

特征函数 (概率论)

维基百科，自由的百科全书

在概率论中，任何随机变量的**特征函数**（缩写：ch.f，复数形式：ch.fs）完全定义了它的概率分布。在实直线上，它由以下公式给出，其中 X 是任何具有该分布的随机变量：

$$\varphi_X(t) = \mathbf{E}(e^{itX}),$$

其中 t 是一个实数， i 是虚数单位， \mathbf{E} 表示期望值。

用矩母函数 $M_X(t)$ 来表示（如果它存在），特征函数就是 iX 的矩母函数，或 X 在虚数轴上求得的矩母函数。

$$\varphi_X(t) = M_{iX}(t) = M_X(it)$$

与矩母函数不同，特征函数总是存在。

如果 F_X 是累积分布函数，那么特征函数由黎曼-斯蒂尔切斯积分给出：

$$\mathbf{E}(e^{itX}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dF_X(x)。$$

在概率密度函数 f_X 存在的情况下，该公式就变为：

$$\mathbf{E}(e^{itX}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f_X(x) dx。$$

如果 X 是一个向量值随机变量，我们便取自变量 t 为向量， tX 为数量积。

\mathbf{R} 或 \mathbf{R}^n 上的每一个概率分布都有特征函数，因为我们是在有限测度的空间上对一个有界函数进行积分，且对于每一个特征函数都正好有一个概率分布。

一个对称概率密度函数的特征函数（也就是满足 $f_X(x) = f_X(-x)$ ）是实数，因为从 $x>0$ 所获得的虚数部分与从 $x<0$ 所获得的相互抵消。

目录

性質

连续性

反演定理

博赫纳-辛钦定理/公理化定义

计算性质

特征函数举例

特征函数的应用

矩

一个例子

多元特征函数

例子

矩阵值随机变量

相关概念

参考文献

性質

连续性

勒维连续定理说明，假设 $(X_n)_{n=1}^\infty$ 为一个随机变量序列，其中每一个 X_n 都有特征函数 φ_n ，那么它依分布收敛于某个随机变量 X ：

$$X_n \overset{\mathcal{D}}{\rightarrow} X \text{ 当 } n \rightarrow \infty$$

如果

$$\varphi_n \overset{\text{pointwise}}{\longrightarrow} \varphi \text{ 当 } n \rightarrow \infty$$

且 $\varphi(t)$ 在 $t = 0$ 处连续， φ 是 X 的特征函数。

勒维连续定理可以用来证明弱大数定律。

反演定理

在累积概率分布函数与特征函数之间存在双射。也就是说，两个不同的概率分布不能有相同的特征函数。

给定一个特征函数 φ ，可以用以下公式求得对应的累积概率分布函数 F ：

$$F_X(y) - F_X(x) = \lim_{\tau \rightarrow +\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\tau}^{+\tau} \frac{e^{-itx} - e^{-ity}}{it} \varphi_X(t) dt.$$

一般地，这是一个广义积分；被积分的函数可能只是条件可积而不是勒贝格可积的，也就是说，它的绝对值的积分可能是无穷大。^[1]

博赫纳-辛钦定理/公理化定义

任意一个函数 φ 是对应于某个概率律 μ 的特征函数，当且仅当满足以下三个条件：

1. φ 是连续的；
2. $\varphi(0) = 1$ ；
3. φ 是一个正定函数（注意这是一个复杂的条件，与 $\varphi > 0$ 不等价）。

计算性质

特征函数对于处理独立随机变量的函数特别有用。例如，如果 X_1, X_2, \dots, X_n 是一个独立（不一定同分布）的随机变量的序列，且

$$S_n = \sum_{i=1}^n a_i X_i,$$

其中 a_i 是常数，那么 S_n 的特征函数为：

$$\varphi_{S_n}(t) = \varphi_{X_1}(a_1 t) \varphi_{X_2}(a_2 t) \cdots \varphi_{X_n}(a_n t).$$

特别地， $\varphi_{X+Y}(t) = \varphi_X(t) \varphi_Y(t)$ 。这是因为：

$$\varphi_{X+Y}(t) = E\left(e^{it(X+Y)}\right) = E\left(e^{itX} e^{itY}\right) = E\left(e^{itX}\right) E\left(e^{itY}\right) = \varphi_X(t) \varphi_Y(t).$$

