Séance V : Mesure et intégrale de Lebesgue

A) Objectifs de la séance

A la fin de cette séance,

- je sais appliquer le théorème de convergence dominée pour passer à la limite sous le signe intégral;
- je connais la caractérisation de la mesure de Lebesgue sur les intervalles de $\mathbb{R}$;
- je suis capable d'exprimer la différence entre l'intégrale de Lebesgue et l'intégrale de Riemann;
- je sais calculer des intégrales de fonctions de la variable réelle;
- je suis capable d'identifier les valeurs d'intégrales de fonctions qui sont égales presque partout;
- je connais le lien entre intégration et dérivation;
- je sais définir et étudier la convergence des séries de Fourier dans L^2.

B) Pour se familiariser avec les concepts (à traiter avant les séances de TD)

Les questions V.1 et V.2 sont à traiter avant la séance de TD. Les corrigés sont disponibles sur internet.

Sur $\mathbb{R}$ muni de sa tribu de Borel, la mesure usuelle est celle de Lebesgue, notée λ. Elle prolonge naturellement la notion de longueur.

Question V.1 (Questions diverses)

Q. V.1.1 On note λ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$.

(a) Justifier que $\lambda(\{x\}) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

(b) Grâce au (a), on calcule

$$\lambda(\mathbb{R}) = \lambda\left(\bigcup_{x\in\mathbb{R}} \{x\}\right) = \sum_{x\in\mathbb{R}} \lambda(\{x\}) = 0.$$

Ceci contredit le fait que $\lambda(\mathbb{R}) = +\infty$.

Où est l'erreur ?

Q. V.1.2 Soit $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ deux tribus. L'ensemble $\mathcal{F} \cup \mathcal{G}$ est-il une tribu ?

Question V.2

Q. V.2.1 Soit f la fonction identité de $[0, 1]$. Justifier que $f \in L^1([0, 1], \lambda)$.

Q. V.2.2 Calculer $\int_{[0,1]} f \, d\lambda$ sans passer par l'intégrale de Riemann. Justifier le calcul en vérifiant précisément les hypothèses du théorème utilisé.

C) Exercices

Une des mesures les plus courantes est bien sûr la mesure de Lebesgue, qui généralise la notion de longueur ou de volume en dimension supérieure (mais finie). Les cinq prochains exercices traitent de la mesure de Lebesgue.

Exercice V.1 (Attention aux interversions limite/intégrale: quelques exemples sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$.)

E. V.1.1 (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit $f_n(x) = \mathbf{1}_{[0,n]}(x)$. Montrer que f_n converge simplement vers une fonction f que vous préciserez. Montrer que $\int_{\mathbb{R}} f d\lambda = +\infty$. Le théorème de convergence monotone s'applique-t-il ici?

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit $f_n(x) = \frac{1}{n}\mathbf{1}_{[n,\infty[}(x)$. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_{\mathbb{R}} f_n d\lambda$ et $\int_{\mathbb{R}} \lim\limits_{n\to+\infty} f_n d\lambda$. Expliquer pourquoi le théorème de convergence monotone ne s'applique pas ici.

(c) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit $f_n(x) = \frac{1}{n}\mathbf{1}_{[0,n]}(x)$ et $f(x) = 0$. Montrer que f_n converge uniformément vers f, mais que $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_{\mathbb{R}} f_n d\lambda \neq \int_{\mathbb{R}} \lim\limits_{n\to+\infty} f_n d\lambda$. Expliquer pourquoi le théorème de convergence monotone ne s'applique pas ici.

Exercice V.2 (Mesure définie par sa densité)
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ mesurable et μ une mesure sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.
E. V.2.1 On suppose que pour toute fonction $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ mesurable, $\int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\, \mu(dx) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) f(x)\, \lambda(dx)$. Que vaut $\mu(A)$, pour $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$?

E. V.2.2 Supposons désormais que pour toute fonction continue bornée $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, $\int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\, \mu(dx) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) f(x)\, \lambda(dx)$. Que vaut $\mu(]a, b[)$, pour $a < b \in \mathbb{R}$?

Exercice V.3 (Interversion entre limite et intégrale)
Les questions de cet exercice sont indépendantes mais traitent toutes d'interversion entre une limite et une intégrale.
E. V.3.1 Dans cette question, on montre que:

> Si une suite de fonctions positives $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge λ-p.p. vers une fonction f, le fait que $\int f_n\, d\lambda$ converge vers une constante $c \in \mathbb{R}_+$ n'implique pas nécessairement que $\int f\, d\lambda = c$.

On considère $f_n = \mathbf{1}_{[n,n+1]}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(a) Etudier la convergence de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (convergence simple, convergence λ-p.p.).

(b) Déterminer $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f_n\, d\lambda$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(c) Conclure.

E. V.3.2 Etudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \int_{]0,+\infty[} \frac{\sin(t^n)}{t^n(1+t)}\, \lambda(dt).$$

E. V.3.3 Soit $(E, \mathcal{F}, \mu)$ un espace mesuré et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables bornées sur E à valeurs dans $\mathbb{R}$. On suppose que cette suite converge uniformément vers f.

(a) On suppose que $\mu(E) < \infty$. Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_E f_n\, d\mu = \int_E f\, d\mu\ .$$

$*$(b) On enlève l'hypothèse $\mu(E) < \infty$. Que se passe-t-il?

L'exercice suivant permet de retrouver que pour une fonction continue sur un segment, les intégrales de Riemann et Lebesgue coïncident.

Exercice V.4 (Intégrale d'une fonction continue sur un segment)
Soit f une fonction continue sur un segment $[a, b]$ de $\mathbb{R}$. On pose $a_{k,n} = a + k\frac{b-a}{n}$ et on considère:

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f(a_{k,n}) 1_{]a_{k-1,n}, a_{k,n}]}(x)$$

E. V.4.1 (a) Calculer $\int_{[a,b]} f_n\, d\lambda$.

(b) Montrer que $\int_{[a,b]} f_n\, d\lambda$ converge vers $\int_a^b f(x)\, dx$.

