Équations aux Dérivées Partielles

Cours II - Systèmes dynamiques continus, Problèmes de Cauchy, Méthodes des différences finies en temps

CentraleSupélec - Cursus ingénieur

28 novembre 2019

CentraleSupélec

Cauchy-Lipschitz global

Théorème I.3.8 (Cauchy-Lipschitz global)

Si f est globalement lipschitzienne sur $I\times\mathcal{U} = I\times\mathbb{R}^d$, alors la solution du problème de Cauchy suivant est globale $(I = J)$:

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), \\ y(0) = y^0. \end{cases}$$

Condition suffisante sur f : $f \in C^1(I\times\mathcal{U})$ **et** la différentielle df est **bornée**. Dans ce cas, $\|f(t,x) - f(t,y)\| \leq \sup\limits_{(t,z)\in I\times\mathcal{U}} \|df(t,z)\| \, \|x-y\|$.

Exemple

- $f(y) = my$, $f(y) = \cos(y)$, $f(Y) = AY$, $f(t,y) = e^t + my$ *sont globalement lipschitziennes (en y) ;*
- $f(y) = y^2$, $f(y) = \sqrt{y}$, $f(t,y) = y\,e^t$, *etc., ne sont pas globalement lipschitziennes.*

Cauchy-Lipschitz local

Théorème I.3.2 (Cauchy-Lipschitz local)

Soit $f : (t,y) \mapsto f(t,y)$ **continue** sur $I \times \mathcal{U}$ et **de classe** C^1 **par rapport à** y. Soit $y^0 \in \mathcal{U}$ fixé. Alors le problème de Cauchy précédent admet **une unique solution maximale** $(\mathcal{J}, y)$ (au sens de $\prec$).

Conditions suffisantes sur f : $f \in C^1(I \times \mathcal{U})$.

Exemple

- $f(y) = my$, $f(y) = \cos(y)$, $f(Y) = AY$, $f(t,y) = e^t + my$ *sont de classe* C^1 *;*
- $f(y) = y^p$ *avec* $p \geq 1$, $f(t,y) = y\, e^t$ *sont aussi* C^1 *;*
- $f(y) = y^q$ *avec* $q \in]0,1[$ *ne sont pas* C^1 *(à cause de* 0*).*

Problème bien posé au sens de Hadamard

Soient E et F deux espaces topologiques.
On considère le problème (P) : trouver $u \in E$ tel que

$$\mathcal{A}(u) = f, \quad \text{pour } f \in F \text{ et } \mathcal{A} : E \to F.$$

Définition II.1.1

Le problème (P) est dit bien posé (au sens de Hadamard) si,

- *pour toute donnée $f \in F$, il existe une et une seule solution $u \in E$;*
- *cette solution dépend continûment de f.*

Ex : cas linéaire, dimension finie, $E = F = \mathbb{R}^n$, $A \in GL_n(\mathbb{R})$.

(P) : Pour $b \in \mathbb{R}^n$, trouver $u \in \mathbb{R}^n$ tel que $Au = b$.

Le problème (P) est bien posé car :
• A est inversible et • $b \mapsto A^{-1}b$ est continue sur $\mathbb{R}^n$.

Problème bien posé

Définition II.1.2

Dans le cadre des EDO, un problème est **bien posé** *si*

- *il existe une solution ;*
- *la solution est unique ;*
- *le comportement de la solution dépend continûment des conditions initiales.*

Un problème qui n'est pas "bien posé" est dit **mal posé***.*

Le théorème de Cauchy-Lipschitz assure les deux premiers points, mais pas le troisième...

Proposition II.1.3 (Régularité)

Soient $k \geq 1$ et $f \in C^k(I \times U)$, alors la solution maximale de

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(0) = y^0 \end{cases}$$

est de classe $C^{k+1}(\mathcal{J})$.