注意我们需要 X 和 Y 的独立性来确立第三和第四个表达式的相等性。

另外一个特殊情况，是 $a_i = 1/n$ 且 S_n 为样本平均值。在这个情况下，用 \bar{X} 表示平均值，我们便有：

$$\varphi_{\bar{X}}(t) = (\varphi_X(t/n))^n.$$

特征函数举例

分布	特征函数 $\varphi(t)$
<u>退化分布</u> δ_a	e^{ita}
<u>伯努利分布</u> $\text{Bern}(p)$	$1 - p + pe^{it}$
<u>二项分布</u> $B(n, p)$	$(1 - p + pe^{it})^n$
<u>负二项分布</u> $\text{NB}(r, p)$	$\left(\frac{1 - p}{1 - pe^{it}}\right)^r$
<u>泊松分布</u> $\text{Pois}(\lambda)$	$e^{\lambda(e^{it} - 1)}$
<u>连续均匀分布</u> $U(a, b)$	$\frac{e^{itb} - e^{ita}}{it(b - a)}$
<u>拉普拉斯分布</u> $L(\mu, b)$	$\frac{e^{it\mu}}{1 + b^2 t^2}$
<u>正态分布</u> $N(\mu, \sigma^2)$	$e^{it\mu - \frac{1}{2}\sigma^2 t^2}$
<u>卡方分布</u> χ_k^2	$(1 - 2it)^{-k/2}$
<u>柯西分布</u> $C(\mu, \theta)$	$e^{it\mu - \theta t }$
<u>伽玛分布</u> $\Gamma(k, \theta)$	$(1 - it\theta)^{-k}$
<u>指数分布</u> $\text{Exp}(\lambda)$	$(1 - it\lambda^{-1})^{-1}$
<u>多元正态分布</u> $N(\mu, \Sigma)$	$e^{it^T \mu - \frac{1}{2} t^T \Sigma t}$
<u>多元柯西分布</u> $\text{MultiCauchy}(\mu, \Sigma)$ [2]	$e^{it^T \mu - \sqrt{t^T \Sigma} t }$

Oberhettinger (1973) 提供的特征函数表.

特征函数的应用

由于连续定理，特征函数被用于中心极限定理的最常见的证明中。

矩

特征函数还可以用来求出某个随机变量的矩。只要第 n 个矩存在，特征函数就可以微分 n 次，得到：

$$\mathbf{E}(X^n) = i^{-n} \varphi_X^{(n)}(0) = i^{-n} \left[\frac{d^n}{dt^n} \varphi_X(t) \right]_{t=0}.$$

例如，假设 \mathbf{X} 具有标准柯西分布。那么 $\varphi_X(t) = e^{-|t|}$ 。它在 $t = 0$ 处不可微，说明柯西分布没有期望值。另外，注意到 n 个独立的观测的样本平均值 $\bar{\mathbf{X}}$ 具有特征函数 $\varphi_{\bar{\mathbf{X}}}(t) = (e^{-|t|/n})^n = e^{-|t|}$ ，利用前一节的结果。这就是标准柯西分布的特征函数；因此，样本平均值与总体本身具有相同的分布。

特征函数的对数是一个累积量母函数，它对于求出累积量是十分有用的；注意有时定义累积量母函数为矩母函数的对数，而把特征函数的对数称为第二累积量母函数。

一个例子

具有尺度参数 θ 和形状参数 k 的伽玛分布的特征函数为：

$$(1 - \theta i t)^{-k}。$$

现在假设我们有：

$$X \sim \Gamma(k_1, \theta) \text{ 且 } Y \sim \Gamma(k_2, \theta)$$

其中 X 和 Y 相互独立，我们想要知道 $X + Y$ 的分布是什么。 X 和 Y 特征函数分别为：

$$\varphi_X(t) = (1 - \theta i t)^{-k_1}, \quad \varphi_Y(t) = (1 - \theta i t)^{-k_2}$$

根据独立性和特征函数的基本性质，可得：

$$\varphi_{X+Y}(t) = \varphi_X(t)\varphi_Y(t) = (1 - \theta i t)^{-k_1} (1 - \theta i t)^{-k_2} = (1 - \theta i t)^{-(k_1+k_2)}。$$

