Convergence, Intégration, Probabilités

Séance 4 - Construction de l'intégrale, espaces L^p, interversion limite-intégrale

CentraleSupélec

Cursus ingénieur

26 septembre 2019

Retours amphi 3

- Support amphi 3 disponible en versions vierge et annotée sur edunao
- Enregistrement vidéo de l'amphi 3 disponible sur la web tv
- Problème de positionnement du micro
- Questions d'ordre mathématique sur daskit/cip19-20 (même espace anglophone/francophone)
- Support amphi 4 vierge disponible dès à présent sur edunao

Rappels de la séance précédente

- Notion de tribu, espace mesurable
- Notion de mesure, espace mesuré
- Cas particuliers des espaces de probabilités
- Notion de fonctions mesurables
- Notion de fonctions étagées

Programme

Intégrale d'une fonction étagée réelle positive

Intégrale des fonctions mesurables positives

Fonctions μ-intégrables

Théorème de convergence dominée

Espace L^p

Programme

Intégrale d'une fonction étagée réelle positive

Intégrale des fonctions mesurables positives

Fonctions μ-intégrables

Théorème de convergence dominée

Espace L^p

Intégrale d'une fonction étagée positive I

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré.

Définition 4.1 (Intégrale d'une fonction étagée réelle positive)

Soit $\varphi = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \mathbf{1}_{A_i}$ une fonction étagée, positive, i.e. $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}_+$, avec $\forall i \in \{1, \ldots, N\}$, $\alpha_i \in \mathbb{R}_+$ et les $(A_i)_{i \in \{1,\ldots,N\}}$ forment une partition mesurable de Ω. On définit l'intégrale de φ par rapport à la mesure μ par

$$\int_{\Omega} \varphi \, d\mu = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \mu(A_i).$$

Intégrale d'une fonction étagée positive II

Propriétés de l'intégrale d'une fonction étagée I

Proposition 4.2 (Propriétés élémentaires)

Soient φ et ψ deux fonctions étagées réelles positives sur $(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$.

(a) $\int_\Omega (\varphi + \psi)\, d\mu = \int_\Omega \varphi\, d\mu + \int_\Omega \psi\, d\mu$.

(b) $\forall \lambda \geq 0, \int_\Omega \lambda\varphi\, d\mu = \lambda \int_\Omega \varphi\, d\mu$.

(c) $\varphi \leq \psi \Longrightarrow \int_\Omega \varphi\, d\mu \leq \int_\Omega \psi\, d\mu$.

Propriétés de l'intégrale d'une fonction étagée II

Programme

Intégrale d'une fonction mesurable positive

Définition 4.3 (Intégrale d'une fonction mesurable positive)

Soit $f : (\Omega, \mathcal{T}) \to (\overline{\mathbb{R}}_+, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}_+))$ *une fonction mesurable, à valeurs réelles positives, éventuellement infinies. On définit l'intégrale de* f *par rapport à la mesure* μ *par*

$$\int_\Omega f \, d\mu = \sup \left\{ \int_\Omega \varphi \, d\mu : \varphi \text{ fonction étagée positive}, \varphi \leq f \right\}.$$

Propriétés de l'intégrale d'une fonction mesurable positive

Proposition 4.4 (Propriétés)

Soit $f, g : (\Omega, \mathcal{T}) \to (\overline{\mathbb{R}}_+, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}_+))$.

(a) $\int_\Omega f \, d\mu \geq 0$;

(b) $f \leq g \Longrightarrow \int_\Omega f \, d\mu \leq \int_\Omega g \, d\mu$.

Théorème de convergence monotone I

Théorème 4.5 (Théorème de convergence monotone)

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite croissante de fonctions mesurables sur* $(\Omega, \mathcal{T})$ *à valeurs dans* $\overline{\mathbb{R}}_+$. *Alors* $\lim_n f_n$ *est une fonction mesurable sur* $(\Omega, \mathcal{T})$ *à valeurs dans* $\overline{\mathbb{R}}_+$ *et*

$$\int_\Omega \lim_n f_n \, d\mu = \lim_n \int_\Omega f_n \, d\mu.$$

Théorème de convergence monotone II

Lemme 4.6 (Lemme de démonstration)

Soit φ *une fonction étagée à valeurs dans* $\overline{\mathbb{R}}_+$. *Soit* $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite croissante de parties mesurables de* Ω, *vérifiant* $\Omega = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$. *Alors,* $\lim_n \int_\Omega \varphi \mathbf{1}_{E_n}\, d\mu = \int_\Omega \varphi\, d\mu$.

