计算方法

令 丹

数学与统计学院

邮箱：danling@xjtu.edu.cn

第五章　函数最优逼近

主要内容

函数逼近

- $f(x)$ 为比较复杂的连续函数
- $f(x)$ 为列表函数
  ($f(x)$ 未知, $f(x)$ 在 $X = \{x_1, x_2, \cdots, x_m\}$ 上的函数值已知)

Q: 如何得到 $f(x)$ 的近似表达式?

函数逼近问题

$$|f(x) - p(x)| \text{ 在不同度量意义下最小} \Longrightarrow \begin{cases} \text{最优平方逼近} \\ \text{最优一致逼近} \end{cases}$$

1. 函数的内积、范数和正交多项式

函数空间

$C[a,b]$: $[a,b]$ 上所有连续函数构成的集合. $\longrightarrow$ 线性空间

定义

设 $V \subset C[a,b]$ 是 $C[a,b]$ 的一个线性子空间, 函数

$$\varphi_0(x), \varphi_1(x), \cdots, \varphi_n(x) \in V$$

以及 $c_i \in \mathbf{R}$ $(i = 0, 1 \cdots, n)$, 如果关系式

$$c_0\varphi_0(x) + c_1\varphi_1(x) + \cdots + c_n\varphi_n(x) = 0$$

当且仅当 $c_i = 0$ $(i = 0, 1 \cdots, n)$ 时成立, 则称

$$\varphi_0(x), \varphi_1(x), \cdots, \varphi_n(x)$$

线性无关; 否则为线性相关.

线性子空间

若 $\varphi_0(x),\cdots,\varphi_n(x)$ 线性无关, V 是由其生成的子空间, 记为

$$V=\mathrm{span}\{\varphi_0(x),\varphi_1(x),\cdots,\varphi_n(x)\},$$

则称 $\varphi_0(x),\cdots,\varphi_n(x)$ 为 V 的一组基函数, 且 $\forall p(x)\in V$ 有

$$p(x)=c_0\varphi_0(x)+c_1\varphi_1(x)+\cdots+c_n\varphi_n(x)\quad\longrightarrow\quad\text{广义多项式}$$

其中 $c_0,\cdots,c_n$ 称为 $p(x)$ 在基 $\varphi_0(x),\cdots,\varphi_n(x)$ 下的坐标.

特别地, 若取 $\varphi_i(x)=x^i\ (i=0,1,\cdots,n)$, 则 p 为不超过 n 次的多项式.

$$\boxed{\begin{aligned}H_n&=\mathrm{span}\left\{1,x,x^2,\cdots,x^n\right\}\\&=\left\{p_n(x)\mid p_n(x)\ \text{为不超过}\ n\ \text{次的多项式}\right\}\end{aligned}}$$

列表函数的内积

定义

已知函数 $f(x), g(x)$ 在点集 $X = \{x_1, x_2, \cdots, x_m\}$ 上的函数值 $f(x_i)$ 和 $g(x_i)$, 以及权系数 $w_i > 0$ $(i = 1, 2, \cdots, m)$, 则

$$(f, g) = \sum_{i=1}^{m} w_i f(x_i) g(x_i)$$

称为 f 与 g 在点集 X 上关于权系数 w_i 的内积.

连续函数的内积

定义

给定 $f(x), g(x) \in C[a,b]$, $w(x) \geqslant 0$ 是 $[a,b]$ 上的权函数, 则

$$(f,g) = \int_a^b w(x)f(x)g(x)dx$$

称为 f 与 g 在区间 $[a,b]$ 上关于权函数 $w(x)$ 的内积, 其中积分上下限可取无穷大.

函数内积的性质

(1) $(f,g)=(g,f)$

(2) $\forall\alpha\in\mathbf{R},\ (\alpha f,g)=\alpha(f,g)$

(3) $(f+h,g)=(f,g)+(h,g)$

(4) $(f,f)\geqslant 0,\ (f,f)=0 \iff f\equiv 0$

函数的范数

(1) $f(x)$ 是 $X=\{x_1,\cdots,x_m\}$ 上的列表函数, 则

$$\|f(x)\|_2=\left(\sum_{i=1}^{m} w_i f^2(x_i)\right)^{1/2}$$

(2) $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的连续函数, 则

$$\|f(x)\|_2=\left(\int_a^b w(x)f^2(x)dx\right)^{1/2} \quad \longrightarrow \quad 2-\text{范数}$$

$$\|f(x)\|_\infty=\max_{a\leqslant x\leqslant b}\left|f(x)\right| \quad \longrightarrow \quad \infty-\text{范数}$$

$$\|f(x)\|_1=\int_a^b \left|f(x)\right|dx \quad \longrightarrow \quad 1-\text{范数}$$

函数范数的性质

(1) **正定性：** $\|f\| \geqslant 0,\ \|f\| = 0 \iff f \equiv 0$

(2) **齐次性：** $\forall \alpha \in \mathbf{R},\ \|\alpha f\| = |\alpha| \|f\|$

(3) **三角不等式：** $\|f + g\| \leqslant \|f\| + \|g\|$

正交函数

定义

(1) 设 $f(x), g(x)$ 是 $X = \{x_1, \cdots, x_m\}$ 上的列表函数, 若内积

$$(f, g) = \sum_{i=1}^{m} w_i f(x_i) g(x_i) = 0,$$

则称 f 与 g 在点集 X 上关于权系数 w_i 正交.

(2) 设 $f(x), g(x)$ 是定义在区间$C[a, b]$ 的连续函数, 若内积

$$(f, g) = \int_a^b w(x) f(x) g(x) dx = 0,$$

则称 f 与 g 在区间 $[a, b]$ 上关于权函数 $w(x)$ 正交.

正交函数

- 正交函数族：$\{g_k(x)\}$

$$(g_i, g_j) = \int_a^b w(x) g_i(x) g_j(x) dx = \begin{cases} 0, & j \neq i, \\ \gamma_i, & j = i. \end{cases}$$

- 标准正交函数族：$\gamma_i \equiv 1.$
- 正交多项式：$g_k(x)$ 是 k 次多项式.

正交多项式

性质

设 $g_0(x), g_1(x), \cdots, g_n(x)$ 是正交多项式, 则它们线性无关.

