索伯列夫空间讲义

王元明　徐君祥　编著

东南大学出版社

研究生数学教材编委会

内 容 提 要

本书比较系统地介绍了索伯列夫(Sobolev)空间及广义函数的基本理论,其中包括整指数的索伯列夫空间、广义函数及其傅里叶变换、实指数的索伯列夫空间等,此外,还包含了书中需要的一些预备知识. 本书文字精练、重点突出,可作为数学系研究生教材,也可供教师和有关科技工作者参考。

图书在版编目(CIP)数据

索伯列夫空间讲义/王元明,徐君祥编著. —南京:东南大学出版社,2003.8

ISBN 7-81089-282-7

Ⅰ.索... Ⅱ.①王...②徐... Ⅲ.索伯列夫空间-研究生-教材 Ⅳ.0177.3

中国版本图书馆CIP数据核字(2003)第031182号

东南大学出版社出版发行

(南京四牌楼2号 邮编 210096)

出版人:宋增民

江苏省新华书店经销 南京邮电学院印刷厂

开本:850mm×1168mm 1/32 印张: 4 字数:100千字

2003年8月第1版 2003年8月第1次印刷

印数:1-5000 定价:10.00元

(凡因印装质量问题,可直接向发行科调换,电话:025-3795801)

前 言

索伯列夫空间理论是上个世纪 30 年代初由苏联数学家 S. L. Sobolev（Соболев）发展起来的。这些空间是由多个实变量的弱可微函数所组成的 Banach 空间，它们是为研究偏微分方程的近代理论以及研究与数学分析有关的领域中许多问题的需要而产生的，现已成为数学系研究生必修的数学内容.

这本讲义是根据作者的授课笔记整理而成的，也是为了应付教学的需要而编写的。书中主要是介绍索伯列夫空间的一些最基本、最核心的内容，没有涉及索伯列夫空间理论在其他学科中的应用，也没有涉及索伯列夫空间理论的一些发展，如 Lions 的迹空间，Orlicz - Sobolev 空间等. 对于前者，可以在偏微分方程、计算方法等学科的著作中找到（例如[7]），对于后者，在 R. A. Adams 的专著中可以找到，而且本书的目的也只是想为学生提供一些重要的入门知识，这些知识对大多数研究生来说已经足够了。全书共分五章，前四章由王元明执笔，第五章由徐君祥执笔。

索伯列夫空间的一个重要内容是嵌入定理，对整指数 Sobolev 空间情形，这部分内容的证明比较复杂、冗长，我们采取了两步走的方式，在第二章内着重讲清了 Sobolev 不等式及嵌入定理的意义和结论，在第五章内才给出了该定理的证明。这样做似乎可以使重点更突出一些，也更便于组织教学。

管平教授为本书的打印稿做了一些细致的校对工作。东南大学出版社的领导和吉雄飞编辑为本书的出版给予了热情的支持并付出了辛勤的劳动，作者在此一并向他们表示衷心的感谢。
由于编者水平有限，书中缺点或错误一定不少，请读者指正。

王元明

2002 年 8 月

目　录

1　引言与准备

这一章的内容是为后四章作准备的，主要是讲 L^p 空间的一些基本结论、磨光函数与单位分解定理.

1.1　从 Dirichlet 原理说起

从微积分诞生的那一天起，就产生了微分方程，而微分方程的核心问题是求解问题，直至 19 世纪中叶，下列 Dirichlet 问题：

求 $u(x,y) \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ 满足

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } \Omega \\ u = \varphi & \text{on } \partial\Omega \end{cases} \tag{1.1.1}$$

其中 $\varphi \in C(\partial\Omega)$，仍是当时的一个重大问题，而这个问题与下面的最小势（位）能原理密切相关.

最小位能原理：受外力作用的弹性体，在满足已知边界约束的一切可能位移中，以达到平衡状态的位移能使物体的总位能为最小.

物体的总位能为

$$J(v) = \frac{T}{2}\int_\Omega |\nabla v|^2 dx - \int_\Omega fv dx (= \text{应变能} + \text{外力作功})$$

其中 T 为张力. 按最小位能原理，达到平衡状态的位移 u 使得 $J(u) = \min\limits_{v \in M_\varphi} J(v)$，其中 $M_\varphi = \{v \in C^1(\overline{\Omega}) \mid v|_{\partial\Omega} = \varphi\}$. 这是一个变分问题，由变分学理论知，当 $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ 时，它必满足相应的 Euler 方程

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } \Omega \\ u = \varphi & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

受最小位能原理的启发，德国数学家 Riemann 曾提出过一个著名的 Dirichlet 原理：当 $u_0 \in A \equiv \{u \in C^1(\Omega) \mid u_x, u_y \in L^2(\Omega), u|_{\partial\Omega} = \varphi\}$ 使

$$I(u) \equiv \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dxdy = \int_{\Omega} (u_x^2 + u_y^2) dxdy \tag{1.1.2}$$

达到最小值,则 u_0 必是(1.1.1)的解.

因对任意 $u \in A$,$I(u) \geqslant 0$,故 $\inf\limits_{A} I(u)$ 存在,Riemann 认定,必存在 $\bar{u} \in A$,使得

$$I(\bar{u}) = \inf_{A} I(u) = \min_{A} I(u)$$

当时,人们认为这似乎是一件无可置疑的事实. 1870 年法国数学家 Weierstrass 对 Riemann 的论据提出了本质性的批评,他认可 $I(u)$ 在 A 上有 $\inf I(u)$,但未必有 $\min I(u)$,因此不能断定 $I(u)$ 达到最小值,并举了一个例子,设

$$A = \{\varphi(x) \mid \varphi \in C([0,1]),\varphi' \text{ 除有第一类间断点外连续,且 } \varphi(0) = 1,\varphi(1) = 0\}$$

$$I(\varphi) = \int_0^1 \left[1 + \left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2\right]^{1/4} dx$$

易证

$$\min_{A} I(\varphi) = 1 \tag{1.1.3}$$

事实上,$I(\varphi) \geqslant 1$,对任意 $\delta > 0$,取

$$\varphi_\delta(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\delta^2}(\delta^2 - x), & 0 \leqslant x \leqslant \delta^2 \\ 0, & \delta^2 < x \leqslant 1 \end{cases}$$

$\varphi_\delta \in A$,且 $I(\varphi_\delta) \leqslant 1 + \delta$. 故 $\min I(\varphi) \leqslant 1 + \delta$,即 $1 \leqslant \min I(\varphi) \leqslant 1 + \delta$. 但不存在 $\varphi \in A$ 使(1.1.3)成立. 若不然,则对任意 $x \in [0,1]$,$\dfrac{d\varphi}{dx} \equiv 0$,即 $\varphi =$ const. 这时 $\varphi \overline{\in} A$.

后来,Hadamard 又举了一个反例,说明即使问题(1.1.1)有属于 $C(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ 的解,这个解也不一定能通过求解变分问题

$$I(u) = \min_{v \in A} I(v)$$

得到. 如取 Ω 为平面上的单位圆,$\varphi(\theta) = \sum\limits_{n=1} \dfrac{\sin^4\theta}{n^2}$,$0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$,易知,这时

Dirichlet 问题(1.1.1) 有惟一解

$$u_0(\rho,\theta) = \sum_{n=1} \rho^{n^4} \frac{\sin^4\theta}{n^2}$$

但 $I(u_0) = +$,事实上

$$I(u_0) = \lim_{r\to 1^-}\int_{\rho\leqslant r} |\nabla u_0|^2 = \lim_{r\to r^-}\int_{\rho\leqslant r}\left[\left(\frac{\partial u_0}{\partial\rho}\right)^2 + \frac{1}{\rho^2}\left(\frac{\partial u_0}{\partial\theta}\right)^2\right]\rho d\rho d\theta$$

$$= \lim_{r\to 1^-} 2\pi\int_0^r \sum_1 n^4\rho^{2n^4-1}d\rho = \lim_{r\to 1^-}\pi\sum_1 r^{2n^4} = +$$

Hadamard 从另一个侧面对 Dirichlet 原理提出了疑议,即不是所有 Dirichlet 问题(1.1.1) 的解都可以通过(1.1.2) 求得.

因此,Dirichlet 原理经历了一个停留时期. 但是,Riemann 提出的论断是特别的吸引人,以致不少数学家仍力图去证明 Dirichlet 原理.

1900 年,德国数学家 Hilbert 在巴黎国际数学家大会上曾提出 23 个数学问题,作为新世纪的研究目标,其中第 19 问题(确定正则变分问题的解是否总是解析函数,已由 S. Bernstein,и. г. Петровскии 解决),第 20 问题(研究一般边值问题),第 23 问题(发展变分学的方法研究) 均与 Dirichlet 原理有关,Hilbert 的工作使这个问题有突破性的进展,到 20 世纪 40 年代由于 Sobolev 的工作才使 Dirichlet 原理确立了严格的数学基础.

Sobolev 如何解决这个问题?记

$$C^1_*(\overline{\Omega}) \equiv \{v \in C(\overline{\Omega}) \mid v\text{在 }\overline{\Omega}\text{ 上具有分块连续导数}\}$$

即若 $v \in C^1_*(\overline{\Omega})$,则 v' 在 $\overline{\Omega}$ 上除了有限块间断面外都连续,在间断面两侧存在左、右极限. 若 $u \in L^2(\Omega)$,如存在 $\{u_n\} \subset C^1_*(\overline{\Omega})$ 使得 $u_n \xrightarrow{L^2} u$,$\frac{\partial u_n}{\partial x_i} \xrightarrow{L^2} v_i$,则称 u 具有一阶强广义导数,记成

$$v_i = \frac{\partial u}{\partial x_i}$$

令

$$H_1(\Omega) = \left\{u \in L^2(\Omega) \mid \text{强广义导数}\frac{\partial u}{\partial x_i}\text{ 存在,且}\frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2\right\}$$

在 $H_1(\Omega)$ 中赋予范数

$$\|u\|_{H_1(\Omega)} = \left(\int_\Omega (|u|^2 + |\nabla u|^2)\,dx\right)^{1/2}$$

则易证 $H_1(\Omega)$ 是 Banach 空间，$H_1(\Omega)$ 称为 Sobolev 空间.

记

$$\mathring{C}^1_*(\Omega) = \{u \in C^1_*(\Omega) \mid u|_{\partial\Omega} = 0\}$$

$$\mathring{H}_1(\Omega) = \mathring{C}^1_* \text{ 在 } H_1 \text{ 中的闭包(它是 } H_1 \text{ 的子空间)}$$

考虑 Dirichlet 问题

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases} \tag{1.1.4}$$

若存在 $u_0 \in \mathring{H}_1(\Omega)$ 使得

$$J(u) = \min_{v \in \mathring{H}_1} J(v) \tag{1.1.5}$$

其中

$$J(v) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v|^2 - \int_\Omega f v$$

则称 u 是(1.1.4)的广义解(弱解).

利用 Sobolev 空间的理论，不难证明(1.1.5)当 $f \in L^2(\Omega)$ 时必存在惟一解，即(1.1.4)存在惟一广义解. 然后，再证明这个解 $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$(当 f 及 Ω 具某些光滑性)，即解决了 Dirichlet 问题.

1.2 L^p 空间

作为 Sobolev 空间的重要基础是 L^p 空间的一些基本理论，为了读者阅读本书的方便，我们将这些理论罗列在一起(其实，有些结果已超出本书需要的范围，为了完整性，我们也收集在内)，其中有些结果不给出证明，因为在实变函数论或泛函分析的课程中都可以找到.

1.2.1 一些基本结果

设 $\Omega \subset R^n$ 是一个开集(或可测集),$f(x)$ 是定义在 Ω 上的实的可测函数,$1 \leqslant p <$. 若 $|f(x)|^p$ 也是 Ω 上的可测函数,则积分

$$\int_\Omega |f(x)|^p dx$$

是有意义的,当然也可能是无限的. 记

$$L^p(\Omega) = \left\{ f(x) \,\middle|\, f(x) \text{ 在 } \Omega \text{ 上可测且} \int_\Omega |f(x)|^p dx < \quad \right\} \tag{1.2.1}$$

对 $f \in L^p(\Omega)$,定义 f 的范数

$$\| f \|_p = \left(\int_\Omega |f(x)|^p dx \right)^{1/p} \tag{1.2.2}$$

显然,$L^p(\Omega)$ 是一个线性矢量空间. 称 $1 < p, q <$ 是互为共轭指数,若

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

下面列出 L^p 空间的一些基本结果.

命题 1.2.1(Hölder 不等式) 设 $\Omega \subset R^n$ 是开集,p,q 是互为共轭指数,$f(x) \in L^p(\Omega)$,$g(x) \in L^q(\Omega)$,则 $f(x)g(x)$ 在 Ω 上可积,且

$$\int_\Omega |f(x)g(x)| dx \leqslant \| f \|_p \| g \|_q \tag{1.2.3}$$

(1.2.3) 等号成立的充分必要条件是 $\alpha |f|^p = \beta |g|^q$ 在 Ω 内几乎处处成立,其中 α, β 是两个不为零的常数.

这个结果可以推广为

$$\int_\Omega |f_1(x) \cdots f_n(x)| dx \leqslant \| f_1 \|_{p_1} \cdots \| f_n \|_{p_n} \tag{1.2.4}$$

其中 $f_i(x) \in L^{p_i}(\Omega)$,且 $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{p_i} = 1$.

命题 1.2.2(Minkowski 不等式) 若 $1 \leqslant p <$,且 $f, g \in L^p(\Omega)$,则

$$\| f + g \|_p \leqslant \| f \|_p + \| g \|_p \tag{1.2.5}$$

命题 1.2.3　**对** $1 \leqslant p <$　，$L^p(\Omega)$ **是** Banach **空间**.

命题 1.2.4　**若** $1 < p <$　，**则**

（1）简单函数在 L^p **内是稠的；**

（2）$C_0(R^n)$ **在** L^p **内是稠的，这里** $C_0(R^n)$ **表示在** R^n **的一个有界闭集外恒为** 0 **的连续函数全体；**

（3）L^p **中的函数经过自变量平移关于范数是连续的，即若** $f \in L^p(R^n)$，**则**

$$\lim_{|h| \to 0} \| f(\cdot + h) - f(\cdot) \|_p = 0$$

由于上述结果的证明与 $p = 1$ **的情形完全类似，读者自己去验证**.

下面来讨论 $p =$　**的情形，如果** $f(x)$ **是** Ω **上的可测函数，令**

$$\| f \|_{\ ,\Omega} = \inf_{\substack{|\Omega_0| = 0 \\ \Omega_0 \subset \Omega}} \left(\sup_{\Omega \mathrm{h} \Omega_0} | f(x) | \right)$$

$$= \inf \{ a \geqslant 0 \mid \mathrm{mes} \{ x \in \Omega \mid f(x) > a \} = 0 \} \qquad (1.2.6)$$

作为惯例，令 $\inf \quad = \quad$. **需要指出的是，上述的下确界实际上是可以达到的，因为对任意** n，**存在** $\Omega_n \subset \Omega$，**使得** Ω_n **的测度** $|\Omega_n| = 0$，**且**

$$\sup_{\Omega \mathrm{h} \Omega_n} | f(x) | < \| f \| \quad + \frac{1}{n}$$

记

$$\Omega_0 = \bigcup_n \Omega_n$$

则 $|\Omega_0| = 0$，**且**

$$\| f \|_{\ ,\Omega} \leqslant \sup_{\Omega \mathrm{h} \Omega_0} | f(x) | \leqslant \sup_{\Omega \mathrm{h} \Omega_n} | f(x) | < \| f \| \quad + \frac{1}{n}$$

因此

$$\| f \|_{\ ,\Omega} = \sup_{\Omega \mathrm{h} \Omega_0} | f(x) |$$

$\| f \|_{\ ,\Omega}$ **称为** f **在** Ω **上的本性上确界**. **以后为了方便起见，在不致引起混淆的时候，将略去下标** Ω，**记成**

$$\| f \| \quad = \operatorname{ess\,sup}_{x \in \Omega} | f(x) | \qquad (1.2.7)$$

令

$$L\ (\Omega) = \{f \mid f \text{ 在 } \Omega \text{ 上可测且 } \|f\| \quad < \quad \}$$

易证 L 是一个 Banach 空间.

命题 1.2.5 当 $k \to$ 时 $\|f_k - f\|_{\ ,R^n} \to 0$ 的充分且必要条件是存在可测集 E 使得 $|E^c| = 0$,且 f_k 在 E 上一致地收敛于 f,即在 $L\ (R^n)$ 内按范数的收敛性等价于几乎处处一致收敛性.

证明 在 $L\ (R^n)$ 内考虑一个序列 $\{f_k\}$,它满足

$$\|f_k - f\|_{\ ,R^n} \to 0, \quad \text{当 } k \to \quad \text{时}$$

这里 $f \in L\ (R^n)$,则存在 $F_k \subset R^n$ 使得 $|F_k| = 0$,且当 $k \to$ 时有

$$\|f_k - f\|_{\ ,R^n} = \sup_{R^n h F_k} |f_k(x) - f(x)| \to 0$$

令 $F_0 = \bigcup_k F_k$,则 F_0 是一个零测度的集合,且当 $k \to$ 时

$$\sup_{R^n h F_0} |f_k(x) - f(x)| \to 0$$

记 $E = R^n h F_0$ 即得命题的结论.

命题 1.2.6 若 $f \in L\ (\Omega)$,则

$$\|f\| \quad = \lim_{p \to} \|f\|_p$$

证明 在 Ω 内选取一个零测度集合 F_0,使得

$$\|f\| \quad = \sup_{\Omega h F_0} |f(x)|$$

因此

$$\int_{\Omega} |f(x)|^p dx = \int_{\Omega h F_0} |f(x)|^p dx \leqslant \|f\|^p \quad |\Omega|$$

若 $|\Omega| > 0$,显然有 $|\Omega|^{1/p} \to 1$(当 $p \to$ 时),故由上式可得

$$\overline{\lim_{p \to}} \|f\|_p \leqslant \|f\| \tag{1.2.8}$$

另一方面,对任意 $0 < \varepsilon < \|f\|$,集合

$$\Omega_\varepsilon = \{x \in \Omega \mid |f(x)| > \|f\| \quad - \varepsilon\}$$

不是一个零测度集合(因为若 $|\Omega_\varepsilon| = 0$,且 $\sup_{\Omega h \Omega_\varepsilon} |f(x)| \leqslant \|f\| \quad - \varepsilon$,这与 $\|f\|$ 的定义相矛盾),故

$$\|f\|_p \geqslant \left(\int_{\Omega_\varepsilon} |f(x)|^p dx\right)^{1/p} \geqslant (\|f\| \quad - \varepsilon)\, |\Omega_\varepsilon|^{1/p}$$

令 $p \to$ ，可得

$$\varliminf_{p\to} \| f \|_p \geqslant \| f \| - \varepsilon$$

再令 $\varepsilon \to 0$，得

$$\varliminf_{p\to} \| f \|_p \geqslant \| f \| \tag{1.2.9}$$

结合(1.2.8)与(1.2.9)即得命题的结论.

命题 1.2.7　若 $0 < p < q < r \leqslant$ ，则 $L^q \subset L^p + L^r$，即 L^q 中每个函数一定可表示成 L^p 中一个函数与 L^r 中一个函数的和.

证明　若 $f \in L^q(\Omega)$，令 $E = \{x \in \Omega \mid |f(x)| > 1\}$，$g = \chi_E f$，$h = \chi_{E^c} f$，其中 χ_E 是 E 的特征函数，即

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1, & x \in E \\ 0, & x \in \overline{E} \end{cases}$$

则由 $|g|^p = \chi_E |f|^p \leqslant \chi_E |f|^q$ 可知 $g \in L^p(\Omega)$，再由

$$|h|^r = |f|^r \chi_{E^c} \leqslant |f|^q \chi_{E^c}$$

可知 $h \in L^r(\Omega)$（若 $r =$ ，显然有 $\| h \| = 1$）.

命题 1.2.8　若 $0 < p < q < r \leqslant$ ，则 $L^p \cap L^r \subset L^q$，且

$$\| f \|_q \leqslant \| f \|_p^{\lambda} \| f \|_r^{1-\lambda} \tag{1.2.10}$$

其中$\dfrac{1}{q} = \dfrac{\lambda}{p} + \dfrac{1-\lambda}{r}$.

证明　若 $r =$ ，则对任意 $f \in L^p \cap L$ ，我们有

$$\int_\Omega |f(x)|^q dx \leqslant \| f \|^{q-p} \int_\Omega |f(x)|^p dx$$

即

$$\| f \|_q \leqslant \| f \|_p^{p/q} \| f \|^{1-p/q} = \| f \|_p^{\lambda} \| f \|^{1-\lambda}$$

若 $r <$ ，利用 Hölder 不等式可得

$$\int_\Omega |f(x)|^q dx = \int_\Omega |f(x)|^{\lambda q} |f(x)|^{(1-\lambda)q} dx$$

$$\leqslant \left(\int_\Omega |f(x)|^p dx\right)^{\lambda q/p} \left(\int_\Omega |f(x)|^r dx\right)^{(1-\lambda)q/r}$$

$$= \|f\|_p^{\lambda q}\|f\|_r^{(1-\lambda)q}$$

两边开 q 次方即得(1.2.10).

命题 1.2.9 若 $0 < p < q \leqslant$,且 $|\Omega| <$,则 $L^q(\Omega) \subset L^p(\Omega)$,且

$$\|f\|_p \leqslant \|f\|_q(|\Omega|)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \tag{1.2.11}$$

证明 若 $q =$,结论自然成立.

若 $q <$,利用 Hölder 不等式即可得到(1.2.11).

1.2.2 L^p 空间的对偶空间

设 p,q 是互为共轭指数,Hölder 不等式说明了对每个 $g \in L^q(\Omega)$,由下式

$$\varphi_g(f) = \int_\Omega f(x)g(x)\,dx \tag{1.2.12}$$

定义了 $L^p(\Omega)$ 上的一个线性连续泛函 φ_g,且其范数

$$\|\varphi_g\| = \sup_{\|f\|_p \neq 0}\frac{|\varphi_g(f)|}{\|f\|_p} = \sup\left\{\left|\int_\Omega fg\,dx\right| \,\middle|\, \|f\|_p = 1\right\} \tag{1.2.13}$$

不超过 $\|g\|_q$,即

$$\|\varphi_g\| \leqslant \|g\|_q \tag{1.2.14}$$

其实,(1.2.14)中的等号成立,即有下列命题 1.2.10.

命题 1.2.10 若 p 与 q 是互为共轭指数,$1 \leqslant p \leqslant$ 且 $g \in L^q(\Omega)$,则

$$\|\varphi_g\| = \|g\|_q$$

证明 只要证(1.2.14)中相反的不等式.当 $\|g\|_q = 0$ 时等号显然成立;假设 $g \neq 0$ 且 $q <$,令

$$f = \frac{|g|^{q-1}\operatorname{sgn} g}{\|g\|_q^{q-1}}$$

则

$$\|f\|_p^p = \frac{\int_\Omega |g|^{(q-1)p}\,dx}{\|g\|_q^{(q-1)p}} = 1$$

且由(1.2.13)知

$$\|\varphi_g\| \geqslant \int_\Omega fg\,dx = \frac{\int_\Omega |g|^q dx}{\|g\|_q^{q-1}} = \|g\|_q$$

如果 $q =$ ，对任意 $\varepsilon > 0$，我们选 $A \subset \{x \in \Omega \mid |g(x)| > \|g\| - \varepsilon\}$. 记

$$f = |A|^{-1}\chi_A(\operatorname{sgn} g)$$

则 $\|f\|_1 = 1$，且

$$\|\varphi_g\| \geqslant \int_\Omega fg\,dx = |A|^{-1}\int_A |g|\,dx \geqslant \|g\| - \varepsilon$$

令 $\varepsilon \to 0$ 即得所需的结论.

现在我们自然要问：L^p 中任意一个线性连续泛函是否都能表示为 φ_g 的形式呢？即对 L^p 中任一线性连续泛函 φ，是否一定存在 $g \in L^q\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\right)$，使得 φ 能表示成(1.2.12)中积分的形式. 这个结果由下面的 Riesz 表现定理给出.

定理 1.2.11 设 $\Omega \subset R^n$ 是开集(或可测集)，$1 \leqslant p <$ ，q 是 p 的共轭指数，则对 $L^p(\Omega)$ 中任一线性连续泛函 φ(即 $\varphi \in (L^p(\Omega))'$)，一定存在惟一的函数 $g \in L^q(\Omega)$，使得 $\|\varphi\| = \|g\|_q$，且对所有 $f \in L^p(\Omega)$，有

$$\varphi(f) = \langle \varphi, f \rangle = \varphi_g(f) = \int_\Omega fg\,dx$$

这个定理的证明在泛函分析的教材内可以找到，这里略去. 定理说明 $(L^p(\Omega))'$ 与 $L^q(\Omega)$ 是等距同构的.

推论 1.2.12 若 $1 < p <$ ，则 L^p 是自反的.

应该指出的是，对应关系 $g \to \varphi_g$ 映 L 到 $(L^1)'$ 内，但一般说来，它既不是内射也不是满射，所以 L^1 不是自反的. 当然，L 也不是自反的.

1.3 磨光核(mollifier)与磨光函数

一个本来不是很光滑的函数，通过与一个非常光滑函数进行卷积(磨

光),可以得到很光滑的函数,本节就来说明这样的事实.

定义 1.3.1　设 $\Omega \subset R^n$ 是开集,$\varphi(x) \in C(\Omega)$(或记成 $C^0(\Omega)$),称集合

$$\overline{\{x \in \Omega \mid \varphi(x) \neq 0\}}$$

为 $\varphi(x)$ 的支集,记成 $\mathrm{supp}\varphi$(或 $\mathrm{spt}\varphi$),即

$$\mathrm{supp}\varphi = \overline{\{x \in \Omega \mid \varphi(x) \neq 0\}} \tag{1.3.1}$$

定义 1.3.2　如果 $\varphi(x) \in C\ (\Omega)$ 且 $\mathrm{supp}\varphi$ 是 Ω 中的紧集,则称 φ 是 Ω 内具有紧支集的 C 　函数,记作 $\varphi \in C_0\ (\Omega)$,这里 $C_0\ (\Omega)$ 是所有在 Ω 内具有紧支集的 C 　函数的全体.

假设 $j(x) \in C_0\ (R^n)$,$j(x) \geqslant 0$,$\mathrm{supp}j \subset B_1(0) \equiv \{x \in R^n \mid |x| < 1\}$,且

$$\int_{R^n} j(x)\,dx = 1 \tag{1.3.2}$$

则称 $j(x)$ 为磨光核. 例如可取

$$j(x) = \begin{cases} k\exp\left\{\dfrac{1}{|x|^2 - 1}\right\}, & |x| < 1 \\ 0, & |x| \geqslant 1 \end{cases} \tag{1.3.3}$$

取 k 使(1.3.2)成立,即

$$k = \frac{1}{\displaystyle\int_{|x|<1} \exp\left\{\frac{1}{|x|^2 - 1}\right\}dx}$$

记

$$j_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n} j\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \tag{1.3.4}$$

则

$$j_\varepsilon(x) \in C_0\ (R^n),\quad \int_{R^n} j_\varepsilon(x)\,dx = 1,\quad \mathrm{supp}j_\varepsilon(x) = \overline{B_\varepsilon(0)}$$

以后如无特别说明,磨光核均指由(1.3.3)所定义的函数。

定义 1.3.3　设 $u(x) \in L_{loc}(R^n)$(u 在 R^n 内局部可积),$j(x)$ 为磨光

核，则函数

$$J_\varepsilon u(x) = \varepsilon^{-n}\int_{R^n} j\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right)u(y)\,dy = j_\varepsilon(x) * u(x) \tag{1.3.5}$$

称为 u 的磨光函数.

设 $\alpha_i \geqslant 0\ (i=1,2,\cdots,n)$ 为整数，则将 $\alpha = (\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$ 称为重指标. 为了方便，我们作如下规定：

$$|\alpha| = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i,\ \alpha! = \alpha_1!\alpha_2!\cdots\alpha_n!,\text{对任意 } \xi = (\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)\in R^n,\ \xi^\alpha = \xi_1^{\alpha_1}\xi_2^{\alpha_2}\cdots\xi_n^{\alpha_n},\ D^\alpha = D_1^{\alpha_1}D_2^{\alpha_2}\cdots D_n^{\alpha_n}\ (\text{其中 } D_i \equiv \partial_{x_i}).$$

命题 1.3.1　设 $f(x)\in L^1(\Omega)$，$\mathrm{supp}\,f\subset\Omega$，记 $\delta = \mathrm{dist}(\mathrm{supp}\,f,\partial\Omega)$，则当 $\varepsilon<\delta$ 时 $J_\varepsilon f\in C_0(\Omega)$.

