u'\phi' + cu\phi = \int_{]a,b[} f\phi$$

Sobolev $\Downarrow$ Sobolev

Formulation **variationnelle**

$$H = H_0^1, \ \exists ? u \in H \ : \ \big(\forall v \in H : a(u,v) = \ell(v)\big)$$

Lax-Milgram $\Downarrow$ Lax-Milgram

Existence, unicité, continuité

de la solution variationnelle

$$a \text{ continue, coercive} : \exists\, !\, u \in H, \|u\|_H \leq C\|f\|_{L^2}$$

Problème **elliptique**	$\begin{cases} -u'' + cu = f \text{ dans }]a,b[\\ u(a) = u(b) = 0 \end{cases}$
Green $\Downarrow$ Green	
Formulation **faible**	$\forall \phi \in \mathcal{D}(]a,b[),\ \int_{]a,b[} u'\phi' + cu\phi = \int_{]a,b[} f\phi$
Sobolev $\Downarrow$ Sobolev	
Formulation **variationnelle**	$H = H_0^1,\ \exists ? u \in H : \big(\forall v \in H : a(u,v) = \ell(v)\big)$
Lax-Milgram $\Downarrow$ Lax-Milgram	
Existence, unicité, continuité de la solution variationnelle	a continue, coercive : $\exists\, !\, u \in H, \|u\|_H \leq C \|f\|_{L^2}$
Distributions $\Downarrow$ Distributions	
Solution au sens des distributions	$-u'' + cu = f$ au sens des distributions

Problème **elliptique**	$\begin{cases} -u'' + cu = f \text{ dans }]a, b[\\ u(a) = u(b) = 0 \end{cases}$
Green $\Downarrow$ Green	
Formulation **faible**	$\forall \phi \in \mathcal{D}(]a, b[),\ \int_{]a,b[} u'\phi' + cu\phi = \int_{]a,b[} f\phi$
Sobolev $\Downarrow$ Sobolev	
Formulation **variationnelle**	$H = H_0^1,\ \exists ? u \in H\ :\ \big(\forall v \in H : a(u, v) = \ell(v)\big)$
Lax-Milgram $\Downarrow$ Lax-Milgram	
Existence, unicité, continuité de la solution variationnelle	a continue, coercive : $\exists\,!\, u \in H, \|u\|_H \leq C\|f\|_{L^2}$
Distributions $\Downarrow$ Distributions	
Solution au sens des distributions	$-u'' + cu = f$ au sens des distributions
Green $\Downarrow$ Green	
Solution du problème elliptique	$u \in H^2(a, b) \cap H_0^1(a, b)$ solution
bien posé !	

Problème de Dirichlet

Soit $f \in L^2(0,1)$.

$$\begin{cases} -u'' + cu = f \text{ dans }]0,1[, \\ \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases}$$

Remarque V.2.2

1. *Résolution explicite possible !*
2. *EDP de transport-diffusion stationnaires (voir TD) :*

   $-u'' + bu' + cu = f$ *dans* $]0,1[$ *avec* b, c, f *fonctions données*
3. *Conditions au bord : Neumann, Dirichlet-Neumann, Robin*

Étape 1 : Obtention de la formulation faible

Objectif : écrire le problème sous forme faible

Étape 1 : Obtention de la formulation faible

Objectif : écrire le problème sous forme faible

- On suppose que $u \in C^2([0,1])$, $u(0) = u(1) = 0$ est solution.
- Soit $\phi \in C^1_c(]0,1[)$. Alors

$$\int_{]0,1[} f\phi = -\int_{]0,1[} u''\phi + \int_{]0,1[} cu\phi$$

Donc, par la formule de Green IPP),

$$\int_{]0,1[} f\phi = \int_{]0,1[} u'\phi' - [u'(1)\phi(1) - u'(0)\phi(0)] + \int_{]0,1[} cu\phi$$

Comme $\phi(0) = \phi(1) = 0$, on définit

$$\textbf{(FF)} \qquad \int_{]0,1[} f\phi = \int_{]0,1[} u'\phi' + \int_{]0,1[} cu\phi$$

Étape 2 : Obtention de la formulation variationnelle

Objectif :

écrire la formulation faible dans un espace de Hilbert H
sous forme « Lax-Milgram »