Théorème II.1.4 (Théorème du flot)

On suppose f de classe $C^2(I\times\mathcal{U})$. Pour tout couple $(t^0, y^0) \in I\times\mathcal{U}$, il existe un voisinage $\mathcal{I}\times\mathcal{V}$ de (t^0, y^0) et une unique application $\phi^{t^0} \in C^1(\mathcal{I}\times\mathcal{V};\mathcal{U})$ tels que

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \phi^{t^0}}{\partial t}(t,v) = f(t, \phi^{t^0}(t,v)), \quad \forall (t,v) \in \mathcal{I}\times\mathcal{V}, \\ \phi^{t^0}(t^0, v) = v, \quad \forall v \in \mathcal{V}. \end{cases}$$

Définition II.1.5

La fonction ϕ^{t^0} est appelée **flot** *(local) au point t^0 de l'EDO.*

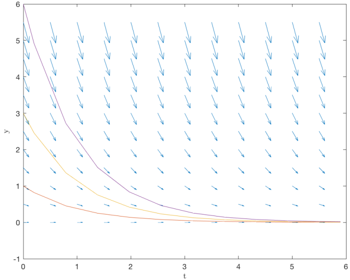
Définition II.1.6

Si $d = 1$, le **portrait de phase** *associé à l'EDO est*

$$\begin{cases} I \times \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (t, y) \longmapsto \begin{bmatrix} 1 \\ f(t, y) \end{bmatrix} \end{cases}$$

Définition II.1.7

La trajectoire d'une solution est appelée **courbe intégrale** *du portrait de phase, ou encore* **orbite**.

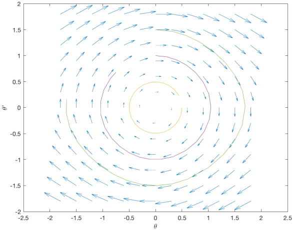


Définition II.1.8

Si $d = 2$, le **portrait de phase** *associé à l'EDO est*

$$\begin{cases} I \times \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (t, y) \longmapsto f(t, y) \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} \theta \\ \theta' \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} \theta' \\ -\sin(\theta) \end{bmatrix}$$



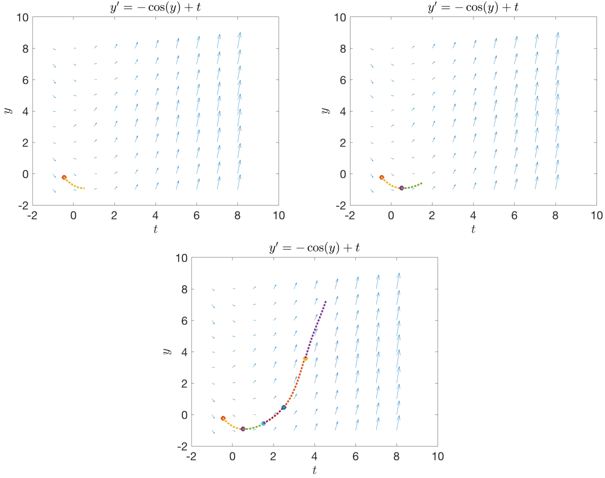
Remarque II.1.9

Les vecteurs du portrait de phase sont tangents aux orbites.

Interprétation géométrique du portrait de phase

Supposons vérifiées les conditions du théorème de Cauchy-Lipschitz.

Alors les orbites correspondant à deux conditions initiales différentes ne s'intersectent pas, sinon il n'y aurait pas unicité.



EDO autonomes

Définition II.2.1

Une EDO $y' = f(t, y)$ *est* **autonome** *si* f *ne dépend* **que de** y *:*

$$f : (t, y) \mapsto f(y).$$

Exemple

-
-

Équilibre d'une EDO autonome

Flot d'une équation autonome

Le flot d'une équation autonome est noté $\phi : (t, v) \mapsto \phi(t, v)$ et, pour I **voisinage de** 0 et $\mathcal{V}$ voisinage de y^0, est solution de

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \phi}{\partial t}(t, v) = f(\phi(t, v)), \quad \forall (t, v) \in \mathcal{I} \times \mathcal{V}, \\ \phi(\mathbf{0}, v) = v, \quad \forall v \in \mathcal{V}. \end{cases}$$

Définition II.2.2

Un point stationnaire ou point d'équilibre *de $y' = f(y)$ est un point $v \in \mathbb{R}^d$ t. q. $f(v) = 0$.*

Définition II.2.3

Un point stationnaire v *de* $y' = f(y)$ *est* **stable** *s'il existe un voisinage* $\mathcal{V}_0$ *de* v *dans* $\mathcal{U}$ *t. q.*

1. *le flot* $\phi(t, w)$ *est défini pour tout* $(t, w) \in \mathbb{R}^+ \times \mathcal{V}_0$,
2. *pour tout voisinage* $\mathcal{W}$ *de* v *dans* $\mathcal{U}$, *il existe un voisinage* $\mathcal{V}_{\mathcal{W}} \subset \mathcal{V}_0$ *tel que* $\forall (t, w) \in \mathbb{R}^+ \times \mathcal{V}_{\mathcal{W}}$, $\phi(t, w) \in \mathcal{W}$.