证明　记 $K = \mathrm{supp}f$，$K_\varepsilon = \{x\in\Omega \mid \mathrm{dist}(x,K)\leqslant\varepsilon\}$，由 (1.3.5) 得

$$J_\varepsilon f(x) = \int_{|x-y|\leqslant\varepsilon} f(y)j_\varepsilon(x-y)\,dy$$

即 $J_\varepsilon f(x)$ 在 x 点处的值完全由 $f(y)$ 在球 $\overline{B_\varepsilon(x)}$ 上的值确定. 所以，若 $x\notin K_\varepsilon$，由 $\varepsilon<\delta$ 知 $\overline{B_\varepsilon(x)}\cap K =$. 故 $J_\varepsilon f(x) = 0$，这说明 $\mathrm{supp}J_\varepsilon f(x)\subset K_\varepsilon\subset\Omega$. 另外，易知对任意重指标 α，有

$$D^\alpha(J_\varepsilon(x)) = \int_{R^n} f(y)D^\alpha j_\varepsilon(x-y)\,dy$$

即 $J_\varepsilon f(x)\in C\ (\Omega)$.

命题 1.3.2　对任一紧集 $K\subset\Omega$，必存在一个 $C_0\ (\Omega)$ 函数，使它在 K 上的值恒等于 1.

证明　作一开集 Ω_1，使得 $K\subset\Omega_1$，$\overline{\Omega_1}\subset\Omega$，令 $\chi(x)$ 为 Ω_1 的特征函数及

$$\varepsilon = \frac{1}{3}\min\{\mathrm{dist}(K,\partial\Omega_1),\mathrm{dist}(\Omega_1,\partial\Omega)\}$$

则

$$J_\varepsilon\chi(x) = \int_\Omega j_\varepsilon(x-y)\chi(y)\,dy = \int_{|y|\leqslant\varepsilon} j_\varepsilon(y)\chi(x-y)\,dy$$

满足命题的要求.

事实上,由命题1.3.1知$J_\varepsilon\chi(x)\in C_0(\Omega)$,且$\mathrm{supp}J_\varepsilon\chi$在$\Omega_1$的$\varepsilon$邻域内.对任意$x\in K$,$|y|\leqslant\varepsilon$,必有$x-y$在$K$的$\varepsilon$邻域内,从而$x-y\in\Omega_1$,于是由$\chi(x-y)=1$得$J_\varepsilon\chi(x)=1$.

满足命题1.3.2条件的函数称为截断函数.

定理1.3.3 设$u(x)$是R^n中的局部可积函数,令$u_\varepsilon(x)=J_\varepsilon u(x)$是$u$的磨光函数.

(1) 若$u(x)\in C(R^n)$,则对任一紧集$K\subset R^n$,当$\varepsilon\to 0$时,$u_\varepsilon(x)$在K上一致收敛于$u(x)$.

(2) 若$u\in L^p(R^n)(1\leqslant p<\infty)$,则当$\varepsilon\to 0$时,$u_\varepsilon(x)$按$L^p$的范数收敛于$u(x)$,且

$$\|u_\varepsilon\|_p\leqslant\|u\|_p$$

证明 (1) 由

$$\int_{R^n} j_\varepsilon(y)dy=1$$

可得

$$u_\varepsilon(x)-u(x)=\int_{R^n}[u(x-y)-u(x)]j_\varepsilon(y)dy$$

当$x\in K$时,由于$\mathrm{supp}j_\varepsilon(x)=\overline{B_\varepsilon(0)}$,所以$x$及$x-y$都在某一紧集$K_1$内,例如,取$K_1=\{x\in R^n\,|\,\mathrm{dist}(x,K)\leqslant 1\}$(只要$\varepsilon<1$).因$u(x)$在$K_1$上是一致连续的,故对任意$\delta>0$,当$\varepsilon$充分小时

$$\begin{aligned}\max_{x\in K}|u_\varepsilon(x)-u(x)|&\leqslant\int_{R^n}|u(x-y)-u(x)|j_\varepsilon(y)dy\\&\leqslant\max_{\substack{x,x-y\in K_1\\|y|\leqslant\varepsilon}}|u(x-y)-u(x)|\leqslant\delta\end{aligned}$$

这就说明了当$\varepsilon\to 0$时,$u_\varepsilon(x)$在K上一致地收敛于$u(x)$.

(2) 若$u\in L^p(R^n)$,由命题1.2.4知,对任意$\delta>0$,存在具紧支集的连续函数$v(x)$使得

$$\| u - v \|_p < \frac{\delta}{3}$$

由

$$\| u_\varepsilon - u \|_p \leqslant \| u_\varepsilon - v_\varepsilon \|_p + \| v_\varepsilon - v \|_p + \| u - v \|_p$$

及(1)中的结论知,只要证明当 ε 充分小时有 $\| u_\varepsilon - v_\varepsilon \| < \frac{\delta}{3}$. 为此,先计算

$$\begin{aligned}
\| u_\varepsilon \|_p &= \left(\int_{R^n} | u_\varepsilon(x) |^p dx \right)^{1/p} = \left[\int_{R^n} \left| \int_{R^n} u(x-y) j_\varepsilon(y) dy \right|^p dx \right]^{1/p} \\
&= \left[\int_{R^n} \left| \int_{R^n} u(x-y) j_\varepsilon(y)^{\frac{1}{p}} j_\varepsilon(y)^{\frac{1}{q}} dy \right|^p dx \right]^{1/p} \\
&\leqslant \left[\int_{R^n} dx \left(\int_{R^n} | u(x-y) |^p j_\varepsilon(y) dy \right)^{p/p} \left(\int_{R^n} j_\varepsilon(y) dy \right)^{p/q} \right]^{1/p} \\
&= \left[\int_{R^n} dx \int_{R^n} | u(x-y) |^p j_\varepsilon(y) dy \right]^{1/p} \\
&= \left[\int_{R^n} j_\varepsilon(y) dy \int_{R^n} | u(x-y) |^p dx \right]^{1/p} \\
&= \| u \|_p
\end{aligned}$$

因此

$$\| u_\varepsilon - v_\varepsilon \|_p \leqslant \| u - v \|_p < \frac{\delta}{3}$$

由(1)知,当 ε 充分小时,还有 $\| v_\varepsilon - v \|_p < \frac{\delta}{3}$,故当 ε 充分小时有

$$\| u_\varepsilon - u \|_p < \delta$$

定理得证.

注 若将定理中的 R^n 换成开集 Ω,结论仍然成立. 例如,若 $u \in C(\Omega)$,记

$$\Omega_\delta = \{ x \in \Omega \mid \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) > \delta \}$$

对任意 $\varepsilon > 0$,作截断函数 $\zeta_\varepsilon(x) \in C_0(\Omega_{\varepsilon/2})$,且当 $x \in \Omega_\varepsilon$ 时 $\zeta_\varepsilon(x) \equiv 1$,再令 $u_\varepsilon = J_{\varepsilon/4}(\zeta_\varepsilon u)$,即可证明,在任一紧集 $K \subset \Omega$ 中,当 $\varepsilon \to 0$ 时,$u_\varepsilon(x)$ 一致

收敛于 $u(x)$.

对于结论(2)，只要将 u 在 Ω 外作零延拓.

利用这个定理的结论及命题 1.2.4；1.3.1 可得以下推论：

推论 1.3.4 $C_0^\infty(R^n)$ 在 $L^p(R^n)(1 \leqslant p < \quad)$ 及 $C(R^n)$ 中稠密.

推论 1.3.5 若 $u \in C_0^m(R^n)$，则 $u_\varepsilon \in C_0^\infty(R^n)$，且按 $C^m(R^n)$ 的范数当 $\varepsilon \to 0$ 时，$u_\varepsilon \to u$.

这个推论请读者自己证明.

推论 1.3.6 设 $u \in L^p(\Omega)$，$1 \leqslant p < \quad$，若对任意 $\varphi(x) \in C_0^\infty(\Omega)$ 都有

$$\int_\Omega u(x)\varphi(x)\,dx = 0$$

则在 Ω 内几乎处处有 $u(x) = 0$.

事实上，对任意充分小的 $\eta > 0$，$\Omega_\eta = \{x \in \Omega \mid \mathrm{dist}(x, \partial\Omega) > \eta\}$ 是 Ω 内的开集，当 $\varepsilon < \eta$ 时，对每个 $x \in \Omega_\eta$，作为 y 的函数 $j_\varepsilon(x - y) \in C_0^\infty(\Omega)$，由假设 $J_\varepsilon u = \int_\Omega u(y) j_\varepsilon(x - y)\,dy = 0$.

由定理 1.3.3 知，在 Ω_η 上，当 $\varepsilon \to 0$ 时

$$\| u \|_{L^p(\Omega_\eta)} = \| u - J_\varepsilon u \|_{L^p(\Omega_\eta)} \to 0$$

故在 Ω_η 上几乎处处有 $u(x) = 0$，由 η 的任意性知，在 Ω 内几乎处处有

$$u(x) = 0.$$

1.4 单位分解

为了以后的需要，我们来证明一个单位分解定理.

定理 1.4.1 若在 R^n 中有开集族 $\{O_i\}(i = 1, 2, \cdots, k)$ 覆盖紧集 K，则存在函数组 $\{\varphi_i\}(i = 1, 2, \cdots, k)$ 满足 $\varphi_i \geqslant 0$，$\varphi_i \in C_0^\infty(O_i)$，且在 K 上有

$$\sum_{i=1}^{k} \varphi_i(x) = 1$$

证明　因为开集 O_1 覆盖闭集 $K\setminus\bigcup_{i=2}^{k} O_i$，故

$$\delta_1 = \operatorname{dist}\left(\partial O_1, K\setminus\bigcup_{i=2}^{k} O_i\right) > 0$$

缩小 O_1 为

$$O_1' = \left\{x \in O_1 \mid \operatorname{dist}(x, \partial O_1) > \frac{\delta_1}{2}\right\}$$

则 O_1' 与 $O_2, \cdots, O_k$ 仍构成对 K 的覆盖. 类似地，可以逐个缩小 $O_2, \cdots, O_k$ 为 $O_2', \cdots, O_k'$，使得 $\{O_i'\}$ $(i = 1, 2, \cdots, k)$ 仍覆盖 K.

由命题 1.3.2 知，对每个 O_i，存在函数 $\psi_i(x)$ 使 $\psi_i \in C_0(O_i)$，且在 O_i' 上 $\psi_i \equiv 1$，由于 $K \subset \bigcup_{i=1}^{k} O_i'$，故 $\sum_{i=1}^{k} \psi_i(x)$ 在 K 恒大于零. 令

$$\varphi_i(x) = \psi_i(x) \Big/ \sum_{i=1}^{k} \psi_i(x)$$

即得所需的分解

$$1 \equiv \sum_{i=1}^{k} \varphi_i(x)$$

注　若 $\Omega \subset R^n$ 是开集，且开集族 $\{O_i\}$ $(i = 1, 2, \cdots)$ 构成 Ω 的一个局部有限覆盖（即对任意 $K \subset\subset \Omega$，K 只与有限个 O_j 相交），每个 $O_i \cap \overline{\Omega}$ 是 $\overline{\Omega}$ 的相对紧集，利用上述方法也可证明存在一个单位分解

$$\sum_{i=1} \varphi_i(x) \equiv 1$$

其中 $\varphi_i \geqslant 0$，$\varphi_i \in C_0(O_i)$，且由于 $\{O_i\}$ 为 Ω 的局部有限覆盖，上面和式对每点实际上是有限和.

2　整指数的索伯列夫(Sobolev)空间

在这一章内,我们将介绍整指数索伯列夫(Sobolev)空间的概念、性质、几种索伯列夫空间之间的关系及嵌入定理.

2.1　整指数索伯列夫(Sobolev)空间的定义

为了引入索伯列夫空间,先给出弱导数的概念.

定义 2.1.1　设 $u \in L^1_{loc}(\Omega)$,对于给定的重指标 α,函数 $v \in L^1_{loc}(\Omega)$ 称为 u 的 α 阶弱导数,如果对所有 $\varphi \in C_0(\Omega)$ 成立

$$\int_\Omega \varphi v dx = (-1)^{|\alpha|}\int_\Omega u D^\alpha \varphi dx \tag{2.1.1}$$

并记成 $v = D^\alpha u$. 显然,u 的古典导数必是其弱导数.

定义 2.1.2　对 $p \geqslant 1$,m 是非负整数,我们定义 Sobolev 空间

$$\begin{aligned} W^{m,p}(\Omega) &\triangleq L^p(\Omega) \cap \{u \mid D^\alpha u \in L^p(\Omega), |\alpha| \leqslant m\} \\ &= \{u \mid u \in L^p(\Omega), D^\alpha u \in L^p(\Omega), |\alpha| \leqslant m\} \end{aligned} \tag{2.1.2}$$

在 $W^{m,p}(\Omega)$ 内引入范数

$$\|u\|_{m,p,\Omega} = \begin{cases} \left(\int_\Omega \sum_{|\alpha| \leqslant m} |D^\alpha u|^p dx\right)^{1/p} = \left(\sum_{|\alpha| \leqslant m} \|D^\alpha u\|^p_{p,\Omega}\right)^{1/p}, & 1 \leqslant p < \\ \max_{|\alpha| \leqslant m} \|D^\alpha u\|_{\ ,\Omega}, & p = + \end{cases} \tag{2.1.3}$$

显然,(2.1.3) 中第一式所确定的范数是与 $\sum_{|\alpha| \leqslant m} \|D^\alpha u\|_{p,\Omega}$ 等价的,以后在不致引起混淆的情况下,将略去(2.1.3) 中的下标 Ω.

除了 $W^{m,p}(\Omega)$ 以外,还可以引入另外两个 Sobolev 空间:

(1) $H^{m,p}(\Omega) \triangleq$ 函数类 S 关于(2.1.3) 中所定义的范数的完备化,其中

$$S = \{u \mid u \in C^m(\Omega), \| u \|_{m,p} < \quad \}$$

(2) $W_0^{m,p}(\Omega) \triangleq C_0(\Omega)$ 在 $W^{m,p}(\Omega)$ 中的闭包.

当 $p = 2$ 时,$W^{m,2}(\Omega)$,$W_0^{m,2}(\Omega)$,$H^{m,2}(\Omega)$ 简记成 $W^m(\Omega)$,$W_0^m(\Omega)$,$H^m(\Omega)$.

从定义直接可以推出

$$W^{0,p}(\Omega) = L^p(\Omega)$$

$$W_0^{0,p}(\Omega) = L^p(\Omega)$$

$$W_0^{m,p}(\Omega) \subset W^{m,p}(\Omega)$$

$$W^{m,p}(\Omega) \subset W^{m',p}(\Omega) \quad (\text{如果 } m' < m)$$

$W^m(\Omega)$ 是内积空间,其中内积定义为

$$(u,v)_{m,2} = \sum_{|\alpha| \leqslant m} (D^\alpha u, D^\alpha v)_2 = \sum_{|\alpha| \leqslant m} \int_\Omega D^\alpha u \, \overline{D^\alpha v} dx \tag{2.1.4}$$

2.2 $W^{m,p}(\Omega)$ 的性质

这节将讨论 $W^{m,p}(\Omega)$ 的完备性、可分性及自反性.

定理 2.2.1 $W^{m,p}(\Omega)$ 是 Banach 空间.

证明 只要证明 $W^{m,p}(\Omega)$ 是完备的. 任取 $W^{m,p}(\Omega)$ 中的 Cauchy 序列 $\{f_j\}$,即 $\| f_k - f_j \|_{m,p} \to 0$,当 $k,j \to \quad$ 时. 从而 $\{D^\alpha f_j\}$ ($|\alpha| \leqslant m$) 是 $L^p(\Omega)$ 中的 Cauchy 序列,由 $L^p(\Omega)$ 的完备性知,存在 $g^\alpha \in L^p(\Omega)$ ($|\alpha| \leqslant m$),使得当 $j \to \quad$ 时,有

$$D^\alpha f_j \xrightarrow{L^p(\Omega)} g^\alpha$$

因此,在弱收敛的意义下,$D^\alpha f_j \to g^\alpha$,即对任意 $\varphi \in L^q(\Omega)$ ($\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$),有

$$\int_\Omega D^\alpha f_j \varphi dx \to \int_\Omega g^\alpha \varphi dx \quad (j \to \quad)$$

特别地,对任意 $\varphi \in C_0(\Omega)$,有

$$\int_\Omega D^\alpha f_j \varphi dx \to \int_\Omega g^\alpha \varphi dx \quad (\text{当 } j \to \quad \text{时})$$

令 $\alpha = 0$，得 $\int_\Omega f_j \varphi dx \to \int_\Omega g^0 \varphi dx \triangleq \int_\Omega f\varphi dx$，其中 $\varphi \in C_0(\Omega)$. 再利用弱导数的定义得，对任意 $\varphi \in C_0(\Omega)$，当 $j \to$ 时有

$$\int_\Omega D^\alpha f_j \varphi dx \to (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega f D^\alpha \varphi dx = \int_\Omega D^\alpha f \varphi dx$$

即当 $j \to$ 时，$D^\alpha f_j$ 在 $L^p(\Omega)$ 内弱收敛于 $D^\alpha f$，记成

$$D^\alpha f_j \rightharpoonup D^\alpha f \ (L^p(\Omega))$$

由于极限的惟一性，得 $D^\alpha f = g^\alpha \in L^p(\Omega)\ (|\alpha| \leqslant m)$，且

$$D^\alpha f_j \to D^\alpha f \ (L^p(\Omega)) \quad (j \to \quad)$$

这就说明了，若 $\{f_j\}$ 是 $W^{m,p}(\Omega)$ 中的 Cauchy 序列，则必存在 $f \in W^{m,p}(\Omega)$，使得 $f_j \to f\ (W^{m,p}(\Omega))$，即 $W^{m,p}(\Omega)$ 是完备的.

推论 2.2.2 $W^m(\Omega)$ 是 Hilbert 空间，$W_0^{m,p}(\Omega)$ 是 Banach 空间.

下面我们来讨论 $W^{m,p}(\Omega)$ 的可分性、一致凸（均匀凸）性及自反性，为此先建立 $W^{m,p}(\Omega)$ 与乘积空间

$$(L^p(\Omega))^Q = L^p(\Omega) \times L^p(\Omega) \times \cdots \times L^p(\Omega) \quad (Q\text{ 个空间相乘})$$

中的一个子空间的同构对应关系，其中 Q 表示满足 $|\alpha| \leqslant m$ 的重指标的个数，把 Q 个重指标依次排列成 $\alpha_1, \cdots, \alpha_Q$，在 $(L^p(\Omega))^Q$ 中定义范数，设 $F = (f_1, f_2, \cdots, f_Q) \in (L^p(\Omega))^Q$，则

$$\|F\|_{(L^p)^Q} \triangleq \begin{cases} \left(\sum\limits_{j=1}^{Q} \|f_j\|_p^p \right)^{1/p}, & 1 \leqslant p < \\ \max\limits_{1 \leqslant j \leqslant Q} \|f_j\|, & p = \end{cases} \tag{2.2.1}$$

由 $L^p(\Omega)$ 的完备性知，$(L^p(\Omega))^Q$ 是一个 Banach 空间.

定义算子 $J: W^{m,p}(\Omega) \to (L^p(\Omega))^Q$ 如下：

对每个

$$f \in W^{m,p}(\Omega), \quad J: f \mapsto (D^{\alpha_1} f, D^{\alpha_2} f, \cdots, D^{\alpha_Q} f) \in (L^p(\Omega))^Q$$

记

$$W(m,p) = \{(D^{\alpha_1} f, \cdots, D^{\alpha_Q} f) \mid f \in W^{m,p}(\Omega)\} \tag{2.2.2}$$

则 $W(m,p)$ 是 $(L^p(\Omega))^Q$ 的一个子空间，并且 J 是 $W^{m,p}(\Omega)$ 与 $W(m,p)$ 的一个等距同构映射，即 $W^{m,p}(\Omega)$ 与 $W(m,p)$ 是等距同构的，所以 $W(m,p)$ 是 $(L^p(\Omega))^Q$ 中的一个闭子集.

定理 2.2.3　当 $1 \leqslant p < +$ ，$W^{m,p}(\Omega)$ 是可分的.

证明　只要证明当 $1 \leqslant p < +$ 时，$(L^p(\Omega))^Q$ 是可分的，即 $(L^p(\Omega))^Q$ 中存在稠密的可列集. 事实上，对每个正整数 k，作

$$\Omega_k = \left\{ x \,\middle|\, x \in \Omega, \mathrm{dist}(x, \partial\Omega) > \frac{1}{k}, |x| < k \right\}$$

以 P 表示所有以有理数为系数的多项式全体，

$$P_k = \{ \chi_{\Omega_k} f \,|\, f \in P \}$$

其中 χ_{Ω_k} 是 Ω_k 的特征函数，记

$$\tilde{P} = \bigcup_{k=1} P_k$$

则 $\tilde{P}$ 在 $L^p(\Omega)$ 中稠密. 事实上因对 $f \in L^p(\Omega)$ 及任意 $\varepsilon > 0$，由 $C_0(\Omega)$ 在 $L^p(\Omega)$ 中稠知，存在 $g \in C_0(\Omega)$，使得

$$\| f - g \|_{L^p(\Omega)} < \varepsilon/2 \tag{2.2.3}$$

另外，易知

$$C_0(\Omega) = \bigcup_{k=1} C_0(\Omega_k)$$

故 g 属于某个 $C_0(\Omega_m)$，由 Weierstrass 定理知 P_m 在 $C_0(\Omega_m)$ 中稠密，即存在 $h \in P_m$，使

$$|g - h| < \frac{\varepsilon}{2} |\Omega_m|^{-1/p}, \quad \text{对任意 } x \in \Omega_m$$

因 Ω_m 有界，由此可得

$$\begin{aligned} \| g - h \|_{L^p(\Omega)} &= \left(\int_{\Omega} |g - h|^p dx \right)^{1/p} \\ &= \left(\int_{\Omega_m} |g - h|^p dx \right)^{1/p} < \varepsilon/2 \end{aligned} \tag{2.2.4}$$

合并(2.2.3)与(2.2.4)得

$$\| f - h \|_{L^p(\Omega)} < \varepsilon$$

其中 $h \in \bigcup_{k=1} P_k = \tilde{P}$.

这说明 $\tilde{P}$ 在 $L^p(\Omega)$ 中稠密,且是一个可列集,因而 $\prod_1^Q \tilde{P} = \tilde{P} \times \tilde{P} \times \cdots \times \tilde{P}$ 是 $(L^p(\Omega))^Q$ 稠的可列集,即 $(L^p(\Omega))^Q (1 \leqslant p < + \quad)$ 是可分的,从而 $W(m,p)$ 或 $W^{m,p}(\Omega)$ 也是可分的.

定义 2.2.1 赋范空间 E 称为均匀凸的,如果对任一 $\varepsilon \in (0,2)$,存在 $\delta(\varepsilon) > 0$,当 $\| x \|_E = \| y \|_E = 1$, $\| x - y \|_E \geqslant \varepsilon$ 时成立

$$\left\| \frac{x + y}{2} \right\|_E \leqslant 1 - \delta(\varepsilon)$$

下面我们来讨论 $W^{m,p}(\Omega)$ 的自反性. 由 Milman 定理(例如,见吉田耕作著《泛函分析》第108页),均匀凸的 Banach 空间必是自反空间,故为了证明 $W^{m,p}(\Omega)$ 是自反的,只要证明 $W^{m,p}(\Omega)$ 是均匀凸的,先证明 $(L^p(\Omega))^Q$ 是均匀凸的.

引理 2.2.4 设 $0 < p < 1, m > 1$,则存在一个实数 $x_0 \in (0,1)$ 使

$$(1 - x)^p < 1 - x^m, \quad 对任意\ x \in (0, x_0) \tag{2.2.5}$$

证明 作 $f(x) = (1 - x)^p - (1 - x^m)$,则

$$f'(x) = - p(1 - x)^{p-1} + mx^{m-1}$$

由 $f'(x) \in C(0,1)$,且 $f'(0) = - p < 0$,故存在 x_0,使 $x < x_0$ 时 $f'(x) < 0$,于是在 $(0, x_0)$ 内 $f(x)$ 单调减,因 $f(0) = 0$,所以

$$f(x) < 0, \quad 对任意\ x \in (0, x_0)$$

这说明引理成立.

引理 2.2.5 设 $0 < p < 1, m > 1$,则存在一个常数 $p_1 \in (0,1)$,使

$$(1 - x)^p \leqslant 1 - p_1 x^m, \quad 对任意\ x \in [0,1] \tag{2.2.6}$$

证明 设 x_0 由引理 2.2.4 确定,不论 p_1 在 $(0,1)$ 内取何值,当 $x = 0$, $x = 1$ 或 $x \in (0, x_0)$,(2.2.6) 均成立,因此,只需选 p_1,使 (2.2.6) 在 $[x_0, 1)$ 内也成立,则引理得证.

因

$$(1-x)^p \leqslant (1-x_0)^p, \quad \text{对任意 } x \in [x_0,1)$$

$$1-p_1 x^m > 1-p_1$$

若取 p_1 满足 $1-p_1=(1-x_0)^p$,则(2.2.6)在 $[x_0,1)$ 内也成立.

引理 2.2.6 设 $0<p<1$,$m>1$,p_1 由引理 2.2.5 确定,若 $0 \leqslant b \leqslant a \leqslant 1$,则

$$(a-b)^p \leqslant a^p - p_1 b^m \tag{2.2.7}$$

证明 当 $b=0$ 时,(2.2.7)总成立,故只需对 $0<b \leqslant a \leqslant 1$ 来证明.

由引理 2.2.5 得

$$(a-b)^p = a^p\left(1-\frac{b}{a}\right)^p \leqslant a^p\left[1-p_1\left(\frac{b}{a}\right)^m\right]$$

$$= a^p - p_1\frac{b^m}{a^{m-p}} \leqslant a^p - p_1 b^m$$

引理 2.2.7(Clarkson 不等式) 设 $f,g \in L^p(\Omega)$,$\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{p'}=1$.

(1)如果 $2 \leqslant p <$,则成立

$$\left\|\frac{f+g}{2}\right\|_{L^p}^p + \left\|\frac{f-g}{2}\right\|_{L^p}^p \leqslant \frac{1}{2}\|f\|_{L^p}^p + \frac{1}{2}\|g\|_{L^p}^p \tag{2.2.8}$$

$$\left\|\frac{f+g}{2}\right\|_{L^p}^{p'} + \left\|\frac{f-g}{2}\right\|_{L^p}^{p'} \geqslant \left(\frac{1}{2}\|f\|_{L^p}^p + \frac{1}{2}\|g\|_{L^p}^p\right)^{p'-1} \tag{2.2.9}$$

(2)如果 $1<p \leqslant 2$,则成立

$$\left\|\frac{f+g}{2}\right\|_{L^p}^{p'} + \left\|\frac{f-g}{2}\right\|_{L^p}^{p'} \leqslant \left(\frac{1}{2}\|f\|_{L^p}^p + \frac{1}{2}\|g\|_{L^p}^p\right)^{p'-1} \tag{2.2.10}$$

$$\left\|\frac{f+g}{2}\right\|_{L^p}^p + \left\|\frac{f-g}{2}\right\|_{L^p}^p \geqslant \frac{1}{2}\|f\|_{L^p}^p + \frac{1}{2}\|g\|_{L^p}^p \tag{2.2.11}$$

(证明见[1]).

引理 2.2.8 设 $1<p<$,则乘积空间 $(L^p(\Omega))^Q$ 是均匀凸的.

证明 设 $F,G \in (L^p(\Omega))^Q$,且 $\|F\|_{(L^p)^Q} = \|G\|_{(L^p)^Q} = 1$.

(1)当 $2 \leqslant p <$ 时,由(2.2.8)得

$$\left\|\frac{F+G}{2}\right\|_{(L^p)^Q}^p = \sum_{j=1}^{Q}\left\|\frac{f_j+g_j}{2}\right\|_{L^p}^p \leqslant \sum_{j=1}^{Q}\left(\frac{1}{2}\|f_j\|_{L^p}^p + \frac{1}{2}\|g_j\|_{L^p}^p - \left\|\frac{f_j-g_j}{2}\right\|_{L^p}^p\right)$$

$$= 1 - \left\| \frac{F - G}{2} \right\|_{(L^p)^Q}^p \leqslant 1 - \delta(\varepsilon) \qquad (2.2.12)$$

只要 $\| F - G \|_{(L^p)^Q} \geqslant \varepsilon$，其中 $\delta(\varepsilon) = \left(\frac{\varepsilon}{2} \right)^p$.