证 设存在常数 $c_0, c_1, \cdots, c_n$ 使得

$$c_0 g_0(x) + c_1 g_1(x) + \cdots + c_n g_n(x) = 0.$$

两边用 $g_k(x)$ 作内积得

$$0 = \left(\sum_{i=0}^{n} c_i g_i, g_k \right) = \sum_{i=0}^{n} c_i (g_i, g_k) = c_k (g_k, g_k) \implies c_k = 0, \forall k,$$

即 $g_0(x), g_1(x), \cdots, g_n(x)$ 线性无关.

正交多项式

推论

任意次数低于 n 的 k 次多项式 $p_k(x)$ $(k < n)$ 与 n 次正交多项式 $g_n(x)$ 正交.

证 由 $g_0(x), g_1(x), \cdots, g_k(x)$ 线性无关知, 任意 k 次多项式 $p_k(x)$ 可由 $g_0(x), g_1(x), \cdots, g_k(x)$ 线性表示, 即存在常数 $c_0, c_1, \cdots, c_k$ 使得

$$p_k(x) = c_0 g_0(x) + c_1 g_1(x) + \cdots + c_k g_k(x),$$

从而有

$$(p_k, g_n) = \left(\sum_{i=0}^{k} c_i g_i, g_n \right) = \sum_{i=0}^{k} c_i (g_i, g_n) = 0, \ \ k < n.$$

正交多项式

性质

在正交区间 $[a,b]$ 或 $[\min x_i, \max x_i]$ 上, n 次正交多项式 $g_n(x)$ 恰有 n 个不同的实零点.

证 先证在正交区间上 $g_n(x)$ 必有奇重零点. 采用反证法.
设 $g_n(x)=0$ 全是偶重根, 则

$$g_n(x)=(x-\alpha_1)^{r_1}(x-\alpha_2)^{r_2}\cdots(x-\alpha_j)^{r_j}q(x),$$

其中 $q(x)\neq 0$ 且不变号.

正交多项式

不妨设 $q(x) > 0$, $r_1, r_2, \cdots, r_j$ 均是偶数, 且 $r_1 + r_2 + \cdots + r_j \leqslant n$. 由 $q(x) > 0$ 知 $g_n(x) \geqslant 0$, 从而有

$$0 = (1, g_n) = \int_a^b w(x) g_n(x) dx > 0$$

$$\text{或} \quad = \sum_{i=1}^{m} w_i g_n(x_i) > 0.$$

矛盾, 于是 $g_n(x)$ 必有奇重零点.

设奇重零点 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k$ 的重数分别为 $r_1, r_2 \cdots, r_k$, 且 $r_1 + r_2 + \cdots + r_k \leqslant n$, 则

$$g_n(x) = (x - \alpha_1)^{r_1} (x - \alpha_2)^{r_2} \cdots (x - \alpha_k)^{r_k} q(x),$$

其中 $q(x) \neq 0$ 且不变号, 不妨设 $q(x) > 0$.

正交多项式

假定 $k < n$, 构造 k 次多项式

$$p_k(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \cdots (x - \alpha_k).$$

由推论 5.1.1 知

$$0 = (p_k, g_n) = \int_a^b w(x) p_k(x) g_n(x) dx$$
$$= \int_a^b w(x)(x-\alpha_1)^{r_1+1}(x-\alpha_2)^{r_2+1}\cdots(x-\alpha_k)^{r_k+1} q(x) dx > 0$$

或

$$0 = (p_k, g_n) = \sum_{i=1}^{m} w_i p_k(x_i) g_n(x_i) dx$$

$$= \sum_{i=1}^{m} w_i (x_i - \alpha_1)^{r_1+1} (x_i - \alpha_2)^{r_2+1} \cdots (x_i - \alpha_k)^{r_k+1} q(x_i) > 0$$

矛盾, 因此 $k \geqslant n$.

由于 $g_n(x)$ 是 n 次多项式, 所以 $k = n$. 由此知

$$r_1 = r_2 = \cdots = r_n = 1.$$

性质

设 $g_0(x), g_1(x), \cdots, g_k(x), \cdots$ 是最高次项系数为 1 的正交多项式，则有

$$g_{k+1}(x) = (x - b_k)g_k(x) - c_k g_{k-1}(x), \qquad k = 1, 2, \cdots$$

其中

$$b_k = \frac{\beta_k}{\gamma_k}, \quad c_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_{k-1}}, \quad \beta_k = (xg_k, g_k), \quad \gamma_k = (g_k, g_k).$$

证 由于 $xg_k(x)$ 是 $k+1$ 次多项式，因此它可由 $g_0(x), g_1(x), \cdots, g_{k+1}(x)$ 线性表示，即

多项式的性质，基的表示

$$xg_k(x) = a_0 g_1(x) + a_1 g_1(x) + \cdots + a_k g_k(x) + a_{k+1} g_{k+1}(x).$$

比较 x^{k+1} 的系数，得 $a_{k+1} = 1$.

正交多项式

两边用 g_j $(j=0,1,\cdots,k)$ 作内积得

$$(xg_k, g_j) = a_j(g_j, g_j) \quad \Longrightarrow \quad \boxed{a_j = \frac{(xg_k, g_j)}{(g_j, g_j)},} \quad j = 0, 1, \cdots, k.$$

由于 $(xg_k, g_j) = (g_k, xg_j)$.

当 $j=0,1,\cdots,k-2$ 时, $xg_j(x)$ 是 $j+1(\leqslant k-1)$ 次多项式, 因此

$$(xg_k, g_j) = (g_k, xg_j) = 0 \quad \Longrightarrow \quad a_j = 0.$$

当 $j=k-1$ 时, $xg_j(x) = xg_{k-1}(x)$ 为 k 次多项式, 且最高次项系数为 1. 故

$$xg_{k-1}(x) = a_0^* g_0(x) + a_1^* g_1(x) + \cdots + a_{k-1}^* g_{k-1}(x) + g_k(x).$$

正交多项式

于是有

$$(xg_k, g_j) = (xg_k, g_{k-1}) = (g_k, xg_{k-1}) = (g_k, g_k) = \gamma_k,$$

$$\Longrightarrow \quad a_{k-1} = \frac{(xg_k, g_{k-1})}{(g_{k-1}, g_{k-1})} = \frac{\gamma_k}{\gamma_{k-1}}.$$