Définition II.2.4

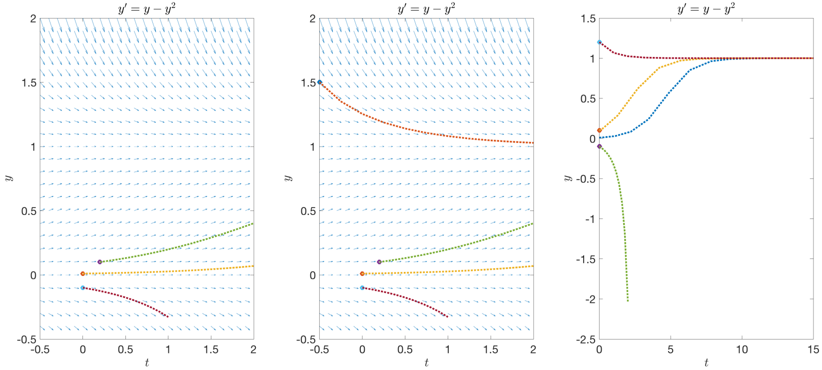
Un point d'équilibre qui n'est pas stable est dit **instable**.

Définition II.2.5

Un point d'équilibre est dit **asymptotiquement stable** *s'il est* **stable et** *qu'il existe $\mathcal{V}_1 \subset \mathcal{V}_0$ t. q. pour tout $w \in \mathcal{V}_1$,* $\lim_{t\to+\infty} \phi(t,w) = v$.

Équation de Fisher ou logistique

$$y' = y - y^2.$$



Définition II.2.6

L'équilibre v est dit **exponentiellement stable** *s'il est asymptotiquement stable et s'il existe $C > 0$, $\alpha > 0$ et $\mathcal{V}$ un voisinage de v tels que*

$$\forall w \in \mathcal{V}, \forall t > 0, \; \|\phi(t, w) - v\| \leq C\|w - v\|e^{-\alpha t}.$$

$\longrightarrow$

Exemple

Remarque II.2.7

v exp. stable $\Rightarrow$ v asymp. stable $\Rightarrow$ v stable.

Stabilité des EDO linéaires à coefficients constants

$$Y' = AY.$$

Proposition II.2.8 (Extension de la Prop. I.2.9)

Soit $A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$. 0 *l'unique point d'équilibre.*

1. *Le point* 0 *est* **stable** *pour* $f : y \mapsto Ay$ *si et seulement si*
   - $\mathrm{Sp}(A) \subset \{\mu \in \mathbb{C},\ \mathrm{Re}(\mu) \leq 0\}$ **et**
   - *les valeurs propres imaginaires pures de* A *sont racine simple du polynôme minimal.*
2. *Le point* 0 *est* **exponentiellement stable** *si et seulement si*
$$\mathrm{Sp}(A) \subset \{\mu \in \mathbb{C},\ \mathrm{Re}(\mu) < 0\}.$$
3. *Si* $\mathrm{Sp}(A) \cap \{\mu \in \mathbb{C},\ \mathrm{Re}(\mu) > 0\} \neq \emptyset$, *le point* 0 *est* **instable**.

Stabilité des EDO autonomes

Théorème II.2.9 (Théorème de Lyapunov)

Soit v un point d'équilibre de $f \in C^1(\mathcal{U}, \mathbb{R}^d)$. Supposons que

$$\mathrm{Sp}(Df(v)) \subset \{\mu \in \mathbb{C}, \mathrm{Re}(\mu) < 0\}.$$

Alors v **est exponentiellement stable.**

Linéarisation

Considérons $y' = f(y)$ ayant pour équilibre $v \in \mathbb{R}^d$.

Définissons $\xi(t) = y(t) - v$. Alors

$$\begin{aligned}\xi'(t) = y'(t) &= f(y(t)) \\ &= f(v + \xi(t)) \\ &= f(v) + Df(v)\xi(t) + O(\|\xi(t)\|^2),\end{aligned}$$

où

$$Df(v) = \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(v)\right]_{1 \leq i,j \leq d}$$

est la matrice jacobienne de f en v.