Étape 2 : Obtention de la formulation variationnelle

Objectif :
écrire la formulation faible dans un espace de Hilbert H
sous forme « Lax-Milgram »

1. on définit

   la forme bilinéaire : $a : (u, v) \longmapsto \displaystyle\int_{]0,1[} u'v' + \int_{]0,1[} cuv$

   la forme linéaire : $\ell : v \longmapsto \displaystyle\int_{]0,1[} fv$

2. a, ℓ définies : $H \subset H^1(0,1)$
3. u nulle au bord : $H = H_0^1(0,1)$,$(\cdot,\cdot)_{H_0^1} : (u,v) \mapsto \int_{]0,1[} u'\,v'$

(FV) Trouver $u \in H$ tq $\forall v \in H,\ a(u,v) = \ell(v)$

Étape 3 : Continuité de a et de ℓ

Objectif :

Appliquer le théorème de Lax-Milgram

Étape 3 : Continuité de a et de ℓ

Objectif :
Appliquer le théorème de Lax-Milgram

Soient $(u, v) \in (H_0^1(0,1))^2$. Grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$|a(u,v)| = \left| \int_{]0,1[} u'v' \right| \leq \|u'\|_{L^2} \|v'\|_{L^2} = \|u\|_{H_0^1} \|v\|_{H_0^1}$$

et, grâce à l'inégalité de Poincaré

$$|\ell(v)| = \left| \int_{]0,1[} fv \right| \leq \|f\|_{L^2} \|v\|_{L^2} \leq C_\Omega \|f\|_{L^2} \|v\|_{H_0^1}$$

Les formes a et ℓ sont donc bien continues.

Étape 4 : Coercivité de a

Objectif :

Appliquer le théorème de Lax-Milgram

Étape 4 : Coercivité de a

Objectif :
Appliquer le théorème de Lax-Milgram

Soit $u \in H_0^1(0,1)$. Alors

$$a(u,u) = \int_{]0,1[} cu^2 + \int_{]0,1[} u'^2 \geq \|u\|^2_{H_0^1}.$$

La forme a est donc coercive !

Remarque V.2.3

- *On voit que la norme H_0^1 n'a pas été choisie par hasard.*
- *C'est en général l'étape la plus délicate.*

Étape 5 : Existence et unicité de la solution variationnelle

On applique le théorème de Lax-Milgram à (FV) :

Étape 5 : Existence et unicité de la solution variationnelle

On applique le théorème de Lax-Milgram à (FV) :

Trouver $u \in H$ **tq**

$$\forall v \in H, \quad a(u,v) = \ell(v)$$

avec

1. $H = H_0^1(0,1)$ espace de Hilbert,
2. $a : H \times H \to \mathbb{R}$ bilinéaire et $\ell : H \to \mathbb{R}$ linéaire, continues,
3. a coercive.

Il existe un et un seul $u \in H$ tel que $\forall v \in H, \quad a(u,v) = \ell(v)$.

$$\text{De plus} \quad a(u,u) = \ell(u) \quad \Longrightarrow \quad \|u\|_{H_0^1} \leq C_\Omega \|f\|_{L^2}.$$

La formulation variationnelle est donc bien posée.

Étape 6 : Résolution de l'EDP dans $\mathcal{D}'(]0,1[)$

Étape 6 : Résolution de l'EDP dans $\mathcal{D}'(]0,1[)$

Comme $\mathcal{D}(]0,1[) \subset H_0^1(]0,1[)$, on a

$$\forall \phi \in \mathcal{D}(]0,1[), \quad \int_{]0,1[} f\phi = \int_{]0,1[} u'\phi' + \int_{]0,1[} cu\phi$$

c'est-à-dire

$$\forall \phi \in \mathcal{D}(]0,1[), \quad \langle f, \phi \rangle = \left\langle u', \phi' \right\rangle + \langle cu, \phi \rangle$$

Ceci est équivalent à

$$\forall \phi \in \mathcal{D}(]0,1[), \quad \left\langle -u'' + cu - f, \phi \right\rangle = 0.$$

Ainsi

$$f = -u'' + cu \qquad \text{dans } \mathcal{D}'(]0,1[) \quad \text{et} \quad u(0) = u(1) = 0.$$