E. V.4.2 Montrer que $\int_{[a,b]} f_n\, d\lambda$ converge vers $\int_{[a,b]} f\, d\lambda$.

E. V.4.3 En déduire que:

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_{[a,b]} f\, d\lambda.$$

Dans l'exercice qui suit, nous allons retrouver la valeur de l'intégrale de Gauss:

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-u^2/2}\, \lambda(du) = \sqrt{2\pi}$$

en utilisant les propriétés fondamentales de l'intégrale de Lebesgue.

Exercice V.5 (Calcul d'une intégrale)
On pose

$$F(x) = \left(\int_{[0,x]} \mathrm{e}^{-t^2}\, \lambda(dt)\right)^2 \qquad \text{et} \qquad G(x) = \int_{[0,1]} \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}\, \lambda(dt).$$

E. V.5.1 Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer F' (sous forme intégrale).

E. V.5.2 Montrer que G est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer G' (sous forme intégrale).

E. V.5.3 En déduire $F + G$.

E. V.5.4 Calculer $\lim_{x \to +\infty} G(x) = 0$.

E. V.5.5 En déduire la valeur de $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\, dt$.

De nombreuses fonctions réelles ne sont pas Riemann-intégrables. On peut néanmoins étudier leur intégrabilité par rapport à la mesure de Lebesgue. L'exemple simple de la fonction indicatrice de $\mathbb{Q}$ est étudié ci-dessous.

Exercice V.6 (Étude de la fonction indicatrice de $\mathbb{Q}$)

E. V.6.1 (a) Montrer que $\mathbf{1}_{\mathbb{Q}}$ n'est pas continue par morceaux.

∗(b) Montrer que $\mathbf{1}_{\mathbb{Q}}$ n'est pas réglée (i.e. limite uniforme de fonctions en escalier) .

∗(c) Montrer que $\mathbf{1}_{\mathbb{Q}}$ n'est pas intégrable au sens de Riemann.

E. V.6.2 (a) Démontrer que $\mathbb{Q}$ est négligeable dans $\mathbb{R}$ (i.e. $\lambda(\mathbb{Q}) = 0$).

(b) Prouver l'existence de $\int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{\mathbb{Q}}\, d\lambda = \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{\mathbb{Q}}(x)\, \lambda(dx)$ et calculer sa valeur.

Exercice V.7 (Comparaison entre les intégrales de Riemann et de Lebesgue)

E. V.7.1 (a) Calculer $\int_{\mathbb{R}_+} e^{-t}\, \lambda(dt)$.

(b) Calculer $\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\pi} \sin^n(t)\, dt$.

E. V.7.2 Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$.

(a) La fonction $x \mapsto \int_0^x f(t)\, dt$ est-elle dérivable sur $\mathbb{R}$?

(b) La fonction $x \mapsto \int_{[0,x]} f(t)\, \lambda(dt)$ est-elle dérivable sur $\mathbb{R}$?

(c) La fonction $x \mapsto \int_{[0,x]} f(t) 1_{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}(t)\, \lambda(dt)$ est-elle dérivable sur $\mathbb{R}$?

E. V.7.3 (a) La fonction $t \mapsto \frac{\sin(t)}{t}$ est-elle Riemann-intégrable sur $\mathbb{R}_+$? Lebesgue-intégrable?

(b) Mêmes questions pour $t \mapsto \frac{\sin(t)}{t} 1_{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}(t)$.

D) Approfondissement

Exercice V.8 (Théorème de Féjer dans L^p)
Cet exercice fait suite à l'Exercice II.6. On en reprend donc les notations.
E. V.8.1 Soit $p \in [1, \infty[$. Dans cette question, nous allons étendre le théorème de Féjer à $L^p([-\pi, \pi], \mathcal{B}([-\pi, \pi]), \lambda)$, nous ne supposons donc plus que f est continue.

(a) Soit $r \in [1, \infty]$. Prouver que pour tout $g \in L^r(\mathbb{R})$ et tout $h \in L^1(\mathbb{R})$, $\|g * h\|_r \leq \|g\|_r \|h\|_1$. *[Indication: commencer par appliquer l'inégalité de Hölder à $|g| * |h|(x)$.]*

$**$(b) Utiliser le théorème de Féjer tel qu'énoncé à la question E.II.6.1 pour démontrer que si $\widetilde{f}$ est continue sur $[-\pi, \pi]$, alors pour tout $\epsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $\|\widetilde{f} - K_n * \widetilde{f}\|_p \leq \epsilon$.

$*$(c) Soit $f \in L^p([-\pi, \pi], \mathcal{B}([-\pi, \pi]), \lambda)$. En utilisant les questions précédentes, montrer que $\|f - K_N * f\|_p \to 0$ quand $N \to \infty$.

E. V.8.2 Application du théorème précédent: Soit $f \in L^1([-\pi, \pi], \mathcal{B}([-\pi, \pi]), \lambda)$. Montrer l'injectivité des coefficients de Fourier (i.e. si $\forall n \in \mathbb{N}, c_n(f) = 0$, alors $f = 0$ p.p.).

L'exercice suivant montre que la mesure de Lebesgue possède des propriétés qui ne sont pas toujours intuitives.

Exercice V.9 (Propriétés topologiques de la mesure de Lebesgue)

***E. V.9.1** Montrer que pour tout $\epsilon > 0$, il existe O_ϵ un ouvert dense de $\mathbb{R}$ tel que $\lambda(O_\epsilon) \leq \epsilon$.
E. V.9.2 Soit A un ouvert de $\mathbb{R}$. A-t-on équivalence entre "A est borné" et "A est de mesure (de Lebesgue) finie"?

E. V.9.3 Soit A dans $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. A-t-on équivalence entre "$\lambda(A) > 0$" et "A contient un ouvert non vide"?

Exercice V.10 (Inégalité de Hardy)
Soit f une fonction de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ appartenant à L^2. Pour $x > 0$, on pose:

$$F(x) = \frac{1}{x} \int_{[0,x]} f(t)\, \lambda(dt).$$

E. V.10.1 Montrer que F est définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

E. V.10.2 On suppose que f est continue à support compact dans $\mathbb{R}_+^*$.

(a) Montrer que F est solution d'une équation différentielle linéaire simple.