On a $f(v) = 0$ et $O(\|\xi(t)\|^2)$ est petit au voisinage de v, l'équation linéarisée est donc

$$\widetilde{\xi}'(t) = Df(v)\widetilde{\xi}(t).$$

Ébauche de preuve du Théorème de Lyapunov

$$\xi'(t) = Df(v)\xi(t) + O(\|\xi(t)\|^2),$$

et

$$\widetilde{\xi}'(t) = Df(v)\widetilde{\xi}(t).$$

La question est de savoir si $\widetilde{\xi}$ est “proche” de ξ. On sait étudier la stabilité de $\widetilde{\xi}$: 0 est point d'équilibre, et sa stabilité des dépend des valeurs propres de $Df(v)$.
Ainsi en appliquant la Proposition II.2.8 à $\widetilde{\xi}$:

Si $\mathrm{Sp}(Df(v)) \subset \{\mu \in \mathbb{C}, \mathrm{Re}(\mu) < 0\}$, alors 0 est exponentiellement stable $\widetilde{\xi}$ et on en “déduit” que v est exponentiellement stable pour y.
Si $\mathrm{Sp}(Df(v)) \cap \{\mu \in \mathbb{C}, \mathrm{Re}(\mu) > 0\} \neq \emptyset$, alors 0 est instable pour $\widetilde{\xi}$ et on en “déduit” que v est instable pour y.

Rq : On n'a pas considéré le cas où les v.p. de $Df(v)$ sont de partie réelle négative, avec l'une d'entre elle nulle.

Un mot sur le chaos

On a constaté que des solutions partant de positions proches ne le restent pas nécessairement.

C'est évidemment une difficulté pour l'ingénieur ou le scientifique, qui doit en tenir compte : d'une part aucune mesure n'est jamais exacte, d'autre part dans une approche quantitative, il faudra prendre en compte les erreurs numériques.

Définition II.2.10

On dit qu'un système est chaotique lorsque des CI peuvent être aussi proches qu'on veut et produire des trajectoires très différentes.

"Chaos is when the present determines the future, but the approximate present does not approximately determine the future."
Edward Lorenz (1917–2008)

Intro : Interprétation intégrale

Il y a équivalence entre

$$y \in C^1([0,T]) \text{ solution de } \begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), & \forall t \in [0,T] \\ y(0) = y^0 \end{cases},$$

et

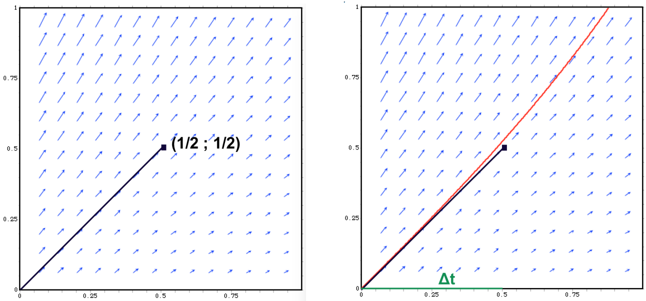
$$y \in C^1([0,T]) \text{ solution de } \forall t \in [0,T],\ \ y(t) = y(0) + \int_0^t f(s, y(s)) ds.$$

Intro : Interprétation intégrale

Ainsi

$$\begin{aligned} y(t+\Delta t) &= y(t) + \int_t^{t+\Delta t} f(s, y(s))ds \\ &\approx y(t) + \Delta t\ f(t, y(t)) \end{aligned}$$

Graphiquement, cela revient à approcher la solution au temps $t+\Delta t$ à partir de $y(t)$ et du portrait de phase.



Première approche

Soit $y'(t) = f(t, y(t))$ sur $[0, T], T > 0$, avec $f \in C^0([0, T] \times \mathbb{R}^d)$, globalement lipschitzienne par rapport à y de constante L.

On munit $\mathbb{R}^d$ de $\|\cdot\|$.

On commence **toujours** par construire un maillage :

Définition II.3.1 (Maillage)

Soit une suite strictement croissante $0 = t^0 < t^1 < \ldots < t^N = T$ *où* $N \in \mathbb{N}^*$ *appelée* **maillage**.

On pose $\forall n \in \{0, \ldots, N-1\}$ $\Delta t^n = t^{n+1} - t^n$ *et* $\Delta t = \max_{0 \le n \le N-1} \Delta t^n$.

Si $\Delta t = T/N$, *on parle de maillage* **régulier ou uniforme**.