这就是尺度参数为 θ 、形状参数为 $k_1 + k_2$ 的伽玛分布的特征函数，因此我们得出结论：

$$X + Y \sim \Gamma(k_1 + k_2, \theta),$$

这个结果可以推广到 n 个独立、具有相同尺度参数的伽玛随机变量：

$$\forall i \in \{1, \dots, n\} : X_i \sim \Gamma(k_i, \theta) \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^n X_i \sim \Gamma\left(\sum_{i=1}^n k_i, \theta\right)。$$

多元特征函数

如果 X 是一个多元随机变量，那么它的特征函数定义为：

$$\varphi_X(t) = \mathbf{E}(e^{it \cdot X})。$$

这裡的点表示向量的点积，而向量 t 位于 X 的对偶空间内。用更加常见的矩阵表示法，就是：

$$\varphi_X(t) = \mathbf{E}(e^{it^T X})。$$

例子

如果 $X \sim N(0, \Sigma)$ 是一个平均值为零的多元高斯随机变量，那么：

$$\varphi_X(t) = \mathbf{E}(e^{it^T X}) = \int_{x \in \mathbf{R}^n} \frac{1}{(2\pi)^{n/2} |\Sigma|^{1/2}} e^{-\frac{1}{2} x^T \Sigma^{-1} x} \cdot e^{it^T x} dx = e^{-\frac{1}{2} t^T \Sigma t}, \quad t \in \mathbf{R}^n,$$

其中 $|\Sigma|$ 表示正定矩阵 Σ 的行列式。

矩阵值随机变量

如果 X 是一个矩阵值随机变量，那么它的特征函数为：

$$\varphi_X(T) = \mathbf{E}(e^{i \text{Tr}(XT)})$$

在这裡， $\text{Tr}(\cdot)$ 是迹函数， XT 表示 T 与 X 的矩阵乘积。由于矩阵 XT 一定有迹，因此矩阵 X 必须与矩阵 T 的转置的大小相同；因此，如果 X 是 $m \times n$ 矩阵，那么 T 必须是 $n \times m$ 矩阵。

注意乘法的顺序不重要（ $\boldsymbol{XT} \neq \boldsymbol{TX}$ 但 $\text{tr}(\boldsymbol{XT}) = \text{tr}(\boldsymbol{TX})$ ）。

矩阵值随机变量的例子包括威沙特分布和矩阵正态分布。

相关概念

相关概念有矩母函数和概率母函数。特征函数对于所有概率分布都存在，但矩母函数不是这样。

特征函数与傅里叶变换有密切的关系：一个概率密度函数 $p(\boldsymbol{x})$ 的特征函数是 $p(\boldsymbol{x})$ 的连续傅里叶变换的共轭复数（按照通常的惯例）。

$$\varphi_{\boldsymbol{X}}(t) = \langle e^{it\boldsymbol{X}} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} p(x) \, dx = \overline{\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} p(x) \, dx \right)} = \overline{P(t)},$$

其中 $P(t)$ 表示概率密度函数 $p(\boldsymbol{x})$ 的连续傅里叶变换。类似地，从 $\varphi_{\boldsymbol{X}}(t)$ 可以通过傅里叶逆变换求出 $p(\boldsymbol{x})$ ：

$$p(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} P(t) \, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \overline{\varphi_{\boldsymbol{X}}(t)} \, dt。$$

确实，即使当随机变量没有密度时，特征函数仍然可以视为对应于该随机变量的测度的傅里叶变换。

参考文献

1. P. Levy, Calcul des probabilités, Gauthier-Villars, Paris, 1925. p. 166

2. Kotz et al. p. 37 using 1 as the number of degree of freedom to recover the Cauchy distribution

▪ Lukacs E. (1970) Characteristic Functions. Griffin, London. pp. 350

▪ Bisgaard, T. M., Sasvári, Z. (2000) Characteristic Functions and Moment Sequences, Nova Science

取自“[https://zh.wikipedia.org/w/index.php?title=特征函数_\(概率论\)&oldid=51860584](https://zh.wikipedia.org/w/index.php?title=特征函数_(概率论)&oldid=51860584)”

本页面最后修订于2018年11月1日 (星期四) 15:02。

本站的全部文字在知识共享 署名-相同方式共享 3.0协议之条款下提供，附加条款亦可能应用。（请参阅使用条款）
Wikipedia®和维基百科标志是维基媒体基金会的注册商标；维基™是维基媒体基金会的商标。
维基媒体基金会是按美国国内税收法501(c)(3)登记的非营利慈善机构。