(b) En déduire que:

$$\int_{\mathbb{R}_+} F^2(x)\, \lambda(dx) = 2 \int_{\mathbb{R}_+} F(x) f(x)\, \lambda(dx).$$

(c) Montrer que:

$$||F||_2 \leq 2||f||_2.$$

E. V.10.3 On ne suppose plus que f est continue à support compact. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues à support compact qui converge vers f dans L^2.

(a) Justifier l'existence de la suite (f_n).

(b) Soit $F_n(x) = \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_{[0,x]} f_n(t)\,\lambda(dt)$. Montrer que $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans L^2.

(c) Soit $\hat{F}$ la limite de la suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Montrer que:

$$||\hat{F}||_2 \leq 2||f||_2.$$

(d) Montrer que $\hat{F} = F$ p.p.

(e) En déduire que $||F||_2 \leq 2||f||_2$ et donc que l'application $f \mapsto F$ est continue.

Remarque : de manière plus générale, on peut démontrer que si f est dans L^p alors F l'est aussi et que:

$$||F||_p \leq \frac{p}{p-1}||f||_p.$$

Séance 5 : Eléments de correction des exercices

Solution de Q. V.1.1

(a) Par définition de la mesure de Lebesgue λ, on a

$$\lambda(\{x\}) = \lambda([x,x]) = x - x = 0.$$

(b) La définition d'une mesure exige la propriété de σ-additivité, qui exprime la chose suivante pour la mesure de Lebesgue λ :

> Pour toute famille $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de boréliens deux à deux disjoints (i.e. tels que $A_n \cap A_m = \emptyset$ lorsque $n \neq m$), on a
> $$\lambda\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda(A_n).$$

L'égalité précédente n'est valable que pour une union démombrable d'ensembles.

Dans l'expression $\mathbb{R} = \bigcup_{x\in\mathbb{R}}\{x\}$, on n'a pas affaire à une union dénombrable ($\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable). Ainsi,

$$\lambda\left(\bigcup_{x\in\mathbb{R}} \{x\}\right) \neq \sum_{x\in\mathbb{R}} \lambda(\{x\}).$$

Solution de Q. V.1.2 L'union de deux tribus $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sur un même ensemble E n'est en général pas une tribu.

Par exemple, prenons $X = \{1,2,3\}$. Soit $\mathcal{F} = \{\emptyset, X, \{1\}, \{2,3\}\}$ et $\mathcal{G} = \{\emptyset, X, \{2\}, \{1,3\}\}$. On vérifie que $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont bien des tribus. Par ailleurs, $\mathcal{F} \cup \mathcal{G} = \{\emptyset, X, \{1\}, \{2\}, \{2,3\}, \{1,3\}\}$ contient notamment $\{1\}$ et $\{2\}$ mais pas $\{1\} \cup \{2\}$. Ce n'est donc pas une tribu.

Solution de Q. V.2.1 La fonction f est mesurable de $([0,1], \mathcal{B}([0,1]))$ vers $([0,1], \mathcal{B}([0,1]))$, car continue. De plus, f est positive et vérifie $f \leq \mathbb{1}_{[0,1]}$. Donc $\int_{[0,1]} f d\lambda \leq \int \mathbb{1}_{[0,1]} d\lambda = \lambda([0,1])$, qui vaut 1. Donc f est intégrable.

Solution de Q. V.2.2 On applique le Théorème V.3.2[1] à la fonction $g(x) = \frac{x^2}{2}$ définie sur $\mathbb{R}$. On a $g' = f$ qui est localement intégrable (ce qu'on peut montrer par une simple généralisation de la question précédente), donc $\int_{[0,1]} f\, d\lambda = g(1) - g(0) = \frac{1}{2}$.

Solution de E. V.1.1

(a) f_n converge vers $f = \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}$, qui vérifie $\int_{\mathbb{R}} f d\lambda = +\infty$. La suite f_n est croissante et à valeurs dans $[0,\infty]$, donc le TCM s'applique.

[1] Pour cette séance, la numérotation des résultats fait référence aux slides en anglais.

(b) On constate que pour tout n, $\int_{\mathbb{R}} f_n d\lambda = +\infty$, donc $\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n d\lambda = +\infty$. D'autre part, la limite simple (et même uniforme) des f_n est 0, donc $\int_{\mathbb{R}} \lim\limits_{n\to+\infty} f_n d\lambda = 0$. Le TCM ne s'applique pas à une suite décroissante de fonctions (on pourrait prendre alors la suite $(-f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui est croissante, mais le TCM ne s'applique toujours pas. Pourquoi?)

En fait, dans le cas d'une suite décroissante de fonctions positives, il faut rajouter la condition $\int_{\mathbb{R}} f_1 d\lambda < \infty$ (condition qui n'est pas vérifiée ici). Sous cette condition, on se ramène aux conditions habituelles du TCM en posant $\tilde{f}_n = f_1 - f_n$. Ainsi,

$$\begin{aligned}\lim \int_{\mathbb{R}} f_n &= \int_{\mathbb{R}} f_1 d\lambda - \lim \int_{\mathbb{R}} \tilde{f}_n d\lambda = \int_{\mathbb{R}} f_1 d\lambda - \int_{\mathbb{R}} \lim \tilde{f}_n d\lambda \\ &= \int_{\mathbb{R}} f_1 d\lambda - \int_{\mathbb{R}} (f_1 - f) d\lambda \\ &= \int_{\mathbb{R}} f d\lambda.\end{aligned}$$

(c) La convergence uniforme provient de l'égalité $\|f_n - f\|_\infty = \frac{1}{n} \to 0$. Pour tout n, on calcule $\int_{\mathbb{R}} f_n d\lambda = 1$, donc $\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n d\lambda = 1 \neq \int_{\mathbb{R}} f d\lambda = 0$. Le TCM ne s'applique pas car la suite de fonctions n'est pas monotone.