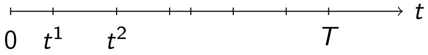


Schéma aux différences finies

Problème continu	Problème approché
$y \mapsto y'$	$(z^n)_{0\leq n\leq N} \mapsto \left(\dfrac{z^{n+1}-z^n}{\Delta t^n}\right)_{0\leq n\leq N-1}$
$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)),\ t\in[0,T] \\ y(0) = y^0 \end{cases}$	$\begin{cases} z^{n+1} = z^n + \Delta t^n\ f(t^n, z^n),\ 0\leq n\leq N-1 \\ z^0 \text{ donné} \end{cases}$
EDO	récurrence vectorielle d'ordre 1
y et $y(T)$	$(z^n)_{0\leq n\leq N}$, et z^N

Définition II.3.2 (et question)

C'est le **schéma d'Euler explicite**. *Quel est le lien entre $y(T)$ et z^N ?*

Intégration approchée

Rappel : Formules de quadrature (d'ordre 1)

Cas $\Delta t^n = \Delta t = T/N$, g globalement Lipschitz :

- formule des rectangles à gauche (ordre global 1)
$$\int_{t^n}^{t^{n+\mathbf{1}}} g(s)ds = \Delta t\ g(t^n) + O(\Delta t^2)$$
$$\Longrightarrow \int_0^T g(s)ds = \sum_{j=0}^{N-1} \Delta t\ g(t^n) + O(\underbrace{N\Delta t^2}_{=T\Delta t})$$

- formule des rectangles à droite (ordre global 1)
$$\int_{t^n}^{t^{n+\mathbf{1}}} g(s)ds = \Delta t\ g(t^{n+1}) + O(\Delta t^2)$$
$$\Rightarrow \int_0^T g(s)ds = \sum_{j=0}^{N-1} \Delta t\ g(t^{n+1}) + O(\Delta t)$$

Intégration approchée

Rappel : Formules de quadrature (d'ordre 2)

Cas $\Delta t^n = \Delta t = T/N$, g globalement Lipschitz :

- formule du point-milieu (ordre global 2)

$$\int_{t^n}^{t^{n+1}} g(s)ds = \Delta t\, g\left(\frac{t^n + t^{n+1}}{2}\right) + O(\Delta t^3),$$

- formule des trapèzes (ordre global 2)

$$\int_{t^n}^{t^{n+1}} g(s)ds = \Delta t\, \frac{g(t^n) + g(t^{n+1})}{2} + O(\Delta t^3).$$

Quelques schémas

- Forme intégrale+rectangles à gauche :

$$z^{n+1} = z^n + \Delta t \; f(t^n, z^n)$$

schéma d'Euler explicite : évaluation d'une fonction vectorielle.

- Forme intégrale+rectangles à droite :

$$z^{n+1} = z^n + \Delta t \; f(t^{n+1}, z^{n+1})$$

schéma d'Euler implicite : inversion d'un système (non-)linéaire.

- Forme intégrale + trapèzes : inversion d'un système (non-)linéaire (*Crank-Nicolson*).

Méthodes à pas multiples

Soit $t^0 = 0$ et $T > 0$. Soit $\mathcal{T} = (t^0, \ldots, t^N)$ un maillage sur $[0, T]$. On considère $f \in C^0([0, T] \times \mathbb{R}^d)$ globalement lipschitzienne, de constante de Lipschitz L. On considère le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), & t \in I \\ y(t^0) = y^0 \end{cases}$$

Définition II.3.3

Une suite $(z^n)_{n \in \{0,\ldots,N\}}$ *définie par la relation*

$$z^{n+1} = F_{\mathcal{T}}(t^n, z^{n+1}, z^n, \ldots, z^{n-k+1})$$

visant à approcher $y(t^n)$ *est appelée méthode à* k **pas**.

Méthodes explicites ou implicites ?

Définition II.3.4 (Méthodes explicites)

Si la relation définissant (z^n)

$$z^{n+1} = F_{\mathcal{T}}(t^n, z^{n+1}, z^n, \dots, z^{n-k+1})$$

se simplifie en

$$z^{n+1} = F_{\mathcal{T}}(t^n, \cancel{z^{n+1}}, z^n, \dots, z^{n-k+1}),$$

alors la méthode est dite **explicite***.*

La valeur de z^{n+1} *se calcule alors par une simple récurrence.*

Méthodes explicites ou implicites ?

Définition II.3.5 (Méthodes implicites)

Si la relation définissant (z^n)

$$z^{n+1} = F_{\mathcal{T}}(t^n, z^{n+1}, z^n, \ldots, z^{n-k+1})$$

nécessite de résoudre une équation en z^{n+1}*, la méthode est dite* **implicite**.

