计算方法 第 7 章习题答案

7.2 方程 $x^3-x^2-1=0$ 在 $x_0=1.5$ 附近有根, 将方程作三种同解变形, 可得三种迭代格式

(1) $x=1+\frac{1}{x^2},\ \ x_{k+1}=1+\frac{1}{x_k^2}$

(2) $x^3=1+x^2,\ \ x_{k+1}=\sqrt[3]{1+x_k^2}$

(3) $x=\frac{1}{x-1},\ \ x_{k+1}=\frac{1}{\sqrt{x_k-1}}$

判断各迭代格式在 $x_0=1.5$ 附近的收敛性, 选一种收敛最快的迭代格式, 计算在 $x_0=1.5$ 附近的根, 准确到4位小数.

解 取 $x_0=1.5$ 的邻域 $[1.4,1.6]$ 作分析.

(1) $\varphi(x)=1+\frac{1}{x^2}$, $|\varphi'(x)|=|-\frac{2}{x^3}|\le\frac{2}{1.4^3}=L_1=0.7289<1$, 所以迭代收敛.

(2) $\varphi(x)=\sqrt[3]{1+x^2}$, $|\varphi'(x)|=\frac{2x}{3\sqrt[3]{(1+x^2)^2}}<\frac{2\times1.6}{3\sqrt[3]{(1+1.6^2)^2}}=L_2=0.5174<1$, 所以迭代收敛.

(3) $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{(x-1)}}$, $|\varphi'(x)|=\frac{1}{2\sqrt{(x-1)^3}}>\frac{1}{2\times0.6^{\frac{3}{2}}}=L_3=1.0758>1$, 所以迭代发散.

由于$L_2<L_1<L_3$, 故迭代格式 (2) 收敛速度最快, 选取迭代格式 (2) 进行迭代. 要使结果具有4位小数, 只需要

$$|x^*-x_k|\le\frac{L_2}{1-L_2}|x_{k+1}-x_k|<\frac{1}{2}\times10^{-4}\quad \text{迭代法全局收敛定理}$$

即 $|x_k-x_{k-1}|<\frac{1-L_2}{L_2}\times\frac{1}{2}\times10^{-4}<\frac{1}{2}\times10^{-4}$. 取 $x_0=1.5$, 计算结果如下:

$$x_1=1.48125,\ \ x_2=1.47272,\ \ x_3=1.46882,\ \ x_4=1.46705,\ \ x_5=1.46624,$$
$$x_6=1.46588,\ \ x_7=1.46571,\ \ x_8=1.46563,\ \ x_9=1.46560.$$

由于 $|x_9-x_8|<\frac{1}{2}\times10^{-4}$, 取 $x^*\approx x_9$.

7.3 设在区间 $[a,b]$ 上 $0<m\le f'(x)\le M$, 证明对任意 $\lambda\in(0,\frac{2}{M})$, 取$x_0\in[a,b]$ 时, 由迭代格式

$$x_{k+1}=x_k-\lambda f(x_k),k=0,1,2,...$$

产生的迭代序列 x_k 收敛于方程 $f(x)=0$ 的根 x^*.

证明 设 $\varphi(x)=x-\lambda f(x)$, 可知 $\varphi(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上可导. 对于任意给定的 λ 值, 满足条件 $0<m\le f'(x)\le M$ 时,

$$\varphi'(x)=1-\lambda f'(x)\quad\Longrightarrow\quad 1-\lambda M\le\varphi'(x)\le1-\lambda m<1$$

又 $0<\lambda<\frac{2}{M}$, 则 $0<\lambda M<2$ 时, $-1<1-\lambda M<1$, 所以 $-1<1-\lambda M\le\varphi'(x)\le1-\lambda m<1$. 若令 $L=\max\{|1-\lambda M|,|1-\lambda m|\}$, 则可知 $|\varphi'(x)|\le L<1$.

$$|x_k-x^*|\le L|x_{k-1}-x^*|\le...\le L^k|x_0-x^*|\to0\qquad \text{误差估计式}$$

即 $\lim\limits_{k\to\infty}x_k=x^*$.

7.4 利用迭代法的思想证明

$$\lim_{k\to\infty}\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}}_{\text{开方 } k \text{ 次}}=2.$$

证明 令

$$x_{k+1}=\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}}_{\text{开方 } k \text{ 次}}$$

则 x_{k+1} 可看作是初值为 $x_0=\sqrt{2}$ 的迭代格式 $x_{k+1}=\sqrt{2+x_k}$ 生成的迭代序列, 其中迭代函数为 $\phi(x)=\sqrt{2+x}$.

在区间 $[1,3]$ 上考虑该迭代格式的收敛性. 由于

$$\phi'(x)=\frac{1}{2\sqrt{2+x}} \implies |\phi'(x)|<1,\ \forall x\in[1,2]$$

因此以 $\phi(x)$ 为迭代函数的简单迭代法 $x_{k+1}=\phi(x_k)$ 在区间 $[1,3]$ 上收敛, 且收敛于的 $\phi(x)$ 的不动点 x^*. 易知 $\phi(2)=2$, 即 $x^*=2$,

$$\lim_{k\to\infty}\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}}_{\text{开方 } k \text{ 次}}=x^*=2.$$

7.8 怎样选取函数 $h(x)$, 使得当

$$\varphi(x)=x-\frac{f(x)}{f'(x)}+h(x)\left[\frac{f(x)}{f'(x)}\right]^2$$

时, 简单迭代格式至少三阶收敛.