（2）当 $1 < p < 2$ 时，由（2.2.10）得

$$\left\| \frac{F + G}{2} \right\|_{(L^p)^Q}^p = \sum_{j=1}^{Q} \left\| \frac{f_j + g_j}{2} \right\|_{L^p}^p = \sum_{j=1}^{Q} \left(\left\| \frac{f_j + g_j}{2} \right\|_{L^p}^{p'} \right)^{\frac{p}{p'}}$$

$$\leqslant \sum_{j=1}^{Q} \left[\left(\frac{1}{2} \| f_j \|_{L^p}^p + \frac{1}{2} \| g_j \|_{L^p}^p \right)^{p'-1} - \left\| \frac{f_j - g_j}{2} \right\|_{L^p}^{p'} \right]^{\frac{p}{p'}}$$

因 $1 < p < 2$，故 $0 < \frac{p}{p'} < 1$. 由于 $\| F \|_{(L^p)^Q} = \| G \|_{(L^p)^Q} = 1$，$p' - 1 > 1$，故

$$\left(\frac{1}{2} \| f_j \|_{L^p}^p + \frac{1}{2} \| g_j \|_{L^p}^p \right)^{p'-1} \leqslant 1$$

在引理 2.2.6 中取 p 为 $\frac{p}{p'}$，$a = \left(\frac{1}{2} \| f_j \|_{L^p}^p + \frac{1}{2} \| g_j \|_{L^p}^p \right)^{p'-1}$，$b = \left\| \frac{f_j - g_j}{2} \right\|_{L^p}^{p'}$ 得

$$\left\| \frac{F + G}{2} \right\|_{(L^p)^Q}^p \leqslant \sum_{j=1}^{Q} \left[\left(\frac{1}{2} \| f_j \|_{L^p}^p + \frac{1}{2} \| g_j \|_{L^p}^p \right)^{(p'-1)\frac{p}{p'}} - p_1 \left(\left\| \frac{f_j - g_j}{2} \right\|_{L^p}^{p'} \right)^m \right]$$

因 $(p' - 1)\frac{p}{p'} = 1$，故

$$\left\| \frac{F + G}{2} \right\|_{(L^p)^Q}^p \leqslant 1 - p_1 \sum_{j=1}^{Q} \left\| \frac{f_j - g_j}{2} \right\|_{L^p}^{p'm}$$

若 $\left\| \frac{F - G}{2} \right\|_{(L^p)^Q} \geqslant \varepsilon > 0$，则至少存在 j_0，使得

$$\left\| \frac{f_{j_0} - g_{j_0}}{2} \right\|_{L^p} \geqslant \frac{\varepsilon}{Q^{1/p}} \quad \left(\text{否则可得} \left\| \frac{F - G}{2} \right\|_{(L^p)^Q} < \varepsilon\right)$$

合并后面两个不等式得

$$\left\|\frac{F+G}{2}\right\|^p_{(L^p)^Q} \leqslant 1 - p_1\left(\frac{\varepsilon}{Q^{1/p}}\right)^{p'm} \qquad (2.2.13)$$

(2.2.12),(2.2.13) 说明 $(L^p(\Omega))^Q$ 是均匀凸的.

定理 2.2.9 当 $1 < p < +$ 时,$W^{m,p}(\Omega)$ 是自反空间.

证明 由 Milman 定理,只需证明,当 $1 < p < +$ 时,$W^{m,p}(\Omega)$ 是均匀凸的. 由引理 2.2.8 知,$(L^p(\Omega))^Q$ 是均匀凸的,它的均匀凸是由不等式(2.2.12)与(2.2.13)保证的. 显然,在 $(L^p(\Omega))^Q$ 的闭子空间 $W(m,p)$ 上,这些不等式仍成立,即 $W(m,p)$ 是均匀凸的,而 $W^{m,p}(\Omega)$ 与 $W(m,p)$ 是等距同构的,所以 $W^{m,p}(\Omega)$ 也是均匀凸的.

2.3 $H^{m,p}(\Omega)$,$W^{m,p}(\Omega)$ 与 $W_0^{m,p}(\Omega)$ 之间的关系

在这里,我们将证明以下的结论:

(1) 当 $1 \leqslant p < +$ 时,$H^{m,p}(\Omega) = W^{m,p}(\Omega)$.

$p = +$ 时,$H^{m,p}(\Omega) \subsetneqq W^{m,p}(\Omega)$.

(2) 当 Ω 为有界开集时,$W_0^{m,p}(\Omega) \subsetneqq W^{m,p}(\Omega)$.

(3) $W_0^{m,p}(R^n) = W^{m,p}(R^n)$.

为此先证明下列引理:

引理 2.3.1 设 $1 \leqslant p <$,则 $\{\varphi \in C^m(\Omega) \mid \|\varphi\|_{m,p} < \}$ 在 $W^{m,p}(\Omega)$ 中稠密.

证明 只要证明对任意 $f \in W^{m,p}(\Omega)$ 及 $\varepsilon > 0$,存在 $\varphi \in C(\Omega)$ 且 $\|\varphi\|_{m,p} <$ 满足

$$\|f - \varphi\|_{m,p} < \varepsilon$$

作开集

$$\Omega_k = \left\{x \mid x \in \Omega, |x| < k, \mathrm{dist}(x, \partial\Omega) > \frac{1}{k}\right\}, \quad k \geqslant 1$$

令 $\Omega_0 = \Omega_{-1} =$,易见,$\Omega_k \subset \Omega_{k+1}$.

开集族 $O = \{O_k \mid O_k = \Omega_{k+1} \cap (\overline{\Omega}_{k-1})^c, k \geqslant 1\}$ 是 Ω 的开覆盖,且是局部

有限开覆盖，即 R^n 中任一有界闭集只与 $\{O_k\}$ 中有限个开集有非空的交集.

根据单位分解定理 1.4.1 的注知，存在 $C_0(R^n)$ 中的函数列 $\{f_k\}$ 满足该定理中的条件，把 $\{f_k\}$ 中满足 $\operatorname{supp} f_k \subset O_1$ 的 f_k 全体相加构成 g_1，即 $g_1 = \sum_i f_{k_i}$，其中 $f_{k_i} \in \{f_k\}$，$\operatorname{supp} f_{k_i} \subset O_1$. 把留下来的函数列中满足 $\operatorname{supp} f_k \subset O_2$ 的 f_k 的全体相加构成 g_2，这样继续下去，得到 $\{g_k\}$，显然 $\{f_k\}$ 中每个元素总是某个 g_k 的一部分，而且只出现一次，因而

$$\sum_{k=1} g_k(x) = 1, \quad \text{对任意 } x \in \Omega$$

设 $f \in W^{m,p}(\Omega)$，则有 $f(x) = \sum_{k=1} g_k f(x) = \sum_{k=1} h_k(x)$，其中 $h_k = g_k f$，且 $\operatorname{supp} h_k \subset O_k$，$h_k \in W^{m,p}(\Omega)$.

再作开集族

$$\tilde{O} = \{\tilde{O}_i \mid \tilde{O}_i = \Omega_{i+2} \cap (\overline{\Omega}_{i-2})^c, i \geqslant 1\}$$

于是 $O_i \subset \tilde{O}_i$.

取 $0 < \varepsilon_i < \dfrac{1}{(i+1)(i+2)}$，并考虑 h_i 的正则化 $J_{\varepsilon_i} h_i$，则

$$\operatorname{supp} J_{\varepsilon_i} h_i \subset O_i \text{ 的 } \varepsilon_i \text{ 邻域} \triangleq O_{i,\varepsilon_i}$$

但 $O_{i,\varepsilon_i} \subset \tilde{O}_i$（因若 $x \in O_{i,\varepsilon_i}$，则 $\operatorname{dist}(x,\partial\Omega) > \dfrac{1}{i+1} - \varepsilon_i > \dfrac{1}{i+1} - \dfrac{1}{(i+1)(i+2)} = \dfrac{1}{i+2}$），故在 $\tilde{O}_i$ 以外，$h_i = J_{\varepsilon_i} h_i = 0$，即

$$\| J_{\varepsilon_i} h_i - h_i \|_{m,p,\Omega} = \| J_{\varepsilon_i} h_i - h_i \|_{m,p,\tilde{O}_i}$$

由正则化逼近定理知，对任意 $\varepsilon > 0$，当 i 充分大时，有

$$\| J_{\varepsilon_i} h_i - h_i \|_{m,p,\tilde{O}_i} < \varepsilon / 2^i$$

事实上，

$$D_x^\alpha (J_{\varepsilon_i} h_i) = \frac{1}{\varepsilon^n} \int_{\tilde{O}_i} D_x^\alpha j\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right) h_i(y)\, dy$$

$$= (-1)^{|\alpha|}\frac{1}{\varepsilon^n}\int_{\tilde{O}_i} D_y^{\alpha} j\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right) h_i(y)\,dy$$

$$= \frac{1}{\varepsilon^n}\int_{\tilde{O}_i} j\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right) D_y^{\alpha} h_i(y)\,dy \to D_x^{\alpha} h_i \quad (|\alpha| \leqslant m)$$

故

$$\| J_{\varepsilon_i} h_i - h_i \|_{m,p,\Omega} < \varepsilon / 2^i$$

取 $\varphi = \sum\limits_{i=1} J_{\varepsilon_i} h_i$**,对任意** $\Omega' \subset\subset \Omega$**,必存在** m_0**,使** $\Omega' \cap (\bigcup\limits_{i=1}^{m_0}) \hat{O}_i \neq$ **,而** $i >$ m_0 **时,**$\Omega' \cap \tilde{O}_i =$ **,故当** $i > m_0$ **时,在** Ω' **内** $J_{\varepsilon_i} h_i = 0$**,故**

$$\varphi(x) = \sum_{i=1} J_{\varepsilon_i} h_i(x) = \sum_{i=1}^{m_0} J_{\varepsilon_i} h_i(x), \quad \text{对 } x \in \Omega'$$

因此 $\varphi \in C\ (\Omega')$**,由** Ω' **的任意性知** $\varphi \in C\ (\Omega)$**,且** $\varphi \in W^{m,p}(\Omega)$.

此外

$$f - \varphi = \sum_{i=1} (h_i - J_{\varepsilon_i} h_i) = \lim_{k\to} \sum_{i=1}^{k} (h_i - J_{\varepsilon_i} h_i)$$

由 Fatou **定理知**

$$\| f - \varphi \|_{m,p} = \left\| \lim_{k\to} \sum_{i=1}^{k} (h_i - J_{\varepsilon_i} h_i) \right\|_{m,p}$$

$$\leqslant \underline{\lim}_{k\to} \left\| \sum_{i=1}^{k} (h_i - J_{\varepsilon_i} h_i) \right\|_{m,p}$$

$$\leqslant \underline{\lim}_{k\to} \sum_{i=1}^{k} \| h_i - J_{\varepsilon_i} h_i \|_{m,p}$$

$$\leqslant \underline{\lim}_{k\to} \sum_{i=1}^{k} \frac{\varepsilon}{2^i} < \varepsilon \qquad \left(\varepsilon_i < \frac{1}{(i+2)(i+1)}\right)$$

引理 2.3.1 **证毕**.

定理 2.3.2 **当** $1 \leqslant p <$ **时,**$H^{m,p}(\Omega) = W^{m,p}(\Omega)$. **当** $p = +$ **时,** $W^{m,p}(\Omega) \supsetneqq H^{m,p}(\Omega)$.

引理 2.3.1 **说明第一个结论成立. 为了说明后一个结论,只要举出一个**

函数，它属于 $W^{m,}(\Omega)$，但不在 $H^{m,}(\Omega)$ 内，即 $H^{m,}(\Omega)$ 是 $W^{m,}(\Omega)$ 的一个真子空间.

例如，取 $\Omega = \{x \mid -1 < x < 1\}$，$f(x) = |x|$，显然 $f \in W^{1,}(\Omega)$. 但是，$f \notin H^{1,}(\Omega)$，因为找不到函数 $\varphi \in C^1(\Omega)$，使 $\| f' - \varphi' \| \quad < \varepsilon$ 对任给的 $\frac{1}{2} > \varepsilon > 0$ 成立.

定理 2.3.3 当 Ω 为 R^n 中有界开子集时，$W_0^{m,p}(\Omega) \neq W^{m,p}(\Omega)$.

为了说明这一结论，只要证明，当 Ω 为有界开子集时，$C_0(\Omega)$ 在 $W^{m,p}(\Omega)$ 中非稠密.

在 Ω 内取 $f \equiv 1$，显然 $f \in W^{m,p}(\Omega)$. 现在我们来说明 $f \notin W_0^{1.1}(\Omega)$，从而 $f \notin W_0^{m,p}(\Omega)$，其中 $m \geqslant 1$，$p \geqslant 1$.

对任一 $\varphi \in C_0(\Omega)$，可以证明存在仅依赖于 Ω 的常数 C，使

$$\int_\Omega |\varphi| dx \leqslant C \int_\Omega \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right| dx$$

事实上，因 Ω 有界，不妨设 $\sup_{x \in \Omega} |x_i| = K_i <$ ，由

$$\partial_{x_i}(x_i |\varphi|) = |\varphi| + x_i \partial_{x_i} |\varphi|$$

得

$$\int_\Omega |\varphi| dx \leqslant K_i \int_\Omega \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right| dx \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

对 i 求和即得所要的结论.

由 $W^{m,p}(\Omega)$ 范数的定义

$$\begin{aligned}
\| f - \varphi \|_{1.1} &= \int_\Omega |f - \varphi| dx + \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right| dx \\
&\geqslant \int_\Omega dx - \int_\Omega |\varphi| dx + \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right| dx \\
&= \mathrm{mes}(\Omega) - (C - 1) \int_\Omega \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right| dx \\
&\geqslant \mathrm{mes}(\Omega) - (C - 1) \| f - \varphi \|_{1.1}
\end{aligned}$$

故

$$\mathrm{mes}(\Omega) \leqslant C \| f - \varphi \|_{1,1}$$

这说明 $W^{1,p}(\Omega)$ 中至少有一个元素 f 与 $C_0(\Omega)$ 中任意元素 φ 的距离不小于 $\frac{1}{C}\mathrm{mes}(\Omega)$，即 $C_0(\Omega)$ 在 $W^{1,p}(\Omega)$ 中非稠密，这就证明了定理2.3.3的结论.

应该注意的是，如果对 Ω 补充适当的条件，例如，假定 Ω 是 L 型区域①，$C_0(R^n)$ 中函数在 Ω 上的限制构成的集合在 $W^{m,p}(\Omega)$ 中稠密，用 $C_0(R^n,\Omega)$ 表示上述集合，则对 L 型区域成立

$$W^{m,p}(\Omega) = \overline{C_0(R^n,\Omega)}$$

不仅如此，还可证明：

定理2.3.4 当 $1 \leqslant p < +$ 时，$W_0^{m,p}(R^n) = H^{m,p}(R^n)$.

证明 只要证明，当 $1 \leqslant p < +$ 时，$C_0(R^n)$ 在 $H^{m,p}(R^n)$ 中稠密，分两步来证.

(1) 先证明 $H^{m,p}(R^n)$ 中的元可以用一个具紧支集的 $H^{m,p}(R^n)$ 的元素列来逼近.

设 $f \in H^{m,p}(R^n)$，要证存在 $f_k \in H^{m,p}(R^n)$，$\mathrm{supp}f_k$ 为紧集，且

$$f_k \to f \quad (H^{m,p}(R^n))$$

取 $g_k \in C_0(R^n)$ 满足

$$g_k = \begin{cases} 1, & x \in B(0,k) \\ 0, & x \overline{\in} B(0,k+1) \end{cases}$$

令 $f_k = g_k f$，则 $\mathrm{supp}f_k \subset B(0,k+1)$，且在 $B(0,k)$ 上 $f_k = f$. 要证

$$f_k \to f \quad (H^{m,p}(R^n))$$

---

① 有界区域 Ω 称为是 L 型的，如果满足

(1) Ω 是 R^n 中开集，Ω 位于 $\partial\Omega$ 的一侧；

(2) 存在有限个开集 $O_1, O_2, \cdots, O_m$，$\partial\Omega \subset \bigcup_{i=1}^{m} O_i$，且 $\Gamma_i = \partial\Omega \cap O_i$ 在某一局部笛卡尔坐标系中可用满足 Lipschitz 条件的函数 $\xi_{in} = f_i(\xi_{i1}, \cdots, \xi_{i(n-1)})$ 来表示.

一般情形(即 Ω 不要求有界)的 L 型区域见第5章.

即要证当 $k \to$ 时，对任意 $|\alpha| \leqslant m$，有

$$D^{\alpha} f_k \to D^{\alpha} f \quad (L^p(R^n))$$

若 $\alpha = 0$，有

$$\|f_k - f\|_{L^p(R^n)}^p = \int_{R^n} |f_k - f|^p dx = \int_{|x| > k} |f_k - f|^p dx \to 0, \quad k \to$$

若 $|\alpha| = 1$，对 $1 \leqslant j \leqslant n$，$D_j f_k = g_k(D_j f) + (D_j g_k) f$，如上知

$$(D_j f) g_k \to D_j f \quad (L^p(R^n)), \quad k \to$$

又

$$\|(D_j g_k) f\|_{L^p(R^n)}^p = \int_{R^n} |(D_j g_k) f|^p dx$$

$$= \int_{k < |x| < k+1} |(D_j g_k) f|^p dx \to 0, \quad k \to$$

故

$$D_j f_k \to D_j f \quad (L^p(R^n)), \quad k \to$$

使用数学归纳法，可证对任意 $|\alpha| \leqslant m$，$D^{\alpha} f_k \to D^{\alpha} f(L^p(R^n))$.

（2）再证 $H^{m,p}(R^n)$ 中每个具紧支集的元可用 $C_0(R^n)$ 中函数列来逼近.

设 $f \in H^{m,p}(R^n)$ 且 $\operatorname{supp} f$ 有界. 作 f 的正则化序列 $f_{\varepsilon} = f * j_{\varepsilon} = J_{\varepsilon} f$，显然 $f_{\varepsilon} \in C_0(R^n)$. 剩下只要证 $f_{\varepsilon} \to f\ (H^{m,p}(R^n))$，即要证当 $\varepsilon \to 0$ 时，对任意 $|\alpha| \leqslant m$，有

$$D^{\alpha} f_{\varepsilon} \to D^{\alpha} f \qquad (L^p(R^n))$$

因

$$D^{\alpha} f_{\varepsilon} = (D^{\alpha} f) * j_{\varepsilon} = J_{\varepsilon} D^{\alpha} f, \quad |\alpha| \leqslant m$$

即 $D^{\alpha} f_{\varepsilon}$ 是 $D^{\alpha} f$ 的正则化序列，且 $D^{\alpha} f \in L^p(R^n)$，故

$$D^{\alpha} f_{\varepsilon} \to D^{\alpha} f \qquad (L^p(R^n)) \quad (\varepsilon \to 0)$$

2.4 坐标变换

设 Ω 和 G 是 R^n 中两个有界开集，函数 $y = \Phi(x)$（即 $y_i = \varphi_i(x_1, \cdots,$

x_n)) 确定了 $\Omega \to G$ 的一一满射 F,记 $\Psi(y) = \Phi^{-1}(y)$,则 $x = \Psi(y)$ 将 $G \to \Omega$.

如果 $\Phi \in C^m(\overline{\Omega})$,$\Psi \in C^m(\overline{G})$,则映射 F 称为是 m 次光滑的.

设 $f(x)$ 是定义在 Ω 上的函数,$f(\Psi(y))$ 是定义在 G 上的函数,即变换 F 确定了一个算子 P,它把 $f(x) \to f(\Psi(y))$. 记

$$(Pf)(y) = f(\Psi(y)) = (f \circ \Psi)(y)$$

下面我们要讨论空间 $W^{m,p}(\Omega)$ 在映射 P 下的象是否属于 $W^{m,p}(G)$?若 P 将 $W^{m,p}(\Omega) \to W^{m,p}(G)$,要问 P 是具有什么性质的变换?

定理 2.4.1 若 F 是 1 次光滑的,则 P 是 $L^p(\Omega) \to L^p(G)$ 的有界算子,且存在有界的逆算子 P^{-1}.

证明 只要证明,若 $f \in L^p(\Omega)$,则存在与 f 无关的常数 $k_i (i = 1,2)$,使得

$$k_1 \|f\|_{L^p(\Omega)} \leqslant \|(Pf)(y)\|_{L^p(G)} \leqslant k_2 \|f\|_{L^p(\Omega)}$$

由于 F 是 1 次光滑的,一定存在 $k_i = \text{const}$,使

$$k_1^p \leqslant \left| \frac{D(y_1,\cdots,y_n)}{D(x_1,\cdots,x_n)} \right| \leqslant k_2^p$$

但

$$\|(Pf)(y)\|_{L^p(G)} = \left[\int_G |(Pf)(y)|^p dy\right]^{1/p} = \left[\int_\Omega |f(x)|^p \left|\frac{D(y)}{D(x)}\right| dx\right]^{1/p}$$

合并后两个不等式即得所要证的结论.

定理 2.4.2 设 F 是 m 次光滑的,$m \geqslant 1$,则 P 是 $W^{m,p}(\Omega) \to W^{m,p}(G)$ 的有界算子,且存在有界的逆算子 P^{-1}.

证明 问题在于证明,对任意 $u \in W^{m,p}(\Omega)$,存在与 u 无关的常数 $k_i (i = 1,2)$,满足

$$k_1 \| u \|_{W^{m,p}(\Omega)} \leqslant \| (Pu)(y) \|_{W^{m,p}(G)} \leqslant k_2 \| u \|_{W^{m,p}(\Omega)}$$

因 $C\ (\Omega)$ 在 $W^{m,p}(\Omega)$ 内稠密,故存在 $u_k \in C\ (\Omega)$,使

$$u_k \xrightarrow{W^{m,p}(\Omega)} u, \quad \text{当 } k \to \quad \text{时}$$

容易验证

$$D_y^\alpha(Pu_k)(y) = \sum_{|\beta|\leqslant|\alpha|} M_{\alpha,\beta}(y)(P(D_x^\beta u_k))(y)$$

其中 $M_{\alpha,\beta}(y)$ 是次数不超过 $|\alpha|$ 的多项式，它由 $D^r\Psi, |r|\leqslant|\beta|$ 组成.

对任意 $h(y)\in C_0(G)$，考虑

$$(-1)^{|\alpha|}\int_G (Pu_k)(y) D_y^\alpha h(y)\,dy$$

$$= \int_G D_y^\alpha(Pu_k)(y) h(y)\,dy$$

$$= \sum_{|\beta|\leqslant|\alpha|}\int_G P(D_x^\beta u_k)(y)\cdot M_{\alpha,\beta}(y)h(y)\,dy \tag{2.4.1}$$

令 $y=\Phi(x)$，得

$$(-1)^{|\alpha|}\int_\Omega u_k(x)(D_y^\alpha h)(\Phi(x))\left|\frac{Dy}{Dx}\right|dx$$

$$= \sum_{|\beta|\leqslant|\alpha|}\int_\Omega D_x^\beta u_k(x) M_{\alpha,\beta}[\Phi(x)]h[\Phi(x)]\left|\frac{Dy}{Dx}\right|dx \tag{2.4.2}$$

因 $u_k \to u(W^{m,p}(\Omega))(k\to\ )$，故对 $|\beta|\leqslant m$，有

$$D^\beta u_k \to D^\beta u\ (L^p(\Omega)),\quad k\to$$

从而

$$\langle D^\beta u_k, g\rangle \to \langle D^\beta u, g\rangle,\quad \text{对任意 } g\in C_0^m(G)$$

因 $h[\Phi(x)], (D^\alpha h)[\Phi(x)]\in C_0^m(G)$，在(2.4.2)中令 $k\to$ ，得

$$(-1)^{|\alpha|}\int_\Omega u(x)(D_y^\alpha h)(\Phi(x))\left|\frac{Dy}{Dx}\right|dx$$

$$= \sum_{|\beta|\leqslant|\alpha|}\int_\Omega D_k^\beta u(x)\cdot M_{\alpha,\beta}[\Phi(x)]h(\Phi(x))\left|\frac{Dy}{Dx}\right|dx$$

返回域 G，得

$$\int_G D_y^\alpha(Pu)(y)h(y)\,dy = \sum_{|\beta|\leqslant|\alpha|}\int_G P(D_x^\beta u)(y)M_{\alpha,\beta}(y)h(y)\,dy$$

故由推论 1.3.6 知，对几乎处处 $y\in G$，有

$$D_y^\alpha(Pu)(y) = \sum_{|\beta|\leqslant|\alpha|} M_{\alpha,\beta}(y)(P(D_x^\beta u))(y) \tag{2.4.3}$$

由定理 2.4.1 知，$P(D_x^\beta u)(y)\in L^p(G)$，于是从(2.4.3)得

$$D_y^\alpha (Pu)(y) \in L^p(G), \quad |\alpha| \leqslant m$$

即

$$(Pu)(y) \in W^{m,p}(G)$$

不仅如此,还可得

$$\int_G |D_y^\alpha (Pu)(y)|^p dy = \int_G \Big| \sum_{|\beta| \leqslant |\alpha|} M_{\alpha,\beta}(y)(P(D_x^\beta u))(y) \Big|^p dy$$

$$\leqslant \int_G \Big(\sum_{|\beta| \leqslant |\alpha|} 1^q \Big)^{\frac{p}{q}} \sum_{|\beta| \leqslant |\alpha|} |M_{\alpha,\beta}(y)|^p |P(D_x^\beta u)(y)|^p dy$$

$$\leqslant \Big(\sum_{|\beta| \leqslant |\alpha|} 1 \Big)^{p-1} \sum_{|\beta| \leqslant |\alpha|} \sup_{y \in G} |M_{\alpha,\beta}(y)|^p \int_G |P(D_x^\beta u)(y)|^p dy$$

$$\leqslant \Big(\sum_{|\beta| \leqslant |\alpha|} 1 \Big)^{p} \max_{|\beta| \leqslant |\alpha|} \sup_{y \in G} |M_{\alpha,\beta}(y)|^p \int_G |(D_x^\beta u)[\Psi(y)]|^p dy$$

$$\leqslant C \max_{|\beta| \leqslant |\alpha|} \int_\Omega |(D_x^\beta u)(x)|^p \left| \frac{Dy}{Dx} \right| dx \leqslant k_2 \| u \|^p_{W^{m,p}(\Omega)}$$

这就证明了 P 是 $W^{m,p}(\Omega) \to W^{m,p}(G)$ 的有界映射.

类似的方法,可证 P^{-1} 是 $W^{m,p}(G) \to W^{m,p}(\Omega)$ 的有界映射.

2.5 $W_0^{m,p}(\Omega)$ (或 $H_0^{m,p}(\Omega)$) 的对偶空间

在这一节,我们主要的任务是讨论 $W_0^{m,p}(\Omega)$ 中线性连续泛函的结构形式,然后引入负整数次的索伯列夫空间.

将 $C_0^\infty(\Omega)$ 记成 $\mathscr{D}(\Omega)$,由于 $\mathscr{D}(\Omega)$ 在 $H_0^{m,p}(\Omega)$ 中稠,且 $\mathscr{D}(\Omega)$ 的拓扑(收敛性)比 $H_0^{m,p}(\Omega)$ 的拓扑强,所以,$(H_0^{m,p}(\Omega))'$ 是 $\mathscr{D}'(\Omega)$ 的一个子空间. 下面进一步要讨论$(H_0^{m,p}(\Omega))'$ 中元素的结构情况.

定理 2.5.1 $(H_0^{m,p}(\Omega))'$ 中任一元素 T 均可表示成

$$T = \sum_{|\alpha| \leqslant m} D^\alpha f_\alpha \tag{2.5.1}$$

其中 $f_\alpha \in L^{p'}(\Omega)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, $1 \leqslant p < \infty$.