Remarque II.3.6

Bien que plus compliquées à mettre en place, on verra que les méthodes implicites sont plus avantageuses que les méthodes explicites en termes de "stabilité" (voir définition plus loin).

Exemple

Le schéma d'Euler explicite

$$\left\{ \begin{array}{l} z^0 = y^0 \\ z^{n+1} = z^n + \Delta t^n \; f(t^n, z^n), \quad \forall n \in \{0, \dots, N\} \end{array} \right.$$

est une méthode explicite à un pas : on a avec les notations précédentes

$$z^{n+1} = F_{\mathcal{T}}(t^n, z^n)$$

et $F_{\mathcal{T}}(t, y) = y + \Delta t^n \; f(t, y)$.

Convergence du schéma d'Euler

Définition II.3.7 (Erreur)

Erreur locale : $e^n = y(t^n) - z^n, \forall n \in \{0, \dots, N-1\}$.

Erreur globale : $E^N = \max\limits_{0 \leq n \leq N} \|e^n\|$.

Définition II.3.8 (Convergence)

Un schéma numérique pour $\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(0) = y^0 \end{cases}$ **converge** *si*

$$\forall y^0 \in \mathcal{U}, \quad \lim_{\Delta t^N \to 0} \underbrace{\max_{0 \leq n \leq N} \| \underbrace{y(t^n) - z^n}_{e^n} \|}_{E^N} = 0.$$

Si $E^N = O((\Delta t)^p)$ *alors le schéma est* **convergent d'ordre** p.

Analyse numérique du schéma d'Euler explicite

Calcul par récurrence de e^n : pour $n \in \{0, \dots, N-1\}$,

$$e^{n+1} = y(t^{n+1}) - z^{n+1} = y(t^{n+1}) - (z^n + \Delta t^n \; f(t^n, z^n))$$

$$=$$

$$=$$

D'où $\|e^{n+1}\| \leq (1+L\Delta t)\|e^n\|+\|y(t^{n+1})-y(t^n)-\Delta t^n f(t^n, y(t^n))\|$.

Erreur de consistance pour Euler explicite

$$\varepsilon^n := y(t^{n+1}) - y(t^n) - \Delta t^n \; f(t^n, y(t^n)) =$$

Rappel : Lemme de Gronwall

Théorème II.3.9 (Inégalité de Gronwall)

Soit $\phi \in C^0([0,T],\mathbb{R}^+)$ *avec* $T>0$, *telle qu'il existe* $a \in \mathbb{R}^+$ *et* $\psi \in C^0([0,T],\mathbb{R}^+)$ *satisfaisant*

$$\forall t \in [0,T], \qquad \phi(t) \leq a + \int_0^t \psi(s)\phi(s)\mathrm{d}s.$$

Alors

$$\forall t \in [0,T], \qquad \phi(t) \leq a \exp\left(\int_0^t \psi(s)\mathrm{d}s\right).$$

Estimation

Lemme II.3.10 (Inégalité de Gronwall discrète)

Si une suite $(\alpha^n)_n \subset \mathbb{R}^+$ *satisfait à l'inégalité*

$$\forall n \geq 0, \quad \alpha^{n+1} \leq e^{L(t^{n+1}-t^n)}\alpha^n + \beta^n$$

où $(\beta^n)_n$ *est une suite donnée à valeurs positives, alors*

$$\forall n \geq 0, \quad \alpha^n \leq e^{L(t^n-t^0)}\alpha^0 + \sum_{k=0}^{n-1} e^{L(t^n-t^{k+1})}\beta^k.$$

On en déduit :

$$E^N \leq e^{LT}\|e^0\| + e^{LT}\sum_{k=0}^{N-1}\|\varepsilon^k\| \leq e^{LT}\left(E^0 + \sum_{k=0}^{N-1}\|\varepsilon^k\|\right)$$

$$\leq e^{LT}(E^0 + C(T)N\Delta t^2)$$

En résumé

$$E^N \leq e^{LT}(E^0 + C(T)T\Delta t).$$

Théorème II.3.11

Le schéma d'Euler explicite est convergent d'ordre 1.