当 $j = k$ 时,

$$a_k = \frac{(xg_k, g_k)}{(g_k, g_k)} = \frac{\beta_k}{\gamma_k}.$$

即有

$$\boxed{xg_k(x) = a_{k-1}g_{k-1}(x) + a_k g_k(x) + g_{k+1}(x).}$$

因此

$$\boxed{\begin{aligned} g_{k+1}(x) &= (x - a_k)g_k(x) - a_{k-1}g_{k-1}(x) \\ &= \left(x - \frac{\beta_k}{\gamma_k}\right)g_k(x) - \frac{\gamma_k}{\gamma_{k-1}}g_{k-1}(x). \end{aligned}}$$

事实上, 可设 $xg_0(x) = a_0g_0(x) + a_1g_1(x)$, 则有 $a_1 = 1$ 且

$$(xg_0, g_0) = a_0(g_0, g_0) \quad \Longrightarrow \quad a_0 = \frac{(xg_0, g_0)}{(g_0, g_0)} = \frac{\beta_0}{\gamma_0}.$$

而 $g_0(x) \equiv 1$, 则有

$$g_1(x) = \big(x - \frac{\beta_0}{\gamma_0}\big)g_0(x).$$

由此可构造正交多项式序列 $\{g_k(x)\}$:

三项递推关系式

$$\begin{cases} g_0(x) = 1, \\ g_1(x) = x - \dfrac{\beta_0}{\gamma_0}, \\ g_{k+1}(x) = \big(x - \dfrac{\beta_k}{\gamma_k}\big)g_k(x) - \dfrac{\gamma_k}{\gamma_{k-1}}g_{k-1}(x), \quad k = 1, 2, \cdots \end{cases}$$

正交多项式

推论

设 $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \cdots, \varphi_k(x), \cdots$ 是正交多项式, 则有

$$\varphi_{k+1}(x) = \frac{a_{k+1}}{a_k}(x - \alpha_k)\varphi_k(x) - \frac{a_{k+1}a_{k-1}}{a_k^2}\lambda_k\varphi_{k-1}(x), \quad k = 1, 2, \cdots$$

其中 a_k 是正交多项式 $\varphi_k(x)$ 的最高次项系数, 并且

$$\alpha_k = \frac{(x\varphi_k, \varphi_k)}{(\varphi_k, \varphi_k)}, \quad \lambda_k = \frac{(\varphi_k, \varphi_k)}{(\varphi_{k-1}, \varphi_{k-1})}.$$

三角函数系

$$1, \cos x, \sin x, \cdots, \cos kx, \sin kx, \cdots$$

是区间 $[-\pi, \pi]$ 上关于权函数 $w(x) \equiv 1$ 的正交函数系.

$$(1, 1) = \int_{-\pi}^{\pi} dx = 2\pi,$$

$$(\sin nx, \sin nx) = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (1 - \cos 2nx) dx = \pi, \quad \forall k$$

$$(\cos nx, \cos nx) = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (1 + \cos 2nx) dx = \pi, \quad \forall k$$

$$(\sin nx, \cos mx) = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \left[\sin(n+m)x + \sin(n-m)x \right] dx = 0, \quad \forall n, m$$

$$(\sin nx, \sin mx) = (\cos nx, \cos mx) = 0, \quad \forall n, m, \ n \neq m$$

常用正交多项式

勒让德 (Legendre) 多项式

$$p_k(x) = \frac{1}{2^k k!}\frac{d^k(x^2-1)^k}{dx^k}, \quad k = 0, 1, 2, \cdots$$

是区间 $[-1, 1]$ 上关于权函数 $w(x) \equiv 1$ 的正交多项式.

$$\int_{-1}^{1} p_n(x)p_m(x)dx = \begin{cases} \dfrac{2}{2n+1}, & n = m \\ 0, & n \neq m \end{cases}$$

$$p_0(x) = 1, \quad p_1(x) = x, \quad p_2(x) = \frac{3x^2-1}{2}, \quad p_3(x) = \frac{5x^3-3x}{2}, \cdots$$

常用的正交多项式

勒让德 (Legendre) 多项式的性质：

(1) $p_k(-x) = (-1)^k p_k(x)$.

(2) $p_k(1) = 1, \quad p_k(-1) = (-1)^k$.

(3) 当 k 为偶 (奇) 数时, $p_k(x)$ 为偶 (奇) 函数.

(4) $p_k(x)$ 是 x 的 k 次多项式, 且最高次项系数为 $a_k = \frac{(2k)!}{2^k \cdot (k!)^2}$.

(5) 递推关系式：

$$p_{k+1}(x) = \frac{2k+1}{k+1} x p_k(x) - \frac{k}{k+1} p_{k-1}(x), \quad k = 1, 2, \cdots$$

$$p_k(x) = \frac{1}{2k+1}\left[p'_{k+1}(x) - p'_{k-1}(x)\right], \quad k = 1, 2, \cdots$$

常用的正交多项式

拉盖尔 (Laguerre) 多项式

$$L_k(x) = e^x \frac{d^k(x^k e^{-x})}{dx^k}, \quad k = 0, 1, 2, \cdots$$

是区间 $[0, +\infty)$ 上关于权函数 $w(x) = e^{-x}$ 的正交多项式.

$$\int_0^{+\infty} e^{-x} L_n(x) L_m(x) dx = \begin{cases} (n!)^2, & n = m \\ 0, & n \neq m \end{cases}$$

$$L_0(x) = 1, \quad L_1(x) = 1 - x, \quad L_2(x) = x^2 - 4x + 2,$$
$$L_3(x) = -x^3 + 9x^2 - 18x + 6, \quad \cdots$$

常用的正交多项式

拉盖尔 (Laguerre) 多项式的性质:

(1) $L_k(x)$ 是 x 的 k 次多项式, 且最高次项系数为 $a_k = (-1)^k$.