反之,若 $T \in \mathscr{D}'(\Omega)$ 可以表示成(2.5.1)的形式,则

$$T \in (H_0^{m,p}(\Omega))'$$

证明 在 2.2 节内，我们已经定义了算子 J，它是 $H_0^{m,p}(\Omega)$ 与乘积空间 $(L^p(\Omega))^Q$ 内一个线性子空间 $W(m,p)$ 的等距同构映射.

$$J: H_0^{m,p}(\Omega) \ni \varphi \mapsto (D^{\alpha_1}\varphi, \cdots, D^{\alpha_Q}\varphi) \in (L^p(\Omega))^Q$$

设 $T \in (H_0^{m,p}(\Omega))'$，按线性连续泛函的定义知，存在 C，使得

$$|\langle T,\varphi\rangle| \leqslant C\|\varphi\|_{H_0^{m,p}(\Omega)} = C\Big(\sum_{|\alpha|\leqslant m}\|D^\alpha\varphi\|_{L^p(\Omega)}^p\Big)^{1/p}$$

$$= C\|\varphi\|_{W(m,p)}$$

即 T 可以看成为定义在 $J(H_0^{m,p}(\Omega))$ 上的一个线性连续泛函，由 Hahn - Banach 扩张定理知，T 可扩张成 $(L^p(\Omega))^Q$ 上的线性连续泛函，并可找到其对偶空间 $(L^{p'}(\Omega))^Q$ 中的一个元素来表现，即对 $\varphi \in H_0^{m,p}(\Omega)$，存在 $\{g_\alpha\} \in (L^{p'}(\Omega))^Q$，使

$$\langle T,\varphi\rangle = \sum_{|\alpha|\leqslant m}\int_\Omega g_\alpha D^\alpha\varphi\,dx = \Big\langle \sum_{|\alpha|\leqslant m} D^\alpha f_\alpha,\ \varphi\Big\rangle$$

其中 $f_\alpha = (-1)^{|\alpha|}g_\alpha \in L^{p'}(\Omega)$，这就证明了

$$T = \sum_{|\alpha|\leqslant m} D^\alpha f_\alpha,\quad f_\alpha \in L^{p'}(\Omega)$$

反之，设 $T \in \mathscr{D}'(\Omega)$，且 $T = \sum\limits_{|\alpha|\leqslant m} D^\alpha f_\alpha$，$f_\alpha \in L^{p'}(\Omega)$，则对任意 $\varphi \in C_0(\Omega)$，有

$$\langle T,\varphi\rangle = \Big\langle \sum_{|\alpha|\leqslant m} D^\alpha f_\alpha,\varphi\Big\rangle = \sum_{|\alpha|\leqslant m}(-1)^{|\alpha|}\langle f_\alpha, D^\alpha\varphi\rangle$$

从而

$$|\langle T,\varphi\rangle| \leqslant \sum_{|\alpha|\leqslant m}|\langle f_\alpha,D^\alpha\varphi\rangle| \leqslant \sum_{|\alpha|\leqslant m}\|f_\alpha\|_{L^{p'}(\Omega)}\|D^\alpha\varphi\|_{L^p(\Omega)}$$

$$\leqslant C\|\varphi\|_{m,p}$$

即 T 在 $C_0(\Omega)$ 上按 $\|\cdot\|_{m,p}$ 是连续的.

又 $C_0(\Omega)$ 在 $H_0^{m,p}(\Omega)$ 中稠，从而 T 可扩张成 $H_0^{m,p}(\Omega)$ 中的连续线性泛函，即 $T \in (H_0^{m,p}(\Omega))'$.

将 $H_0^{m,p}(\Omega)$ 的对偶空间记成 $H^{-m,p'}(\Omega)$，即

$$H^{-m,p'}(\Omega) \triangleq (H_0^{m,p}(\Omega))'$$

对于 $T \in H^{-m,p'}(\Omega)$，可以定义范数为

$$\|T\|_{-m,p'} = \sup_{\varphi \in H_0^{m,p}} \frac{|\langle T,\varphi\rangle|}{\|\varphi\|_{m,p}} \tag{2.5.2}$$

$H^{-m,p'}(\Omega)$ 称为负整指数的 Sobolev 空间.

为了说明负整指数的 Sobolev 空间的另一种定义方式，首先说明 $L^{p'}(\Omega)$ 是 $H^{-m,p'}(\Omega)$ 的线性子空间，即若 $T \in L^{p'}(\Omega)$，$\varphi \in H_0^{m,p}(\Omega)$，$\langle T,\varphi\rangle$ 有意义. 事实上，当 $T \in L^{p'}(\Omega)$，$\varphi \in C_0^{\infty}(\Omega)$ 时，$\langle T,\varphi\rangle$ 就是积分 $\int_\Omega T\varphi dx$，而 $H_0^{m,p}(\Omega)$ 是 $C_0^{\infty}(\Omega)$ 按 $\|\cdot\|_{m,p}$ 的完备化，但这个范数比 $L^p(\Omega)$ 的范数强，即若 $\varphi_k \to \varphi(H_0^{m,p}(\Omega))$，则必有 $\varphi_k \to \varphi(L^p(\Omega))$，从而对任意 $\varphi_k \in C_0^{\infty}(\Omega)$，通过在

$$\langle T,\varphi_k\rangle = \int_\Omega T\varphi_k dx,$$

两端取极限得

$$\langle T,\varphi\rangle = \int_\Omega T\varphi dx, \quad 对任意 \varphi \in H_0^{m,p}(\Omega)$$

即若 $T \in L^{p'}(\Omega)$，$\varphi \in H_0^{m,p}(\Omega)$，$\langle T,\varphi\rangle$ 有意义，或者说 $L^{p'}(\Omega)$ 是 $H^{-m,p'}(\Omega)$ 的子空间.

定理 2.5.2 当 $1 < p < +\infty$ 时，$L^{p'}(\Omega)$ 按范数(2.5.2)在 $H^{-m,p'}(\Omega)$ 内是稠的，即 $H^{-m,p'}(\Omega)$ 是 $L^{p'}(\Omega)$ 按 $\|\cdot\|_{-m,p'}$ 的完备化.

证明 首先说明，为了证明本定理的结论，只要证明，任取 $F \in (H^{-m,p'})'$，如果 $\langle F,\varphi\rangle = 0$ 对所有 $\varphi \in L^{p'}(\Omega)$ 成立，则在 Ω 内几乎处处有

$$F = 0 \tag{2.5.3}$$

事实上，设定理的结论不成立，即 $L^{p'}(\Omega)$ 是 $H^{-m,p'}(\Omega)$ 的真子空间，根

据非零线性连续泛函的存在定理①,在 $H^{-m,p'}(\Omega)$ 上必存在一个非零的线性连续泛函 F_0,使得在 $L^{p'}(\Omega)$ 上,$F_0 \neq 0$,即对任意 $\varphi \in L^{p'}(\Omega)$,有 $\langle F_0, \varphi\rangle = 0$,但 $F_0 \neq 0$,与(2.5.3)相矛盾.

下面我们来证明(2.5.3).

因 $1 < p < +$ 时,$H^{m,p}(\Omega)$ 完备且自反,而 $H_0^{m,p}(\Omega)$ 是 $H^{m,p}(\Omega)$ 的闭子空间,故 $H_0^{m,p}(\Omega)$ 也是自反空间,即

$$(H_0^{m,p}(\Omega))'' = H_0^{m,p}(\Omega)$$

或

$$(H^{-m,p'}(\Omega))' = H_0^{m,p}(\Omega)$$

若 $\langle F, \varphi\rangle = 0$ 对 $F \in H_0^{m,p}(\Omega)$ 及所有 $\varphi \in L^{p'}(\Omega)$ 均成立,由于 $H_0^{m,p}(\Omega) \subset L^p(\Omega)$,故 $F \in L^p(\Omega)$,且 $(L^p(\Omega))' = L^{p'}(\Omega)$.

所以

$$\langle F, \varphi\rangle = \int_\Omega F\varphi dx = 0, \quad \text{对任意 } \varphi \in L^{p'}(\Omega)$$

特别地,取 $\varphi = \operatorname{sgn}F \cdot |F|^{p-1}$,则 $\varphi \in L^{p'}(\Omega)$ 且 $\|F\|_p^p = \int_\Omega |F|^p dx = 0$,故 $F = 0$ 在 Ω 内几乎处处成立.

2.6 Sobolev 不等式与嵌入定理

这里我们要讲 Sobolev 空间的嵌入定理,先讲 Sobolev 不等式.

2.6.1 Sobolev 不等式

设 $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$,则存在 $C = C(n,p)$,使得

$$\|u\|_{\frac{np}{n-p}} \leqslant C\|\nabla u\|_p, \quad p < n \tag{2.6.1}$$

---

① 设 E 是线性赋范空间,G 是其线性子空间,$x_0 \in E$,$d = \operatorname{dist}(x_0, G)$,则必存在 E 上的线性连续泛函 f,满足(i)当 $x \in G$ 时,$f(x) = 0$;(ii)$f(x_0) = d$;(iii)$\|f\| = 1$.

$$\sup_{\Omega} |u| \leqslant C |\Omega|^{\frac{1}{n}-\frac{1}{p}} \| \nabla u \|_p, \quad p > n \tag{2.6.2}$$

我们分三步来证明此结论.

(1) 因 $C_0^1(\Omega)$ 在 $W_0^{1,p}(\Omega)$ 中稠密,所以只要对 $u \in C_0^1(\Omega)$ 来证明(2.6.1)与(2.6.2)即可. 例如,对 $p < n$ 的情形,若对 $u \in C_0^1(\Omega)$,已证得

$$\| u \|_{\frac{np}{n-p}} \leqslant C \| \nabla u \|_p$$

由于 $C_0^1(\Omega)$ 在 $W_0^{1,p}(\Omega)$ 中稠密,对 $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$,存在 $\{u_k\} \subset C_0^1(\Omega)$,使当 $k \to$ 时,有

$$u_k \to u \ (W^{1,p})$$

由此得 $\| u_k - u_{k'} \|_{\frac{np}{n-p}} \leqslant C \| \nabla (u_k - u_{k'}) \|_p \to 0 \ (k, k' \to \ )$,即 $\{u_k\}$ 是 $L^{np/(n-p)}(\Omega)$ 中的 Cauchy 序列,而 $u_k \to u(L^{\frac{np}{n-p}})$,由 $L^{\frac{np}{n-p}}$ 的完备性知,$u \in L^{\frac{np}{n-p}}(\Omega)$,且

$$\| u \|_{\frac{np}{n-p}} \leqslant C \| \nabla u \|_p, \quad p < n$$

这说明对 $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$,(2.6.1)也成立.

(2) $p < n$.

① $p = 1$.

对任意 $u \in C_0^1(\Omega)$,$1 \leqslant i \leqslant n$,有

$$|u(x)| \leqslant \int_{-}^{x_i} |D_i u(x_1, \cdots, x_{i-1}, \xi_i, x_{i+1}, \cdots, x_n)| d\xi_i$$

故

$$|u|^{\frac{n}{n-1}} \leqslant \left(\prod_{i=1}^{n} \int_{-}^{+} |D_i (x_i, \cdots, x_{i-i}, \xi_i, x_{i+1}, \cdots, x_n)| d\xi_i \right)^{\frac{1}{n-1}} \tag{2.6.3}$$

现逐次将(2.6.3)对每个变量 $x_i (1 \leqslant i \leqslant n)$ 积分,注意到每次积分时右端 n 项中有一项与积分变量无关,可以移到积分号外,其余($n - 1$)项利用 Hölder 不等式,其中取 $p_1 = p_2 = \cdots = p_{n-1} = n - 1$,可得

$$\| u \|_{\frac{n}{n-1}} \leqslant \left(\prod_{i=1}^{n} \int_{\Omega} |D_i u(x_1, \cdots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \cdots, x_n)| dx_1 \cdots dx_n \right)^{\frac{1}{n}}$$

$$\leqslant \frac{1}{n}\int_{\Omega}\sum_{i=1}^{n}|D_i u|dx \quad \left(这里利用了(a_1\cdots a_n)^{\frac{1}{n}} \leqslant \frac{a_1+\cdots+a_n}{n}\right)$$

$$\leqslant \frac{1}{\sqrt{n}}\int_{\Omega}|\nabla u|dx = \frac{1}{\sqrt{n}}\|\nabla u\|_1 \tag{2.6.4}$$

即 $p = 1$ 时,(2.6.1) 成立.

② 对任意 $p < n$.

在(2.6.4) 中,取 $v = |u|^r$(r 待定) 代替 u,得

$$\| |u|^r \|_{\frac{n}{n-1}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}}\| \nabla |u^r| \|_1 = \frac{r}{\sqrt{n}}\int_{\Omega}|u|^{r-1}|\nabla u|dx$$

$$\leqslant \frac{r}{\sqrt{n}}\| |u|^{r-1} \|_{p'} \|\nabla u\|_p \quad \left(\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1\right)$$

即

$$\left(\int_{\Omega}(|u|^r)^{\frac{n}{n-1}}dx\right)^{\frac{n-1}{n}} \leqslant \frac{r}{\sqrt{n}}\left(\int_{\Omega}(|u|^{r-1})^{p'}dx\right)^{\frac{1}{p'}}\|\nabla u\|_p \tag{2.6.5}$$

选 r 满足

$$r\frac{n}{n-1} = (r-1)p' = (r-1)\frac{p}{p-1}$$

即 $r = \dfrac{(n-1)p}{n-p}$,由此可得$\dfrac{rn}{n-1} = \dfrac{pn}{n-p}$. 由(2.6.5) 得

$$\left(\int_{\Omega}|u|^{\frac{pn}{n-p}}dx\right)^{\frac{n-1}{n}} \leqslant \frac{r}{\sqrt{n}}\left(\int_{\Omega}|u|^{\frac{pn}{n-p}}dx\right)^{\frac{p-1}{p}}\|\nabla u\|_p$$

即

$$\left(\int_{\Omega}|u|^{\frac{pn}{n-p}}dx\right)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{n}} \leqslant C(n,p)\|\nabla u\|_p$$

也即

$$\|u\|_{\frac{np}{n-p}} \leqslant C(n,p)\|\nabla u\|_p$$

至此,(2.6.1) 获证.

(3) $p > n$.

记

$$\tilde{u} = \frac{\sqrt{n}u}{\|\nabla u\|_p}, \quad u \in C_0^1(\Omega)$$

不妨先设 $|\Omega| = 1$**,由** $\tilde{u}$ **的表达式得**

$$\|\nabla\tilde{u}\|_p = \sqrt{n}$$

$$\|\tilde{u}\|_{\frac{n}{n-1}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}}\|\nabla\tilde{u}\|_1 = \frac{\|\nabla u\|_1}{\|\nabla u\|_p} \leqslant 1$$

这里利用了第一章命题 1.2.9 **及** $|\Omega| = 1$.

由(2.6.5) **得**

$$\|\tilde{u}^r\|_{\frac{n}{n-1}} \leqslant r\|\tilde{u}^{r-1}\|_{\frac{p}{p-1}} \quad \left(p' = \frac{p}{p-1}\right)$$

即

$$\left(\int_\Omega |\tilde{u}|^{\frac{rn}{n-1}}dx\right)^{\frac{n-1}{n}} \leqslant r\left(\int_\Omega |\tilde{u}|^{(r-1)\frac{p}{p-1}}dx\right)^{\frac{p-1}{p}}$$

或

$$\|\tilde{u}\|_{rn'} \leqslant r^{1/r}\|\tilde{u}\|_{(r-1)p'}^{\frac{r-1}{r}} \quad \left(\textbf{其中 } n' = \frac{n}{n-1}\right)$$

取 $r = \delta^\gamma(\gamma = 1,2,\cdots)$,$\delta = \dfrac{n'}{p'} > 1$**,得**

$$\|\tilde{u}\|_{n'\delta^\gamma} \leqslant \delta^{\gamma\delta^{-\gamma}}\|\tilde{u}\|_{n'\delta^{\gamma-1}}^{1-\delta^{-\gamma}} \quad (p' = n'\delta^{-1}) \tag{2.6.6}$$

这是一个递推公式,令 $\gamma = 1$**,得**

$$\|\tilde{u}\|_{n'\delta} \leqslant \delta^{\delta^{-1}}\|\tilde{u}\|_{n'}^{1-\delta^{-1}} \leqslant \delta^{\delta^{-1}}$$

$\gamma = 2$ **时,有**

$$\|\tilde{u}\|_{n'\delta^2} \leqslant \delta^{2\delta^{-2}}\|\tilde{u}\|_{n'\delta}^{1-\delta^{-2}} \leqslant \delta^{2\delta^{-2}}\delta^{\delta^{-1}(1-\delta^{-2})} \leqslant \delta^{\delta^{-1}+2\delta^{-2}}$$

$$\vdots$$

$$\|\tilde{u}\|_{n'\delta^\gamma} \leqslant \delta^{\sum\limits_{r=1}\gamma\delta^{-\gamma}} \equiv \chi$$

令 $\gamma \to$ **,由第一章命题** 1.2.6 **的结果得**

$$\|\tilde{u}\| \leqslant \chi$$

在 Ω 内的零测度的集合内调整 u 的值，可使 u 在 Ω 内有界，且

$$\sup_{\Omega} |\tilde{u}| \leqslant \chi$$

即

$$\sup_{\Omega} |u| \leqslant \frac{\chi}{\sqrt{n}} \| \nabla u \|_p \quad .$$

若 $|\Omega| \neq 1$，只要作变换 $y_i = |\Omega|^{\frac{1}{n}} x_i$，即得

$$\sup_{\Omega} |u| \leqslant \frac{\chi}{\sqrt{n}} |\Omega|^{\frac{1}{n} - \frac{1}{p}} \| \nabla u \|_p \quad .$$

注 1 记 $p^* = \frac{pn}{n-p}$，即 $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n}$，$p^*$ 称为 p 的 Sobolev 共轭数，(2.6.1) 可表成

$$\| u \|_{p^*} \leqslant C \| \nabla u \|_p, \quad p < n$$

注 2 $p < n$ 时满足(2.6.1)的最好的常数曾由 Rodemich E. 于 1966 年计算过，得

$$C = \frac{1}{n\sqrt{\pi}} \left(\frac{n!\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{n}{p}\right)\Gamma\left(n + 1 - \frac{n}{p}\right)} \right)^{\frac{1}{n}} r^{1-\frac{1}{p}}$$

其中 $r = \frac{n(p-1)}{n-p}$.

注 3 (2.6.1)式表明，若 $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ $(p < n)$，则 $u \in L^{\frac{np}{n-p}}(\Omega)$，且(2.6.1)成立，这里要注意的是 $\frac{np}{n-p} > p$，一般说来，由 $u \in L^p(\Omega)$ 不能得到 $u \in L^{\frac{np}{n-p}}(\Omega)$，但当 $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ 时，得到了这个结果. 不仅如此，u 在两个空间的范数所满足的(2.6.1)更重要，Sobolev 称 $W_0^{1,p}(\Omega)$ 嵌入到 $L^{\frac{np}{n-p}}(\Omega)$，记成 $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{\frac{np}{n-p}}(\Omega)$ $(p < n)$. 由 L^p 的性质可知当 Ω 为有限区域时，$W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$，其中 $q \leqslant \frac{np}{n-p}(p < n)$.

对(2.6.2)也可作类似解释,所以 Sobolev 不等式可表成

$$W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow \begin{cases} L^q(\Omega), & q \leqslant \dfrac{np}{n-p}, \quad p < n \\ C^0(\overline{\Omega}), & p > n \end{cases}$$

注 4 Sobolev 不等式的推广.

重复运用不等式(2.6.1)与(2.6.2)可得

$$\|u\|_{\frac{np}{n-kp}} \leqslant C\|u\|_{W_0^{k,p}(\Omega)}, \quad \text{当 } kp < n \tag{2.6.7}$$

$$\|u\|_{C^m(\overline{\Omega})} \leqslant C\|u\|_{W_0^{k,p}(\Omega)}, \quad \text{当 } 0 \leqslant m < k - \frac{n}{p} \tag{2.6.8}$$

事实上,如果 $u \in W_0^{2,p}(\Omega)$,则 $Du \in W_0^{1,p}(\Omega)$,当 $2p < n$ 时,利用(2.6.1)得 $Du \in L^{\frac{np}{n-p}}(\Omega)$,i.e.,$u \in W_0^{1,\frac{np}{n-p}}(\Omega)$,再利用(2.6.1)得 $u \in L^{\frac{np}{n-2p}}(\Omega)$,且

$$\|u\|_{\frac{np}{n-2p}} \leqslant C\|\nabla u\|_{\frac{np}{n-p}} \leqslant C\|\nabla^2 u\|_p \leqslant c\|u\|_{W_0^{2,p}}$$

其他类似.

利用嵌入算子表示,可得

$$W_0^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow \begin{cases} L^{np/(n-kp)}(\Omega), & kp < n \\ C^m(\overline{\Omega}), & 0 \leqslant m < k - \dfrac{n}{p} \end{cases} \tag{2.6.9}$$

2.6.2 $W^{m,p}(\Omega)$ 空间嵌入的含义

Sobolev 不等式给我们留下两个问题,第一是这些不等式对空间 $W^{m,p}(\Omega)$ 是否成立;第二是 $p = n$ 的情况如何. 下面就逐步回答这两个问题.

(1) 区域的几何性质

在 R^n 中给定一个以原点为中心的开球 B_1 及一个不包含原点的开球 B_2,集合

$$C_0 = B_1 \cap \{\lambda x \mid x \in B_2, \lambda > 0\}$$

称为顶点在原点的有限锥,集合

$$C_x = x + C_0 = \{x + y \mid y \in C_0\}$$

称为顶点在 x 的有限锥. 若区域 C_y 经刚体运动可与 C_x 重合,则称 C_y 与 C_x 全等.

定义 6.2.1 如果存在有限锥 C_0,使得 Ω 中每一点 x 都是 Ω 内一个全等于 C_0 的有限锥的顶点,则称 Ω 具有锥性质.

为了引入另一类区域,先给出下列概念和记号.

集合族 $\{U_j\}$($U_j \subset R^n$)称为局部有限的,若对任一 $K \subset\subset R^n$,K 只与有限个 U_j 相交.

对任意 $\delta > 0$,记

$$\Omega_\delta = \{x \in \Omega \mid \mathrm{dist}(x, \partial\Omega) < \delta\}$$

定义 6.2.2 称区域 Ω 具有强局部 Lipschitz 性质,若存在正数 δ 和 M 及 $\partial\Omega$ 的局部有限开覆盖 $\{U_j\}$ 满足下列条件:

(i) 对某正整数 N,$\{U_j\}$ 中任意 $N+1$ 个 U_j 的交集为空集;

(ii) 对所有满足 $|x - y| < \delta$ 的点对 $x, y \in \Omega_\delta$,存在 j,使得

$$x, y \in V_j \equiv \{x \in U_j \mid \mathrm{dist}(x, \partial U_j) > \delta\}$$

(iii) 对每个 U_j,有一个 $n-1$ 个实变量的实值函数 f_j,使对某个局部坐标系($\xi_{j,1}, \cdots, \xi_{j,n}$),集合 $\Omega \cap U_j$ 由不等式

$$\xi_{j,n} < f_j(\xi_{j,1}, \cdots, \xi_{j,n-1})$$

表示,且 f_j 满足关于常数 M 的 Lipschitz 条件,即

$$|f_j(\xi_1, \cdots, \xi_{n-1}) - f_j(\eta_1, \cdots, \eta_{n-1})| \leqslant M|(\xi_1 - \eta_1, \cdots, \xi_{n-1} - \eta_{n-1})|$$

注 1 当 Ω 有界时,定义 6.2.2 与本章 2.3 节中所述的 L 型区域的定义完全一致.

注 2 具强局部 Lipschitz 性质的区域必具有锥性质. 反之,当 Ω 有界时,由 Gagliardo 定理知(见第五章),若 Ω 具锥性质,则它必为有限个具强局部 Lipschitz 性质区域 Ω_j 的并集.

(2) $W^{k,p}(\Omega)$ 中的 Sobolev 不等式

对于空间 $W^{k,p}(\Omega)$,一般说来(2.6.7)与(2.6.8)是不成立的,但是,如

果 Ω 具有锥性质，则有下列嵌入关系：

$$W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow \begin{cases} L^q(\Omega), & q \leqslant \dfrac{np}{n-kp} & (2.6.10) \\ C_B^m(\Omega), & 0 \leqslant m < k - \dfrac{n}{p} & (2.6.11) \end{cases}$$

其中 $C_B^m(\Omega) = \{u \in C^m(\Omega) \mid D^\alpha u \in L\ (\Omega), |\alpha| \leqslant m\}$.

如何解释(2.6.11)呢？我们知道 $L^p(\Omega)$ 中的元素并不是处处有定义的函数，若 $f \in L^p(\Omega)$，在零测度的集合上任意改变它的值并不影响其范数 $\|f\|_p$. 所以，$L^p(\Omega)$ 中所有除去 Ω 内一个零测度的集合外有意义且相等的函数都被看成是同一个元素，或者说，$f \in L^p(\Omega)$ 是代表了一个等价类(equivalent class)，这个类中的元素除去 Ω 中的一个零测度集合外互相相等，$W^{k,p}(\Omega)$ 中的元素也是如此. 那么 $W^{k,p}(\Omega)$ 嵌入到 $C_B^m(\Omega)$ $\left(0 \leqslant m < k - \dfrac{n}{p}\right)$ 是什么意思？它是指"等价类"$u \in W^{k,p}(\Omega)$ 中应包含有一个函数，它属于 $C_B^m(\Omega)$（嵌入的目标），而且，它在 $C_B^m(\Omega)$ 中的范数可以用 $\|u\|_{k,p}$ 乘以一个常数来界定. 换句话说，就是每个 $u \in W^{k,p}(\Omega)$，当我们把它作为一个函数时，能够在 Ω 中的一个零测度的集合上重新定义它的值，使得修改以后的函数 $\tilde{u}$（它在 $W^{k,p}(\Omega)$ 中等于 u）属于 $C_B^m(\Omega)$，而且 $\|\tilde{u}\|_{C_B^m(\Omega)} \leqslant C\|u\|_{k,p}$（$C$ 与 u 无关）.

除此以外，我们还要说明 $W^{m,p}(\Omega)$ 到低维的 Sobolev 空间 $W^{j,q}(\Omega^k)$ 上的嵌入，其中 Ω^k 表示 Ω 与 R^n 中的一个 k 维平面的交集，即 R^k 中的一个区域，$k \leqslant n$. 我们已知 $C\ (\Omega)$ 在 $W^{m,p}(\Omega)$ 中稠，即对每个 $u \in W^{m,p}(\Omega)$，必存在一个序列 $\{u_i\} \subset C\ (\Omega)$，使得 $u_i \xrightarrow{W^{m,p}} u$，函数 u_i 在 Ω^k 上具有属于 $C\ (\Omega^k)$ 的迹 $u_i\big|_{\Omega^k}$，$W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{j,q}(\Omega^k)$ 是指上述的迹 $u_i\big|_{\Omega^k} \xrightarrow{W^{j,q}(\Omega^k)} \tilde{u}$，它满足 $\|\tilde{u}\|_{W^{j,q}(\Omega^k)} \leqslant C\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)}$，$C$ 与 u 无关.

2.6.3 Sobolev 嵌入定理的结论

前面说过 Sobolev 不等式揭示了 $W^{m,p}(\Omega)$ 到其他空间的嵌入关系，

$W^{m,p}(\Omega)$ 的嵌入定理首先由 Sobolev 在 1938 年就星形区域(即 Ω 中存在一个球 C,使得由 $\overline{C}$ 上任一点引出的每一半射线都只与 $\partial\Omega$ 交于一点)建立的,1958 年,E. Gagliardo 推广至较一般的区域,下面只叙述结论,将在第五章内给出证明.

(1)设 Ω 具有锥性质,Ω^k 表示 Ω 与 R^n 中一个 k 维平面的交集,$1 \leqslant k \leqslant n$,m 为正整数,j 为非负整数,$1 \leqslant p < +$,则有下列嵌入关系:

情形 A　假定 $mp < n$ 且 $n - mp < k \leqslant n$,则

$$W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \quad p \leqslant q \leqslant \frac{np}{n - mp} \tag{2.6.12}$$

$$W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{j,q}(\Omega), \quad p \leqslant q \leqslant \frac{np}{n - mp} \tag{2.6.13}$$

$$W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{j,q}(\Omega^k), \quad p \leqslant q \leqslant \frac{kp}{n - mp} \tag{2.6.14}$$

如果 $p = 1$,则 $m < n$,这时当 $n - m = k$ 时,(6.2.14)仍成立. 即

$$W^{j+m,1}(\Omega) \hookrightarrow W^{j,1}(\Omega^{n-m})$$

情形 B　假定 $mp = n$,则对 $1 \leqslant k \leqslant n$,有

$$W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{j,q}(\Omega^k), \quad p \leqslant q < \tag{2.6.15}$$

特别是

$$W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \quad p \leqslant q < \tag{2.6.16}$$

若 $p = 1$,则 $m = n$,这时当 $q =$ 　时(2.6.15),(2.6.16)仍成立.

情形 C　假定 $mp > n$,则

$$W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow C_B^j(\Omega) \tag{2.6.17}$$

(2)若 Ω 具有强局部 Lipschitz 性质,则上述嵌入关系(2.6.17)可改善为下列形式:

情形 C'　假定 $mp > n > (m - 1)p$,则

$$W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{j,\alpha}(\overline{\Omega}), \quad 0 < \alpha \leqslant m - \frac{n}{p} \tag{2.6.18}$$

情形 C"　假定 $n = (m - 1)p$,则

$$W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{j,\alpha}(\overline{\Omega}), \quad 0 < \alpha < 1 \tag{2.6.19}$$

如果 $p=1$,$n=m-1$,则(2.6.19)对 $\alpha=1$ 也成立.