Étape 7 : Régularité de la solution de l'EDP

Étape 7 : Régularité de la solution de l'EDP

Si $f \in L^2(0,1)$, comme $u \in H^1(0,1)$ et $-u'' = f - cu$ dans $\mathcal{D}'(]0,1[)$,

$$\boxed{u \in H^2(0,1)}$$

De plus, grâce à l'inégalité de Poincaré,

$$\|u\|_{H^2} = \sqrt{\|u\|_{H^1}^2 + \|u''\|_{L^2}^2} \leq \sqrt{(1 + C_\Omega^2)\|u\|_{H_0^1}^2 + \|f\|_{L^2}^2}$$
$$\leq \sqrt{2 + C_\Omega^2}\, C_\Omega \, \|f\|_{L^2}.$$

Remarque V.2.4

Si $f \in C^0([0,1]) \cap L^2(0,1)$, la solution $u \in C^2([0,1])$ est une solution classique du problème.

Résumé

Théorème V.2.5

Soit $f \in L^2(0,1)$. Alors le problème :
Trouver une solution $u \in H^2(0,1) \cap H_0^1(0,1)$ telle que

$$\begin{cases} f = -u'' + cu \;\; \text{dans }]0,1[\\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases}$$

est **bien posé** *: il existe une constante $\mathcal{C}_\Omega > 0$ telle que, à $f \in L^2(\Omega)$ donnée, il* **existe** *une* **unique** *solution $u_f \in H^2(0,1) \cap H_0^1(0,1)$ dépendant* **continûment** *de f : elle vérifie*

$$\|u_f\|_{H^2} \leq \mathcal{C}_\Omega \|f\|_{L^2}.$$

7 étapes

A retenir !

1. Détermination de la **formulation faible**
2. Détermination de la **formulation variationnelle**
3. Démonstration de la **continuité** des formes a et ℓ
4. Démonstration de la **coercivité** de a
5. Application du théorème de **Lax-Milgram**
6. Solution au sens des **distributions**
7. **Régularité** de la solution

Types de problèmes

En TD, on verra des techniques :

- pour un problème de Dirichlet non homogène ($a, b \in \mathbb{R}$, $f, c \in C^0([0,1])$, $c \geq 0$)

$$\begin{cases} -u'' + cu = f & \text{dans }]0,1[, \\ u(0) = a \quad \text{et} & u(1) = b. \end{cases}$$

- pour un problème de Neumann non homogène ($\alpha \in \mathbb{R}$, $f, c \in C^0([0,1])$, $c > 0$)

$$\begin{cases} -u'' + cu = f & \text{dans }]0,1[, \\ u'(0) = \alpha \quad \text{et} & u'(1) = 0. \end{cases}$$

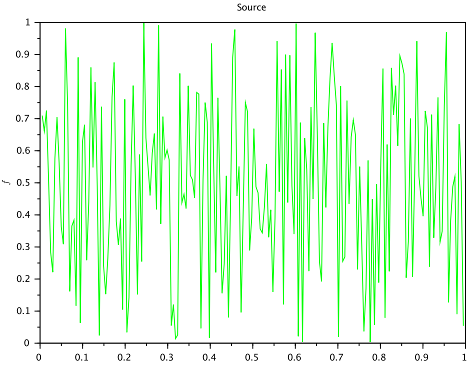
- pour un problème de Dirichlet-Neumann ($f, c \in C^0([0,1])$, $c \geq 0$)

$$\begin{cases} -u'' + cu = f & \text{dans }]0,1[, \\ u(0) = 0 \quad \text{et} & u'(1) = 0. \end{cases}$$

Exemple de régularisation

Résolution de

$$\begin{cases} -u'' = f \text{ dans }]0,1[\\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

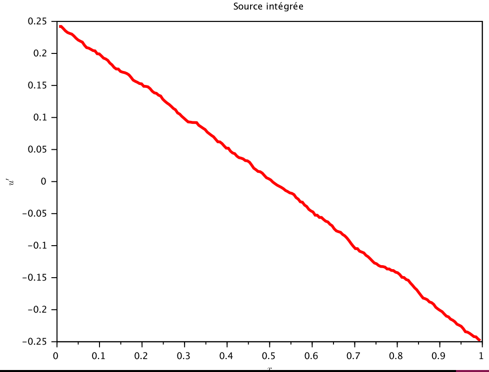


$f \in L^2(0,1)$

Exemple de régularisation

Résolution de

$$\begin{cases} -u'' = f \text{ dans }]0,1[\\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