Théorème de convergence monotone III

Propriétés de l'intégrale des fonctions mesurables positives

Proposition 4.7 (Propriétés élémentaires)

Soient f et g deux fonctions mesurables sur $(\Omega, \mathcal{T})$ à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}_+$.

(a) $\int_\Omega (f+g)\, d\mu = \int_\Omega f\, d\mu + \int_\Omega g\, d\mu$.

(b) $\forall \lambda \geq 0, \int_\Omega \lambda f\, d\mu = \lambda \int_\Omega f\, d\mu$.

Propriétés de l'intégrale des fonctions mesurables positives

Définition 4.8 (Propriétés vraies presque-partout)

Une propriété $P(x)$ est dite vraie μ-presque partout (noté μ-p.p.) s'il existe un ensemble $N \in \mathcal{T}$ tel que $\mu(N) = 0$ et $P(x)$ est vraie pour tout $x \in \Omega \setminus N$.

Proposition 4.9 (Propriétés (suite))

Soient f et g deux fonctions mesurables sur $(\Omega, \mathcal{T})$ à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}_+$.

(a) $\int_\Omega f \, d\mu = 0 \Longleftrightarrow f = 0 \;\; \mu - p.p.$

(b) $f = g \;\; \mu - p.p. \Longrightarrow \int_\Omega f \, d\mu = \int_\Omega g \, d\mu.$

Propriétés de l'intégrale des fonctions mesurables positives

Propriétés de l'intégrale des fonctions mesurables positives

Proposition 4.10 (Propriétés (suite))

Soit f une fonction mesurable sur $(\Omega, \mathcal{T})$ à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}_+$.

(a) $\forall a > 0, \mu(\{x \in \Omega : f(x) \geq a\}) \leq \dfrac{1}{a} \displaystyle\int_\Omega f \, d\mu$;

(b) $\int_\Omega f \, d\mu < \infty \Longrightarrow f < \infty \ \ \mu - p.p.$

- **TD Exercice IV.2** (Inégalité de Markov)

Exemple de l'intégration sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mathrm{Card})$

- **TD Exercice IV.1**

Programme

Intégrale d'une fonction μ-intégrable

Définition 4.11 (Fonction μ-intégrable)

Une fonction $f : (\Omega, \mathcal{T}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ mesurable est dite μ-intégrable (ou s'il n'y a pas d'ambiguïté intégrable), si $\int_\Omega |f| \, d\mu < +\infty$. On note $\mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ l'ensemble des fonctions μ-intégrables.

Définition 4.12 (Intégrale d'une fonction $\mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$)

Soit f une fonction de $\mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$. Alors f^+ et f^- sont des fonctions mesurables positives, et on définit l'intégrale de f par rapport à μ par

$$\int_\Omega f \, d\mu = \int_\Omega f^+ \, d\mu - \int_\Omega f^- \, d\mu.$$

Propriétés de l'intégrale des fonctions $\mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$

Proposition 4.13 (Propriétés élémentaires)

Soient f et g deux fonctions de $\mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$.

(a) *(linéarité)* $\int_\Omega (\lambda f + g)\, d\mu = \lambda \int_\Omega f\, d\mu + \int_\Omega g\, d\mu$.

(b) *(croissance)* $f \leq g \Longrightarrow \int_\Omega f\, d\mu \leq \int_\Omega g\, d\mu$.

(c) $f = g \;\; \mu - p.p. \Longrightarrow \int_\Omega f\, d\mu = \int_\Omega g\, d\mu$.

(d) *(inégalité triangulaire)* $\left|\int_\Omega f\, d\mu\right| \leq \int_\Omega |f|\, d\mu$.

- $\mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
- $f \to \int_\Omega f\, d\mu$ est une forme linéaire sur $\mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$.

Propriétés de l'intégrale des fonctions $\mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$

Programme

Intégrale d'une fonction étagée réelle positive

Intégrale des fonctions mesurables positives

Fonctions μ-intégrables

Théorème de convergence dominée

Espace L^p

Lemme de Fatou

Proposition 4.14 (Lemme de Fatou)

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de fonctions mesurables sur* $(\Omega, \mathcal{T})$ *à valeurs dans* $\overline{\mathbb{R}}_+$*. Alors :* $0 \leq \int_\Omega \liminf_n f_n \, d\mu \leq \liminf_n \int_\Omega f_n \, d\mu \leq +\infty$.