(3)如果把 W-空间换成 W_0-空间,则(1),(2)中结论对任意区域 Ω 均成立.

2.6.4 $W^{m,p}(\Omega)$ 的紧嵌入

算子的紧性是非常重要的,因为一个紧算子把有界集映成紧集,那么 $W^{m,p}(\Omega)$ 的嵌入映射是不是紧的呢?这个问题由 V. I. Kondrachov 解决,其中用到了 F. Rellich 的一个重要结果.下面叙述 Rellich-Kondrachov 定理的结论.

设 Ω 是 R^n 中的一个区域,Ω_0 是 Ω 的有界子区域,Ω^k 是 Ω 与 R^n 中的一个 k 维超平面的交,j,m 是整数,$j\geqslant 0$,$m\geqslant 1$,p 是实数,$1\leqslant p<+$,我们有如下结果:

(1)如果 Ω 具有锥性质且 $mp\leqslant n$,则下列嵌入是紧的,记成 $\hookrightarrow\hookrightarrow$:

$$W^{j+m,p}(\Omega)\hookrightarrow\hookrightarrow W^{j,q}(\Omega_0^k),\quad 0<n-mp<k\leqslant n,1\leqslant q<kp/(n-mp)$$

$$W^{j+m,p}(\Omega)\hookrightarrow\hookrightarrow W^{j,q}(\Omega_0^k),\quad n=mp,1\leqslant k\leqslant n,1\leqslant q<$$

(2)如果 Ω 具有锥性质且 $mp>n$,则下列嵌入是紧的:

$$W^{j+m,p}(\Omega)\hookrightarrow\hookrightarrow C_B^j(\Omega_0)$$

$$W^{j+m,p}(\Omega)\hookrightarrow\hookrightarrow W^{j,q}(\Omega_0^k),\quad 1\leqslant q\leqslant$$

(3)如果 Ω 具有强局部 Lipschitz 性质,则下列嵌入是紧的:

$$W^{j+m,p}(\Omega)\hookrightarrow\hookrightarrow C^j(\overline{\Omega}_0),\quad mp>n$$

$$W^{j+m,p}(\Omega)\hookrightarrow\hookrightarrow C^{j,\alpha}(\overline{\Omega}_0),\quad mp>n\geqslant(m-1)p,0<\alpha<m-\frac{n}{p}$$

(4)若用 $W_0^{j+m,p}(\Omega)$ 代替 $W^{j+m,p}(\Omega)$,则对 R^n 中任意区域 Ω,上述嵌入都是紧的.

注 1 Rellich-Kondrachov 定理留下两个疑问:第一,定理的结论能否推广到 Ω_0 是无界的情况?第二,下面两个“极端情况”

$$W^{j+m,p}(\Omega)\hookrightarrow\hookrightarrow W^{j,q}(\Omega_0^k),\quad 0<n-mp<k\leqslant n,\quad q=\frac{kp}{n-mp}$$

和

$$W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow C^{j,\alpha}(\overline{\Omega_0}), \quad mp > n > (m-1)p, \quad \alpha = m - \frac{n}{p}$$

是不是成立.

对于第一个问题,当 $k = n$ 时我们可以给出确切的否定的回答,除非 Ω_0 是拟有界的情形. 所谓 Ω_0 是拟有界是指 Ω_0 满足

$$\lim_{\substack{x \in \Omega_0 \\ |x| \to}} \operatorname{dist}(x, \partial\Omega_0) = 0$$

即 Ω_0 可以用半径为 的球来逼近.

对于第二个问题,答案总是否定的 .

注 2 $W_0^{m,p}(\Omega)$ 的一个等价范数.

为了以后应用的方便,在 $W_0^{m,p}(\Omega)$ 中引入一个等价的范数. 假设 $\Omega \subset R^n$ 是一个有界区域,或者 Ω 是夹在两个平行的超平面之间(称 Ω 为有限宽的),现在设 Ω 是位于 $x_n = 0$ 和 $x_n = d$ 之间,记

$$|\varphi|_{m,p} = \Big(\sum_{|\alpha| = m} \| D^\alpha u \|_p^p\Big)^{1/p}$$

现在我们来证明,当 Ω 是有界或是有限宽时, $|\varphi|_{m,p}$ 与 $\|\varphi\|_{m,p}$ 是 $W_0^{m,p}(\Omega)$ 中的等价范数.

事实上,令 $x = (x_1, \cdots, x_{n-1}, x_n) = (x', x_n)$,对任意 $\varphi \in C_0(\Omega)$,有

$$\varphi(x) = \int_0^{x_n} \frac{d}{dt}\varphi(x', t)\, dt$$

所以

$$\begin{aligned}
\|\varphi\|_p^p &= \int_{R^{n-1}} dx' \int_0^d |\varphi(x)|^p dx_n \\
&\leqslant \int_{R^{n-1}} dx' \int_0^d x_n^{p-1} dx_n \int_0^d |D_n\varphi(x', t)|^p dt \\
&\leqslant \frac{d^p}{p} |\varphi|_{1,p}^p
\end{aligned}$$

另外

$$|\varphi|_{1,p}^{p} \leqslant \|\varphi\|_{1,p}^{p} = \|\varphi\|_{p}^{p} + |\varphi|_{1,p}^{p} \leqslant \left(1 + \frac{d^p}{p}\right)|\varphi|_{1,p}^{p}$$

对 $D^\alpha\varphi$（$|\alpha| \leqslant m - 1$）连续地利用上面不等式得

$$|\varphi|_{m,p} \leqslant \|\varphi\|_{m,p} \leqslant K|\varphi|_{m,p}, \quad \forall \varphi \in C_0(\Omega)$$

利用完备性可知，上面不等式对 $u \in W_0^{m,p}(\Omega)$ 成立.

为了保证上述等价范数关系成立，对 Ω 的要求还可以放宽.

3 广义函数初步

为了研究非整数阶的 Sobolev 空间,必须先介绍广义函数的概念及其基本理论,其中包括广义函数的概念、广义函数的性质与运算及广义函数的 Fourier 变换等.

3.1 广义函数的概念、基本函数空间

当我们不局限于研究偏微分方程的古典解时,首先遇到的问题是如何把函数的概念及方程解的概念拓广,这就要引入广义函数的概念,它的严格数学基础是在 20 世纪 40 年代由 Schwartz 等人完成的.

3.1.1 广义函数的一例

Schwartz 的广义函数又称分布(distribution),它是作为基本函数空间中的线性连续泛函引入的. 现在我们来逐步说明这个概念,首先设

$$f(x) \in L^2(a,b)$$

在 $L^2(a,b)$ 上可定义如下的线性连续泛函:

$$F(\varphi) = \int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx, \quad 对任意\ \varphi(x) \in L^2(a,b) \tag{3.1.1}$$

反之,由 Riesz 表现定理,对于 $L^2(a,b)$ 中的任意线性连续泛函,都存在一 $f(x) \in L^2(a,b)$,使这个泛函能表现为(3.1.1)的形式,因此,在(3.1.1)的泛函表现形式下,$L^2(a,b)$ 函数与 $L^2(a,b)$ 空间上的泛函可以看成是一样的.

再考虑空间 $L^p(a,b)(p>2)$,在 $L^q(a,b)$ 中任意取一个函数均可按(3.1.1)形式定义 $L^p(a,b)$ 上的一个线性连续泛函,其中 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. 反之,由 Riesz 表现定理 1.2.11,$L^p(a,b)$ 上的线性连续泛函也一定可通过 $L^q(a,$

b) 中的函数表示为(3.1.1) 的形式. 因 $p>2$,故 $q<2<p$,即 $L^p(a,b)\subset L^q(a,b)$,从而 $L^p(a,b)$ 上的泛函要比原空间的函数类更广,如果我们只将 $L^p(a,b)$ 的元素称为"函数",那么,通过构造线性连续泛函就可以得到一些"广义的函数". 这就给出了推广函数的一种方法.

如果考虑性质更好的函数空间,例如,考虑 $C[a,b]$,这时 $L^1(a,b)$ 中任一函数仍可按(3.1.1) 定义 $C[a,b]$ 上的线性连续泛函. 但反过来,$C[a,b]$ 上的线性连续泛函却不一定可以用常义函数 $f\in L^1(a,b)$ 表示为积分(3.1.1) 的形式,为了说明这件事,例如,我们设 $0\in(a,b)$,并在 $C[a,b]$ 上定义下列泛函:

$$F(\varphi)=\varphi(0),\quad \text{对任意 } \varphi\in C[a,b] \tag{3.1.2}$$

显然它是线性的,而且也是连续的. 事实上,若有 $\varphi_\nu(x)\in C[a,b]$,且

$$\|\varphi_\nu\|_{C[a,b]}\equiv\max_{x\in[a,b]}|\varphi_\nu(x)|\to 0$$

则

$$F(\varphi_\nu)=\varphi_\nu(0)\to 0$$

即 $F(\varphi)$ 关于 φ 是连续的,但是,却找不到一个普通的函数 $f(x)\in L^1(a,b)$,使得对任意 $\varphi\in C[a,b]$,有

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx=\varphi(0) \tag{3.1.3}$$

若不然,设有这样的函数 $f(x)$ 存在,任取 c,d,ε 满足 $0<c<d<b,\varepsilon<\min(c,b-d)$,则对于 $[c,d]$ 上任一连续函数 $\psi(x)$,令

$$\psi_\varepsilon(x)=\begin{cases}\psi(x), & x\in[c,d]\\ \dfrac{x-c+\varepsilon}{\varepsilon}\psi(c), & x\in[c-\varepsilon,c]\\ \dfrac{\varepsilon-x+d}{\varepsilon}\psi(d), & x\in(d,d+\varepsilon]\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

显然 $\psi_\varepsilon(x)\in C[a,b]$,$\varphi_\varepsilon(0)=0$,且

$$\left|\int_a^b f(x)\psi_\varepsilon(x)\,dx-\int_c^d f(x)\psi(x)\,dx\right|$$

$$\leqslant \left(\int_{c-\varepsilon}^{c} + \int_{d}^{d+\varepsilon}\right) | f(x)\psi_{\varepsilon}(x) | dx$$

$$\leqslant \max(|\psi(c)|, |\psi(d)|)\left(\int_{c-\varepsilon}^{c} + \int_{d}^{d+\varepsilon}\right) | f(x) | dx$$

由假设,有

$$\int_a^b f(x)\psi_{\varepsilon}(x)\,dx = \varphi_{\varepsilon}(0) = 0$$

故

$$\left|\int_c^d f(x)\psi(x)\,dx\right| \leqslant \max(|\psi(c)|, |\psi(d)|)\left(\int_{c-\varepsilon}^{c} + \int_{d}^{d+\varepsilon}\right) | f(x) | dx$$

由积分的绝对连续性知,当 $\varepsilon \to 0$ **时,右端** $\to 0$**,而左端与** ε **无关,故**

$$\int_c^d f(x)\psi(x)\,dx = 0$$

由第一章推论1.3.6**知,在区间**$[c,d]$**上几乎处处有**$f(x)=0$**,再由**c,d**的任意性知,**$f(x)$**在**$(0,b)$**中几乎处处为零,同理它在**$(a,0)$**中几乎处处为零,从而**

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx = 0$$

对一切$\varphi(x) \in C[a,b]$**成立.如果**$\varphi(0) \neq 0$**,**(3.1.3)**就不可能成立.这个矛盾说明,泛函**(3.1.2)**无法用常义的可积函数来表示.这也进一步说明**$C[a,b]$**上的线性连续泛函除了**$L^1(a,b)$**内函数外还包含其他的"函数".**

上面的分析又进一步表明,作为基本空间上的线性连续泛函可能不是常义函数,这样就真正地把函数概念推广了,而且基本函数空间中的函数性质越好,它上面的线性连续泛函的元素越广泛.

3.1.2 三个基本函数空间

前面说过,定义广义函数的一种途径就是把广义函数作为基本函数空间上的线性连续泛函,下面我们讲三个基本函数空间,即$C_0^{\infty}(\Omega)$**,**$C^{\infty}(\Omega)$**及**$\mathscr{S}(R^n)$**,重点是介绍这些空间的收敛性.**

首先,在空间$C_0^{\infty}(\Omega)$**中引入极限概念.**

定义 3.1.1　若 $\{\varphi_\nu\} \subset C_0$（$\Omega$），且满足

（1）$\operatorname{supp}\varphi_\nu$ 含于一个共同的紧集 $K \subset \Omega$ 内，

（2）对任意重指标 α，在上述紧集内，当 $\nu \to$　时

$$\sup_K |D^\alpha \varphi_\nu| \to 0 \tag{3.1.4}$$

则称在 C_0（Ω）内 $\varphi_\nu \to 0$（$\nu \to$　），记成

$$\varphi_\nu \xrightarrow{C_0(\Omega)} 0 (\nu \to \quad), \quad \text{或 } \varphi_\nu \to 0 (C_0(\Omega))$$

例 3.1.1　设 $j(x)$ 是由（1.3.3）所定义的磨光核，令

$$\varphi_k(x) = j(x_1 - k, x_2, \cdots, x_n)$$

则在任一紧集 $K \subset R^n$ 上，由于当 $k \to$　时 $\operatorname{supp}\varphi_k$ 无限地远离坐标原点，故从某个 k_0 开始，在 K 上 $\varphi_k(x) \equiv 0$，即 $\varphi_k(x)$ 及其各阶导数在 K 上一致地收敛于零（$k \to$　时）. 但因为 $\operatorname{supp}\varphi_k$ 不可能同时被一个有界集所包含，所以按定义 3.1.1，当 $k \to$　时 $\varphi_k(x) \not\to 0$.

注　利用定义 3.1.1 容易证明：若 $u \in C_0$（R^n），则 $u_\varepsilon \to u$（C_0（R^n）），其中 u_ε 是 u 的正则化.

除了 C_0（Ω）外，还有两个重要的基本函数空间 C（Ω）及 $\mathscr{S}$（R^n）. C（Ω）表示 Ω 内所有无限次连续可微函数的全体.

定义 3.1.2　若 $\{\varphi_\nu\} \subset C$（$\Omega$），且对任一紧集 $K \subset \Omega$ 及任意重指标 α，当 $\nu \to$　时有

$$\sup_K |D^\alpha \varphi_\nu| \to 0 \tag{3.1.5}$$

则称 $\{\varphi_\nu\}$ 当 $\nu \to$　时在 C（Ω）内收敛于零，记成

$$\varphi_\nu \xrightarrow{C(\Omega)} 0 \quad (\nu \to \quad), \quad \text{或 } \varphi_\nu \to 0 (C(\Omega))$$

由这个定义可知，例 3.1.1 中的函数列在 C（R^n）中是收敛于零的.

这个极限关系也可以用一族半范数给出，作一系列紧集 $\{K_i\}$，使得

$$K_1 \subset K_2 \subset \cdots \subset K_n \subset \cdots$$

且 $\Omega = \bigcup_{i=1} K_i$，记

$$p_{i,\alpha}(\varphi) = \sup_{K_i} |D^\alpha \varphi| \tag{3.1.6}$$

则 $\varphi_\nu \xrightarrow{C\ \ (\Omega)} 0$ 等价于对任意 i 和 α,$p_{i,\alpha}(\varphi_\nu) \to 0(\nu \to \quad)$.

定义 3.1.3　若 $\varphi \in C\ \ (R^n)$,且对任意非负整数 k 及任意重指标 α,成立

$$\lim_{|x| \to \quad} |(1 + |x|^2)^k D^\alpha \varphi(x)| = 0 \tag{3.1.7}$$

则称 φ 在 R^n 上是速降函数,记作 $\varphi \in \mathscr{S}(R^n)$.

条件(3.1.7)显然与下列两个条件之一是等价的:

(1)对任意非负整数 k 与重指标 α,$(1 + |x|^2)^k D^\alpha \varphi(x)$ 在 R^n 上有界.

(2)对任意重指标 α,β,$x^\beta D^\alpha \varphi(x)$ 在 R^n 上有界.

事实上,由(3.1.7)立即可知 $(1 + |x|^2)^k D^\alpha \varphi(x)$ 在 R^n 上有界. 反之,若对任意非负整数 k 及重指标 α,$(1 + |x|^2)^k D^\alpha \varphi(x)$ 在 R^n 上有界,由于

$$(1 + |x|^2)^k D^\alpha \varphi(x) = \frac{1}{|x|^2} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 (1 + |x|^2)^k D^\alpha \varphi(x)$$

再从 $x_i^2 (1 + |x|^2)^k D^\alpha \varphi(x) \leqslant (1 + |x|^2)^{k+2} D^\alpha \varphi(x)$ 的有界性,即可得则立(3.1.7). 至于(2)只要注意当 $|x| > 1$ 时,有

$$|x|^{2k} < (1 + |x|^2)^k < 2^k |x|^{2k}$$

所以 $x^\beta D^\alpha \varphi(x)$ 在 R^n 上的有界性与 $(1 + |x|^2)^k D^\alpha \varphi(x)$ 在 R^n 上的有界性是等价的.

例 3.1.2　$e^{-|x|^2} \in \mathscr{S}(R^n)$.

事实上,对任意非负整数 k 及重指标 α,$(1 + |x|^2)^k D^\alpha e^{-|x|^2}$ 都是形如 $C_\beta x^\beta e^{-|x|^2}$ 项之和,当 $|x| \to \quad$ 时,$|x|^\beta e^{-|x|^2} \to 0$,所以 $e^{-|x|^2}$ 是速降函数.

例 3.1.3　对 $1 \leqslant p < \quad$,$\mathscr{S}(R^n) \subset L^p(R^n)$.

事实上,设 $\varphi \in \mathscr{S}(R^n)$,则

$$\int_{R^n} |\varphi(x)|^p dx = \int_{R^n} (1 + |x|^2)^{-n-1} (1 + |x|^2)^{n+1} |\varphi(x)|^p dx$$

$$\leqslant \sup_{R^n} (1 + |x|^2)^{n+1} |\varphi(x)|^p \int_{R^n} (1 + |x|^2)^{-n-1} dx <$$

定义 3.1.4　设 $\{\varphi_\nu\} \subset \mathscr{S}(R^n)$,若对任意重指标 α 和 β,成立

$$\sup_{R^n} |x^\beta D^\alpha \varphi_\nu(x)| \to 0, \quad \nu \to \qquad (3.1.8)$$

则称 $\{\varphi_\nu\}$ 在 $\mathscr{S}(R^n)$ 内收敛于零,记成

$$\varphi_\nu \xrightarrow{\mathscr{S}(R^n)} 0(\nu \to \quad), \quad \text{或}\ \varphi_\nu \to 0(\mathscr{S}(R^n))$$

这个极限关系也可以用一族半范数

$$p_{k,\alpha}(\varphi) = \sup_{R^n} \left| (1 + |x|^2)^k D^\alpha \varphi(x) \right| \qquad (3.1.9)$$

给出,即 $\varphi_\nu \xrightarrow{\mathscr{S}(R^n)} 0$ 等价于对任意 k 和 α,$p_{k,\alpha}(\varphi_\nu) \to 0$.

三个基本函数空间有如下的关系:

$$C_0(R^n) \subset \mathscr{S}(R^n) \subset C(R^n) \qquad (3.1.10)$$

并且每一个空间在后一个空间内是稠密的. 要说明这个结论,只要说明 $C_0(R^n)$ 在 $C(R^n)$ 内是稠密的,见下例:

例 3.1.4 设 $R > 1$,$g_R(x)$ 是球 $B_R(0)$ 的特征函数,即

$$g_R(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leqslant R \\ 0, & |x| > R \end{cases}$$

作

$$\beta_R(x) = \int_{|t| \leqslant 1} g_R(x - t) j(t) dt = \int_{|t| \leqslant R} g_R(t) j(x - t) dt$$

其中 $j(x)$ 是磨光核. 容易验证,$\beta_R(x) \in C_0(R^n)$,$\operatorname{supp}\beta_R(x)$ 在 $|x| \leqslant R + 1$ 中,且当 $|x| \leqslant R - 1$ 时 $\beta_R(x) \equiv 1$.

对任一函数 $\varphi \in C(R^n)$,令 $\varphi_\nu(x) = \beta_\nu(x)\varphi(x)$,则 $\varphi_\nu(x) \in C_0(R^n)$,它在 $|x| \leqslant \nu - 1$ 时等于 $\varphi(x)$,在 $|x| > \nu + 1$ 时等于零,并且当 $\nu \to$ 时,在任意固定的紧集上,最终必有 $\varphi_\nu(x) = \varphi(x)$. 所以,$\varphi_\nu(x) \to \varphi(x)(C(R^n))$. 这就说明了 $C_0(R^n)$ 在 $C(R^n)$ 中是稠密的.

在这一小段的最后,我们还要比较(3.1.10)中的三个基本函数空间中收敛性(拓扑)的强弱. 将简要说明,这三个空间的拓扑前一个比后一个强,例如,若有 $\varphi_\nu(x) \in C_0(R^n)$,$\varphi_\nu \to 0(C_0(R^n))$,则所有 φ_ν 的支集含于一个紧集 K 内,且对任意重指标 α,$\sup_K |D^\alpha \varphi| \to 0$,当 $\nu \to$ 时. 由于 K 有界,所

以对任意重指标 α,β 有 $\sup\limits_{K}|x^{\alpha}D^{\beta}\varphi_{\nu}|\to 0(\nu\to\quad)$，但在 K 外，$\varphi_{\nu}\equiv 0$，故上述极限关系可改成 $\sup\limits_{R^n}|x^{\alpha}D^{\beta}\varphi_{\nu}|\to 0(\nu\to\quad)$，这就是 $\varphi_{\nu}\to 0(\mathscr{S}(R^n))$.

类似地可以说明 $\mathscr{S}(R^n)$ 中的收敛性包含了 $C(R^n)$ 中的收敛性.

3.1.3　广义函数空间

现在我们给出广义函数的定义.

定义 3.1.5　我们称 $C_0(R^n)$ 上的线性连续泛函为 $\mathscr{D}'(R^n)$ 广义函数，$\mathscr{S}(R^n)$ 上的线性连续泛函为 $\mathscr{S}'(R^n)$ 广义函数，$C(R^n)$ 上的线性连续泛函为 $\mathscr{E}'(R^n)$ 广义函数，分别简记为 $\mathscr{D}'$，$\mathscr{S}'$，$\mathscr{E}'$ 广义函数. 称它们各自的全体为广义函数空间，记为 $\mathscr{D}'(R^n)$，$\mathscr{S}'(R^n)$ 与 $\mathscr{E}'(R^n)$.

利用(3.1.10)以及前一空间在后一空间中是稠密的，且前一空间的拓扑比后一空间的拓扑强，可以推出

$$\mathscr{D}'(R^n)\supset\mathscr{S}'(R^n)\supset\mathscr{E}'(R^n) \tag{3.1.11}$$

例如，我们来比较 $\mathscr{S}'(R^n)$ 与 $\mathscr{D}'(R^n)$. 若 $T\in\mathscr{S}'(R^n)$，则 T 是定义于 $\mathscr{S}(R^n)$ 上的线性连续泛函，由于 $C_0(R^n)\subset\mathscr{S}(R^n)$，所以对任意 $\varphi\in C_0(R^n)$，$\langle T,\varphi\rangle$ 有意义，并且如果 $\varphi_{\nu}\to 0(C_0(R^n))$，则 $\varphi_{\nu}\to 0(\mathscr{S}(R^n))$，故 $\langle T,\varphi_{\nu}\rangle\to 0$，即 T 关于 $C_0(R^n)$ 的拓扑也是连续的，这样就说明了 $T\in\mathscr{D}'(R^n)$. 下面再说明，$\mathscr{S}'(R^n)$ 一一对应于 $\mathscr{D}'(R^n)$ 的一个子集. 若 $\mathscr{S}'(R^n)$ 中有两个元素对应于 $\mathscr{D}'(R^n)$ 中同一个元素，则 $\mathscr{S}'(R^n)$ 中一定有元素 T 在 $\mathscr{D}'(R^n)$ 中对应于零元素，即对任意 $\varphi\in C_0(R^n)$，$\langle T,\varphi\rangle=0$，但 $C_0(R^n)$ 在 $\mathscr{S}(R^n)$ 中是稠密的，故对任意 $\varphi\in\mathscr{S}(R^n)$，也有 $\langle T,\varphi\rangle=0$，这说明 T 也是 $\mathscr{S}'(R^n)$ 中的零元素，综合上述，$\mathscr{D}'(R^n)\supset\mathscr{S}'(R^n)$. 同理可证 $\mathscr{S}'(R^n)\supset\mathscr{E}'(R^n)$.

注 1　对任意集合 Ω，可类似定义广义函数空间 $\mathscr{D}'(\Omega)$ 与 $\mathscr{E}'(\Omega)$. 但对 $\mathscr{S}$ 与 $\mathscr{S}'$ 来说，必须在 R^n 上讨论.

注 2　由(3.1.10)推出(3.1.11)的过程可以推广到两个一般的矢量空间上，读者可参阅[5].

例 3.1.5　任一局部可积函数都是 $\mathscr{D}'$ 广义函数.

事实上,设 $f(x)$ 为局部可积,则对任意 $\varphi(x) \in C_0$,积分 $\int f(x)\varphi(x)\,dx$ 有意义,于是它就定义了 C_0 上的一个线性泛函 T_f,即 $\langle T_f,\varphi\rangle = \int f(x)\varphi(x)\,dx$. 又当 $\varphi_\nu \to 0(C_0)$ 时,由于 $\mathrm{supp}\varphi_\nu$ 含于某紧集 K 中,故

$$|\langle T_f,\varphi_\nu\rangle| \leqslant \max|\varphi_\nu(x)|\int_K|f(x)|\,dx \to 0 \quad (\nu \to \quad)$$

因此 T_f 是连续的,即 $T_f \in \mathscr{D}'$,这就说明了,任意 $f \in L^1_{loc}$ 惟一地确定 $T_f \in \mathscr{D}'$,同时还可以说明 T_f 也惟一地对应一个 $f \in L^1_{loc}$,即 f 与 T_f 是一一对应的,以后对 T_f 与 f 就不加区别,视为同一个元素.

例 3.1.6　若 $0 \in \Omega$,按 $\langle T,\varphi\rangle = \varphi(0)$ 定义的 $C_0(\Omega)$ 上的线性泛函,称为 δ 函数,即

$$\langle \delta,\varphi\rangle = \varphi(0)$$

显然,按 C_0 ,$\mathscr{S}$,C　的拓扑来说,δ 函数都是连续的,所以 δ 函数是 $\mathscr{D}'$,$\mathscr{S}'$ 与 $\mathscr{E}'$ 广义函数.

3.2　广义函数的性质与运算

在这一节我们来讨论广义函数的一些主要性质及运算.

3.2.1　广义函数的支集

对于一个连续函数 $f(x)$,它在特定点 x_0 的取值是有确切意义的,但对于一个 Lebesgue 可积函数,它在零测度的集合上的取值可以任意改变,因此,说及它在点 x_0 的取值,其意义就不明确. 对于广义函数来说,一般也不能说它在一特定点的取值,但是它在一个开子集上的值却是有确切意义的. 事实上,对任意 $T \in \mathscr{D}'(\Omega)$,若 $\Omega_1 \subset \Omega$,则对一切 $\varphi \in C_0(\Omega_1)$,$\langle T,\varphi\rangle$ 有意义,而且 T 也是 $C_0(\Omega_1)$ 上的线性连续泛函. 这样就从 T 诱导出了一个 $\mathscr{D}'(\Omega_1)$ 广义函数,它就是 T 在 Ω_1 上的限制,记成 $T\big|_{\Omega_1}$.

定义 3.2.1　**设** $T \in \mathscr{D}'(\Omega)$,$\Omega_1 \subset \Omega$,**若对任意** $\varphi \in C_0(\Omega_1)$ **均成立**

$$\langle T,\varphi\rangle = 0 \tag{3.2.1}$$

则称 T **在** Ω_1 **中为零,或者说** T **在** Ω_1 **中取零值**.

设 $T_1, T_2 \in \mathscr{D}'(\Omega)$,**如果在** Ω_1 **上** $T_1 - T_2$ **取零值,则称** T_1 **与** T_2 **在** Ω_1 **中相等**. **于是,一个广义函数可以在** R^n **的某个开子集上等于一个常义函数,甚至是** C　**函数,例如,**δ**函数仅在含有原点的开集内是"广义"的,而在不含原点的任一开集上取零值**.