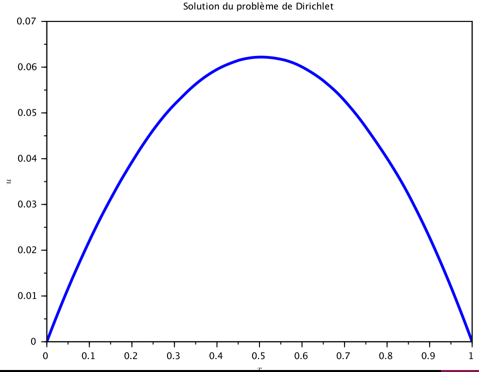


$u' \in H^1(0,1)$

Exemple de régularisation

Résolution de

$$\begin{cases} -u'' = f \text{ dans }]0,1[\\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

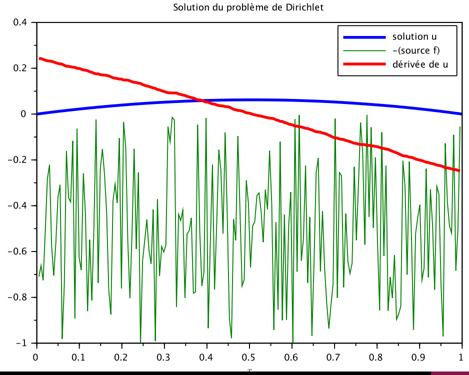


$$u \in H^2(0,1) \cap H^1_0(0,1)$$

Exemple de régularisation

Résolution de

$$\begin{cases} -u'' = f \text{ dans }]0,1[\\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$



$f \in L^2(0,1)$

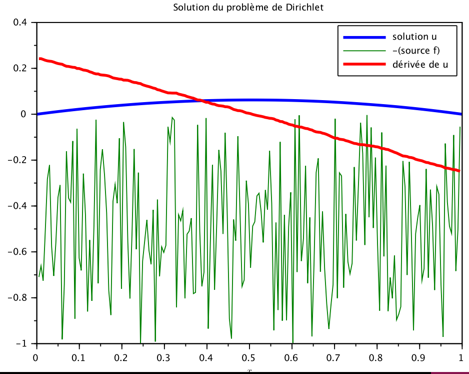
$u' \in H^1(0,1)$

$u \in H^2(0,1)$

Exemple de régularisation

Résolution de

$$\begin{cases} -u'' = f \text{ dans }]0,1[\\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$



$f \geq 0$

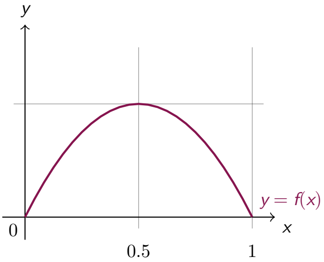
$u' \searrow$

$u(0) = u(1) = 0$ et $u \geq 0$

Propriété qualitative de la solution

Définition-Théorème V.2.6 (Principe du maximum)

Soit $f \in L^2(0,1)$, telle que $f \geq 0$ p. p. Alors la solution u, de classe $C^1([0,1])$, de **(D)** *est positive sur $[0,1]$.*



Régularité des espaces de Sobolev en dimension 1

Théorème IV.3.4 « de Rellich » en dimension 1

Soit $I =]a, b[$ un intervalle ouvert borné de $\mathbb{R}$. Toute fonction u de $H^1(a, b)$ admet un représentant continu $\bar{u}$ sur $[a, b]$ qui est une primitive de u', i.e. tel que

$$\forall x, y \in [a, b], \quad \bar{u}(x) - \bar{u}(y) = \int_{[y,x]} u'(t)\lambda(dt).$$

De plus,

(i) il existe une constante $C > 0$, ne dépendant que de $b - a$, telle que

$$\forall u \in H^1(a, b), \quad \|\bar{u}\|_\infty \leq C\|u\|_{H^1}$$

(ii) de toute suite bornée de $H^1(a, b)$, on peut extraire une sous-suite qui **converge dans** $C^0([a, b])$.