(2) 递推关系式:

$$\begin{cases} L_0(x) = 1, \\ L_1(x) = 1 - x, \\ L_{k+1}(x) = (1 + 2k - x)L_k(x) - k^2 L_{k-1}(x), \quad k = 1, 2, \cdots \end{cases}$$

常用正交多项式

埃尔米特 (Hermite) 多项式

$$H_k(x) = (-1)^k e^{x^2} \frac{d^k e^{-x^2}}{dx^k}, \quad k = 0, 1, 2, \cdots$$

是区间 $(-\infty, +\infty)$ 上关于权函数 $w(x) = e^{-x^2}$ 的正交多项式.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} H_n(x) H_m(x) dx = \begin{cases} 2^n n! \sqrt{\pi}, & n = m \\ 0, & n \neq m \end{cases}$$

$$H_0(x) = 1, \;\; H_1(x) = 2x, \;\; H_2(x) = 4x^2 - 2, \;\; H_3(x) = 8x^3 - 12x, \;\; \cdots$$

常用正交多项式

埃尔米特 (Hermite) 多项式的性质：

(1) $H_k(x)$ 是 x 的 k 次多项式, 且最高次项系数为 $a_k = 2^k$.

(2) 递推关系式：

$$\begin{cases} H_0(x) = 1, \\ H_1(x) = 2x, \\ H_{k+1}(x) = 2xH_k(x) - 2kH_{k-1}(x), \quad k = 1, 2, \cdots \end{cases}$$

常用正交多项式

最优一致逼近

切比雪夫 (Chebyshev) 多项式

$$T_k(x) = \cos(k \arccos x), \quad k = 0, 1, 2, \cdots$$

是区间 $[-1, 1]$ 上关于权函数 $w(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 的正交多项式.

$$\int_{-1}^{1} \frac{T_n(x)T_m(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \begin{cases} \pi, & n = m = 0 \\ \frac{\pi}{2}, & n = m = 1, 2, \cdots \\ 0, & n \neq m \end{cases}$$

$$T_0(x) = 1, \quad T_1(x) = x, \quad T_2(x) = 2x^2 - 1, \quad T_3(x) = 4x^3 - 3x, \quad \cdots$$

切比雪夫 (Chebyshev) 多项式的性质：

(1) $T_k(x)$ 是 x 的 k 次多项式，且最高次项系数为 $a_k = 2^{k-1}$.

(2) 当 k 为偶 (奇) 数时，$T_k(x)$ 为偶 (奇) 函数.

证 由三角恒等式

$$\arccos x + \arccos(-x) = \pi, \qquad -1 \leqslant x \leqslant 1$$

可知

$$\begin{aligned} T_k(-x) &= \cos[k \arccos(-x)] \\ &= \cos[k(\pi - \arccos x)] \\ &= (-1)^k \cos(k \arccos x) = (-1)^k T_k(x). \end{aligned}$$

切比雪夫 (Chebyshev) 多项式的性质：

(3) 递推关系式：

$$\begin{cases} T_0(x) = 1, \\ T_1(x) = x, \\ T_{k+1}(x) = 2xT_k(x) - T_{k-1}(x), \quad k = 1, 2, \cdots \end{cases}$$

证 令 $\theta = \arccos x$, 则 $T_k(x) = \cos k\theta$. 于是有

$$\begin{aligned} T_{k+1}(x) + T_{k-1}(x) &= \cos(k+1)\theta + \cos(k-1)\theta \\ &= 2\cos\theta\cos k\theta = 2xT_k(x). \end{aligned}$$

常用正交多项式

切比雪夫 (Chebyshev) 多项式的性质:

(4) $T_{2k}(x)$ 只含 x 的偶次幂, $T_{2k+1}(x)$ 只含 x 的奇次幂.

证 由递推关系式有

$$
\begin{aligned}
T_{2k+1}(x) &= 2xT_{2k}(x) - T_{2k-1}(x), \\
T_{2k}(x) &= 2xT_{2k-1}(x) - T_{2k-2}(x).
\end{aligned}
$$

由于 $T_0(x) = 1, T_1(x) = x$. 于是 $T_1(x)$ 只含 x 的奇次项, $T_2(x)$ 只含 x 的偶次项, 进而有

$$
\begin{aligned}
&T_3(x) \text{ 只含 } x \text{ 的奇次项}, \quad \cdots, \quad T_{2k+1}(x) \text{ 只含 } x \text{ 的奇次项}, \\
&T_4(x) \text{ 只含 } x \text{ 的偶次项}, \quad \cdots, \quad T_{2k}(x) \text{ 只含 } x \text{ 的偶次项}.
\end{aligned}
$$

切比雪夫 (Chebyshev) 多项式的性质:

(5) $T_k(x)$ 在区间 $[-1,1]$ 上有 k 个零点

$$x_i = \cos\left(\frac{2i+1}{2k}\pi\right), \quad i = 0, 1, \cdots, k-1.$$

证 由于 $T_k(x) = \cos k\theta$, $\theta = \arccos x \in (0,\pi)$, 于是 $k\theta \in (0, k\pi)$.
当 $T_k(x) = 0$ 时, 有

$$k\theta = \frac{1}{2}j\pi, \quad j = 1, 3, \cdots, 2k-1$$

因此

$$\begin{aligned} x_i = \cos\theta &= \cos\left(\frac{j}{2k}\pi\right), \quad j = 1, 3, \cdots, 2k-1 \\ &= \cos\left(\frac{2i+1}{2k}\pi\right), \quad i = 0, 1, \cdots, k-1 \end{aligned}$$

切比雪夫多项式的性质

(6) 在区间 $[-1,1]$ 上, $|T_k(x)| \leqslant 1$. 在 $k+1$ 个极值点 $x_i = \cos\left(\frac{i\pi}{k}\right)$ $(i=0,1,\cdots,k)$ 处, $T_k(x)$ 依次交替地取最大值 1 和最小值 -1.

证 令 $\theta = \arccos x \in (0,\pi)$, 则

$$T_k(x) = \cos k\theta \quad \Longrightarrow \quad |T_k(x)| \leqslant 1.$$

$$T_k(x) = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \cos k\theta = 1, \quad k\theta = i\pi, \quad i = 0,2,\cdots, \quad \text{偶数}$$

$$T_k(x) = -1 \quad \Longleftrightarrow \quad \cos k\theta = -1, \quad k\theta = j\pi, \quad j = 1,3,\cdots, \text{奇数}$$

$$|T_k(x)| = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad |\cos k\theta| = 1, \quad k\theta = i\pi, \quad i = 0,1,\cdots,k$$

即

$$x_i = \cos\theta = \cos\left(\frac{i\pi}{k}\right), \quad i = 0,1,\cdots,k.$$

切比雪夫多项式的极性

(7) 设 $p_n(x)$ 是最高次项系数为 1 的 n 次多项式, 则

$$\max_{-1\leqslant x\leqslant 1}|p_n(x)| \geqslant \max_{-1\leqslant x\leqslant 1}|2^{1-n}T_n(x)| = 2^{1-n}.$$

证 反证法. 假设存在最高次项系数为 1 的 n 次多项式 $q_n(x)$, 使得

$$\max_{-1\leqslant x\leqslant 1}|q_n(x)| < \max_{-1\leqslant x\leqslant 1}|2^{1-n}T_n(x)| = 2^{1-n}.$$

令 $f(x) = q_n(x) - 2^{1-n}T_n(x)$, 由于 $T_n(x)$ 的最高次项为 $2^{n-1}x^n$. 所以 $f(x)$ 是不超过 $n-1$ 次的多项式.