定理 3.2.1　**设** $T \in \mathscr{D}'(\Omega)$,**若对于任一点** $x_0 \in \Omega$,**均有** x_0 **的邻域** O_{x_0} **使** T **在** O_{x_0} **上取零值,则在整个** Ω **内** $T \equiv 0$.

证明　**问题在于证明,对任意** $\varphi \in C_0(\Omega)$,**有**$\langle T,\varphi\rangle = 0$.

对任意 $\varphi \in C_0(\Omega)$,**记** $K = \mathrm{supp}\varphi$,K**为紧集,对** Ω **中每一点** x_0 **可作** O_{x_0},**使在其中** $T = 0$,**这种** O_{x_0} **的全体构成了** K **的一个开覆盖,故必存在有限开覆盖** $O_{x_1},\cdots,O_{x_n}$. **由第一章单位分解定理** 1.4.1 **知,存在** $\varphi_i \in C_0(O_{x_i})$ $(i = 1, 2,\cdots,n)$,**使得** $\sum_{i=1}^{n} \varphi_i(x) = 1$. **于是**

$$\varphi(x) = \sum_{i=1} \varphi_i(x)\varphi(x)$$

且

$$\varphi_i\varphi \in C_0(O_{x_i})$$

从而由定义 3.2.1 **得**

$$\langle T,\varphi\rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle T,\varphi\varphi_i\rangle = 0$$

即 T **在** Ω **内恒等于零**.

定义 3.2.2　**使广义函数** T **取零值的最大开集的余集称为** T **的支集,记作** suppT.

由定义易知,若 $T \in \mathscr{D}'(\Omega)$,$\varphi \in C_0(\Omega)$ **且**

$$\mathrm{supp}T \cap \mathrm{supp}\varphi =$$

则$\langle T,\varphi\rangle = 0$.

$\zeta(x)\equiv 1$. 对任意 $\varphi\in\mathscr{E}(\Omega)$，定义 $\mathscr{E}(\Omega)$ 上的泛函 $\bar{T}$ 为

$$\langle\bar{T},\varphi\rangle=\langle T,\zeta\varphi\rangle$$

这个定义与 ζ 的具体选法无关. 事实上，若 $\eta(x)\in C_0(\Omega_1)$，且在 K 的某邻域上 $\eta(x)\equiv 1$，则对任意 $\varphi\in\mathscr{E}(\Omega)$，都有 $\zeta\varphi-\eta\varphi\equiv 0$(在 K 的某个邻域上)，于是

$$\langle T,\zeta\varphi-\eta\varphi\rangle=0$$

从而 $\langle T,\zeta\varphi\rangle=\langle T,\eta\varphi\rangle$.

显然，$\bar{T}$ 是 $\mathscr{E}(\Omega)$ 上的线性泛函，而且还是连续的，因为假若 $\varphi_j\to 0$(在 $\mathscr{E}(\Omega)$ 中)，记 $E=\mathrm{supp}\zeta$，则

$$\mathrm{supp}\zeta\varphi_j\subset E\quad(j=1,2,\cdots)$$

且对任意重指标 α，$\{D^\alpha\varphi_j(x)\}$ 在 E 上一致收敛于 0，于是 $\zeta\varphi_j\to 0$(在 $\mathscr{D}(\Omega)$ 中)，故

$$\langle\bar{T},\varphi_j\rangle=\langle T,\zeta\varphi_j\rangle\to 0$$

即 $\bar{T}\in\mathscr{E}'(\Omega)$. 由于 $\bar{T}$ 是 T 从 $\mathscr{D}(\Omega)$ 到 $\mathscr{E}(\Omega)$ 上的惟一扩张，且在 K 的某领域内 $T=\bar{T}$，而在 K 外 $T\equiv 0$，所以 $T\in\mathscr{E}'(\Omega)$.

3.2.2　广义函数的极限

对于广义函数也可以引入收敛与极限的概念.

定义 3.2.3　若 $\mathscr{D}'(\Omega)$ 中的广义函数列 $\{T_k\}$ 对任意 $\varphi\in C_0(\Omega)$ 均成立

$$\langle T_k,\varphi\rangle\to 0\quad(k\to\ \ )$$

则称 $\{T_k\}$ 收敛于 0，若 $\{T_k\}\subset\mathscr{D}'(\Omega)$，$T\in\mathscr{D}'(\Omega)$ 且 T_k-T 收敛于 0，则称 T_k 收敛于 T，记为

$$T_k\to T\quad(\text{在 }\mathscr{D}'(\Omega)\text{ 中})$$

例 3.2.2　设

$$\delta_h(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{h}, & |x|\leqslant\dfrac{h}{2}\\ 0, & \text{其他}\end{cases}\tag{3.2.4}$$

则当 $h\to 0$ 时 $\delta_h\to\delta$ （在 $\mathscr{D}'(R)$ 中）.

事实上，利用积分中值定理知，对任意 $\varphi\in C_0(R)$，有

$$\int_{-}^{+}\delta_h(x)\varphi(x)\,dx=\frac{1}{h}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\varphi(x)\,dx=\varphi(\xi),\quad \xi\in\left(-\frac{h}{2},\frac{h}{2}\right)$$

当 $h\to 0$ 时 $\varphi(\xi)\to\varphi(0)$，故

$$\lim_{h\to 0}\langle\delta_h,\varphi\rangle=\varphi(0)=\langle\delta,\varphi\rangle$$

即 $\delta_h\to\delta$（在 $\mathscr{D}'(R)$ 中）. 这说明 δ 函数可以看作由(3.2.4)所定义的常义函数列在 $\mathscr{D}'(R)$ 中的极限.

例 3.2.3　设 $j_\varepsilon(x)$ 是 1.3 节中所定义的磨光核，则当 $\varepsilon\to 0$ 时，有

$$j_\varepsilon\to\delta\quad（在\ \mathscr{D}'(R^n)\ 中）$$

事实上，对任意 $\varphi\in C_0(R^n)$，当 $\varepsilon\to 0$ 时，有

$$\begin{aligned}\langle j_\varepsilon,\varphi\rangle&=\int_{R^n}j_\varepsilon(x)\varphi(x)\,dx=\varepsilon^{-n}\int_{|x|\leqslant\varepsilon}j\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\varphi(x)\,dx\\&=\int_{|y|\leqslant 1}j(y)\varphi(\varepsilon y)\,dy\to\varphi(0)\int_{|y|\leqslant 1}j(y)\,dy=\varphi(0)\\&=\langle\delta,\varphi\rangle\end{aligned}$$

故 $j_\varepsilon\to\delta$（在 $\mathscr{D}'(R^n)$ 中）.

例 3.2.4　设 $f_\nu(x)=\dfrac{1}{\pi}\dfrac{\sin\nu x}{x}$，则当 $\nu\to$ 　，有

$$f_\nu\to\delta\quad（在\ \mathscr{D}'(R)\ 中）$$

事实上，由 Riemann-Lebesgue 引理，对任意 $\varphi\in C_0(R)$，当 $\nu\to$ 　时有

$$\begin{aligned}\langle f_\nu,\varphi\rangle&=\frac{1}{\pi}\int_{-}\frac{\sin\nu x}{x}\varphi(x)\,dx\to\varphi(0)\frac{1}{\pi}\int_{-}\frac{\sin\nu x}{x}dx\\&=\varphi(0)=\langle\delta,\varphi\rangle\quad\left(这里利用了\frac{1}{\pi}\int_{-}\frac{\sin\nu x}{x}dx=1\right)\end{aligned}$$

故 $f_\nu\to\delta$（在 $\mathscr{D}'(R)$ 中）.

广义函数也可以进行正则化，即广义函数通过磨光后即得到 C 　函数.

定理3.2.3　若 $T\in\mathscr{D}'(R^n_y)$，则当 x 视为参变量时，$\langle T,j_\varepsilon(x-y)\rangle_y$ 是 R^n_x 中的 C 　函数，其中 $j_\varepsilon(x)$ 是磨光核，$\langle\cdot,\cdot\rangle_y$ 表示对 y 求对偶积.

证明 令

$$T_\varepsilon(x) = \langle T, j_\varepsilon(x-y)\rangle_y \tag{3.2.5}$$

下面要证 $T_\varepsilon(x) \in C\ (R^n)$. 因对任意固定的 x, $j_\varepsilon(x-y) \in C_0\ (R_y^n)$,故 $\langle T, j_\varepsilon(x-y)\rangle_y$ 是有意义的. 又当 $x \to x_0$ 时,可以使 $j_\varepsilon(x-y)$ 的支集都落在一个固定的紧集 K 中(例如取 $K = \overline{B_{2\varepsilon}(x_0)}$),且在 K 中当 $x \to x_0$ 时,$j_\varepsilon(x-y)$ 的对 y 的各阶导数都一致地收敛于 $j_\varepsilon(x_0-y)$ 的相应阶导数,故当 $x \to x_0$ 时

$$j_\varepsilon(x-y) \to j_\varepsilon(x_0-y) \quad (C_0\ (R_y^n))$$

由此得

$$\langle T, j_\varepsilon(x-y)\rangle_y \to \langle T, j_\varepsilon(x_0-y)\rangle_y \tag{3.2.6}$$

即 $T_\varepsilon(x)$ 是 x 的连续函数. 下面再说明它是 C 函数.

以 $\Delta_k x$ 表示 x 在 x_k 方向的增量,作差商

$$\frac{T_\varepsilon(x+\Delta_k x) - T_\varepsilon(x)}{\Delta_k x} = \frac{\langle T, j_\varepsilon(x+\Delta_k x-y) - j_\varepsilon(x-y)\rangle_y}{\Delta_k x}$$

$$= \left\langle T, \frac{j_\varepsilon(x+\Delta_k x-y) - j_\varepsilon(x-y)}{\Delta_k x}\right\rangle_y$$

当 $\Delta_k x \to 0$ 时

$$\frac{j_\varepsilon(x+\Delta_k x-y) - j_\varepsilon(x-y)}{\Delta_k x} \to D_{x_k} j_\varepsilon(x-y) \quad (C_0\ (R_y^n))$$

故

$$\frac{T_\varepsilon(x+\Delta_k x) - T_\varepsilon(x)}{\Delta_k x} \to \langle T, D_{x_k} j_\varepsilon(x-y)\rangle_y$$

即 T_ε 关于 x_k 是可导的. 类似地可证 $T_\varepsilon(x) \in C\ (R_x^n)$.

注 如果 $T \in \mathscr{E}'(R_y^n)$,则 $T_\varepsilon(x) = \langle T, j_\varepsilon(x-y)\rangle_y \in C_0\ (R_x^n)$ 且

$$\mathrm{supp}T_\varepsilon \subset \mathrm{supp}T + \{x \mid |x| \leqslant \varepsilon\} = \mathrm{supp}T + O_\varepsilon$$

这个事实是容易理解的①.

广义函数的正则化序列也收敛于原广义函数.

定理 3.2.4 设 $T\in\mathscr{D}'(R^n)$，则 $T_\varepsilon\to T$（在 $\mathscr{D}'(R^n)$ 中），其中 T_ε 由(3.2.5)确定.

证明 只要证明，对任意 $\varphi\in C_0(R^n)$ 成立

$$\langle T_\varepsilon,\varphi\rangle\to\langle T,\varphi\rangle\quad(\varepsilon\to 0)$$

由于 T_ε 为 C 函数，故 $\langle T_\varepsilon,\varphi\rangle$ 可以用积分来表示，即

$$\begin{aligned}\langle T_\varepsilon,\varphi\rangle &= \int_{R^n}\langle T, j_\varepsilon(x-y)\rangle_y\,\varphi(x)\,dx\\ &= \lim_{\max|\Delta_i|\to 0}\sum_i\langle T, j_\varepsilon(x_i-y)\rangle_y\,\varphi(x_i)\Delta_i\\ &= \lim_{\max|\Delta_i|\to 0}\langle T,\sum_i j_\varepsilon(x_i-y)\varphi(x_i)\Delta_i\rangle_y\end{aligned}$$

记 $K=\mathrm{supp}\varphi$，则 $\mathrm{supp}j_\varepsilon(x_i-y)\varphi(x_i)\subset K+O_\varepsilon\equiv\{x\,|\,x=x'+x'',x'\in K,|x''|\leqslant\varepsilon\}$，从而 $\sum_i j_\varepsilon(x_i-y)\varphi(x_i)$ 也如此. 当 $\max|\Delta_i|\to 0$ 时，不仅

$$\lim_{\max|\Delta_i|\to 0}\sum_i j_\varepsilon(x_i-y)\varphi(x_i)\Delta_i=\int_{R^n}j_\varepsilon(x-y)\varphi(x)\,dx$$

而且 $\sum_j j_\varepsilon(x_i-y)\varphi(x_i)\Delta_i$ 的各阶导数也收敛于 $\int_{R^n}j_\varepsilon(x-y)\varphi(x)\,dx$ 的相应阶导数. 这就证明了

$$\sum_i j_\varepsilon(x_i-y)\varphi(x_i)\Delta_i\to\int_{R^n}j_\varepsilon(x-y)\varphi(x)\,dx\quad(C_0(R^n_y))$$

于是对任意 $\varphi\in C_0(R^n)$ 有

$$\langle T_\varepsilon,\varphi\rangle=\langle T,\int_{R^n}j_\varepsilon(x-y)\varphi(x)\,dx\rangle=\langle T,\varphi_\varepsilon\rangle$$

---

① 当 $x\,\overline{\in}\,\mathrm{supp}T+O_\varepsilon$ 时，$j_\varepsilon(x-y)$ 作为 y 函数的支集与 suppT 不相交，若不然，$\exists y_0$：$y_0\in\mathrm{supp}T$，$j_\varepsilon(x-y_0)\neq 0\Rightarrow y_0\in K$，$|x-y_0|\leqslant\varepsilon\Rightarrow x=y_0+x'$，$x'\in O_\varepsilon$，即 $x\in\mathrm{supp}T+O_\varepsilon$. 既然 $\mathrm{supp}T\cap\mathrm{supp}j_\varepsilon=\varnothing\Rightarrow T_\varepsilon(x)=0$.

但由定义 3.1.1 后的注知,当 $\varepsilon \to 0$ 时 $\varphi_\varepsilon \to \varphi(C_0(R^n))$,故

$$\langle T_\varepsilon, \varphi \rangle \to \langle T, \varphi \rangle$$

对任意 $\varphi \in C_0(R^n)$ 成立.

注 从上面证明过程中我们得到:对任意 $T \in \mathscr{D}'(R^n)$,$\varphi \in C_0(R^n)$,有$\langle T_\varepsilon, \varphi \rangle = \langle T, \varphi_\varepsilon \rangle$,这个等式是证明的关键.

这个定理说明 $C\ (R^n)$ 在 $\mathscr{D}'(R^n)$ 中是稠密的,或者说 $\mathscr{D}'(R^n)$ 广义函数可以作为 $C\ (R^n)$ 中序列的弱极限(即在 $\mathscr{D}'(R^n)$ 意义下的极限).

推论 3.2.5 当 $T \in \mathscr{E}'(R^n)$ 时,$T_\varepsilon \to T(\mathscr{E}'(R^n))$.

事实上,定理 3.2.3 的注说明,$T_\varepsilon \in C_0(R^n)$. 作

$$\zeta(x) = \begin{cases} 1, & x \in K + O_{1/2} \\ 0, & x \notin K + O_1 \end{cases}$$

其中 $K = \mathrm{supp}T$,对任意 $\varphi \in C\ (R^n)$,由定理 3.2.4 知$\langle T_\varepsilon, \zeta\varphi \rangle \to \langle T, \zeta\varphi \rangle$,只要 $\varepsilon < \dfrac{1}{2}$,在 T, T_ε 的支集中 $\zeta\varphi \equiv \varphi$,故$\langle T_\varepsilon, \varphi \rangle \to \langle T, \varphi \rangle$.

这个推论说明 $C_0(R^n)$ 在 $\mathscr{E}'(R^n)$ 中是稠密的.

3.2.3 广义函数的导数

在 2.1 节中,我们给出了局部可积函数的弱导数的定义,完全类似地可以定义广义函数的导数.

定义 3.2.4 设 $T \in \mathscr{D}'(\Omega)$,T 对 $x_k(k = 1, 2, \cdots, n)$ 的偏导数为广义函数$\dfrac{\partial T}{\partial x_k}$,它由下式定义

$$\left\langle \frac{\partial T}{\partial x_k}, \varphi \right\rangle = -\left\langle T, \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \right\rangle, \quad \text{对任意 } \varphi \in C_0(\Omega) \tag{3.2.7}$$

由 $C_0(\Omega)$ 的极限关系可知,若 $\varphi_\nu \to 0(C_0(\Omega))$,则$\dfrac{\partial \varphi}{\partial x_k} \to 0(C_0(\Omega))$,从而

$$\left\langle \frac{\partial T}{\partial x_k}, \varphi_\nu \right\rangle = -\left\langle T, \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \right\rangle \to 0 \quad (k \to \quad)$$

故$\dfrac{\partial T}{\partial x_k}$ 确实是 $C_0(\Omega)$ 上的线性连续泛函,即$\dfrac{\partial T}{\partial x_k} \in \mathscr{D}'(\Omega)$.

完全类似地可以定义 $D^\alpha T$ 为

$$\langle D^\alpha T,\varphi\rangle = (-1)^{|\alpha|}\langle T, D^\alpha\varphi\rangle, \quad 对任意\ \varphi \in C_0(\Omega) \quad (3.2.8)$$

其中 α 为任意重指标.

从定义立即可知：

(1) 广义函数存在任意阶导数；

(2) 广义函数的导数与求导次序无关，例如二阶导数有

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 T}{\partial x_j \partial x_i}$$

例 3.2.5 求 Heaviside 函数

$$H(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

的导数.

对任意 $\varphi \in C_0(R)$ 有

$$\langle \frac{dH}{dx},\varphi\rangle = -\langle H,\frac{d\varphi}{dx}\rangle = -\int_0 \frac{d\varphi}{dx}dx$$

$$= \varphi(0) = \langle\delta,\varphi\rangle$$

故

$$\frac{dH(x)}{dx} = \delta(x)$$

例 3.2.6 设 $u \in L^1_{loc}(R)$，在原点 O，$u(x)$ 有阶跃

$$\sigma = \lim_{x\to 0^+} u(x) - \lim_{x\to 0^-} u(x)$$

在其余点是连续可微的. 以 $\frac{du}{dx}$ 表示 u 的广义导数（弱导数），v 表示 u 除原点以外的普通导数，且设 $v \in L^1_{loc}(R)$，以 $\left\{\frac{du}{dx}\right\}$ 表示 v 所对应的广义函数（见例 3.1.5），则

$$\frac{du}{dx} = \sigma\delta(x) + \left\{\frac{du}{dx}\right\}$$

事实上，对任意 $\varphi \in C_0(R)$，有

$$\left\langle \frac{du}{dx},\varphi \right\rangle = -\left\langle u,\frac{d\varphi}{dx}\right\rangle = -\int_{-} u\frac{d\varphi}{dx}dx = -\int_{-}^{0} u\frac{d\varphi}{dx}dx - \int_{0} u\frac{d\varphi}{dx}dx$$

$$= -\varphi(0)\lim_{x\to 0^-} u(x) + \varphi(0)\lim_{x\to 0^+} u(x) + \int_{-}^{0}\varphi\frac{du}{dx}dx + \int_{0}\varphi\frac{du}{dx}dx$$

$$= \varphi(0)\sigma + \int_{-}\varphi v dx = \sigma\langle\delta,\varphi\rangle + \left\langle\left\{\frac{du}{dx}\right\},\varphi\right\rangle$$

故

$$\frac{du}{dx} = \sigma\delta + \left\{\frac{du}{dx}\right\}$$

3.2.4 广义函数的乘子

定义 3.2.5 **设** $T\in\mathscr{D}'(\Omega)$,$\psi\in C\ (\Omega)$,**则对任意** $\varphi\in C_0\ (\Omega)$,**由**

$$\langle\psi T,\varphi\rangle = \langle T,\psi\varphi\rangle \tag{3.2.9}$$

所确定的广义函数 ψT **称为** ψ **与** T **的乘积,而** ψ **称为广义函数空间** $\mathscr{D}'(\Omega)$ **的乘子.**

一般情况,设 E **是一个定义了拓扑的线性空间,如果函数** a **满足:**

(1) **若** $f\in E$,**则** $af\in E$,

(2) **若** $\varphi_i\to 0(E)$,**则** $a\varphi_i\to 0(E)$,

则称 a **是** E **的乘子,**E **的所有乘子的全体称为** E **的乘子空间. 由上面的定义** 3.2.5 **可知,**$\mathscr{D}'(\Omega)$ **的乘子空间是** $\mathscr{E}(\Omega)$. **同理,**$\mathscr{E}'(\Omega)$ **的乘子空间也是** $\mathscr{E}(\Omega)$. **但是,对于**$\mathscr{S}'(R^n)$**来说,并非每一个**$C\ (R^n)$**函数都是它的乘子.**

例 3.2.7 $e^{|x|^2}$ **不是** $\mathscr{S}'(R^n)$ **乘子.**

事实上,$e^{-|x|^2/2}\in\mathscr{S}(R^n)$,**但** $e^{|x|^2}\cdot e^{-|x|^2/2} = e^{|x|^2/2}\overline{\in}\mathscr{S}(R^n)$,**故** $e^{|x|^2}$ **不能作为** $\mathscr{S}'(R^n)$ **的乘子.**

试问 对于 $C\ (R^n)$ **函数加上什么条件才能使它成为** $\mathscr{S}'(R^n)$ **广义函数的乘子呢?**

我们知道,函数 $\varphi\in\mathscr{S}(R^n)$ **的充要条件是,对任意非负整数** k **和任意重指标** α,**有**

$$\lim_{|x|\to}\left|(1+|x|^2)^k D^\alpha\varphi(x)\right| = 0$$

因此,对函数 $a(x)\in C\ (R^n)$ 和 $\varphi(x)\in\mathscr{S}(R^n)$,要想 $a\varphi\in\mathscr{S}(R^n)$,只需对任意重指标 α,存在非负的整数 m_α,使得

$$\lim_{|x|\to}\left|(1+|x|^2)^{-m_\alpha}D^\alpha a(x)\right|=0 \tag{3.2.10}$$

条件(3.2.10)等价于,对任意重指标 α,存在非负整数 m_α,使得

$$\left|(1+|x|^2)^{-m_\alpha}D^\alpha a(x)\right|\text{在 }R^n\text{ 上有界} \tag{3.2.11}$$

满足(3.2.10)或(3.2.11)的函数称为缓增的 $C\ (R^n)$ 函数. 缓增 C 函数的全体记成 O_M,即 $O_M=\left\{f\in C\ (R^n)\ \middle|\ \text{对任意重指标}\alpha\text{,存在 }C_\alpha\text{ 与 }m_\alpha\text{,使得}\left|D^\alpha f(x)\right|\leqslant C_\alpha(1+|x|^2)^{m_\alpha}\right\}$. 至此,我们已经证明了 缓增的 $C\ (R^n)$ 函数是 $\mathscr{S}'(R^n)$ 广义函数的乘子,例如所有多项式都是 $\mathscr{S}'(R^n)$ 的乘子.

对于连续函数 $f(x)$,如果存在非负整数 m,使得

$$\left|(1+|x|^2)^{-m}f(x)\right|\leqslant C\quad(C\text{ 为常数}) \tag{3.2.12}$$

则称 $f(x)$ 在 R^n 上是缓增的连续函数. 可以证明以下两个结论.

(1) 每个缓增的连续函数都是 $\mathscr{S}'(R^n)$ 广义函数.

事实上,设 f 是一个缓增连续函数,则存在非负整数 m,使(3.2.12)成立,对任意 $\varphi\in\mathscr{S}\ (R^n)$,定义

$$\langle f,\varphi\rangle=\int_{R^n}f(x)\varphi(x)\,dx$$

若 $\varphi_k\to 0$(在 $\mathscr{S}\ (R^n)$ 中),则当 $k\to$ 时

$$\begin{aligned}
|\langle f,\varphi_k\rangle|&\leqslant\int_{R^n}|f(x)|\cdot|\varphi_k(x)|\,dx\\
&=\int_{R^n}(1+|x|^2)^{-m}|f(x)|\cdot(1+|x|^2)^{m}|\varphi_k(x)|\,dx\\
&\leqslant C\int_{R^n}(1+|x|^2)^{m}|\varphi_k(x)|\,dx\\
&\leqslant C\sup_{R^n}\left|(1+|x|^2)^{m+n}\varphi_k(x)\right|\int_{R^n}(1+|x|^2)^{-n}dx\to 0
\end{aligned}$$

因此,$f\in\mathscr{S}'(R^n)$.

(2) 每个 $\mathscr{S}'(R^n)$ 广义函数必是一个缓增连续函数的某阶导数. 证明可参阅[5].

结论(2)深刻地刻画了 $\mathscr{S}'(R^n)$ 广义函数的特征,所以有时也称 $\mathscr{S}'$ 广义函数为缓增广义函数.

3.2.5 广义函数的自变量变换

设 $\Omega_x \subset R_x^n$, $O_y \subset R_y^n$ 均是开集, ψ 是 $\Omega_x \to O_y$ 的 C^∞ 微分同胚(即 ψ 及其逆 ψ^{-1} 是无穷次可微的一一映射),现在的问题是:如果 $v \in \mathscr{D}'(O_y)$,要问 $u = v\circ\psi = v(\psi)(x)$ 是不是 $\mathscr{D}'(\Omega_x)$ 广义函数?为了回答这个问题,我们先看常义函数的情形.

设 $v \in L^1(O_y)$,则 $u = v\circ\psi \in L^1(\Omega_x)$,且对任意 $\varphi \in C_0^\infty(\Omega_x)$,有

$$\langle u, \varphi\rangle = \int_{\Omega_x} v(\psi(x))\varphi(x)\,dx = \int_{O_y} v(y)\varphi(\psi^{-1}(y))\det\left|\frac{Dx}{Dy}\right|dy$$

$$= \langle v, (\varphi\circ\psi^{-1})\det\frac{Dx}{Dy}\rangle \tag{3.2.13}$$

对于广义函数 $v \in \mathscr{D}'(O_y)$,我们就以(3.2.13)来定义 Ω_x 上的广义函数 $u = v\circ\psi$,并将 u 记成 $u = v^*$,这样的定义是否合理?对任意 $\varphi \in C_0^\infty(\Omega_x)$, $(\varphi\circ\psi^{-1})\det\left|\frac{Dx}{Dy}\right| \in C_0^\infty(O_y)$,并且当 $\varphi_n \to 0(C_0^\infty(\Omega_x))$ 时也有

$$(\varphi_n\circ\psi^{-1})\det\left|\frac{Dx}{Dy}\right| \to 0 \quad (C_0^\infty(O_y))$$

所以 $u \in \mathscr{D}'(\Omega_x)$. 这样一来,我们就由一个广义函数经过 C^∞ 可逆的自变量变换后得到一个新的广义函数. 以后为了方便,记 $\varphi\circ\psi^{-1} = \varphi(\psi^{-1}(y)) = \varphi_*(y)$,则定义(3.2.13)可写成对任意 $\varphi \in C_0^\infty(\Omega_x)$,有

$$\langle v^*, \varphi\rangle = \langle v, \varphi_*\det\left|\frac{Dx}{Dy}\right|\rangle$$

特别是,当自变量变换是线性变换时, $\det\left|\frac{Dx}{Dy}\right| = D$ 是常数,则有

$$\langle v^*, \varphi\rangle = \langle v, \varphi_* D\rangle \quad (\text{对任意 } \varphi \in C_0^\infty(\Omega_x)) \tag{3.2.14}$$

例 3.2.8 δ **函数在正交变换下不变.**

事实上,当 $y = \psi(x)$ **是正交变换时,**$\det\left|\frac{Dx}{Dy}\right| = 1$**,故对任意** $\varphi \in C_0(\Omega_x)$**,有**

$$\langle \delta_x^*, \varphi \rangle = \langle \delta_y, \varphi_* \rangle = \varphi_*(0) = \varphi(\psi^{-1}(0)) = \varphi(0) = \langle \delta_x, \varphi \rangle$$

即 $\delta_x^* = \delta_x$.