Régularité des espaces de Sobolev en dimension $d \geq 2$

Théorème V.2.7

Théorème de Rellich Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^d$, de classe C^1. On a

- *si $d = 2$, $H^1(\Omega) \subset L^q(\Omega)$, $\forall q \in [1, +\infty[$,*
- *si $d > 2$, $H^1(\Omega) \subset L^q(\Omega)$, $\forall q \in \left[1, \dfrac{2d}{d-2}\right[$,*

avec injections ***compactes****.*

Remarque V.2.8

Les fonctions de $H^1(\Omega)$ ne sont continues qu'en dimension $d = 1$!

On peut montrer que, si $k > d/2$, $H^k(\Omega)$ est un sous-espace vectoriel de $C^0(\overline{\Omega})$.

Exemple

Résultat de densité

Théorème V.2.9

Soit Ω un ouvert borné régulier de classe C^1, ou $\Omega = \mathbb{R}^d_+$, ou $\Omega = \mathbb{R}^d$, alors $C^\infty_c(\overline{\Omega}) \cap H^1(\Omega)$ est dense dans $H^1(\Omega)$.

Utile pour étendre des résultats vrais pour des fonctions régulières.

Remarque V.2.10

Si Ω est borné,

$$C^\infty_c(\overline{\Omega}) = C^\infty(\overline{\Omega}).$$

Il faut bien faire la différence avec $\mathcal{D}(\Omega)$!

Théorème de trace

En dimension $d = 1$, Définition IV.3.5 et Théorème IV.3.6.
Si $d \geq 2$, $H^1(\Omega) \not\subset C^0(\overline{\Omega})$.
$\Longrightarrow$ pas de définition ponctuelle de la trace

Définition-Théorème V.2.11 (Théorème IV.3.6)

Soit Ω à bord régulier de classe C^1. On définit l'application **trace** γ_0 *par*

$$\begin{aligned} \gamma_0 : H^1(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega}) &\longrightarrow L^2(\partial\Omega) \cap C^0(\partial\Omega) \\ v &\longmapsto v|_{\partial\Omega}. \end{aligned}$$

Cette application se prolonge par continuité en une application linéaire continue de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\partial\Omega)$:

$$\exists C_\Omega > 0 \,:\, \forall v \in H^1(\Omega), \quad \|\gamma_0 v\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq C_\Omega \|v\|_{H^1(\Omega)}.$$

Applications : formules de Green

Soit Ω borné à bord régulier de classe C^1.

Théorème V.2.12 (Intégration par parties (IV.3.7))

Soient $u, v \in H^1(\Omega)$. Alors

$$\forall i \in \{1, \ldots, d\}, \quad \int_\Omega u \, \partial_{x_i} v = - \int_\Omega v \partial_{x_i} u + \int_{\partial\Omega} u \, v \, n_i.$$

Théorème V.2.13 (Intégration par parties (IV.3.8))

Soient $u \in H^2(\Omega)$ et $v \in H^1(\Omega)$. Alors

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v + \int_\Omega (\Delta u) \, v = \int_{\partial\Omega} v \nabla u \cdot n.$$

L'espace $H_0^1(\Omega)$

Soit Ω un ouvert borné régulier de classe C^1.
$\mathcal{D}(\Omega)$ est dense dans $L^2(\Omega)$, mais pas dans $H^1(\Omega)$!

Définition V.2.14 (IV.3.9)

$H_0^1(\Omega) := \overline{\mathcal{D}(\Omega)}$ pour la norme H^1.

Proposition V.2.15 (IV.3.10)

(i) *$H_0^1(\Omega) \subset H^1(\Omega)$ et $H_0^1(\Omega) \neq H^1(\Omega)$.*

(ii) *En termes de trace, on a $H_0^1(\Omega) = \gamma_0^{-1}\left(\left\{0_{L^2(\partial\Omega)}\right\}\right)$.*

(iii) *L'espace $H_0^1(\Omega)$ muni de la norme H^1 est un espace de Hilbert.*

Inégalité de Poincaré

Théorème V.2.16 (Inégalité de Poincaré ou Friedrichs (IV.3.11 bis))

Si Ω est un ouvert borné dans au moins une direction de $\mathbb{R}^d$, alors il existe une constante C_Ω ne dépendant que de Ω telle que

$$\forall v \in H_0^1(\Omega), \quad \|v\|_{L^2(\Omega)} \leq C_\Omega \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}.$$