Solution de E. V.2.1 Soit $A \in \mathcal{F}$, on évalue l'égalité donnée dans l'énoncé en choisissant $\varphi = \mathbf{1}_A$. Par définition de l'intégrale pour les fonctions étagées, on a alors $\int_{\mathbb{R}} \varphi \, d\mu = \mu(A)$. Ainsi,

$$\mu(A) = \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_A(x) f(x) \lambda(dx) = \int_A f(x) \lambda(dx).$$

Solution de E. V.2.2 Soient $a < b \in \mathbb{R}$. On ne peut plus appliquer l'égalité directement à $\varphi = \mathbf{1}_{]a,b[}$. On va donc approcher $\mathbf{1}_{]a,b[}$ par une suite croissante $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions continues bornées. Prenons par exemple φ_n définie par:

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi_n(x) = \min\left(1, nd(x,]a,b[^c)\right),$$

où la distance d'un point à un ensemble est définie par $d(x, B) = \inf\limits_{y\in B} |x - y|$.

On observe que φ_n converge simplement vers $\mathbf{1}_{]a,b[}$, donc par le TCM,

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} \varphi_n d\mu = \mu(]a,b[).$$

Or pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\int_{\mathbb{R}} \varphi_n d\mu = \int_{\mathbb{R}} \varphi_n f \, d\lambda$. En appliquant à nouveau le TCM à la suite $(\varphi_n f)_{n\in\mathbb{N}^*}$, on en déduit que

$$\mu(]a,b[) = \int_{]a,b[} f \, d\lambda.$$

Remarque: en utilisant le lemme de classe monotone (pas au programme), on peut calculer $\mu(A)$ pour tout borélien si $\mu(\mathbb{R}) < \infty$.

Solution de E. V.3.1

(a) Pour tout $t \in \mathbb{R}$ fixé, on a $f_n(t) = 0$ pour tout entier $n > t$. On en déduit que $f_n(t)$ tend vers 0 lorsque $n \to \infty$. Ceci montre que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction nulle. *A fortiori*, la convergence a lieu λ-presque partout.

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\int_{\mathbb{R}} f_n(t)\,\lambda(dt) = \int_{[n,n+1]} \lambda(dt) = \lambda([n,n+1]) = 1.$$

(c) La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction $f : t \mapsto 0$, $\int_{\mathbb{R}} f_n(t)\,\lambda(dt)$ converge vers 1 lorsque $n \to \infty$ et $\int_{\mathbb{R}} f(t)\,\lambda(dt) = 0$.

La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ fournit donc un exemple à l'assertion de l'énoncé.

Solution de E. V.3.2 On écrit, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = \underbrace{\int_{]0,1[} \frac{\sin(t^n)}{t^n(1+t)}\,\lambda(dt)}_{I_n} + \underbrace{\int_{]1,+\infty[} \frac{\sin(t^n)}{t^n(1+t)}\,\lambda(dt)}_{J_n}.$$

On a écarté $t = 1$. À justifier.

- Pour I_n, on remarque que sur $]0,1[$,

$$\left|\frac{\sin(t^n)}{t^n(1+t)}\right| \le \frac{1}{1+t}$$

et

$$\frac{\sin(t^n)}{t^n(1+t)} \to \frac{1}{1+t} \quad \text{lorsque } n \to \infty.$$

Comme $t \mapsto 1/(1+t)$ est intégrable, le théorème de convergence dominée implique

$$I_n \to \int_{]0,1[} \frac{1}{1+t}\,\lambda(dt) \quad \text{lorsque } n \to \infty.$$

Puisque $\int_{]0,1[} \frac{1}{1+t}\,\lambda(dt) = \int_{[0,1]} \frac{1}{1+t}\,\lambda(dt)$, le théorème d'intégration des dérivées (Théorème V.3.2) fournit donc le résultat suivant: $\int_{]0,1[} \frac{1}{1+t}\,\lambda(dt) = \ln(2)$.

- Pour J_n, on remarque que sur $]1,+\infty[$,

$$\frac{\sin(t^n)}{t^n(1+t)} \to 0 \quad \text{lorsque } n \to \infty$$

et, pour $n \geq 1$,

$$\left|\frac{\sin(t^n)}{t^n(1+t)}\right| \leq \frac{1}{t(1+t)}.$$

Comme la fonction $t \mapsto \frac{1}{t(1+t)}$ est intégrable sur $]1,+\infty[$, le théorème de convergence dominée implique

$$J_n \to 0 \quad \text{lorsque } n \to \infty.$$

Ainsi, on a $\lim_{n\to\infty} u_n = \ln(2)$.

Solution de E. V.3.3

(a) Attention, on ne peut pas appliquer directement le TCD. Cependant, la convergence uniforme de f_n vers f indique que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy. Donc pour $\epsilon > 0$ fixé, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n, p \geq N$, $\|f_n - f_p\|_\infty < \epsilon$. De plus, f_N étant bornée par hypothèse, il existe $M_N > 0$ tel que $\|f_N\|_\infty \leq M_N$. On déduit de ces deux assertions que pour tout $n \geq N$,

$$\|f_n\|_\infty < \epsilon + \|f_N\|_\infty \leq \epsilon + M_N.$$

Définissons maintenant la fonction $g = \max(f_0, \ldots, f_{N-1}, \epsilon + M_N)$. Alors g est mesurable et bornée. Or $\mu(E) < \infty$, donc toute fonction mesurable bornée est intégrable. Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}$, $|f_n| \leq |g|$, donc par le TCD, $f \in L^1$ et

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n \, d\mu = \int_E f \, d\mu.$$

(b) On suppose désormais $\mu(E) = +\infty$. Alors la conclusion précédente n'est plus valide comme on peut le constater à partir de l'exemple de l'exercice E. V.1.1(b).

Solution de E. V.4.1

(a) Pour tout n, la fonction f_n est étagée. Par définition, son intégrale de Lebesgue vaut donc :

$$\int_{[a,b]} f_n d\lambda = \sum_{k=1}^{n} f(a_{k,n})\left(a_{k,n} - a_{k-1,n}\right).$$

(b) La somme $\sum_{k=1}^{n} f(a_{k,n})\left(a_{k,n} - a_{k-1,n}\right)$ étant une somme de Riemann et la fonction f étant continue sur $[a,b]$, elle est Riemann intégrable sur $[a,b]$ et sa somme de Riemann converge vers $\int_a^b f(x)dx$. D'où :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{[a,b]} f_n d\lambda = \int_a^b f(x)dx.$$

Solution de E. V.4.2 On a :

- Pour tout n, f_n est mesurable sur $[a,b]$ car continue.
- La suite (f_n) converge presque partout (et même partout) vers f.