若 $x, y \in R^n$**,变换为** $y = x - h$**,并记** $\tau_h\varphi(x) = \varphi(x+h)$**,则对任意** $T \in \mathscr{D}'(R^n)$**,**$\varphi \in C_0(R^n)$**,有**

$$\langle T^*, \varphi \rangle = \langle T, \tau_h\varphi \rangle \tag{3.2.15}$$

当 T **为常义函数时,**$T^* = T(x-h) = \tau_{-h}T$**,即** T **的自变量平移了** $-h$**,后面将** τ_h **称与平移算子,所以**(3.2.15)**也可表示为**

$$\langle \tau_{-h}T, \varphi \rangle = \langle T, \tau_h\varphi \rangle \quad (\text{对任意 } \varphi \in C_0(R^n))$$

例 3.2.9 **对于** $\mathscr{D}', \mathscr{S}', \mathscr{E}'$ **广义函数来说,求导算子与平移算子可以交换. 事实上,若** T **为广义函数,**φ **为基本函数空间的任一函数,则**

$$\begin{aligned}\langle \tau_{-h}D_kT, \varphi \rangle &= \langle D_kT, \tau_h\varphi \rangle = -\langle T, D_k\tau_h\varphi \rangle \\ &= -\langle T, \tau_hD_k\varphi \rangle = -\langle \tau_{-h}T, D_k\varphi \rangle = \langle D_k\tau_{-h}T, \varphi \rangle\end{aligned}$$

3.3 广义函数的 Fourier 变换

Fourier **变换是古典分析与近代分析的最有效的工具之一,对广义函数亦是如此. 在这一节内,我们将研究广义函数的** Fourier **变换.**

3.3.1 急减函数的 Fourier 变换

例 3.1.3 **说明** $\mathscr{S}(R^n) \subset L^p(R^n)$**,其中** $1 \leqslant p <$ **,因此可以对** $\mathscr{S}(R^n)$ **中的函数定义** Fourier **变换.**

定义 3.3.1 **设** $f \in \mathscr{S}(R^n)$**,则** f **的** Fourier **变换为**

$$f(\xi) = \int_{R^n} e^{-ix\cdot\xi} f(x)\,dx \tag{3.3.1}$$

其中 $x\cdot\xi=\sum_{i=1}^{n}x_i\xi_i$. 有时也将 f 的 Fourier 变换记成 $F(f)$.

若 $g\in\mathscr{S}(R^n_\xi)$, g 的 Fourier 逆变换为

$$\check{g}(x)=(2\pi)^{-n}\int_{R^n}e^{ix\cdot\xi}g(\xi)d\xi \tag{3.3.2}$$

g 的 Fourier 逆变换也记成 $F^{-1}(g)$.

根据 Fourier 变换的定义很容易得以下的性质：

(1) 若 $f\in\mathscr{S}(R^n)$, 则

$$(\widehat{x_jf})(\xi)=iD_j\hat{f}(\xi),\qquad (\widehat{x^\alpha f})(\xi)=(iD)^\alpha\hat{f}(\xi)=i^{|\alpha|}D^\alpha\hat{f}(\xi)$$

$$(\widehat{D_jf})(\xi)=i\xi_j\hat{f}(\xi),\qquad (\widehat{D^\alpha f})(\xi)=i^{|\alpha|}\xi^\alpha\hat{f}(\xi) \tag{3.3.3}$$

有些书内,为了消除上面各式右端中含有 i 的因子,用 $\frac{1}{i}D_j$ 来代替这里的 D_j,请读者留意.

例 3.3.1　证明 $F(e^{-\frac{|x|^2}{2}})=(2\pi)^{\frac{n}{2}}e^{-\frac{|\xi|^2}{2}}$.

证明　当 $n=1$ 时,令 $f(x)=e^{-\frac{x^2}{2}}$,则

$$f'(x)+xf(x)=0,\quad f(0)=1 \tag{3.3.4}$$

在方程两端求 Fourier 变换,并利用(3.3.3)得

$$i\xi\hat{f}(\xi)+i(\hat{f}(\xi))'=0$$

即

$$\xi\hat{f}(\xi)+\hat{f}'(\xi)=0$$

又

$$\hat{f}(0)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{x^2}{2}}dx=\sqrt{2\pi}$$

故

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\hat{f}(\xi)\right)'+\xi\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\hat{f}(\xi)\right)=0,\quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\hat{f}(0)=1 \tag{3.3.5}$$

比较(3.3.4)与(3.3.5)知, f 与 $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\hat{f}$ 满足同一个微分方程和相同的初值,

由常微分方程解的惟一性知

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}f(\xi)=e^{-\frac{|\xi|^2}{2}}$$

即

$$f(\xi)=\sqrt{2\pi}e^{-\frac{|\xi|^2}{2}}$$

当 $x,\xi\in R^n$ 时，

$$F(e^{-|x|^2/2})=\int_{R^n}e^{-ix\cdot\xi}e^{-|x|^2/2}dx=\prod_{j=1}^{n}\int_{R^n}e^{-ix_j\xi_j}e^{-x_j^2/2}dx_j$$

$$=(2\pi)^{n/2}\prod_{j=1}^{n}e^{-\xi_j^2/2}=(2\pi)^{n/2}e^{-|\xi|^2/2}$$

（2）对任意 $f\in\mathscr{S}(R^n)$，

$$f=F^{-1}[F(f)] \tag{3.3.6}$$

事实上，设 $\varphi,f\in\mathscr{S}(R^n)$，对任意 $\varepsilon>0$，利用变量替换和 Fubini 定理，得

$$\int_{R^n}\varphi(\varepsilon\xi)f(\xi)e^{ix\cdot\xi}d\xi=\int_{R^n}\varphi(\varepsilon\xi)e^{ix\cdot\xi}\left[\int_{R^n}e^{-iy\cdot\xi}f(y)dy\right]d\xi$$

$$=\int_{R^n}f(y)dy\int_{R^n}\varphi(\varepsilon\xi)e^{-i\xi\cdot(y-x)}d\xi$$

$$=\varepsilon^{-n}\int_{R^n}f(y)dy\int_{R^n}\varphi(\eta)e^{-i\eta\cdot(y-x)/\varepsilon}d\eta$$

$$=\varepsilon^{-n}\int_{R^n}f(y)\varphi\left(\frac{y-x}{\varepsilon}\right)dy=\int_{R^n}\varphi(y)f(x+\varepsilon y)dy \tag{3.3.7}$$

令 $\varepsilon\to 0$，得

$$\varphi(0)\int_{R^n}f(\xi)e^{ix\cdot\xi}d\xi=f(x)\int_{R^n}\varphi(y)dy$$

取 $\varphi(x)=e^{-|x|^2/2}$，并利用例 3.3.1 的结果得

$$\int_{R^n}f(\xi)e^{ix\cdot\xi}d\xi=(2\pi)^nf(x)$$

由(3.3.2)即知结论成立.

(3)Fourier 变换与 Fourier 逆变换都是从$\mathscr{S}(R^n)$到$\mathscr{S}(R^n)$的线性连续映射,从而它们都是$\mathscr{S}(R^n)$上的一个拓扑自同构.

证明　只就 Fourier 变换来证明以下两点:

① 若 $f \in \mathscr{S}(R^n)$,则 $f \in \mathscr{S}(R^n)$.

事实上,对任意重指标 α,β,由(3.3.3)知

$$|i|^{|\alpha|+|\beta|}\,|\xi^\alpha D_\xi^\beta f(\xi)| = |F[D_x^\alpha(x^\beta f(x))]|$$

即

$$\begin{aligned}
|\xi^\alpha D_\xi^\beta f(\xi)| &= \left|\int_{R^n} D_x^\alpha(x^\beta f(x))\, e^{-ix\cdot\xi}\,dx\right| \\
&\leqslant \int_{R^n} |D_x^\alpha(x^\beta f(x))|\,dx \\
&\leqslant \sup_{R^n} |(1+|x|^2)^n D_x^\alpha(x^\beta f(x))| \int_{R^n} (1+|x|^2)^{-n}\,dx \\
&\leqslant C \sup_{R^n} |(1+|x|^2)^n D_x^\alpha(x^\beta f(x))| < \qquad (3.3.8)
\end{aligned}$$

故 $f(\xi) \in \mathscr{S}(R^n)$.

② 若 $f_k \to 0(\mathscr{S}(R^n))$,则 $f_k \to 0(\mathscr{S}(R^n))$.

这个结论从(3.3.8)立即可得.

(4)设 $f,\varphi \in \mathscr{S}(R^n)$,则

$$\langle f,\varphi\rangle = \langle f,\varphi\rangle$$

证明　在(3.3.7)中令 $\varepsilon = 1, x = 0$ 得

$$\int_{R^n} \varphi(\xi) f(\xi)\, d\xi = \int_{R^n} \varphi(y) f(y)\, dy \qquad (3.3.9)$$

这就是(3.3.9).

利用(3.3.9)可得下列 Parseval 等式

$$(\varphi, f) = (2\pi)^{-n}(\varphi, f) \qquad (3.3.10)$$

即

$$\int_{R^n} \varphi(x)\,\overline{f(x)}\,dx = (2\pi)^{-n}\int_{R^n} \varphi(\xi)\,\overline{f(\xi)}\,d\xi$$

事实上,由于 $\overline{F(\varphi)} = (2\pi)^n F^{-1}(\bar{\varphi})$,并在(3.3.9)中取 φ 为 $\overline{F(\varphi)}$,得

$$\begin{aligned}\langle F(f), \overline{F(\varphi)}\rangle &= \langle f, F[\overline{F(\varphi)}]\rangle \\ &= \langle f, F[(2\pi)^n F^{-1}(\bar{\varphi})]\rangle = (2\pi)^n \langle f, \bar{\varphi}\rangle\end{aligned}$$

这就是(3.3.10). 由此可得 $\| f \|_2 = (2\pi)^{\frac{n}{2}} \| f \|_2$.

如果将 Fourier 变换的定义改成

$$f(\xi) = (2\pi)^{-n/2} \int_{R^n} e^{-ix\cdot\xi} f(x)\,dx$$

则(3.3.10)就变成

$$(f, \varphi) = (f, \varphi)$$

特别是

$$\| f \|_2 = \| f \|_2 \tag{3.3.11}$$

(5) Fourier 变换将卷积运算变成乘法运算,反之,将乘法运算变成卷积运算,即

$$F(f * g) = F(f) \cdot F(g)$$

$$F(f \cdot g) = (2\pi)^{-n} F(f) * F(g)$$

事实上,设 $f, g \in \mathscr{S}(R^n)$,则

$$(f * g)(x) = \int_{R^n} f(x - t) g(t)\,dt$$

$$\begin{aligned}F(f * g) &= \int_{R^n}\Big(\int_{R^n} f(x - t) g(t)\,dt\Big) e^{-ix\cdot\xi} dx \\ &= \int_{R^n} g(t) \int_{R^n} f(x - t) e^{-ix\cdot\xi} dx dt \\ &= \int_{R^n} g(t) \int_{R^n} f(x) e^{-i(x+t)\cdot\xi} dx dt \\ &= \int_{R^n} g(t) e^{-it\cdot\xi} dt \int_{R^n} f(x) e^{-ix\cdot\xi} dx = F(f) F(g)\end{aligned}$$

另一个公式可类似证明.

(6) $\mathscr{S}(R^n)$ 上的 Fourier 变换可以连续扩张到 $L^2(R^n)$ 上成为 $L^2(R^n)$ 上的 Fourier 变换,并且是 $L^2(R^n)$ 的拓扑自同构.

事实上，性质(3)已说明了 Fourier 变换是 $\mathscr{S}(R^n)$ 到 $\mathscr{S}(R^n)$ 的连续映射，(3.3.10)或(3.3.11)又说明了 $\mathscr{S}(R^n)$ 上的 Fourier 变换在 $L^2(R^n)$ 的拓扑下也是连续的. 因为 $\mathscr{S}(R^n)$ 在 $L^2(R^n)$ 内是稠的，故可将 $\mathscr{S}(R^n)$ 的 Fourier 变换惟一地扩张到 $L^2(R^n)$ 上，并且扩张后的算子仍是连续的. 这是因为对任意 $f \in L^2(R^n)$，存在 $\{f_k\} \subset \mathscr{S}(R^n)$，使得当 $k \to$ 时，$f_k \to f \quad (L^2(R^n))$. 因为

$$\|(\widehat{f_m - f_k})\|_2 = (2\pi)^{\frac{n}{2}} \|f_m - f_k\|_2$$

所以 $\{f_k\}$ 在 $L^2(R^n)$ 中收敛. 令

$$\tilde{f}(\xi) = \lim_{k\to} f_k(\xi) \quad (\text{按 } L^2(R^n) \text{ 的范数})$$

由 L^2 的完备性知 $\tilde{f}(\xi) \in L^2(R^n)$，这里的 $\tilde{f}(\xi)$ 就是 $\mathscr{S}(R^n)$ 上的 Fourier 变换在 $L^2(R^n)$ 上的扩张，且由 Lebesgue 控制收敛定理得

$$\begin{aligned}\|\tilde{f}\|_2 &= \|\lim_{k\to} f_k\|_2 = \lim_{k\to}\|f_k\|_2 \\ &= (2\pi)^{n/2}\lim_{k\to}\|f_k\|_2 = (2\pi)^{n/2}\|f\|_2 \qquad (3.3.12)\end{aligned}$$

上面的推导说明，Fourier 变换把 $L^2(R^n)$ 一一对应地映射到 $L^2(R^n)$ 上，且(3.3.12)成立. 逆 Fourier 变换也是如此.

3.3.2 缓增广义函数的 Fourier 变换

利用 Fourier 变换是一个从 $\mathscr{S}(R^n)$ 到 $\mathscr{S}(R^n)$ 的拓扑同构，我们就可以定义 $\mathscr{S}'$ 广义函数的 Fourier 变换.

定义 3.3.2 设 $T \in \mathscr{S}'(R^n)$，T 的 Fourier 变换 $F(T)$ 由下式

$$\langle F(T), \varphi\rangle = \langle T, F(\varphi)\rangle, \quad \text{对任意 } \varphi \in \mathscr{S}(R^n) \qquad (3.3.13)$$

定义.

(3.3.13)也可以写成:对任意 $\varphi \in \mathscr{S}(R^n)$，有

$$(T, \varphi) = \langle T, \varphi\rangle$$

这个定义是合理的，因为:第一，当 $\varphi \in \mathscr{S}(R^n)$ 时，$\varphi \in \mathscr{S}(R^n)$，所以(3.3.13)的右端有意义;第二，当 $T \in \mathscr{S}(R^n)$ 时，由(3.3.9)知定义 3.3.2 与定义 3.3.1 是一致的.

从上面的定义立即可知以下结论：

(1) Fourier 变换是 $\mathscr{S}'(R^n)$ 到 $\mathscr{S}'(R^n)$ 的拓扑同构.

事实上,首先,若 $\varphi_k \to 0(\mathscr{S}(R^n))$,则 $\varphi_k \to 0(\mathscr{S}(R^n))$,从而

$$\langle T,\varphi_k\rangle = \langle T,\varphi_k\rangle \to 0 \quad (k \to \quad)$$

故 $T \in \mathscr{S}'(R^n)$.

其次,若 $T_k \in \mathscr{S}'(R^n)$ 且 $T_k \to 0(\mathscr{S}'(R^n))$,则对任意 $\varphi \in \mathscr{S}(R^n)$,有

$$\langle T_k,\varphi\rangle = \langle T_k,\varphi\rangle \to 0 \quad (k \to \quad)$$

即 $T_k \to 0(\mathscr{S}'(R^n))$,这说明 Fourier 变换是连续算子.

同理,可类似定义 Fourier 逆变换为 对任意 $\varphi \in \mathscr{S}(R^n)$,$\langle F^{-1}(T),\varphi\rangle = \langle T,F^{-1}(\varphi)\rangle$,它也是 $\mathscr{S}'(R^n) \to \mathscr{S}'(R^n)$ 的线性连续算子.

(2) (3.3.3) 中的微分性质全部成立. 即设 $T \in \mathscr{S}'(R^n)$,则有

$$\widehat{D^\alpha T} = i^{|\alpha|}\xi^\alpha T$$

$$\widehat{x^\alpha T} = i^{|\alpha|}D^\alpha T$$

例如,对任意 $\varphi \in \mathscr{S}(R^n)$,有

$$\begin{aligned}\langle \widehat{D^\alpha T},\varphi\rangle &= \langle D^\alpha T,\varphi\rangle = (-1)^{|\alpha|}\langle T,D^\alpha\varphi\rangle \\ &= (-1)^{|\alpha|}\langle T,(-i)^{|\alpha|}\widehat{\xi^\alpha\varphi}\rangle \\ &= i^{|\alpha|}\langle T,\xi^\alpha\varphi\rangle = i^{|\alpha|}\langle \xi^\alpha T,\varphi\rangle\end{aligned}$$

故

$$\widehat{D^\alpha T} = i^{|\alpha|}\xi^\alpha T$$

(3) 对任意 $T \in \mathscr{S}'(R^n)$,有

$$T = F^{-1}[F(T)]$$

事实上,对任意 $\varphi \in \mathscr{S}(R^n)$,有

$$\begin{aligned}\langle F^{-1}[F(T)],\varphi\rangle &= \langle F(T),F^{-1}(\varphi)\rangle \\ &= \langle T,F[F^{-1}(\varphi)]\rangle = \langle T,\varphi\rangle\end{aligned}$$

(4) 广义函数 Fourier 变换也将卷积运算转换成乘积运算,将乘积运算转换成卷积运算. 为此我们首先来定义两个广义函数的卷积,设 $T,S \in$

$\mathscr{D}'(R^n)$，定义它们的卷积 $T*S$ 为 对任意 $\varphi\in\mathscr{D}(R^n)$，有

$$\langle T*S,\varphi\rangle=\langle T,\langle S,\varphi(x+y)\rangle_y\rangle_x$$

为什么这样定义卷积呢？这是受两个普通函数卷积运算的启发，设 $f(x)，g(x)\in L^2(R^n)$，则它们的卷积为

$$(f*g)(x)=\int_{R^n}f(x-y)g(y)dy$$

现在将 $f*g$ 作用于 $\varphi(x)\in C_0(R^n)$ 上，得

$$\begin{aligned}\langle f*g,\varphi\rangle&=\int_{R^n}\varphi(x)\int_{R^n}f(x-y)g(y)dydx\\&=\int_{R^n}\left(\int_{R^n}\varphi(x+y)f(x)g(y)dy\right)dx\\&=\langle f(x),\langle g(y),\varphi(x+y)\rangle_y\rangle_x\end{aligned}$$

当 T,S 中有一个是 $\mathscr{S}(R^n)$ 广义函数时，例如，$S\in\mathscr{S}(R^n)$，则由定理3.2.3的证明过程及其注可知 $\langle S,\varphi(x+y)\rangle_y\in\mathscr{D}(R^n)$，所以 $\langle T*S,\varphi\rangle$ 是有意义的，并且容易验证 $T*S$ 在 $\mathscr{D}'(R^n)$ 上是连续的，即 $T*S$ 是 $\mathscr{D}'(R^n)$ 广义函数，或者说 $T*S$ 是有意义的（参见[4]，[5]）.

由于任意两个 $\mathscr{S}'(R^n)$ 广义函数的卷积或乘积不一定存在，所以上述转换是有条件的. 但是，若 $\varphi\in\mathscr{S}(R^n)$，$T\in\mathscr{S}'(R^n)$，则它们的卷积 $\varphi*T\in\mathscr{S}'(R^n)$，且

$$\varphi*T=\langle T,\varphi(x-y)\rangle_y$$

事实上，与定理3.2.3的证明类似知 $\langle T,\varphi(x-y)\rangle_y\in C(R^n_x)$，且对任意 $\psi(x)\in\mathscr{S}(R^n)$，有

$$\begin{aligned}\langle\langle T,\varphi(x-y)\rangle_y,\psi(x)\rangle&=\int_{R^n}\langle T,\varphi(x-y)\rangle_y\psi(x)dx\\&=\langle T,\langle\varphi(x-y),\psi(x)\rangle_x\rangle_y\\&=\langle T,\langle\varphi(x),\psi(x+y)\rangle_x\rangle_y\\&=\langle T*\varphi,\psi\rangle\end{aligned}$$

利用这个表达式也可证明

$$F(\varphi * T) = F(\varphi)F(T)$$

$$F(\varphi T) = (2\pi)^{-n}F(\varphi) * F(T)$$

我们只证明第一个等式,对任意 $\psi \in \mathscr{S}(R^n)$**,有**

$$\langle F(\varphi * T),\psi\rangle = \langle \varphi * T, F(\psi)\rangle = \langle\langle T,\varphi(\xi - \eta)\rangle_\eta,\psi(\xi)\rangle$$

$$= \langle T,\langle\varphi(\xi - \eta),\psi(\xi)\rangle\rangle_\eta$$

若记 $\varphi_1(\xi) = \varphi(-\xi)$**,则** $\varphi_1 = F(F^{-1}(\varphi_1)) = (2\pi)^{-n}F(F(\varphi))$**,故**

$$\langle F(\varphi * T),\psi\rangle = \langle T,\varphi_1 * \psi\rangle = (2\pi)^{-n}\langle T,F(F(\varphi)) * F(\psi)\rangle$$

$$= \langle T,F[F(\varphi)\psi]\rangle = \langle F(T),F(\varphi)\psi\rangle$$

$$= \langle F(\varphi)F(T),\psi\rangle$$

即 $F(\varphi * T) = F(\varphi)F(T)$.

例 3.3.2　$\delta = 1$.

事实上,对任意 $\varphi \in \mathscr{S}(R^n)$**,有**

$$\langle\delta,\varphi\rangle = \langle\delta,\varphi\rangle = \varphi(0) = \int_{R^n} e^{-ix\cdot\xi}\varphi(x)\,dx\Big|_{\xi=0} = \langle 1,\varphi\rangle$$

故 $\delta = 1$.

例 3.3.3　$F^{-1}(\delta) = (2\pi)^{-n}$.

事实上,对任意 $\varphi \in \mathscr{S}(R^n)$**,有**

$$\langle F^{-1}(\delta),\varphi\rangle = \langle\delta,F^{-1}(\varphi)\rangle = F^{-1}(\varphi)\Big|_{x=0}$$

$$= (2\pi)^{-n}\int_{R^n}\varphi(\xi)\,d\xi = (2\pi)^{-n}\langle 1,\varphi\rangle$$

即 $F^{-1}(\delta) = (2\pi)^{-n}$.

例 3.3.4　$1 = (2\pi)^n\delta$.

事实上,对于任意 $\varphi \in \mathscr{S}(R^n)$**,记** $\varphi = \psi$**,则** $\varphi = \check{\psi}$ **且**

$$\langle 1,\varphi\rangle = \langle 1,\varphi\rangle = \int_{R^n}\psi(x)\,dx = (2\pi)^n\cdot(2\pi)^{-n}\int_{R^n}e^{i0\cdot x}\psi(x)\,dx$$

$$= (2\pi)^n\varphi(0) = (2\pi)^n\langle\delta,\varphi\rangle$$

故 $1 = (2\pi)^n\delta$.

例 3.3.5 **求** sinax **的** Fourier **变换**.

将 sinax **写成**$\frac{1}{2i}(e^{iax} - e^{-iax})$**,对任意** $\varphi \in \mathscr{S}(R)$**,记** $\varphi = \psi$ **得**

$$\langle \widehat{\sin ax}, \varphi \rangle = \langle \sin ax, \varphi \rangle = \int_R \frac{e^{iax} - e^{-iax}}{2i} \psi(x)\, dx$$

$$= \frac{1}{2i}\int_R e^{iax}\psi(x)\, dx - \frac{1}{2i}\int_R e^{-iax}\psi(x)\, dx$$

$$= (2\pi)^n \frac{1}{2i}\varphi(a) - (2\pi)^n \frac{1}{2i}\varphi(-a)$$

$$= \frac{(2\pi)^n}{2i}[\langle \delta(\xi - a), \varphi \rangle - \langle \delta(\xi + a), \varphi \rangle]$$

故

$$\widehat{\sin ax} = i2^{n-1}\pi^n(\delta(\xi + a) - \delta(\xi - a))$$

3.3.3 具紧支集广义函数的 Fourier 变换

在上一小节内,我们讨论了 $\mathscr{S}'$ **广义函数的** Fourier **变换,但这个变换没有类似于**(3.3.1)**的表达式. 如果把**(3.3.1)**的右端写成**$\langle f, e^{-ix\cdot\xi} \rangle$**,显然,当** $f \in \mathscr{E}'(R^n)$ **时,这个对偶积还是有意义的,因此我们就期望** $\mathscr{E}'(R^n)$ **广义函数的** Fourier **变换具有上述表达式. 现在来讨论**$\mathscr{E}'(R^n)$**广义函数的** Fourier **变换,证明上面的想法,并且将要说明这时的** Fourier **变换是常义函数,具体地说是** C **缓增的函数**.

定理 3.3.1 **若** $T \in \mathscr{E}'(R^n)$**,则**

$$T(\xi) = \langle T, e^{-ix\cdot\xi} \rangle \tag{3.3.14}$$

证明 **任取函数**$\chi \in C_0(R^n)$**,使在** suppT **的一个邻域内**$\chi = 1$**,则对任意** $\varphi \in C(R^n)$**,有**

$$\langle T, \varphi \rangle = \langle T, \chi\varphi \rangle \tag{3.3.15}$$

由 Fourier **变换的定义知**

$$\langle T, \varphi \rangle = \langle T, \varphi \rangle = \langle T, \chi\varphi \rangle$$

$$= \langle T, \int_{R^n} \chi(x) e^{-ix\cdot\xi}\varphi(\xi)\, d\xi \rangle$$

因为函数$\chi(x)e^{-ix\cdot\xi}\varphi(\xi)\in C_0(R^{2n})$,与定理3.2.4的证明完全类似,可得

$$\langle T,\varphi\rangle=\int_{R^n}\varphi(\xi)\langle T,\chi(x)e^{-ix\cdot\xi}\rangle d\xi$$
$$=\langle\langle T,\chi(x)e^{-ix\cdot\xi}\rangle_x,\varphi(\xi)\rangle_\xi$$

即

$$T=\langle T,\chi(x)e^{-ix\cdot\xi}\rangle_x$$

再一次利用(3.3.15)即得(3.3.14).

至于$T\in C(R^n)$可以利用定理3.2.3中使用的方法来证明.

还可以进一步证明:若$T\in\mathscr{E}'(R^n)$,则$T(\xi)\in O_M$. 有下面更一般的结果.

3.3.4 Paley - Wiener 定理

如果把(3.3.14)中的ξ换成n维复空间C^n中的变量ζ,则$\langle T,e^{-ix\cdot\zeta}\rangle$是$\zeta$的解析函数,它称为T的Fourier - Laplace变换.

设$U\subset C^n$为开集,$f:U\to C$称为在$\zeta_0\in U$是全纯的,如果$f(\zeta)$在ζ_0的邻域内可以展成$\zeta-\zeta_0$的收敛的幂级数,即

$$f(\zeta)=\sum_k a_k(\zeta-\zeta_0)^k \tag{3.3.16}$$

如果$f(\zeta)$在U内每一点都全纯,则称$f(\zeta)$在U内全纯,C^n内的全纯函数亦称为整函数.

对任意$u\in C_0(R^n)$,若将它的Fourier变换$u(\xi)$中的ξ扩充到C^n内,得

$$u(\zeta)=\int_{R^n}e^{-ix\cdot\zeta}u(x)dx,\quad\zeta\in C^n \tag{3.3.17}$$

记

$$\zeta=\xi+i\eta$$

则

$$u(\zeta)=\int_{R^n}e^{-ix\cdot\xi}e^{x\cdot\eta}u(x)dx$$

即 u 的 Fourier-Laplace 变换可视为 $e^{x\cdot\eta}u(x)$ 的 Fourier 变换.

下面两个重要的结论刻画了 $\mathscr{E}'$ 广义函数和 C_0^∞ 函数的 Fourier-Laplace 变换的特征.

定理 3.3.2(Schwartz)　设 $T\in\mathscr{E}'(\mathbf{R}^n)$,则 T 的 Fourier-Laplace 变换 $F(\zeta)$ 是 $\mathbf{C}^n$ 中的整函数,且存在常数 C,A 及整数 $N\geqslant 0$,使对任意 $\zeta\in\mathbf{C}^n$,有

$$|F(\zeta)|\leqslant C(1+|\zeta|)^N e^{A|\operatorname{Im}\zeta|}\tag{3.3.18}$$

其中 $\operatorname{Im}\zeta$ 表示 ζ 的虚部.

反之,$\mathbf{C}^n$ 中任一具有性质(3.3.18)的整函数必为某 $\mathscr{E}'$ 广义函数的 Fourier-Laplace 变换.

定理 3.3.3(Paley-Wiener)　设 $u\in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$,则 u 的 Fourier-Laplace 变换 $F(\zeta)$ 是 $\mathbf{C}^n$ 中的整函数且具有如下性质:存在常数 $A>0$,使对任意整数 $N\geqslant 0$,有常数 C_N,使得对任意 $\zeta\in\mathbf{C}^n$,有

$$|F(\zeta)|\leqslant C_N(1+|\zeta|)^{-N}e^{A|\operatorname{Im}\zeta|}\tag{3.3.19}$$

反之,$\mathbf{C}^n$ 中任一具有性质(3.3.19)的整函数必为某个 $C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ 函数的 Fourier-Laplace 变换.