Ingrédients utilisés :

- $\displaystyle\sum_{n=0}^{N-1} \|\varepsilon^n\| \longrightarrow 0$: **consistance**
- $\|f(t^n, y(t^n)) - f(t^n, z^n)\| \leq L\|y(t^n) - z^n\|$: **stabilité**
- consistance + stabilité $\Rightarrow$ convergence...

Généralisation : Convergence des schémas à un pas

Schémas à un pas

Pour simplifier les notations, on supposera par la suite que le maillage est régulier (ainsi $\Delta t^n = \Delta t$). Les résultats qui suivent s'étendent simplement aux maillages non-réguliers.

Définition II.3.12 (Cas particulier de la Déf. II.3.3)

Un **schéma à un pas** *est de la forme suivante*

$$\forall n \in \{0, \dots, N\}, \qquad z^{n+1} = z^n + \Delta t \; \Phi(t^n, \Delta t, z^n),$$

où Φ *est définie sur* $[0, T]\times[0, \Delta t]\times\mathcal{U}$, *continue par rapport à* t, Δt *et* C^1 *par rapport à* y.

Exemple

Schéma d'Euler explicite : $z^{n+1} = z^n + \Delta t \, f\,(t^n, z^n)$

$$\Phi : (t, \Delta t, z) \longmapsto f(t, z)$$

Consistance

Définition II.3.13

Le schéma est **consistant avec l'EDO** $y' = f(t, y)$ *si*

$$\varepsilon^n = y(t^{n+1}) - y(t^n) - \Delta t\, \Phi(t^n, \Delta t, y(t^n))$$

vérifie

$$\lim_{\Delta t \to 0} \sum_{n=0}^{N-1} \|\varepsilon^n\| = 0.$$

De plus, il y a consistance à l'ordre p si $\varepsilon^n = O((\Delta t)^{p+1})$.

Proposition II.3.14 (CNS de consistance)

Une méthode à un pas est consistante avec $y' = f(t, y)$ *si et seulement si* $\forall t \in [0, T], \forall z \in \mathcal{U},\ \Phi(t, 0, z) = f(t, z)$.

Stabilité

Définition II.3.15

Le schéma est **stable** *s'il existe une constante K telle que pour tous z^0, $w^0 \in \mathcal{U}$, $(\eta^n)_{n\in\{0,\ldots,N\}}$ donnés, les suites définies par*

$$\forall n \in \{0,\ldots,N-1\}, \quad \begin{aligned} z^{n+1} &= z^n + \Delta t\ \Phi(t^n, \Delta t, z^n) \\ w^{n+1} &= w^n + \Delta t\ \Phi(t^n, \Delta t, w^n) + \eta^n \end{aligned}$$

vérifient l'estimation

$$\forall n \in \{0,\ldots,N\}, \quad \|z^n - w^n\| \le K\left(\|z^0 - w^0\| + \sum_{n=0}^{N-1}\|\eta^n\|\right).$$

Ceci signifie qu'un schéma est stable s'il n'amplifie pas la perturbation (η^n).

Proposition II.3.16 (Condition suffisante de stabilité)

S'il existe une constante $\Lambda > 0$ et un réel $c > 0$ tels que

$$\forall t \in [0, T], \forall y, z \in \mathcal{U}, \forall \Delta t \in [0, c],$$
$$\|\Phi(t, \Delta t, y) - \Phi(t, \Delta t, z)\| \leq \Lambda \|y - z\|.$$

alors le schéma est stable.

Preuve de la CNS de stabilité

On rappelle que

$$\begin{aligned} z^{n+1} &= z^n + \Delta t \; f(t^n, z^n) \\ w^{n+1} &= w^n + \Delta t \; f(t^n, w^n) + \eta^n. \end{aligned}$$

Ainsi

$$z^{n+1} - w^{n+1} = z^n - w^n + \Delta t \left(f(t^n, z^n) - f(t^n, w^n) \right) - \eta^n,$$

et donc

$$\begin{aligned} \|z^{n+1} - w^{n+1}\| &\leq \|z^n - w^n\| + \Delta t \, \|f(t^n, z^n) - f(t^n, w^n)\| + \|\eta^n\| \\ &\leq \|z^n - w^n\| + \Delta t \, L \, \|z^n - w^n\| + \|\eta^n\| \\ &\leq \underbrace{(1 + \Delta t \, L)}_{\leq \exp(\Delta t \, L)} \|z^n - w^n\| + \|\eta^n\| \end{aligned}$$

On conclut par le lemme de Gronwall discret.