解 令 $\boxed{p(x)=-\frac{1}{f'(x)},\ q(x)=\frac{h(x)}{f'^2(x)},}$ 则

$$\varphi(x)=x+p(x)f(x)+q(x)f^2(x).$$

设 x^* 满足 $f(x^*)=0$, 则有 $\varphi(x^*)=x^*$, 即不动点存在. 若要简单迭代格式 $x_{k+1}=\varphi(x_k)$ 至少三阶收敛到 $f(x)=0$ 的根 x^*. 根据收敛阶定理, 应有

$$\varphi'(x^*)=0,\quad \varphi''(x^*)=0.\qquad \text{三阶收敛}$$

于是

$$\begin{aligned}
\varphi'(x^*)&=1+p(x^*)f'(x^*)+p'(x^*)f(x^*)+q'(x^*)f^2(x^*)+2q(x^*)f(x^*)f'(x^*)\\
&=1+p(x^*)f'(x^*)=1-\frac{f'(x^*)}{f'(x^*)}=1-1=0,\\
\varphi''(x^*)&=p''(x^*)f(x^*)+2p'(x^*)f'(x^*)+p(x^*)f''(x^*)+q''(x^*)f^2(x^*)\\
&\quad+4f(x^*)f'(x^*)q'(x^*)+2q(x^*)\big(f(x^*)f''(x^*)+f'^2(x^*)\big)\\
&=2p'(x^*)f'(x^*)+p(x^*)f''(x^*)+2q(x^*)f'^2(x^*)=0,
\end{aligned}$$

即 $p(x), q(x)$ 满足关系

$$2p'(x^*)f'(x^*)+p(x^*)f''(x^*)+2q(x^*)f'^2(x^*)=0.$$

由于

$$p(x^*)=-\frac{1}{f'(x^*)},\ \ p'(x^*)=\frac{f''(x^*)}{f'^2(x^*)},\ \ q(x^*)=\frac{h(x^*)}{f'^2(x^*)},$$

代入得到

$$2\frac{f''(x^*)}{f'(x^*)}-\frac{f''(x^*)}{f'(x^*)}+2h(x^*)=0 \implies h(x^*)=-\frac{f''(x^*)}{2f'(x^*)}.$$

由 $f(x)$ 及 x^* 的任意性, 可知当 $h(x)=-\frac{1}{2}\frac{f''(x)}{f'(x)}$ 时, 上述简单迭代法至少三阶收敛.

7.9 用松弛法和斯特森加速技术求解习题 7.2.

解 以习题 7.2 中的迭代格式 (1) 为例考虑加速技术. 松弛法:

$$\varphi(x)=1+\frac{1}{x^2},\ \ \varphi'(x)=-\frac{2}{x^3},\ \ \varphi'(x_0)=\varphi'(1.5)=-\frac{2}{1.5^3}=-\frac{16}{27}$$

迭代格式为

$$x_{k+1}=\frac{1+\frac{1}{x_k^2}+\frac{16}{27}x_k}{1+\frac{16}{27}}$$

计算如下：

$$x_1=1.46512,\ \ x_2=1.46558,\ \ x_3=1.46557,$$

故 $x^*=1.4656$.

斯特森加速技术:

$$x_1=\varphi(x_0)=1.44444,\ \ x_2=\varphi(x_1)=1.47929,\ \boxed{\overline{x}=x_2-\frac{(x_2-x_1)^2}{x_2-2x_1+x_0}}=1.46586$$

$$x_0=\overline{x}=1.46586,\ \ x_1=\varphi(x_0)=1.46539,\ \ x_2=\varphi(x_1)=1.46569,\ \ \overline{x}=x_2-\frac{(x_2-x_1)^2}{x_2-2x_1+x_0}=1.46557$$

$$x_0=\overline{x}=1.46557,\ \ x_1=\varphi(x_0)=1.46557,\ \ x_2=\varphi(x_1)=1.46557,\ \ \overline{x}=x_2-\frac{(x_2-x_1)^2}{x_2-2x_1+x_0}=1.46557$$

由于 $|\overline{x}-x_2|<\frac{1}{2}\times10^{-5}$, 故取 $x^*\approx\overline{x}=1.4656$.

7.13 证明 $f(x)=(x-x^*)^m g(x)$, 且 $g(x^*)\neq0$, 当 $m>1$ 时, 求解方程 $f(x)=0$ 的牛顿法一阶收敛, 但令 $u=f(x)/f'(x)$ 时, 迭代法

$$x_{k+1}=x_k-m\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}\quad 或者\quad x_{k+1}=x_k-\frac{u(x_k)}{u'(x_k)}$$

二阶收敛. 收敛阶定理

证明 令 $\varphi(x)=x-\frac{f(x)}{f'(x)}$, 由于

$$0<\varphi'(x^*)=1-\frac{1}{m}<1,$$

所以一阶收敛.