在 $T_n(x)$ 的 $n+1$ 个极值点处, 有

$$
\begin{aligned}
f(x_0) &= q_n(x_0) - 2^{1-n} < 0, \\
f(x_1) &= q_n(x_1) + 2^{1-n} > 0, \\
f(x_2) &= q_n(x_2) - 2^{1-n} < 0, \\
&\;\;\vdots \\
f(x_k) &= q_n(x_k) - (-1)^k 2^{1-n} \begin{cases} < 0, & k \text{ 为偶数}, \\ > 0, & k \text{ 为奇数}. \end{cases}
\end{aligned}
$$

由连续性知, $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上有 n 个零点, 而 $f(x)$ 是不超过 n 次的多项式. 产生矛盾, 因此假设不成立.

2. 最优平方逼近

最优平方逼近

设 $f(x)$ 是定义在点集 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_m\}$ 上的列表函数，或 $f(x)$ 是定义在区间 $[a,b]$ 上的表达式很复杂的连续函数. 构造广义多项式

$$p(x)=c_0\varphi_0(x)+c_1\varphi_1(x)+\cdots+c_n\varphi_n(x),$$

使得 $\|p-f\|_2^2$ 最小，其中 $c_0,c_1,\cdots,c_n$ 为待定参数，$\varphi_0(x),\varphi_1(x),\cdots,\varphi_n(x)$ 是已知的一组基函数.

最优平方逼近问题：取 $p(x)$ 作为 $f(x)$ 的近似表达式.

离散时

当 $f(x)$ 是定义在点集 X 上的列表函数时, 设在点 x_i 处的函数值为 y_i, 则

$$\|p-f\|_2^2=(p-f,p-f)=\sum_{i=1}^{m} w_i(p(x_i)-y_i)^2,$$

这时 $p(x)$ 称为最小二乘拟合函数. 若 $\varphi_i(x)=x^i\ (i=0,1,\cdots,n)$, 则

$$p(x)=p_n(x)=c_0+c_1x+\cdots+c_nx^n$$

称为最小二乘拟合多项式.

误差: $\|p-f\|_2=\sqrt{\sum_{i=1}^{m} w_i(p(x_i)-y_i)^2}$

连续时

当 $f(x)$ 是定义在区间 $[a,b]$ 上的连续函数时,

$$\|p-f\|_2^2=(p-f,p-f)=\int_a^b w(x)(p(x)-f(x))^2dx,$$

这时 $p(x)$ 称为 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上关于权函数 $w(x)$ 的最优平方逼近函数.

误差:

$$\|p-f\|_2=\left(\int_a^b w(x)(p(x)-f(x))^2dx\right)^{1/2}$$

正规方程组

注意到 $\|p-f\|_2^2$ 是参数 $c_0, c_1, \cdots, c_n$ 的函数. 不妨设

$$S(c_0, c_1, \cdots, c_n) = \|p-f\|_2^2,$$

则问题转化为无条件极值问题

$$\min S(c_0, c_1, \cdots, c_n) = \min \|p-f\|_2^2.$$

$$\begin{aligned} S = \|p-f\|_2^2 &= (p-f, p-f) = (p,p) - 2(p,f) + (f,f) \\ &= \left(\sum_{i=0}^{n} c_i\varphi_i, \sum_{j=0}^{n} c_j\varphi_j\right) - 2\left(\sum_{i=0}^{n} c_i\varphi_i, f\right) + (f,f) \\ &= \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} c_i c_j(\varphi_i, \varphi_j) - 2\sum_{i=0}^{n} c_i(\varphi_i, f) + (f,f). \end{aligned}$$

正规方程组

多元函数求极值：

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial S}{\partial c_k} &= \sum_{i=0}^{n} c_i(\varphi_i, \varphi_k) + \sum_{j=0}^{n} c_j(\varphi_k, \varphi_j) - 2(\varphi_k, f) \\
&= 2\sum_{i=0}^{n} c_i(\varphi_i, \varphi_k) - 2(\varphi_k, f) \\
&= 0, \qquad\qquad k = 0, 1, \cdots, n
\end{aligned}
$$

于是得到

$$
\boxed{\sum_{i=0}^{n} c_i(\varphi_k, \varphi_i) = (\varphi_k, f), \qquad k = 0, 1, \cdots, n.}
$$

极值的结果

正规方程组

矩阵形式：$Ac=b$，其中 $c=(c_0,c_1,\cdots,c_n)^{\mathrm{T}}$，

$$A=\begin{pmatrix}(\varphi_0,\varphi_0) & (\varphi_0,\varphi_1) & \cdots & (\varphi_0,\varphi_n)\\ (\varphi_1,\varphi_0) & (\varphi_1,\varphi_1) & \cdots & (\varphi_1,\varphi_n)\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ (\varphi_n,\varphi_0) & (\varphi_n,\varphi_1) & \cdots & (\varphi_n,\varphi_n)\end{pmatrix},\quad b=\begin{pmatrix}(\varphi_0,f)\\ (\varphi_1,f)\\ \vdots\\ (\varphi_n,f)\end{pmatrix}.$$

$\forall c\in\mathbf{R}^{n+1}$，$c\neq 0$，由 $\varphi_0,\varphi_1,\cdots,\varphi_n$ 线性无关可知

$$\underline{u(x)=c_0\varphi_0+c_1\varphi_1+\cdots+c_n\varphi_n\neq 0},$$

则

$$c^{\mathrm{T}}Ac=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}c_ic_j(\varphi_i,\varphi_j)=\left(\sum_{i=0}^{n}c_i\varphi_i,\sum_{j=0}^{n}c_j\varphi_j\right)=(u,u)>0,$$

即 A 对称正定，正规方程组存在唯一解.