La semi-norme $v \mapsto \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}$ définie sur H^1 par

$$v \mapsto |v|_{H^1(\Omega)} := \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} = \sqrt{\sum_{k=1}^{d} \|\partial_{x_i} v\|_{L^2(\Omega)}^2}$$

vérifie dans $H_0^1(\Omega)$:

$$\forall v \in H_0^1(\Omega), \quad |v|_{H^1(\Omega)} \leq \|v\|_{H^1(\Omega)} \leq \sqrt{1 + C_\Omega^2}\, |v|_{H^1(\Omega)}.$$

Conséquence sur $H_0^1(\Omega)$

Définition V.2.17 (IV.3.12 bis)

On définit $\|\cdot\|_{H_0^1} := |\cdot|_{H^1}$ *et*

$$(\cdot,\cdot)_{H_0^1} : (u,v) \in H_0^1 \times H_0^1 \mapsto \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v.$$

Théorème V.2.18 (IV.3.13 bis)

L'espace $H_0^1(\Omega)$ *muni du produit scalaire* $(\cdot,\cdot)_{H_0^1}$ *est un espace de Hilbert.*

Problème de Dirichlet

Soit $f \in L^2(\Omega)$.

$$\begin{cases} -\Delta u = f \text{ dans } \Omega, \\ \\ u|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases}$$

Remarque V.2.19

1. *Pas de résolution explicite en général !*
2. *EDP de transport-diffusion stationnaires (voir TD) :*

   $-\Delta u + b \cdot \nabla u + cu = f$ *dans* Ω *avec* b, c, f *fonctions données*
3. *Conditions au bord : Neumann, Dirichlet-Neumann, Robin*

Existence et unicité

Théorème V.2.20

Soient Ω ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^d$, $d \geq 1$ et $f \in L^2(\Omega)$.

1. *Il* ***existe*** *une* ***unique*** *solution $u \in H_0^1(\Omega)$ de la* **formulation variationnelle** *associée au problème de Dirichlet* **(D)**. *De plus, u vérifie*

$$-\Delta u = f \text{ p.p. dans } \Omega \quad \text{et} \quad u \in H_0^1(\Omega).$$

Il existe $\mathcal{C}_\Omega$ indépendante de f telle que

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq \mathcal{C}_\Omega \|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

2. *Si Ω est de plus régulier de classe C^1, alors u est solution de* **(D)** *au sens où*

$$-\Delta u = f \text{ p.p. dans } \Omega \quad \text{et} \quad u = 0 \text{ p.p. sur } \partial\Omega.$$

Étape 1 : Obtention de la formulation faible

Objectif : écrire le problème sous forme faible

- On suppose que $u \in C^2(\overline{\Omega})$, $u|_{\partial\Omega} = 0$ est solution.
- Soit $\phi \in C_c^1(\Omega)$. Alors

$$-\int_\Omega (\Delta u)\phi = \int_\Omega f\phi.$$

Donc, par la formule de Green (IPP),

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \phi - \int_{\partial\Omega} \phi \nabla u \cdot n = \int_\Omega f\phi.$$

Comme $\phi|_{\partial\Omega} = 0$, on définit

(FF) $$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \phi = \int_\Omega f\phi.$$

Étape 2 : Obtention de la formulation variationnelle

Objectif :
écrire la formulation faible dans un espace de Hilbert H
sous forme « Lax-Milgram »

1. on définit

$$\text{la forme bilinéaire :} \qquad a : (u, v) \longmapsto \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v$$

$$\text{la forme linéaire :} \qquad \ell : v \longmapsto \int_\Omega f v$$

2. a, ℓ définies : $H \subset H^1(\Omega)$
3. u nulle au bord : $H = H_0^1(\Omega), (\cdot, \cdot)_{H_0^1} : (u, v) \mapsto \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v$

(FV) Trouver $u \in H$ tq $\forall v \in H$, $a(u, v) = \ell(v)$.