  En effet, pour tout n entier et tout x de $[a,b]$:

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \sum_{k=1}^{n} |f(a_{k,n}) - f(x)| 1_{]a_{k-1,n},a_{k,n}]}(x).$$

  Comme f est continue sur $[a,b]$, elle est uniformément continue et donc, pour tout $\epsilon > 0$ fixé, il existe $\alpha > 0$ tel que si $|x-y| < \alpha$ alors $|f(x) - f(y)| < \epsilon$ et donc si $\frac{b-a}{n} < \alpha$ alors $|f(a_{k,n}) - f(x)| < \epsilon$ d'où $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$. Ceci prouve bien la convergence de $(f_n(x))$ vers $f(x)$.
- Les fonctions f_n sont dominées par la fonction intégrable $\|f\|_\infty 1_{[a,b]}$, pour tout n et pour presque tout x.

On peut donc appliquer le théorème de la convergence dominée qui assure ainsi que :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{[a,b]} f_n d\lambda = \int_{[a,b]} f d\lambda.$$

Solution de E. V.4.3 Par unicité de la limite, on déduit des questions 2 et 3 que :

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{[a,b]} f d\lambda.$$

Solution de E. V.5.1 Par la première implication du Théorème fondamental de l'analyse (Théorème V.3.1), on a que F est dérivable λ-p.p. sur $\mathbb{R}$ et que:

$$F'(x) = 2\, e^{-x^2} \int_{[0,x]} e^{-t^2}\, \lambda(dt) \quad p.p.$$

Comme la fonction $t \mapsto e^{-t^2}$ est continue, F est en fait dérivable partout et l'égalité précédente est également vérifiée en tout point de $\mathbb{R}$ (prouvez-le).

Solution de E. V.5.2 Posons $g(t,x) = \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}$. Soient $a < b$. On a :

- Pour tout x de $]a,b[$, la fonction $t \mapsto g(t,x)$ est intégrable sur $[0,1]$ car continue.
- Pour tout t de $[0,1]$, la fonction $x \mapsto g(t,x)$ est dérivable sur $]a,b[$.
- Pour tout x de $]a,b[$ et tout t de $[0,1]$:

$$\left|\frac{\partial g}{\partial x}(t,x)\right| = \left|-2x\, e^{-x^2(1+t^2)}\right| \leq 2|x| \leq 2\max(|a|,|b|)$$

  avec $2\max(|a|,|b|)$ indépendant de x et intégrable sur $[0,1]$ car constant.

Le Théorème V.1.2 assure donc que G est dérivable sur $]a,b[$ avec :

$$G'(x) = -\int_{[0,1]} 2x\, e^{-x^2(1+t^2)}\, \lambda(dt) = -2x\, e^{-x^2} \int_{[0,1]} e^{-(xt)^2}\, \lambda(dt) = -2\, e^{-x^2} \int_{[0,x]} e^{-u^2}\, \lambda(du).$$

Ce résultat étant vrai sur tout $]a,b[$ inclus dans $\mathbb{R}$, il est vrai sur $\mathbb{R}$.

Solution de E. V.5.3 On a $F' + G' = 0$. Il existe donc une constante C telle que $F + G = C$. Or $C = F(0) + G(0) = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{4}$ donc :

$$F + G = \frac{\pi}{4}.$$

Solution de E. V.5.4 Soit (x_n) une suite tendant vers $+\infty$. Posons $g_n(t) = \frac{\mathrm{e}^{-x_n^2(1+t^2)}}{1+t^2}$.

On a :

- Pour tout n, g_n est mesurable sur $[0,1]$ car continue.
- La suite de fonctions (g_n) converge presque partout (et même partout) vers la fonction nulle.
- Pour tout n entier et tout t de $[0,1]$ on a $|g_n(t)| \leq 1$ qui est bien intégrable sur $[0,1]$ et indépendant de n.

Donc d'après le théorème de convergence dominée :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{[0,1]} g_n(t)\, \lambda(dt) = \int_{[0,1]} \lim_{n\to+\infty} g_n(t)\, \lambda(dt) = 0.$$

Ceci étant vrai pour toute suite (x_n) tendant vers $+\infty$, on en déduit que :

$$\lim_{x\to+\infty} G(x) = 0.$$

Solution de E. V.5.5 En faisant tendre x vers $+\infty$ dans la relation $F(x) + G(x) = \pi/4$, on obtient :

$$\int_{\mathbb{R}_+} \mathrm{e}^{-t^2}\, \lambda(dt) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Solution de E. V.6.1

(a) Une fonction continue par morceaux admet en tout point une limite à droite et à gauche. La fonction $\mathbf{1}_{\mathbb{Q}}$ n'admet une limite à droite et à gauche en aucun point. Elle n'est donc pas continue par morceaux.

(b) Pour la même raison $\mathbf{1}_{\mathbb{Q}}$ n'est pas réglée (voir la caractérisation des fonctions réglées en annexe du polycopié de L. Gabet (notion non exigée)).

(c) On montre que $\mathbf{1}_{\mathbb{Q}}$ n'est pas intégrable sur $[0,1]$ (suffisant). Si φ est une fonction en escalier sur $[0,1]$ telle que $\varphi \geq \mathbf{1}_{\mathbb{Q}}$, alors $\int_0^1 \varphi(x)\ dx \geq 1$ par densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ (attention, on n'a pas nécessairement $\varphi \geq 1$ partout). On peut en déduire que l'intégrale de Riemann supérieure est supérieure ou égale à 1 (en fait elle vaut 1).

Si φ est une fonction en escalier sur $[0,1]$ telle que $\varphi \leq \mathbf{1}_{\mathbb{Q}}$ alors $\int_0^1 \varphi(x)\ dx \leq 0$ par densité de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$. On peut en déduire que l'intégrale de Riemann inférieure est inférieure ou égale à 0 (en fait elle vaut 0).