令

$$\varphi(x) = x - m\frac{f(x)}{f'(x)} = x - m\frac{(x-x^*)g(x)}{mg(x)+(x-x^*)g'(x)},$$

则

$$\varphi(x^*) = x^*,\ \ \varphi'(x^*) = 0,$$

所以至少二阶收敛.

7.17 给定 $x^{(0)} = (0.6, 0.8)^{\mathrm{T}}$, 用布洛依登法求解如下方程组的近似解, 准确到两位小数

$$x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0, \quad 2x_1 + x_2 - 1 = 0.$$

解 由题知

$$f(x) = \begin{pmatrix} x_1^2 + x_2^2 - 1 \\ 2x_1 + x_2 - 1 \end{pmatrix}, \quad f(x^{(0)}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$J_f(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 & 2x_2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_0 = J_f(x^{(0)}) = \begin{pmatrix} 1.2 & 1.6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},\ A_0^{-1} = \begin{pmatrix} -0.5 & 0.8 \\ 1 & -0.6 \end{pmatrix}$$

$$x^{(1)} = x^{(0)} - A_0^{-1} f(x^{(0)}) = (-0.2, 1.4)^{\mathrm{T}},\ \ f(x^{(1)}) = (0, 1)^{\mathrm{T}},$$

$$s^{(1)} = x^{(1)} - x^{(0)} = (-0.8, 0.6)^{\mathrm{T}},\ \ y^{(1)} = f(x^{(1)}) - f(x^{(0)}) = (1, -1)^{\mathrm{T}},$$

$$A_1^{-1} = A_0^{-1} + \frac{(s^{(1)} - A_0^{-1}y^{(1)})s^{(1)\mathrm{T}}A_0^{-1}}{s^{(1)\mathrm{T}}A_0^{-1}y^{(1)}} = \begin{pmatrix} -0.25 & 0.55 \\ 0.5 & -0.1 \end{pmatrix}$$

$$x^{(2)} = x^{(1)} - A_1^{-1} f(x^{(1)}) = (0.05, 0.9)^{\mathrm{T}},\ \ f(x^{(2)}) = (1.0, 0.0)^{\mathrm{T}},$$

$$s^{(2)} = x^{(2)} - x^{(1)} = (0.25, -0.5)^{\mathrm{T}},\ \ y^{(2)} = f(x^{(2)}) - f(x^{(1)}) = (-1.1875, 0)^{\mathrm{T}},$$

$$A_2^{-1} = A_1^{-1} + \frac{(s^{(2)} - A_1^{-1}y^{(2)})s^{(2)\mathrm{T}}A_1^{-1}}{s^{(2)\mathrm{T}}A_1^{-1}y^{(2)}} = \begin{pmatrix} -0.2105 & 0.5263 \\ 0.4211 & -0.0526 \end{pmatrix}$$

$$x^{(3)} = x^{(2)} - A_2^{-1} f(x^{(2)}) = (0.0105, 0.9789)^{\mathrm{T}},\ \ f(x^{(3)}) = (-0.1875, 0)^{\mathrm{T}},$$

$$s^{(3)} = x^{(3)} - x^{(2)} = (-0.0395, 0.0789)^{\mathrm{T}},\ \ y^{(3)} = f(x^{(3)}) - f(x^{(2)}) = (0.1459, 0)^{\mathrm{T}},$$

$$A_3^{-1} = A_2^{-1} + \frac{(s^{(3)} - A_2^{-1}y^{(3)})s^{(3)\mathrm{T}}A_2^{-1}}{s^{(3)\mathrm{T}}A_2^{-1}y^{(3)}} = \begin{pmatrix} -0.2705 & 0.5623 \\ 0.5409 & -0.1246 \end{pmatrix}$$

$$x^{(4)} = x^{(3)} - A_3^{-1} f(x^{(3)}) = (-0.0007, 1.0014)^{\mathrm{T}},\ \ f(x^{(4)}) = (-0.0416, 0)^{\mathrm{T}},$$

$$s^{(4)} = x^{(4)} - x^{(3)} = (-0.0124, 0.0248)^{\mathrm{T}},\ \ y^{(4)} = f(x^{(4)}) - f(x^{(3)}) = (0.0444, 0)^{\mathrm{T}},$$

$$A_4^{-1} = A_3^{-1} + \frac{(s^{(4)} - A_3^{-1}y^{(4)})s^{(4)\mathrm{T}}A_3^{-1}}{s^{(4)\mathrm{T}}A_3^{-1}y^{(4)}} = \begin{pmatrix} -0.2531 & 0.5519 \\ 0.5062 & -0.1037 \end{pmatrix}$$

于是有

$$x^{(5)} \approx (9.48 \times 10^{-6}, 0.99998)^{\mathrm{T}},\ \ \|x^{(5)} - x^{(4)}\|_\infty \leqslant \frac{1}{2} \times 10^{-2},$$

达到给定的精度, 因此取 $x^* \approx x^{(5)}$.