正规方程组

通常 n 较大时, 正规方程组通常为病态方程组, 所以一般取 $n \leqslant 6$.

特别地, 当 $\varphi_0, \varphi_1, \cdots, \varphi_n$ 为正交函数时, 正规方程组可以简化为

$$
\begin{aligned}
& c_k(\varphi_k, \varphi_k) = (\varphi_k, f), \quad k = 0, 1, \cdots, n \\
\Longrightarrow \quad & c_k = \frac{(\varphi_k, f)}{(\varphi_k, \varphi_k)}, \qquad k = 0, 1, \cdots, n \\
\Longrightarrow \quad & p(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(\varphi_k, f)}{(\varphi_k, \varphi_k)} \varphi_k(x).
\end{aligned}
$$

正规方程组 散列函数

当 $f(x)$ 为列表函数时，设 $f(x_k)=y_k$，$k=1,2,\cdots,m$

$$(\varphi_i,\varphi_j)=\sum_{k=1}^{m} w_k\varphi_i(x_k)\varphi_j(x_k),\quad i,j=0,1,\cdots,n$$

$$(\varphi_i,f)=\sum_{k=1}^{m} w_k\varphi_i(x_k)f(x_k)=\sum_{k=1}^{m} w_k\varphi_i(x_k)y_k,\quad i=0,1,\cdots,n$$

当G为方阵， m=n+1时，

于是正规方程组可写为

$$G^{\mathrm{T}}WGc=G^{\mathrm{T}}Wy,$$

其中 $W=\mathrm{diag}(w_1,w_2,\cdots,w_m)$，$y=(y_1,y_2,\cdots,y_m)^{\mathrm{T}}$，

$$G=\begin{pmatrix} \varphi_0(x_1) & \varphi_1(x_1) & \cdots & \varphi_n(x_1) \\ \varphi_0(x_2) & \varphi_1(x_2) & \cdots & \varphi_n(x_2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \varphi_0(x_m) & \varphi_1(x_m) & \cdots & \varphi_n(x_m) \end{pmatrix}.$$

正规方程组

当 $w_k \equiv 1$, 正规方程组简化为 $G^{\mathrm{T}}Gc = G^{\mathrm{T}}y$.

这时若取 $\varphi_i = x^i \ (i = 0, 1, \cdots, n)$, 则

$$G = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2 & \cdots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_m & \cdots & x_m^n \end{pmatrix}, \quad (\varphi_i, \varphi_j) = \sum_{k=1}^m x_k^i \cdot x_k^j = \sum_{k=1}^m x_k^{i+j}.$$

故

$$\begin{pmatrix} \sum_{k=1}^m 1 & \sum_{k=1}^m x_k & \cdots & \sum_{k=1}^m x_k^n \\ \sum_{k=1}^m x_k & \sum_{k=1}^m x_k^2 & \cdots & \sum_{k=1}^m x_k^{n+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sum_{k=1}^m x_k^n & \sum_{k=1}^m x_k^{n+1} & \cdots & \sum_{k=1}^m x_k^{2n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^m y_k \\ \sum_{k=1}^m x_k y_k \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^m x_k^n y_k \end{pmatrix}$$

正规方程组

当 $\varphi_i = x^i,\ m = n+1$时, G 为范德蒙矩阵, 非奇异. 于是

$$G^{\mathrm{T}}Gc = G^{\mathrm{T}}y \quad \Longrightarrow \quad Gc = y.$$

即

$$c_0 + c_1 x_k + \cdots + c_n x_k^n = y_k, \qquad k = 1, 2, \cdots, n+1.$$

因此 $p(x_k) = y_k$. 这时最小二乘拟合多项式为插值多项式,

$$\|p - f\|_2^2 = 0.$$

基函数的选取原则

- 直观性原则. 根据数据点 (x_i, y_i) 的分布选取接近的基函数.
- 比较性原则. 对不同的基函数, 比较误差

$$\|p-f\|_2=\left(\sum_{i=1}^{m} w_i(p(x_i)-y_i)^2\right)^{1/2},$$

选取误差小的.
- 根据实际问题背景选取. 如有指数特征, 则取 $p=ae^{bx}$. 如有幂函数特征, 则取 $p=ax^b$. 然后通过取对数确定参数 a, b,

$$\ln p=\ln a+bx \quad 或 \quad \ln p=\ln a+b\ln x,$$

于是得到

$$S(a,b)=\sum_{i=1}^{m}\big(\ln p(x_i)-\ln y_i\big)^2.$$

最优平方逼近问题的求解

(1) 根据问题特点选取一组合适的基函数, 求解线性方程组.

(2) 由三项递推关系式构造正交多项式 $g_0(x), g_1(x), \cdots, g_n(x)$, 则

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(g_k, f)}{(g_k, g_k)} g_k(x).$$

最优平方逼近问题的求解

(3) 变量替换, 再用已知的正交多项式作为基函数构造最优平方逼近函数. 如区间为 $[a,b]$. 选取 Legendre 多项式作为基函数, 则

$$x = \frac{1}{2}(a+b) + \frac{b-a}{2}t, \quad t \in [-1,1],$$

$$f(x) = f\big(\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}t\big) = g(t).$$

问题转化为求 $g(t)$ 在区间 $[-1,1]$ 上的最优平方逼近函数 $p(t)$.

$$p(t) \implies t = \frac{2x-(a+b)}{b-a} \implies q(x)$$

即得到 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的最优平方逼近函数.