Comme les intégrales de Riemann supérieures et inférieures sont différentes, on en déduit que $\mathbf{1}_{\mathbb{Q}}$ n'est pas intégrable au sens de Riemann.

Solution de E. V.6.2

(a) On a vu que $\mathbb{Q}$ est négligeable car dénombrable mais on peut aussi revenir à la définition d'une mesure :

$$\lambda(\mathbb{Q}) = \lambda\left(\cup_{q\in\mathbb{Q}}\{q\}\right) = \sum_{q\in\mathbb{Q}} \lambda(\{q\}) = 0.$$

(b) Puisque $\mathbb{Q}$ est dans $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, $\mathbf{1}_{\mathbb{Q}}$ est une fonction étagée positive. Donc son intégrale de Lebesgue existe. De plus, comme $\mathbb{Q}$ est négligeable, on a $\mathbf{1}_{\mathbb{Q}} = 0$ presque partout. Ainsi $\mathbf{1}_{\mathbb{Q}}$ est intégrable et

$$\int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{\mathbb{Q}}\ d\lambda = \int_{\mathbb{R}} 0\ d\lambda = 0,$$

ou de façon équivalente,

$$\int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{\mathbb{Q}}\ d\lambda = \lambda(\mathbb{Q}) = 0.$$

Solution de E. V.7.1

(a) On a :

$$\int_0^{+\infty} e^{-t}\ dt = \lim_{A\to+\infty} \left[-e^{-t}\right]_0^A = 1,$$

ce qui prouve que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\ dt$ est absolument convergente. Le Théorème V.3.6 du cours assure donc :

$$\int_{\mathbb{R}_+} e^{-t}\ \lambda(dt) = \int_0^{+\infty} e^{-t}\ dt = 1.$$

(b) Pour tout n, la fonction $f_n\ :\ t \mapsto \sin^n(t)$ est continue donc Riemann intégrable sur $[0,\pi]$. Le Théorème V.3.5 assure donc:

$$\int_0^{\pi} \sin^n(t)\ dt = \int_{[0,\pi]} \sin^n(t)\ \lambda(dt).$$

Comme (f_n) est une suite décroissante de fonctions intégrables (voir commentaire dans le corrigé de la question Q. V.1.1(b)), le théorème de convergence monotone donne :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{[0,\pi]} \sin^n(t)\ \lambda(dt) = \int_{[0,\pi]} \lim_{n\to+\infty} \sin^n(t)\ \lambda(dt) = 0.$$

Solution de E. V.7.2 Ici f est une fonction continue sur $\mathbb{R}$.

(a) Par un résultat classique sur l'intégrale de Riemann (voir par exemple p.227 du tome 3 de Ramis-Deschamps-Odoux), la fonction $x \mapsto \int_0^x f(t)\, dt$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée f.

(b) La fonction $x \mapsto \int_{[0,x]} f(t)\, \lambda(dt)$ est aussi dérivable sur $\mathbb{R}$ puisque le Théorème V.3.5 assure que $\int_{[0,x]} f(t)\, \lambda(dt) = \int_0^x f(t)\, dt$.

Remarque : on peut redémontrer ce résultat sans utiliser l'intégrale de Riemann.

(c) La fonction $x \mapsto \int_{[0,x]} f(t)\mathbf{1}_{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}(t)\, \lambda(dt)$ est aussi dérivable sur $\mathbb{R}$.

En effet, puisque $f(t) = f(t)\mathbf{1}_{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}(t)$ presque partout, on a :

$$\int_{[0,x]} f(t)\mathbf{1}_{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}(t)\, \lambda(dt) = \int_{[0,x]} f(t)\, \lambda(dt).$$

Solution de E. V.7.3

(a) La fonction $t \mapsto \frac{\sin(t)}{t}$ est Riemann semi-convergente. Elle n'est donc pas Lebesgue-intégrable (Théorème V.3.6).

(b) La fonction $t \mapsto \frac{\sin(t)}{t} 1_{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}(t)$ n'est pas Riemann localement-intégrable donc elle ne peut pas être Riemann convergente.

Elle n'est pas non plus Lebesque-intégrable car elle est égale presque partout à $\sin(t)/t$ qui n'est pas Lebesgue-intégrable.

Remarque : cette fonction est en revanche égale presque partout à une fonction Riemann semi-convergente. Autrement dit, un représentant de sa classe est Riemann semi-convergent. On peut donc dire que sa classe de fonction est Riemann semi-convergente.

Solution de E. V.8.1 Remarquez ici que l'exercice utilise un autre intervalle ($[-\pi, \pi]$) que celui que nous avons utlisé jusqu'à présent pour définir les séries de Fourier. Ceci est sans conséquence pour l'étude des fonctions 2π-périodiques.

(a) On note s l'exposant conjugué de r ($\frac{1}{s} + \frac{1}{r} = 1$). Soit μ la mesure définie par $\mu(dx) = |h(x)|\lambda(dx)$, i.e. la mesure de densité $|h|$ par rapport à la mesure de Lebesgue (bien définie car $h \in L^1$). Alors en appliquant l'inégalité de Hölder, on trouve:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} |g(x-y)||h(y)|\lambda(dy) &= \int_{\mathbb{R}} |g(x-y)|\mu(dy) \\
&\leq \left(\int_{\mathbb{R}} 1^s \mu(dy) \right)^{\frac{1}{s}} \left(\int_{\mathbb{R}} |g(x-y)|^r \mu(dy) \right)^{\frac{1}{r}} \\
&\leq \|h\|_1^{\frac{1}{s}} \left(\int_{\mathbb{R}} |g(x-y)|^r |h(y)|\lambda(dy) \right)^{\frac{1}{r}}.
\end{aligned}$$

Il vient ensuite:

$$\begin{aligned}
\|g*h\|_r^r &= \int_{\mathbb{R}} \left| \int_{\mathbb{R}} g(x-y)h(y)\lambda(dy) \right|^r \lambda(dx) \\
&\leq \|h\|_1^{\frac{r}{s}} \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} |g(x-y)|^r |h(y)| \lambda(dy) \right) \lambda(dx) \\
&= \|h\|_1^{\frac{r}{s}} \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} |g(x-y)|^r \lambda(dx) \right) |h(y)| \lambda(dy) \\
&= \|h\|_1^{\frac{r}{s}} \|g\|_r^r \|h\|_1 = \|h\|_1^r \|g\|_r^r
\end{aligned}$$

où nous avons utilisé le théorème de Fubini-Tonelli à l'avant-dernière ligne.