Étape 3 : Continuité de a et de ℓ

Objectif :
Appliquer le théorème de Lax-Milgram

Soient $(u, v) \in (H_0^1(\Omega))^2$. Grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$|a(u,v)| = \left| \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \right| \leq \|\nabla u\|_{L^2} \|\nabla v\|_{L^2} = \|u\|_{H_0^1} \|v\|_{H_0^1}$$

et, grâce à l'inégalité de Poincaré

$$|\ell(v)| = \left| \int_\Omega f v \right| \leq \|f\|_{L^2} \|v\|_{L^2} \leq C_\Omega \|f\|_{L^2} \|v\|_{H_0^1}$$

Les formes a et ℓ sont donc bien continues.

Étape 4 : Coercivité de a

Objectif :
Appliquer le théorème de Lax-Milgram

Soit $u \in H_0^1(\Omega)$. Alors

$$a(u,u) = \int_0^1 \|\nabla u\|^2_{\mathbb{R}^d} = \|u\|^2_{H_0^1}.$$

La forme a est donc coercive !

Remarque V.2.21

- *On voit que la norme H_0^1 n'a pas été choisie par hasard !*
- *C'est en général l'étape la plus délicate.*

Étape 5 : Existence et unicité de la solution variationnelle

On applique le théorème de Lax-Milgram à (FV) :

Trouver $u \in H$ **tq**

$$\forall v \in H, \quad a(u,v) = \ell(v)$$

avec

1. H espace de Hilbert,
2. $a : H \times H \to \mathbb{R}$ bilinéaire et $\ell : H \to \mathbb{R}$ linéaire, continues,
3. a coercive.

Il existe un et un seul $u \in H$ tel que $\forall v \in H, \quad a(u,v) = \ell(v)$.

$$\text{De plus} \quad a(u,u) = \ell(u) \quad \Longrightarrow \quad \|u\|_{H_0^1} \leq C_\Omega \|f\|_{L^2}.$$

La formulation variationnelle est donc bien posée.

Étape 6 : Résolution de l'EDP dans $\mathcal{D}'(\Omega)$

Comme $\mathcal{D}(\Omega) \subset H_0^1(\Omega)$, on a

$$\forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega), \quad \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \phi = \int_\Omega f \phi,$$

c'est-à-dire

$$\forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega), \quad \langle \nabla u, \nabla \phi \rangle = \langle f, \phi \rangle \, .$$

Ceci est équivalent à

$$\forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega), \quad \langle -\Delta u - f, \phi \rangle = 0.$$

Ainsi

$$-\Delta u = f \qquad \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega) \qquad \text{et} \quad u|_{\partial\Omega} = 0 \quad \text{dans} \quad L^2(\partial\Omega).$$

Étape 7 : Régularité de la solution de l'EDP

Si $f \in L^2(0,1)$, $-\Delta u \in L^2(\Omega)$ et $-\Delta u = f$ p.p.

Si Ω régulier à bord C^1, par le thm de trace, $u \stackrel{L^2}{=} 0$ sur $\partial\Omega$.

Remarque V.2.22

- **Attention !** *On ne peut plus conclure immédiatement que $u \in H^2(\Omega)$, comme dans le cas $d = 1$.*
- *C'est* **faux en général**.
- *C'est vrai si le bord est régulier (disques, boules, etc.), si Ω est un polygone convexe ou si c'est l'image d'un polygone convexe par un difféomorphisme, mais pas si c'est un polygone non convexe.*

Concepts

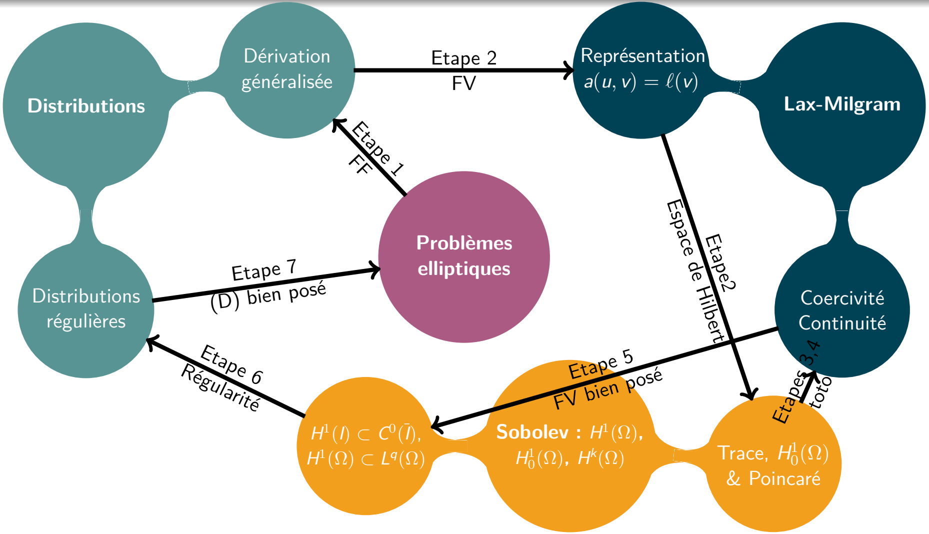
Distributions
Dérivation généralisée
Distributions régulières

