

# 埃尔米特伴随

维基百科，自由的百科全书

数学上，特别是泛函分析中，希尔伯特空间中的每个线性算子有一个相应的**伴随算子**（adjoint operator）。算子的伴随将方块矩阵共轭转置推广到（可能）无穷维情形。如果我们将希尔伯特空间上的算子视为“广义复数”，则一个算子的伴随起着 一个复数的共轭的作用。

一个算子*A*的伴随常常也称为**埃尔米特伴随**（Hermitian adjoint，以夏尔·埃尔米特命名），记作*A*<sup>\*</sup>或*A*<sup>†</sup>（后者尤其用于狄拉克符号记法）。

## 目录

有界算子

性质

埃尔米特算子

无界算子的伴随

其他伴随

又见

参考文献

## 有界算子

假设*H*是一个希爾伯特空間，帶有內積 ⟨⋅,⋅⟩。考慮連續線性算子*A* : *H* → *H*（這與有界算子相同）。

利用里斯表示定理，我們可以證明存在惟一的連續線性算子

*A*<sup>\*</sup> : *H* → *H*具有如下性質：

$$\langle Ax,y\rangle=\langle x,A^*y\rangle,\text{ 对所有 }x,y\in H.$$

這個算子*A*<sup>\*</sup> 是*A*的伴随。

這可以視為一個方塊矩陣的轉置共軛或伴随矩陣推廣，在標準（復）內積下具有相似的性質。

## 性质

马上可得性质

- A*<sup>\*\*</sup> = *A*
- 如*A*可逆，则*A*<sup>\*</sup> 也可逆，且 (*A*<sup>\*</sup>)<sup>−1</sup> = (*A*<sup>−1</sup>)<sup>\*</sup>
- (*A* + *B*)<sup>\*</sup> = *A*<sup>\*</sup> + *B*<sup>\*</sup>
- (λ*A*)<sup>\*</sup> = λ<sup>\*</sup> *A*<sup>\*</sup>，这里λ<sup>\*</sup> 表示复数λ的复共轭
- (*AB*)<sup>\*</sup> = *B*<sup>\*</sup> *A*<sup>\*</sup>

如果我们定义*A*的算子范数为

$$\|A\|_{op} := \sup\{\|Ax\| : \|x\| \leq 1\}$$

则

$$\|A^*\|_{op} = \|A\|_{op},$$

而且有

$$\|A^*A\|_{op} = \|A\|_{op}^2.$$

希尔伯特空间 $H$ 上有界线性算子与伴随算子以及算子范数给出一个 $C^*$ 代数例子。

$A$ 的像与它的伴随的核的关系为

$$\begin{aligned}\ker A^* &= (\operatorname{im} A)^\perp, \\ (\ker A^*)^\perp &= \overline{\operatorname{im} A}.\end{aligned}$$

第一个等式的证明：

$$\begin{aligned}A^*x = 0 &\iff \langle A^*x, y \rangle = 0 \quad \forall y \in H \\ &\iff \langle x, Ay \rangle = 0 \quad \forall y \in H \\ &\iff x \perp \operatorname{im} A\end{aligned}$$

第二个等式由第一个推出，于两边取正交空间即可。注意到一般地，像未必是闭的，但连续算子的核总是闭的。

## 埃尔米特算子

---

有界算子 $A: H \rightarrow H$ 称为埃尔米特或自伴如果

$$A = A^*$$

这等价于

$$\langle Ax, y \rangle = \langle x, Ay \rangle, \forall x, y \in H.$$

在某种意义下，这种算子起着实数（等于他们的复共轭）的作用。他们在量子力学中作为实值可观测量的模型。更多细节参见自伴算子一文。

## 无界算子的伴随

---

许多重要的算子不是连续的或只定义在希尔伯特的一个子空间上。在这种情形，我们仍然能定义伴随，在自伴算子一文有解释。

## 其他伴随

---

范畴论中，方程

$$\langle Ax, y \rangle = \langle x, A^*y \rangle$$

形式上类似地定义了伴随函子偶性质，这也是伴随函子得名之由来。

## 又见

---

- 数学概念
  - 线性代数
  - 内积
  - 希尔伯特空间
  - 埃尔米特算子
  - 范数
  - 算子范数
  - 线性映射的转置
- 物理应用
  - 对偶空间
  - 狄拉克符号
  - 量子力学
  - 可观测量

## 参考文献

---

- Walter Rudin. *Functional Analysis*(2nd ed.), China Machine Press, 2006
- 

取自“<https://zh.wikipedia.org/w/index.php?title=埃尔米特伴随&oldid=42448951>”

---

本页面最后修订于2016年12月13日 (星期二) 20:32。

本站的全部文字在知识共享 署名-相同方式共享 3.0协议之条款下提供，附加条款亦可能应用。（请参阅使用条款）  
Wikipedia®和维基百科标志是维基媒体基金会的注册商标；维基™是维基媒体基金会的商标。  
维基媒体基金会是按美国国内税收法501(c)(3)登记的非营利慈善机构。