Convergence

Théorème II.3.17 (Théorème de Lax)

Une méthode à un pas **consistante** *et* **stable** *est* **convergente** *: la solution du problème approché est une solution approchée du problème !*

Remarque II.3.18

Attention, notion locale de convergence (e^{LT}).

Preuve du Théorème de Lax

Soient

$$e^n := y(t^n) - z^n \quad \forall n \in \{0, \dots, N-1\}$$

$$E^N := \max_{0 \le n \le N} \|e^n\|.$$

Si la méthode (z^n) est stable et consistante (d'ordre p), on veut montrer que

$$\lim_{N \to \infty} E^N = 0 \ \ (\text{and } E^N = O(\Delta t^p)).$$

On pose $w^n := y(t^n)$ et $\varepsilon^n := w^{n+1} - w^n - \Delta t \Phi(t^n, \Delta t, w^n)$ l'erreur de consistance locale de y.
La stabilité de la méthode donne

$$\max_{0 \le n \le N} \|z^n - w^n\| \le K \left(\|z^0 - w^0\| + \sum_{n=0}^{N-1} \|\varepsilon^n\| \right).$$

On conclut à l'aide de la consistance.

A-stabilité

Considérons l'équation test de Dahlquist :

$$\begin{cases} y'(t) = \lambda y(t) \\ y(t^0) = y^0 \end{cases}$$

Considérons $\lambda < 0$ et $y^0 > 0$.
Alors $y(t) = y^0 \exp(\lambda t)$ et $\lim_{t \to +\infty} y(t) = 0$.

La méthode d'Euler explicite est donnée par

$$\begin{cases} z^0 = y^0 \\ z^{n+1} = z^n + \Delta t \, \lambda z^n \quad \forall n \in \{0, \ldots, N\} \end{cases},$$

d'où

$$z^n = y^0 (1 + \lambda \, \Delta t)^n.$$

Si jamais $1 + \lambda \, \Delta t < -1$...

Définition II.3.19 (A-stabilité)

Une méthode est dite **A-stable** *si* $\lim z^n = 0$ *quand la méthode est appliquée à un pas de temps* Δt *fixé pour toute équation de Dahlquist*

$$\begin{cases} y'(t) = \lambda y(t) \\ y(t^0) = 1 \end{cases}$$

avec $\mathrm{Re}(\lambda) < 0$*.*

Exemple

La méthode d'Euler explicite n'est pas A-stable.

La méthode d'Euler implicite

Pour l'équation de Dahlquist, elle est donnée par

$$\begin{cases} z^0 = 1 \\ z^{n+1} = z^n + \Delta t \; \lambda \; z^{n+1}, \quad \forall n \in \{0, \dots, N\} \end{cases}.$$

Donc

$$(1 - \Delta t \; \lambda) z^{n+1} = z^n$$

$$z^{n+1} = \frac{1}{1 - \Delta t \; \lambda} z^n$$

$$z^n = \left(\frac{1}{1 - \Delta t \; \lambda} \right)^n$$

Puisque

$$\left| \frac{1}{1 - \Delta t \; \lambda} \right| < 1,$$

on en déduit que $\lim z^n = 0$.

Equations raides et A-stabilité

Les changements de régime (temps long, petits paramètres, etc) peuvent mener à des problèmes dits raides.
Avec les méthodes que nous avons vues,

- Pas d'information en temps long
- Concept en temps long : A-stabilité
  - **Équation-test de Dahlquist** : pour $\lambda \in \mathbb{C}$,
    $$\begin{cases} y' = \lambda y, & t \in [0, T], \\ y(0) = y^0 \end{cases}$$
  - $z^{n+1} = z^n + \Delta t\, \Phi(t, \Delta t, z^n) = R(\lambda \Delta t) z^n$
  - région de stabilité : $\{\lambda \Delta t \in \mathbb{C} \ : \ |R(\lambda \Delta t)| \leq 1\}$.

Conclusion

Bilan :

- Nécessité de l'analyse théorique et numérique
- Résolution théorique du problème de Cauchy
- Construction de schémas élémentaires
- Notions capitales de consistance, stabilité et convergence

Bibliography

- S. Benzoni-Gavage, *Calcul différentiel et équations différentielles*, Dunod, Paris, 2010.
- J. Hubbard et B. West, *Differential equations*, Springer-Verlag, Berlin, 1991.
- J. Vovelle, *Equations différentielles*, notes de cours, `http://math.univ-lyon1.fr/~vovelle/6Cours.pdf`.