例 1：对如下列表函数，求最小二乘拟合多项式 $p(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2$.

x_i	1	3	4	5	6	7	8	9	10
y_i	2	7	8	10	11	11	10	9	8

解　由题设可得方程组

$$\begin{pmatrix} \sum\limits_{k=1}^{9} 1 & \sum\limits_{k=1}^{9} x_k & \sum\limits_{k=1}^{9} x_k^2 \\ \sum\limits_{k=1}^{9} x_k & \sum\limits_{k=1}^{9} x_k^2 & \sum\limits_{k=1}^{9} x_k^3 \\ \sum\limits_{k=1}^{9} x_k^2 & \sum\limits_{k=1}^{9} x_k^3 & \sum\limits_{k=1}^{9} x_k^4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum\limits_{k=1}^{9} y_k \\ \sum\limits_{k=1}^{9} x_k y_k \\ \sum\limits_{k=1}^{9} x_k^2 y_k \end{pmatrix}$$

最优平方逼近问题

于是有

$$\begin{pmatrix} 9 & 53 & 381 \\ 53 & 381 & 3017 \\ 381 & 3017 & 25317 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 76 \\ 489 \\ 3547 \end{pmatrix},$$

解得

$$c_0 = -\frac{1737}{1190} \approx -1.4596639, \quad c_1 = \frac{94387}{26180} \approx 3.6053094,$$
$$c_2 = -\frac{1401}{5236} \approx -0.26757066.$$

因此

$$\begin{aligned} p(x) &= -\frac{1737}{1190} + \frac{94387}{26180}x - \frac{1401}{5236}x^2 \\ &\approx -1.4596639 + 3.6053094x - 0.26757066x^2. \end{aligned}$$

例 2：求函数 $f(x)=\sqrt{x}$ 在区间 $[0,1]$ 上的最优平方逼近一次多项式.

一次

解 设 $p_1(x)=c_0+c_1x$, 则 $\varphi_0(x)=1,\varphi_1(x)=x$.

$$(\varphi_i,\varphi_j)=\int_0^1 x^{i+j}dx=\frac{1}{i+j+1},\qquad i,j=0,1$$
$$(\varphi_0,f)=\int_0^1\sqrt{x}dx=\frac{2}{3},\quad (\varphi_1,f)=\int_0^1 x^{\frac{3}{2}}dx=\frac{2}{5}.$$

于是对应的正规方程组为

$$\begin{pmatrix}(\varphi_0,\varphi_0) & (\varphi_0,\varphi_1)\\ (\varphi_1,\varphi_0) & (\varphi_1,\varphi_1)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_0\\ c_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(\varphi_0,f)\\ (\varphi_1,f)\end{pmatrix},$$

即

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{2}{5} \end{pmatrix},$$

解得

$$c_0 = \frac{4}{15}, \quad c_1 = \frac{4}{5}.$$

因此有

$$p_1(x) = \frac{4}{15} + \frac{4}{5}x.$$

最优平方逼近问题

例 3：利用正交多项式求函数 $f(x)=\arcsin x$ 在区间 $[0,1]$ 上的最优平方逼近二次多项式.

解　设最优平方逼近二次多项式为

$$p_2(x)=c_0g_0(x)+c_1g_1(x)+c_2g_2(x).$$

根据正交化方法构造正交多项式. 令 $g_0(x)=1$,

$$\beta_0=(xg_0,g_0)=(x,1)=\int_0^1 xdx=\frac{1}{2},$$

$$\gamma_0=(g_0,g_0)=(1,1)=\int_0^1 dx=1,\quad g_1(x)=x-\frac{\beta_0}{\gamma_0}=x-\frac{1}{2}.$$

$$\beta_1=(xg_1,g_1)=\Big(x^2-\frac{1}{2}x,x-\frac{1}{2}\Big)=\int_0^1 x\Big(x-\frac{1}{2}\Big)^2dx=\frac{1}{24},$$

最优平方逼近问题

$$\gamma_1 = (g_1, g_1) = \left(x - \frac{1}{2}, x - \frac{1}{2}\right) = \int_0^1 \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 dx = \frac{1}{12},$$

$$g_2(x) = \left(x - \frac{\beta_1}{\gamma_1}\right) g_1(x) - \frac{\gamma_1}{\gamma_0} g_0(x)$$

$$= (x - \frac{1}{2})(x - \frac{1}{2}) - \frac{1}{12} = x^2 - x + \frac{1}{6}.$$

于是有

$$(g_0, f) = \int_0^1 \arcsin x dx = \frac{\pi}{2} - 1,$$

$$(g_1, f) = \int_0^1 (x - \frac{1}{2}) \arcsin x dx = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{8},$$

$$c_0 = \frac{(g_0, f)}{(g_0, g_0)} = \frac{\pi}{2} - 1, \quad c_1 = \frac{(g_1, f)}{(g_1, g_1)} = 6 - \frac{3\pi}{2}.$$

最优平方逼近问题

$$(g_2, f) = \int_0^1 (x^2 - x + \frac{1}{6}) \arcsin x dx = \frac{\pi}{8} - \frac{7}{18},$$

$$(g_2, g_2) = \int_0^1 \left(x^2 - x + \frac{1}{6}\right)^2 dx = \frac{1}{180},$$

$$c_2 = \frac{(g_2, f)}{(g_2, g_2)} = \frac{45\pi}{2} - 70.$$

故

$$\begin{aligned} p_2(x) &= c_0 g_0(x) + c_1 g_1(x) + c_2 g_2(x) \\ &= \frac{\pi}{2} - 1 + (6 - \frac{3\pi}{2})\left(x - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{45\pi}{2} - 70\right)\left(x^2 - x + \frac{1}{6}\right) \\ &= 5\pi - \frac{47}{3} + (76 - 24\pi)x + \left(\frac{45\pi}{2} - 70\right)x^2 \\ &\approx 0.041296601 + 0.60177631x + 0.68583471x^2. \end{aligned}$$

例 4：求 $f(x) = \cos 2\pi x$ 在区间 $[0,1]$ 上的最优平方逼近二次多项式.

解法 1　设最优平方逼近二次多项式为 $p(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2$，则 $\varphi_0(x) = 1,\ \varphi_1(x) = x,\ \varphi_2(x) = x^2$.

$$(\varphi_i, \varphi_j) = \int_0^1 x^{i+j} dx = \frac{1}{i+j+1}, \qquad i, j = 0, 1, 2$$

$$(\varphi_0, f) = \int_0^1 \cos 2\pi x dx = 0, \quad (\varphi_1, f) = \int_0^1 x \cos 2\pi x dx = 0,$$

$$(\varphi_2, f) = \int_0^1 x^2 \cos 2\pi x dx = \frac{1}{2\pi^2}.$$

于是对应的正规方程组为

$$\begin{pmatrix} (\varphi_0,\varphi_0) & (\varphi_0,\varphi_1) & (\varphi_0,\varphi_2) \\ (\varphi_1,\varphi_0) & (\varphi_1,\varphi_1) & (\varphi_1,\varphi_2) \\ (\varphi_2,\varphi_0) & (\varphi_2,\varphi_1) & (\varphi_2,\varphi_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\varphi_0,f) \\ (\varphi_1,f) \\ (\varphi_2,f) \end{pmatrix},$$