Théorème de convergence dominée I

Théorème 4.15 (Théorème de convergence dominée)

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de fonctions de* $\mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$. *Si :*

(i) *la suite* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge* $\mu - p.p.$ *vers une fonction* $f : \Omega \to \mathbb{R}$ *mesurable ;*

(ii) *il existe une fonction* $g : \Omega \to \mathbb{R}_+$ *mesurable telle que* $\int_\Omega g \, d\mu < \infty$ *et* $\forall n \in \mathbb{N}, |f_n| \leq g \;\; \mu - p.p.$ *;*

Alors $f \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ *et* $\displaystyle\int_\Omega f \, d\mu = \lim_n \int_\Omega f_n \, d\mu$.

On a de plus $\displaystyle\lim_n \int_\Omega |f_n - f| \, d\mu = 0$.

Théorème de convergence dominée II

Théorème de convergence dominée III

Programme

Intégrale d'une fonction étagée réelle positive

Intégrale des fonctions mesurables positives

Fonctions μ-intégrables

Théorème de convergence dominée

Espace L^p

Espaces $\mathcal{L}^p$

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré. Pour $p \geq 1$, on définit l'ensemble des fonctions mesurables sur Ω et à valeurs dans $\mathbb{R}$ dont la p-ième puissance est μ-intégrable :

$$\mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{T}, \mu) = \left\{ f : (\Omega, \mathcal{T}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})) \text{ mesurables } : \int_\Omega |f|^p d\mu < +\infty \right\}.$$

Proposition 4.16 (Structure)

$\mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Application $\|\cdot\|_p$

Pour une fonction f mesurable, on définit $\|\cdot\|_p$ à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}_+$ par :

$$\|f\|_p = \left(\int_\Omega |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Proposition 4.17 (Inégalité de Hölder)

Soient p et q deux exposants conjugués, i.e. deux réels de $]1, +\infty[$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

(a) *Soient deux fonctions f et g mesurables positives. Alors :*

$$0 \leq \|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q \leq +\infty.$$

(b) *Soient deux fonctions $f \in \mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ et $g \in \mathcal{L}^q(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$. Alors $fg \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ et $\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q$.*

- Démonstration **TD Exercice IV.4**

Inégalité de Minkowski

Définition 4.18 (Inégalité de Minkowski)

Soit $p \in [1, +\infty[$. *Soient* f *et* g *deux fonctions de* $\mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$. *Alors*

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

Semi-norme

Proposition 4.19 (Espace vectoriel semi-normé)

L'application $\|\cdot\|_p$ est une semi-norme sur l'espace $\mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$.

- On définit sur $\mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ la relation $\mathtt{R}$ par :

$$f \mathtt{R} g \iff \|f - g\|_p = 0.$$

- $\mathtt{R}$ est une relation d'équivalence, et deux fonctions appartiennent à la même classe d'équivalence si et seulement elles sont égales $\mu - p.p.$.
- On note $L^p(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ l'espace quotient de $\mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ par $\mathtt{R}$.

Proposition 4.20 (Espace vectoriel normé)

L'application $\|\cdot\|_p$ est une norme sur $L^p(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$.

Cas $p = 2$: l'espace de Hilbert $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$

Pour $f : \Omega \to \mathbb{R}$ mesurable,

$$f \in L^2(\Omega, \mathcal{T}, \mu) \Leftrightarrow \|f\|_2 = \left(\int |f|^2 . d\mu \right)^{1/2} < +\infty.$$

L'application

$$\begin{array}{rcl} L^2(\Omega, \mathcal{T}, \mu) \times L^2(\Omega, \mathcal{T}, \mu) & \to & \mathbb{R} \\ (f, g) & \mapsto & \langle f, g \rangle = \int fg . d\mu \end{array}$$

définit un produit scalaire, pour lequel $\| \cdot \|_2$ est la norme associée.
L'espace $L^2(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ muni du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un espace de Hilbert.
En général $L^2(\Omega, \mathcal{T}, \mu) \not\subset L^1(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ sauf si $\mu(\Omega) < +\infty$.