Propriétés élémentaires

Proposition $\forall (x, y, z) \in \mathcal{E}^3$

- *Inégalité de Cauchy-Schwarz :* $|< x, y >| \leq \|x\| \|y\|$
- *Inégalité de Minkowski (triangulaire) :* $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$
- *Théorème de Pythagore :* $x \perp y \Rightarrow \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$
  (En outre, la réciproque est vraie lorsque $K = \mathbb{R}$)
- *Règle du parallèlogramme :* $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$
- *Identité de la médiane :* $\|x - y\|^2 + \|x - z\|^2 = \frac{1}{2}\|y - z\|^2 + 2\left\|x - \frac{y+z}{2}\right\|$

Proposition (Identités de polarisation) *Dans $\mathbb{R}$,* $< x, y >= \frac{1}{4}\left(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2\right)$
Dans $\mathbb{C}$, $< x, y >= \frac{1}{4}\left(\|x + y\|^2 + i\|x + iy\|^2 - i\|x - iy\|^2 - \|x - y\|^2\right) = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} i^k \left\|x + i^k y\right\|^2$

Corollaire *Toute application linéaire isométrique entre deux espaces préhilbertiens conserve le produit scalaire :* $\forall (x, y) \in \mathcal{E}^2, < u(x), u(y) >=< x, y >$