即

$$\begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/2\pi^2 \end{pmatrix},$$

解得

$$c_0 = \frac{15}{\pi^2}, \quad c_1 = -\frac{90}{\pi^2}, \quad c_2 = \frac{90}{\pi^2}.$$

因此有

$$p(x) = \frac{15}{\pi^2} - \frac{90}{\pi^2}x + \frac{90}{\pi^2}x^2.$$

最优平方逼近问题

解法 2　设最优平方逼近二次多项式为

$$p(x) = c_0 g_0(x) + c_1 g_1(x) + c_2 g_2(x).$$

根据正交化方法构造正交多项式. 令 $g_0(x) = 1$,

$$\beta_0 = (xg_0, g_0) = (x, 1) = \int_0^1 x dx = \frac{1}{2},$$

$$\gamma_0 = (g_0, g_0) = (1, 1) = \int_0^1 dx = 1, \quad g_1(x) = x - \frac{\beta_0}{\gamma_0} = x - \frac{1}{2}.$$

$$\beta_1 = (xg_1, g_1) = \Big(x^2 - \frac{1}{2}x, x - \frac{1}{2}\Big) = \int_0^1 x\Big(x - \frac{1}{2}\Big)^2 dx = \frac{1}{24},$$

$$\gamma_1 = (g_1, g_1) = \left(x - \frac{1}{2}, x - \frac{1}{2}\right) = \int_0^1 \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 dx = \frac{1}{12},$$

$$g_2(x) = \left(x - \frac{\beta_1}{\gamma_1}\right) g_1(x) - \frac{\gamma_1}{\gamma_0} g_0(x)$$

$$= \left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{12} = x^2 - x + \frac{1}{6}.$$

于是有

$$(g_0, f) = \int_0^1 \cos 2\pi x dx = 0,$$

$$(g_1, f) = \int_0^1 \left(x - \frac{1}{2}\right) \cos 2\pi x dx = 0,$$

$$c_0 = \frac{(g_0, f)}{(g_0, g_0)} = 0, \quad c_1 = \frac{(g_1, f)}{(g_1, g_1)} = 0.$$

最优平方逼近问题

$$(g_2, f) = \int_0^1 (x^2 - x + \frac{1}{6}) \cos 2\pi x dx = \frac{1}{2\pi^2},$$

$$(g_2, g_2) = \int_0^1 (x^2 - x + \frac{1}{6})^2 dx = \frac{1}{180},$$

$$c_2 = \frac{(g_2, f)}{(g_2, g_2)} = \frac{90}{\pi^2}.$$

故

$$\begin{aligned} p(x) &= c_0 g_0(x) + c_1 g_1(x) + c_2 g_2(x) \\ &= 0 + 0 + \frac{90}{\pi^2}(x^2 - x + \frac{1}{6}) \\ &= \frac{15}{\pi^2} - \frac{90}{\pi^2} x + \frac{90}{\pi^2} x^2. \end{aligned}$$

最优平方逼近问题

解法 3 取 Legendre 正交多项式作为基函数.

作变量替换 $x = \frac{t+1}{2}$ $(-1 \leqslant t \leqslant 1)$, 则 $g(t) = \cos\pi(t+1)$. 由于

$$p_0(t) = 1, \quad p_1(t) = t, \quad p_2(t) = \frac{1}{2}(3t^2 - 1),$$

于是可设 $g(t)$ 的最优平方逼近二次多项式为

$$p(t) = c_0 p_0(t) + c_1 p_1(t) + c_2 p_2(t).$$

根据

$$(p_k, p_k) = \frac{2}{2k+1}, \qquad k = 0, 1, 2,$$

$$(p_0, g) = \int_{-1}^{1} \cos\pi(t+1)dt = 0,$$

最优平方逼近问题

$$(p_1, g) = \int_{-1}^{1} t \cos \pi(t+1) dt = 0,$$

$$(p_2, g) = \int_{-1}^{1} \frac{1}{2}(3t^2 - 1) \cos \pi(t+1) dt = \frac{6}{\pi^2},$$

可得

$$c_0 = \frac{(p_0, g)}{(p_0, p_0)} = 0, \quad c_1 = \frac{(p_1, g)}{(p_1, p_1)} = 0, \quad c_2 = \frac{(p_2, g)}{(p_2, p_2)} = \frac{15}{\pi^2}.$$

故

$$p(t) = \frac{15}{\pi^2} \cdot \frac{1}{2}(3t^2 - 1) = \frac{15}{2\pi^2}(3t^2 - 1).$$

再将 $t = 2x - 1$ 代入上式, 得到 $f(x)$ 的最优平方逼近二次多项式

$$q(x) = \frac{15}{2\pi^2}\left(3(2x-1)^2 - 1\right) = \frac{15}{\pi^2}(6x^2 - 6x + 1).$$

1. 函数的内积、范数与正交多项式

内积
- $(f,g)=\sum_{i=1}^{m} w_i f(x_i)g(x_i)$ 或 $\int_a^b w(x)f(x)g(x)dx$
- 性质：交换律、分配律、齐次性

范数
- $\|f\|_p,\quad p=1,2,\infty$
- 性质：正定性、齐次性、三角不等式

正交多项式 $(f,g)=0$
- 三角函数系：$w(x)=1,\quad [-\pi,\pi]$
- Legendre 多项式：$w(x)=1,\quad [-1,1]$
- Laguerre 多项式：$w(x)=\mathrm{e}^{-x},\quad [0,+\infty)$
- Hermite 多项式：$w(x)=\mathrm{e}^{-x^2},\quad (-\infty,+\infty)$
- Chebyshev 多项式：$w(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}},\quad [-1,1]$

连续情况下正交，

本章总结

2. 最优平方逼近 $\min_{p(x)} \|f-p\|_2$

$$
\begin{cases}
\text{正规方程组：} \displaystyle\sum_{j=0}^{n} c_j(\varphi_k,\varphi_j)=(\varphi_k,f),\, k=0,1,\cdots,n \\
\left.\begin{array}{l}\text{递推关系式}\\ \text{变量替换法}\end{array}\right\} \Longrightarrow p_n(x)=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{(g_k,f)}{(g_k,g_k)}g_k(x)
\end{cases}
$$