Représentation $a(u, v) = \ell(v)$
Lax-Milgram
Coercivité Continuité

Problèmes elliptiques

$H^1(I) \subset C^0(\bar{I})$, $H^1(\Omega) \subset L^q(\Omega)$
Sobolev : $H^1(\Omega)$, $H_0^1(\Omega)$, $H^k(\Omega)$
Trace, $H_0^1(\Omega)$ & Poincaré

Concepts


Distributions
Dérivation généralisée
Etape 2
FV
Représentation $a(u, v) = \ell(v)$
Lax-Milgram
Etape 1
FF
Problèmes elliptiques
Espace de Hilbert
Etape2
Etape 7
(D) bien posé
Distributions régulières
Coercivité Continuité
Etapes 3,4
toto
Etape 6
Régularité
Etape 5
FV bien posé
$H^1(I) \subset C^0(\bar{I})$, $H^1(\Omega) \subset L^q(\Omega)$
Sobolev : $H^1(\Omega)$, $H^1_0(\Omega)$, $H^k(\Omega)$
Trace, $H^1_0(\Omega)$ & Poincaré

Trois aspects en pratique

Trouver $u : (x, y) \mapsto u(x, y),\ u \in E$ telle que

$$\begin{cases} -\Delta u = \underbrace{(8\,y(1-y)+1)\ \sin(4\pi x)}_{\text{source } f(x,y)} \text{ dans }]0,1[\times]0,1[\\ u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

Trois aspects en pratique

Trouver $u : (x, y) \mapsto u(x, y),\ u \in E$ telle que

$$\begin{cases} -\Delta u = \underbrace{(8\,y(1-y)+1)\,\sin(4\pi x)}_{\text{source } f(x,y)} \text{ dans }]0,1[\times]0,1[\\ u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

- Existence dans E d'une solution par théorème

Trois aspects en pratique

Trouver $u : (x, y) \mapsto u(x, y)$, $u \in E$ telle que

$$\begin{cases} -\Delta u = \underbrace{(8\,y(1-y)+1)\,\sin(4\pi x)}_{\text{source } f(x,y)} \text{ dans }]0,1[\times]0,1[\\ u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

- Existence dans E d'une solution par théorème
- Unicité dans E

Trois aspects en pratique

Trouver $u : (x, y) \mapsto u(x, y)$, $u \in E$ telle que

$$\begin{cases} -\Delta u = \underbrace{(8\,y(1-y)+1)\,\sin(4\pi x)}_{\text{source } f(x,y)} \text{ dans }]0,1[\times]0,1[\\ u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

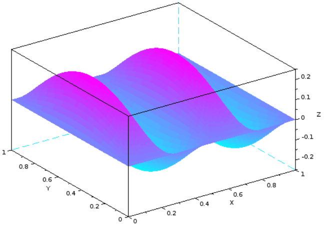
- Existence dans E d'une solution par théorème
- Unicité dans E
- Approche quantitative (Fourier, résolution d'un problème approché, éléments finis...)

Trois aspects en pratique

Trouver $u : (x, y) \mapsto u(x, y)$, $u \in E$ telle que

$$\begin{cases} -\Delta u = \underbrace{(8\,y\,(1-y)+1)\,\sin(4\pi x)}_{\text{source } f(x,y)} \text{ dans }]0,1[\times]0,1[\\ u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

- Existence dans E d'une solution par théorème
- Unicité dans E
- Approche quantitative (Fourier, résolution d'un problème approché, éléments finis...)



$\Longrightarrow$ On a **LA** solution : $u : (x, y) \longmapsto \dfrac{y\,(1-y)}{2}\sin(4\pi x)$