(b) Soit $\widetilde{f}$ une fonction continue sur $[-\pi,\pi]$. Pour appliquer le théorème de Féjer, on doit disposer d'une fonction 2π-périodique et continue sur $\mathbb{R}$. Si on ne suppose pas que $\widetilde{f}(-\pi) = \widetilde{f}(\pi)$, rien ne garantit la continuité de l'extension de $\widetilde{f}$ à $\mathbb{R}$ (par 2π-périodicité, $\widetilde{f}(x+2k\pi) = \widetilde{f}(x), \forall k \in \mathbb{Z}$).

Pour tout $\eta \in]0,\pi[$, définissons $\widetilde{f}_\eta$ sur $[-\pi,\pi]$ par:

$$\widetilde{f}_\eta(x) = \begin{cases} \widetilde{f}(x) & \text{si } x \in [-\pi+\eta, \pi] \\ \widetilde{f}(\pi) + (\widetilde{f}(-\pi+\eta) - \widetilde{f}(\pi)) \times \frac{x+\pi}{\eta} & \text{si } x \in [-\pi, -\pi+\eta[\end{cases}$$

de sorte que $\widetilde{f}_\eta(-\pi) = \widetilde{f}_\eta(\pi)$ et $\widetilde{f}_\eta$ se prolonge en une fonction 2π-périodique qui est continue sur $\mathbb{R}$.
Fixons $\epsilon > 0$. Alors pour tout $N \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
\|\widetilde{f} - \widetilde{f} * K_N\|_{L^p([-\pi,\pi])} \leq \|\widetilde{f} - \widetilde{f}_\eta\|_{L^p([-\pi,\pi])} &+ \|\widetilde{f}_\eta - \widetilde{f}_\eta * K_N\|_{L^p([-\pi,\pi])} \\
&+ \|(\widetilde{f}_\eta - \widetilde{f}) * K_N\|_{L^p([-\pi,\pi])}.
\end{aligned}$$

Nous allons commencer par le dernier terme. Mais avant cela, remarquons que $\widetilde{f}, \widetilde{f}_\eta \notin L^p(\mathbb{R})$ (car elles sont périodiques non nulles), donc le résultat de la question précédente ne s'applique pas en l'état. Ainsi, définissons $\widetilde{\widetilde{f}}$ par:

$$\widetilde{\widetilde{f}}(x) = \begin{cases} \widetilde{f}(x) & \text{si } x \in [-2\pi, 2\pi] \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus [-2\pi, 2\pi], \end{cases}$$

et on définit de même $\widetilde{\widetilde{f}}_\eta$ à partir de $\widetilde{f}_\eta$. Enfin, on définit $\widetilde{K}_N = K_N \mathbf{1}_{[-\pi,\pi]}$. On a alors $\widetilde{\widetilde{f}}, \widetilde{\widetilde{f}}_\eta \in L^p(\mathbb{R})$ et

$$\begin{aligned}
\|(\widetilde{f}_\eta - \widetilde{f}) * K_N\|_{L^p([-\pi,\pi])}^p &= \int_{[-\pi,\pi]} |\frac{1}{2\pi} \int_{[-\pi,\pi]} \left(\widetilde{f}_\eta(x-y) - \widetilde{f}(x-y) \right) K_N(y) \lambda(dy)|^p \lambda(dx) \\
&\leq \int_{\mathbb{R}} |\frac{1}{2\pi} \int_{[-\pi,\pi]} \left(\widetilde{\widetilde{f}}_\eta(x-y) - \widetilde{\widetilde{f}}(x-y) \right) \widetilde{K}_N(y) \lambda(dy)|^p \lambda(dx) \\
&\leq \|\widetilde{\widetilde{f}}_\eta - \widetilde{\widetilde{f}}\|_{L^p(\mathbb{R})}^p \|\widetilde{K}_N\|_{L^1(\mathbb{R})}^p \\
&= 2\|\widetilde{f}_\eta - \widetilde{f}\|_{L^p([-\pi,\pi])}^p,
\end{aligned}$$

où la deuxième inégalité provient de la question précédente.
Il est maintenant assez aisé de prouver que pour $p \in [1, \infty[$, il existe η_0 tel que $\|f_{\eta_0} - f\|_{L^p([-\pi,\pi])} < \frac{2\epsilon}{9}$.
Enfin, le théorème de Féjer s'applique à $\widetilde{f}_{\eta_0}$ donc il existe N_0 tel que $\|\widetilde{f}_{\eta_0} - \widetilde{f}_{\eta_0} * K_{N_0}\|_\infty < \frac{\epsilon}{6\pi}$. Or $\|\widetilde{f}_{\eta_0} - \widetilde{f}_{\eta_0} * K_{N_0}\|_{L^p([-\pi,\pi])} \leq 2\pi\|\widetilde{f}_{\eta_0} - \widetilde{f}_{\eta_0} * K_{N_0}\|_\infty$, d'où:

$$\|\widetilde{f}_{\eta_0} - \widetilde{f}_{\eta_0} * K_{N_0}\|_{L^p([-\pi,\pi])} < \frac{\epsilon}{3}.$$

On obtient donc le résultat souhaité: $\|\widetilde{f} - \widetilde{f} * K_{N_0}\|_{L^p([-\pi,\pi])} < \epsilon$.

(c) Cette question se traite de la même manière que la précédente, la première étape étant d'approcher f par une fonction continue $\widetilde{f}$.

Solution de E. V.8.2 On rapelle que $f * K_N = \sum_{|k|\leq N} \left(1 - \frac{|k|}{N+1}\right) c_k(f) e_k$. Donc selon les hypothèses de l'énoncé, on a $f * K_N = 0$, pour tout $N \in \mathbb{N}$. Par le théorème de Féjer dans L^1 démontré à la question précédente, on en déduit que $\|f\|_1 = 0$, donc $f = 0$ p.p. .

Solution de E. V.9.1 Comme $\mathbb{Q}$ est dénombrable, on peut ordonner les rationnels en une suite $(q_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. On choisit alors $O_{q_n} =]q_n - \epsilon/2^{n+1}, q_n + \epsilon/2^{n+1}[$. La mesure de $\cup O_{q_n}$ est alors majorée par

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\epsilon}{2^n} = \epsilon.$$

Solution de E. V.9.2 Si A un ouvert de $\mathbb{R}$ alors il est borélien donc mesurable.

Si A est borné, il existe $a < b$ tel que $A \subset]a, b[$ donc $\lambda(A) \leq b - a < +\infty$.

En revanche, considérons $A = \cup]n - 1/2n^2, n + 1/2n^2[$ (l'ouvert de la question précédente est également valable). Alors A est ouvert (comme union d'ouverts), de mesure finie (égale à $\sum_1^{+\infty} 1/n^2$) mais non borné.

Solution de E. V.9.3 Soit $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ contenant un ouvert non vide B. Alors $\lambda(A) \geq \lambda(B)$. Or puisque B est un ouvert non vide, pour $x \in B$, il existe $r > 0$ tel que $]x - r, x + r[\subset B$ donc $\lambda(A) \geq \lambda(B) \geq 2r > 0$.

En revanche, $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est un borélien de mesure non nulle (infinie) mais qui ne contient aucun ouvert (par densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$).

Solution de E. V.10.1 Soit $x > 0$. L'inégalité de Cauchy-Schwarz dans $L^2([0, x])$ donne :

$$\int_{[0,x]} |f| \, d\lambda \leq \sqrt{\int_{[0,x]} |f|^2 \, d\lambda} \sqrt{\int_{[0,x]} 1 \, d\lambda}$$

ce qui assure que f est intégrable sur $[0, x]$ et donc que $F(x)$ existe.

Solution de E. V.10.2

(a) Soit f continue à support compact.

Alors, par le Théorème V.3.5, $\int_{[0,x]} f(t)\ \lambda(dt) = \int_0^x f(t)dt$ qui est continument dérivable. Cette même proposition conduit, en dérivant, à :

$$xF'(x) + F(x) = f(x).$$

(b) Grâce à une intégration par parties (sur $[0, A]$ avec $u = F^2$ et $v' = 1$, puis passage à la limite quand A tend vers $+\infty$ **à justifier**), on montre que :

$$\int_0^{+\infty} F^2(x)dx = -2\int_0^{+\infty} F(x)xF'(x)dx$$

En utilisant le résultat de (a), on trouve alors :

$$\int_0^{+\infty} F^2(x)dx = -2\int_0^{+\infty} F(x)f(x)dx + 2\int_0^{+\infty} F^2(x)dx$$

et donc :

$$\int_0^{+\infty} F^2(x)dx = 2\int_0^{+\infty} F(x)f(x)dx$$

(c) Comme f est dans L^2 (car continue à support compact) et F aussi (d'après (b)), l'inégalité de Cauchy-Schwarz conduit à :

$$\int_{\mathbb{R}_+} F(x)f(x)\ \lambda(dx) \leq \sqrt{\int_{\mathbb{R}_+} F^2(x)\ \lambda(dx)}\ \sqrt{\int_{\mathbb{R}_+} f^2(x)\ \lambda(dx)}$$

et donc, avec (b) :

$$\|F\|_2 \leq 2\|f\|_2.$$

Solution de E. V.10.3

(a) La densité de l'ensemble des fonctions continues à support compact dans L^2 assure l'existence de la suite (f_n) (ce résultat de densité sera présenté au cours des prochaines séances).

(b) En appliquant 2(c) à $F_r - F_s$, on obtient :

$$\|F_r - F_s\|_2 \leq 2\|f_r - f_s\|_2$$

Comme la suite (f_n) est de Cauchy dans L^2, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $N > 0$ tel que si $r > s > N$ alors $\|f_r - f_s\|_2 < \epsilon$ et donc $2\|F_r - F_s\|_2 < \epsilon$.

La suite (F_n) est donc une suite de Cauchy dans L^2.

Comme L^2 est un espace complet, la suite (F_n) converge dans L^2.

(c) Soit $\hat{F} = \lim F_n$. On a, par continuité de la norme : $\|\hat{F}\|_2 = \|\lim F_n\|_2 = \lim \|F_n\|_2$. Or d'après 2(c), pour tout entier n, $\|F_n\|_2 \leq 2\|f_n\|_2$. Donc en passant à la limite $\|\hat{F}\|_2 \leq 2\|f\|_2$.

(d) Montrons que $\hat{F} = F$ dans L^2 ou, ce qui revient au même $\hat{F} = F$ $p.p.$ au sens des fonctions.

Soit $x \neq 0$. Alors :

$$|F_n(x) - F(x)| \leq \frac{1}{x} \int_{[0,x]} |f_n - f| \, d\lambda \leq \frac{1}{x} \sqrt{\int_{\mathbb{R}_+} |f_n - f|^2 \, d\lambda} \sqrt{\int_{[0,x]} 1 \, d\lambda} = \frac{1}{\sqrt{x}} \|f_n - f\|_2$$

ce qui assure la convergence de (F_n) vers F presque partout.

Par ailleurs, on sait que (F_n) converge vers $\hat{F}$ dans L^2 donc il existe une suite extraite de (F_n) convergeant vers $\hat{F}$ presque partout (voir Théorème 3.12 du livre de Rudin).

Comme cette suite extraite converge aussi vers F d'après ce qui précède, par unicité de la limite $\hat{F} = F$ $p.p.$

(e) Le résultat de 3(c) s'écrit donc $\|F\|_2 \leq 2\|f\|_2$. Comme l'application $f \mapsto F$ est linéaire, cette inégalité en assure la continuité.