这个定理的证明可以参阅[4].

4　实指数的 Sobolev 空间

在第二章内,我们已经较详细地讨论了指数为整数的 Sobolev 空间. 本章将要叙述指数为实数的 Sobolev 空间.

4.1　实指数 Sobolev 空间及其性质

首先我们回顾一下整指数的 Sobolev 空间的概念,设 m 为非负整数,则 $u \in H^m(\Omega)$ 等价于对任意满足 $|\alpha| \leqslant m$ 的重指标 α,$D^\alpha u \in L^2(\Omega)$. 如果 $\Omega = R^n$,由 Fourier 变换的性质,$D^\alpha u \in L^2(R^n)$ 等价于 $\xi^\alpha \hat{u} \in L^2(R^n)$,其中 $|\alpha| \leqslant m$. 而后者又等价于 $p(\xi)\hat{u} \in L^2(R^n)$,其中 $p(\xi)$ 是 ξ 的 m 次多项式,特别是,$(1 + |\xi|^2)^{m/2}\hat{u}(\xi) \in L^2(R^n)$. 由此出发,我们可以给出实指数 Sobolev 空间的定义.

定义 4.1.1　设 s 是实数,则 Sobolev 空间 $H^s(R^n)$ 为

$$H^s(R^n) = \left\{f \in \mathscr{S}'(R^n) \,\middle|\, (1 + |\xi|^2)^{s/2}\hat{f}(\xi) \in L^2(R^n)\right\} \tag{4.1.1}$$

在 $H^s(R^n)$ 还可以引入内积,设 $f,g \in H^s(R^n)$,则它们的内积为

$$(f,g)_{H^s} = (2\pi)^{-n}\int_{R^n}(1 + |\xi|^2)^s\hat{f}(\xi)\,\overline{\hat{g}(\xi)}\,d\xi \tag{4.1.2}$$

于是,$H^s(R^n)$ 中元素的范数为

$$\|f\|_{H^s} = (2\pi)^{-n/2}\left(\int_{R^n}(1 + |\xi|^2)^s|\hat{f}(\xi)|^2 d\xi\right)^{1/2} \tag{4.1.3}$$

特别是,当 $s = 0$ 时,由 Parseval 等式得

$$\|f\|_{H^0} = (2\pi)^{-n/2}\left(\int_{R^n}|\hat{f}(\xi)|^2 d\xi\right)^{1/2} = \|f\|_2$$

所以

$$H^0(R^n)=L^2(R^n)$$

此外,当 s 为正整数时,通过二项式展开可得

$$\|f\|_{H^s}^2=(2\pi)^{-n}\int_{R^n}\sum_{|\alpha|\leqslant s}C_\alpha|\xi^\alpha f(\xi)|^2d\xi=\int_{R^n}\sum_{|\alpha|\leqslant s}C_\alpha|D^\alpha f|^2dx$$

其中所有系数 C_α 均是正数,很容易证明此时由(4.1.3)所定义的范数与由(2.1.3)定义的范数是等价的,从而由(4.1.1)定义的 Sobolev 空间就与第二章中所定义的整指数 Sobolev 空间是一致的.

从定义 4.1.1 立即可得

(1) 对任意实数 t,s,当 $t\leqslant s$ 时,有

$$H^s(R^n)\subset H^t(R^n)\tag{4.1.4}$$

(2) 对任意实数 s,有

$$\mathscr{S}(R^n)\subset H^s(R^n)\subset\mathscr{S}'(R^n)\tag{4.1.5}$$

其实,还可以进一步说明,上面这些包含关系是拓扑包含,即不仅前一个空间是后一个空间的子空间,而且前一个空间的拓扑也比后一个空间的拓扑强(读者自己验证). 除此以外,还可证明下面两个性质.

(3) 对任意实数 s,$H^s(R^n)$ 是 Hilbert 空间.

为此,只要证明 $H^s(R^n)$ 是完备的. 设 $\{f_j\}$ 是 $H^s(R^n)$ 中的 Cauchy 序列,则由定义 4.1.1 知 $(1+|\xi|^2)^{s/2}f_j(\xi)$ 是 $L^2(R^n)$ 的 Cauchy 序列,由 $L^2(R^n)$ 的完备性知,必存在函数 $g(\xi)\in L^2(R^n)$,使得

$$(1+|\xi|^2)^{s/2}f_j(\xi)\to g(\xi)\quad(\text{在 } L^2(R^n)\text{ 内})\tag{4.1.6}$$

当然也有

$$(1+|\xi|^2)^{s/2}f_j(\xi)\to g(\xi)\quad(\text{在 } \mathscr{S}'(R^n)\text{ 内})$$

令

$$f(\xi)=(1+|\xi|^2)^{-s/2}g(\xi)\tag{4.1.7}$$

及

$$f(x)=F^{-1}[f(\xi)]$$

显然 $f(\xi)$ 及 $f(x)$ 都是 $\mathscr{S}'(R^n)$ 广义函数.

因 $(1+|\xi|^2)^{s/s}f(\xi)=g(\xi)\in L^2(R^n)$,故 $f(x)\in H^s(R^n)$. 剩下的问

题就是要证明

$$\| f_j - f \|_{H^s} \to 0 \quad (j \to \quad)$$

这一点由(4.1.6)及(4.1.7)立即可得.

(4) $\mathscr{S}(R^n)$ 在 $H^s(R^n)$ 中是稠密的.

问题在于证明,对任意 $f \in H^s(R^n)$ 及 $\varepsilon > 0$,存在 $\psi \in \mathscr{S}(R^n)$,使得

$$\| f - \psi \|_{H^s} < \varepsilon \tag{4.1.8}$$

利用定义4.1.1及 $\mathscr{S}(R^n)$ 在 $L^2(R^n)$ 内的稠密性知,对任意 $f \in H^s(R^n)$ 及 $\varepsilon > 0$,必存在 $g(\xi) \in \mathscr{S}(R^n)$,使得

$$\| (1 + |\xi|^2)^{s/2} f(\xi) - g(\xi) \|_2 < \varepsilon \tag{4.1.9}$$

令

$$\psi(x) = F^{-1}[(1 + |\xi|^2)^{-s/2} g(\xi)] \quad (\text{显然 } \psi \in \mathscr{S}(R^n))$$

则(4.1.9)可写成

$$\| (1 + |\xi|^2)^{s/2} (f(\xi) - \psi(\xi)) \|_2 < \varepsilon$$

即

$$\| f(x) - \psi(x) \|_{H^s} < \varepsilon$$

性质(4)说明,$H^s(R^n)$ 可以定义为 $\mathscr{S}(R^n)$ 关于范数(4.1.3)的完备化.

4.2 对偶空间 $H^{-s}(R^n)$

在这一节内,我们将证明 $H^s(R^n)$ 的对偶空间是 $H^{-s}(R^n)$,即要证

$$(H^s(R^n))' = H^{-s}(R^n) \tag{4.2.1}$$

设 $f \in (H^s(R^n))'$,则由Riesz表现定理知存在惟一的 $w \in H^s(R^n)$,使对任意 $\varphi \in H^s(R^n)$,有

$$\langle f, \varphi \rangle = (\varphi, w)_s = (2\pi)^{-n} \int_{R^n} (1 + |\xi|^2)^s \varphi(\xi) \overline{w(\xi)} d\xi \tag{4.2.2}$$

令 $v = F^{-1}[(1 + |\xi|^2)^s w(\xi)]$,则 $v \in \mathscr{S}'(R^n)$. 由于 $w \in H^s(R^n)$,故

$$(1 ++ |\xi|^2)^{s/2} w \in L^2(R^n)$$

从而

$$(1+|\xi|^2)^{-s/2}v=(1+|\xi|^2)^{s/2}w\in L^2(R^n) \tag{4.2.3}$$

即

$$v\in H^{-s}(R^n)$$

且

$$\langle f,\varphi\rangle=(2\pi)^{-n}\int_{R^n}\varphi(\xi)\,\overline{v}(\xi)\,d\xi=(v,\varphi) \tag{4.2.4}$$

由 Riesz 表现定理得

$$\begin{aligned}\|f\|_{(H^s)'}=\|w\|_{H^s}&=(2\pi)^{-\frac{n}{2}}\Big[\int_{R^n}(1+|\xi|^2)^s|w(\xi)|^2d\xi\Big]^{1/2}\\&=(2\pi)^{-\frac{n}{2}}\int_{R^n}(1+|\xi|^2)^{-s}|v(\xi)|^2d\xi\Big]^{1/2}\\&=\|v\|_{H^{-s}}\end{aligned} \tag{4.2.5}$$

这说明 $(H^s)'$ 上任一元素 f 对应于 $H^{-s}(R^n)$ 内一个元素 v,且两者范数相等.

反之,若 $v\in H^{-s}(R^n)$,则对任意 $\varphi\in H^s(R^n)$,有

$$\begin{aligned}|(v,\varphi)|&=(2\pi)^{-n}\Big|\int_{R^n}\overline{v(\xi)}\varphi(\xi)\,d\xi\Big|\\&=(2\pi)^{-n}\Big|\int_{R^n}(1+|\xi|^2)^{-s/2}\,\overline{v}(\xi)\cdot(1+|\xi|^2)^{s/2}\varphi(\xi)\,d\xi\Big|\\&\leqslant(2\pi)^{-\frac{n}{2}}\Big[\int_{R^n}(1+|\xi|^2)^{-s}|v(\xi)|^2d\xi\Big]^{1/2}\\&\quad\cdot(2\pi)^{-\frac{n}{2}}\Big[\int_{R^n}(1+|\xi|^2)^{s}|\varphi(\xi)|^2d\xi\Big]^{1/2}\\&=\|v\|_{H^{-s}}\|\varphi\|_{H^s}\end{aligned} \tag{4.2.6}$$

因此,每个 $v\in H^{-s}(R^n)$ 都生成 $H^s(R^n)$ 上一个线性连续泛函 (v,φ).

综合上述,可知 $H^{-s}(R^n)$ 与 $H^s(R^n)$ 的对偶空间 $(H^s)'$ 是等距同构的. 即 $(H^s(R^n))'=H^{-s}(R^n)$

例 4.2.1 对所有的 $s<-n/2$,有 $\delta\in H^s(R^n)$.

事实上,当 $s<-n/2$ 时,因 $\hat{\delta}=1$,故

$$(1+|\xi|^2)^{s/2}\delta=(1+|\xi|^2)^{s/2}\in L^2(R^n)$$

例 4.2.2 **对所有** $s<-n/2$,$j_\varepsilon(x)$ **在** $H^s(R^n)$ **中收敛于** δ,**即**

$$\|j_\varepsilon(x)-\delta\|_{H^s}\to 0\quad(\varepsilon\to 0)$$

其中 $j_\varepsilon(x)$ **是磨光核**.

事实上,按(4.1.3)**知**

$$\|j_\varepsilon-\delta\|_{H^s}^2=(2\pi)^{-n}\int_{R^n}(1+|\xi|^2)^s\left|\widehat{j_\varepsilon-\delta}\right|^2 d\xi \tag{4.2.7}$$

但 $\hat{\delta}=1$,**且**

$$\hat{j}_\varepsilon(\xi)=\int_{R^n}e^{-ix\cdot\xi}j_\varepsilon(x)\,dx=\varepsilon^{-n}\int_{R^n}e^{-ix\cdot\xi}j\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)dx$$

$$=\int_{R^n}e^{-iy\cdot\varepsilon\xi}j(y)\,dy=\hat{j}(\varepsilon\xi) \tag{4.2.8}$$

当 $\varepsilon\to 0$ **时,在** R^n **中每一点** ξ **处有**

$$\hat{j}(\varepsilon\xi)\to 1 \tag{4.2.9}$$

在(4.2.7)**中令** $\varepsilon\to 0$,**并利用** Lebesgue **控制收敛定理及**(4.2.9),**即得所要证的结论**.

4.3 $H^s(R^n)$ 中的乘子

在 3.2 **节中,我们叙述了一个函数空间乘子的概念,现在来讨论空间** $H^s(R^n)$ **的乘子,先证明一个引理**.

引理 4.3.1(Peetre **不等式**) **对任意实数** t **及任意** $\xi,\eta\in R^n$,**有**

$$\left[\frac{1+|\xi|^2}{1+|\eta|^2}\right]^t\leqslant 2^{|t|}(1+|\xi-\eta|^2)^{|t|} \tag{4.3.1}$$

证明 **对任意** $\xi,\zeta\in R^n$,**有**

$$1+|\xi-\zeta|^2\leqslant 2(1+|\xi|^2)(1+|\zeta|^2)$$

令 $\zeta=\xi-\eta$,**则**

$$1+|\eta|^2\leqslant 2(1+|\xi|^2)(1+|\xi-\eta|^2)$$

当 $t<0$ **时,在上式两端同乘** $|t|$ **次幂即得**(4.3.1);**当** $t>0$ **时,在上式中对**

调 ξ 和 η 的位置再乘 t 次幂即得(4.3.1).

定理 4.3.2 $\mathscr{S}(\mathbf{R}^n)$ 中的元素是 $H^s(\mathbf{R}^n)$ 的乘子.

证明 设 $\varphi\in\mathscr{S}(\mathbf{R}^n)$,要证

(1) 对任意 $f\in H^s(\mathbf{R}^n)$,$\varphi f\in H^s(\mathbf{R}^n)$,

(2) 若 $\{f_j\}\subset H^s(\mathbf{R}^n)$,且 $f_j\to 0(H^s)$,则 $\varphi f_j\to 0(H^s)$.

先证(1),即要证 $(1+|\xi|^2)^{s/2}\widehat{\varphi f}\in L^2(\mathbf{R}^n)$.

利用 3.3 节中 Fourier 变换的性质及 $H^s(\mathbf{R}^n)\subset\mathscr{S}'(\mathbf{R}^n)$,得

$$\widehat{\varphi f}=(2\pi)^{-n}(\varphi * f)=(2\pi)^{-n}\langle f(\eta),\varphi(\xi-\eta)\rangle_\eta \tag{4.3.2}$$

令

$$G(\xi)=(1+|\xi|^2)^{s/2}\widehat{\varphi f}$$

则

$$\begin{aligned}G(\xi)&=(2\pi)^{-n}(1+|\xi|^2)^{s/2}\langle f(\eta),\varphi(\xi-\eta)\rangle_\eta\\&=(2\pi)^{-n}\left\langle(1+|\eta|^2)^{s/2}f(\eta),\left(\frac{1+|\xi|^2}{1+|\eta|^2}\right)^{s/2}\varphi(\xi-\eta)\right\rangle_\eta\\&=\langle(1+|\eta|^2)^{s/2}f(\eta),K(\xi,\eta)\rangle_\eta\end{aligned} \tag{4.3.3}$$

其中

$$K(\xi,\eta)=(2\pi)^{-n}\left(\frac{1+|\xi|^2}{1+|\eta|^2}\right)^{s/2}\varphi(\xi-\eta) \tag{4.3.4}$$

由 Peetre 不等式(4.3.1)及 $\varphi\in\mathscr{S}(\mathbf{R}^n)$ 得

$$\begin{aligned}|K(\xi,\eta)|&\leqslant(2\pi)^{-n}2^{|s|/2}(1+|\xi-\eta|^2)^{|s|/2}|\varphi(\xi-\eta)|\\&=(2\pi)^{-n}2^{|s|/2}(1+|\xi-\eta|^2)^{\frac{|s|}{2}+n}|\varphi(\xi-\eta)|(1+|\xi-\eta|^2)^{-n}\\&\leqslant C(1+|\xi-\eta|^2)^{-n}\end{aligned} \tag{4.3.5}$$

(4.3.5)说明,对固定的 ξ,$K(\xi,\eta)\in L^2(\mathbf{R}^n_\eta)$,从而

$$G(\xi)=\int_{\mathbf{R}^n}K(\xi,\eta)f(\eta)(1+|\eta|^2)^{s/2}d\eta$$

对任意 $\psi\in L^2(\mathbf{R}^n)$,则

$$|\langle G(\xi),\psi(\xi)\rangle|=\left|\int_{\mathbf{R}^n}\int_{\mathbf{R}^n}K(\xi,\eta)(1+|\eta|^2)^{s/2}f(\eta)\psi(\xi)\,d\eta d\xi\right|$$

$$\leqslant \left(\iint_{R^nR^n} |K(\xi,\eta)|\,|\psi(\xi)|^2 d\xi d\eta\right)^{1/2}\left(\iint_{R^nR^n} K(\xi,\eta)\,|f(\eta)|^2(1+|\eta|^2)^s d\xi d\eta\right)^{1/2}$$

$$\leqslant C\|\psi\|_{L^2}\|f\|_{H^s} \qquad (4.3.6)$$

这说明 $G(\xi) \in (L^2(R^n))' = L^2(R^n)$,即(1) 成立,且

$$\|G\|_{L^2} \leqslant C\|f\|_{H^s}$$

下面再证(2),令

$$G_j(\xi) = (1+|\xi|^2)^{s/2} f_j * \varphi \qquad (4.3.7)$$

则

$$\|G_j\|_{L^2} \leqslant C\|f_j\|_{H^s} \to 0 \quad (j\to\ )$$

故

$$\|\varphi f_j\|_{H^s} \to 0 \quad (j\to\ )$$

注 定理 4.3.2 实际上说明了双线性映射

$$T:(\varphi,f) \mapsto \varphi f$$

是从 $\varphi \times H^s(R^n)$ 到 $H^s(R^n)$ 的连续线性算子.

推论 4.3.3 设 $P(x,D) = \sum_{|\alpha|\leqslant m} a_\alpha(x) D^\alpha$ 是 m 阶线性微分算子,其中系数 $a_\alpha(x) \in \mathscr{S}(R^n)$,则 P 是 $H^s(R^n)$ 到 $H^{s-m}(R^n)$ 的连续算子.

证明 设 $f \in H^s(R^n)$,则

$$\begin{aligned}\|D_{x_i} f\|_{H^{s-1}} &= (2\pi)^{-\frac{n}{2}}\|(1+|\xi|^2)^{\frac{s-1}{2}}\widehat{D_{x_i} f}\|_{L^2}\\ &= (2\pi)^{-\frac{n}{2}}\|(1+|\xi|^2)^{\frac{s-1}{2}}\xi_i f(\xi)\|_{L^2}\\ &\leqslant C\|(1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}} f(\xi)\|_{L^2} = C\|f\|_{H^s}\end{aligned} \qquad (4.3.8)$$

这个不等式说明,$Df \in H^{s-1}(R^n)$,且 D 是 $H^s(R^n)$ 到 $H^{s-1}(R^n)$ 的连续算子. 同理,D^α 是 $H^s(R^n)$ 到 $H^{s-|\alpha|}(R^n)$ 的连续算子. 由于 $a_\alpha(x) \in \mathscr{S}(R^n)$,由上面的注知 $a_\alpha(x)D^\alpha$ 将 $H^s(R^n)$ 连续地映射到 $H^{s-|\alpha|}(R^n)$. 从而推论的结论成立.

4.4 嵌入定理

现在我们来讨论 $H^s(R^n)$ 到连续可微函数空间的嵌入关系.

定理4.4.1 设实数 s 满足 $s > \frac{n}{2} + k$，则 $H^s(R^n)$ 可以嵌入到 $C^k(R^n)$ 中，且嵌入算子是连续的.

证明 首先就 $k = 0$ 的情形来证明，即要证明若 $f \in H^s(R^n)$，其中 $s > \frac{n}{2}$（n 是空间的维数），则 $f \in C(R^n)$，且存在常数 C，使得

$$\| f \|_{C(R^n)} \leqslant C \| f \|_{H^s(R^n)} \tag{4.4.1}$$

由 $f \in H^s(R^n)$ 得

$$(1 + |\xi|^2)^{s/2} \hat{f}(\xi) \in L^2(R^n)$$

因 $s > \frac{n}{2}$，故 $(1 + |\xi|^2)^{-s/2} \in L^2(R^n)$，从而

$$\hat{f}(\xi) = (1 + |\xi|^2)^{s/2}(1 + |\xi|^2)^{-s/2}\hat{f}(\xi) \in L^1(R^n)$$

且对任意 $x_0 \in R^n$，有

$$\begin{aligned}
|f(x) - f(x_0)| &= \left| (2\pi)^{-n} \int_{R^n} (e^{ix\cdot\xi} - e^{ix_0\cdot\xi}) \hat{f}(\xi) d\xi \right| \\
&\leqslant (2\pi)^{-n} \int_{R^n} |e^{i(x-x_0)\cdot\xi} - 1| |\hat{f}(\xi)| d\xi \\
&\leqslant (2\pi)^{-n} \max_{|\xi| \leqslant A} |e^{i(x-x_0)\cdot\xi} - 1| \int_{|\xi| \leqslant A} |\hat{f}(\xi)| d\xi \\
&\quad + 2(2\pi)^{-n} \int_{|\xi| > A} |\hat{f}(\xi)| d\xi
\end{aligned}$$

其中 A 是待定的常数.

因 $\hat{f}(\xi) \in L^1(R^n)$，故对任意 $\varepsilon > 0$，存在常数 A，使得

$$2(2\pi)^{-n} \int_{|\xi| > A} |\hat{f}(\xi)| d\xi < \varepsilon/2 \tag{4.4.2}$$

取定 A 后，再取 $\delta > 0$，使当 $|x - x_0| < \delta$ 时，有

$$(2\pi)^{-n} \max_{|\xi| \leqslant A} |e^{i(x-x_0)\cdot\xi} - 1| \int_{|\xi| \leqslant A} |\hat{f}(\xi)| d\xi < \varepsilon/2 \tag{4.4.3}$$

结合(4.4.2)与(4.4.3)得：对任意给定的 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta > 0$，当 $|x - x_0| < \delta$ 时，有 $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$，即 $f(x)$ 在 x_0 点是连续的，由 x_0 的任意性知 $f(x)$

$\in C(R^n)$.

下面要证明(4.4.1). 由

$$|f(x)|^2 = \left|(2\pi)^{-n}\int_{R^n} e^{ix\cdot\xi} \hat{f}(\xi)\, d\xi\right|^2 \leqslant \left(\int_{R^n} |\hat{f}(\xi)|\, d\xi\right)^2$$

$$= \left(\int_{R^n} (1+|\xi|^2)^{s/2}(1+|\xi|^2)^{-s/2}|\hat{f}(\xi)|\, d\xi\right)^2$$

$$\leqslant \int_{R^n} (1+|\xi|^2)^s |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi \cdot \int_{R^n} (1+|\xi|^2)^{-s} d\xi = C\|f\|^2_{H^s}$$

即(4.4.1) 成立.

当 k 是正整数时, 由 $\widehat{D_j f} = i\xi_j \hat{f}(\xi)$, 且当 $f \in H^s(R^n)$ 时, $D_j f \in H^{s-1}(R^n)$. 于是, 当 $s > \frac{n}{2} + k$, $f \in H^s(R^n)$ 时, 对任意 $|\alpha| \leqslant k$, 有 $D^\alpha f \in H^{s-|\alpha|} \subset H^{s-k}(R^n)$. 由 $s-k > \frac{n}{2}$ 及前面的结论知, 对任意 $|\alpha| \leqslant k$, 有 $D^\alpha f \in C(R^n)$, 即

$$f \in C^k(R^n)$$

且对任意 $|\alpha| \leqslant k$, 由(4.4.1) 得

$$|D^\alpha f| \leqslant M\|D^\alpha f\|_{H^{s-|\alpha|}} \leqslant M\left(\int_{R^n} |\xi|^{2|\alpha|}(1+|\xi|^2)^{s-|\alpha|}|\hat{f}(\xi)|^2 d\xi\right)^{1/2}$$

$$\leqslant M\left(\int_{R^n} (1+|\xi|^2)^s |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi\right)^{1/2} = M\|f\|_{H^s}$$

从而, 当 $s > \frac{n}{2} + k$ 时

$$\|f\|_{C^k} \leqslant C\|f\|_{H^s}$$

4.5 迹与迹算子

一个广义函数在低维流形上的取值未必有意义, 即使对于 L^p 中的函数也是如此, 因为 L^p 中的元素在一个零测度的集合上可以任意改变其值, 所以在低维流形上的值是不确定的. 但在偏微分方程边值问题的研究中, 恰好

要涉及广义函数(特别是 H^s 中函数)在低维流形上的取值,在本节内,我们将讨论 Sobolev 空间中函数在区域 Ω 的边界 $\partial\Omega$ 上的取值.

首先,我们讨论 $H^m(R^n)$ 与 $H^m(R^n_+)$ 中函数在 $n-1$ 维超平面 $x_n=0$ 上的取值,然后再叙述一般的情况.

定理 4.5.1(迹定理) 设 m 为非负整数,$u\in H^m(R^n)$,则可定义 u 在 $x_n=0$ 上的迹 γu,且成立

$$\|\gamma u\|_{H^{m-\frac{1}{2}}(R^{n-1})}\leqslant C\|u\|_{H^m(R^n)} \tag{4.5.1}$$

其中 C 为常数.

证明 先对 $u\in C_0(R^n)$ 来定义它在 $x_n=0$ 上的迹,并证明(4.5.1).

记 $x'=(x_1,\cdots,x_{n-1})$,则 $u(x)=u(x',x_n)$,它在 $x_n=0$ 上的迹定义为

$$\gamma u\equiv u(x',0) \tag{4.5.2}$$

以 $\tilde{u}(\xi',x_n)$ 表示 u 关于 x' 的 Fourier 变换,则 $\tilde{u}$ 关于 ξ' 是急减函数,且当 $|x_n|$ 充分大时 $\tilde{u}(\xi',x_n)=0$,故

$$|\tilde{u}(\xi',0)|^2=-\int_0\frac{\partial}{\partial x_n}|\tilde{u}(\xi',x_n)|^2dx_n \tag{4.5.3}$$

两端同乘以 $(2\pi)^{-n+1}(1+|\xi'|^2)^{m-\frac{1}{2}}$,并就 ξ' 积分,得

$$\begin{aligned}
&\|\gamma u\|^2_{H^{m-\frac{1}{2}}(R^{n-1})}\\
&=(2\pi)^{-n+1}\int_{R^{n-1}}(1+|\xi'|^2)^{m-\frac{1}{2}}|\tilde{u}(\xi',0)|^2d\xi'\\
&\leqslant 2(2\pi)^{-n+1}\int_{R^{n-1}}\int_0(1+|\xi'|^2)^{m-\frac{1}{2}}\left|\frac{\partial\tilde{u}}{\partial x_n}(\xi',x_n)\right||\tilde{u}(\xi',x_n)|dx_nd\xi'\\
&\leqslant 2(2\pi)^{-n+1}\left(\int_{R^{n-1}}\int_0(1+|\xi'|^2)^{m-1}\left|\frac{\partial\tilde{u}}{\partial x_n}(\xi',x_n)\right|^2d\xi'dx_n\right)^{1/2}\\
&\quad\cdot\left(\int_{R^{n-1}}\int_0(1+|\xi'|^2)^m|\tilde{u}(\xi',x_n)|^2d\xi'dx_n\right)^{1/2}\\
&\leqslant C^2\left[\int_{R^{n-1}}\int_0\sum_{|\alpha|\leqslant m-1}\left(|\xi'|^\alpha\left|\frac{\partial\tilde{u}}{\partial x_n}(\xi',x_n)\right|\right)^2d\xi'dx_n\right]^{1/2}\\
&\quad\cdot\left[\int_{R^{n-1}}\int_0\sum_{|\alpha|\leqslant m}(|\xi'|^\alpha|\tilde{u}(\xi',x_n)|)^2d\xi'dx_n\right]^{1/2}
\end{aligned}$$

$$= C^2\left[\int_{R^{n-1}}\int_0 \sum_{|\alpha|\leqslant m-1}|D_{x'}^{\alpha}D_{x_n}u|^2dx'dx_n\right]^{1/2}\left[\int_{R^{n-1}}\int_0 \sum_{|\alpha|\leqslant m}|D_{x'}^{\alpha}u|^2dx'dx_n\right]^{1/2} \tag{4.5.4}$$

$$\leqslant C^2\left(\int_{R^n}\sum_{|\alpha|\leqslant m}|D_x^{\alpha}u|^2dx\right)^{1/2}\left(\int_{R^n}\sum_{|\alpha|\leqslant m}|D_x^{\alpha}u|^2dx\right)^{1/2}$$

$$= C^2\|u\|^2_{H^m(R^n)} \tag{4.5.5}$$

即当 $u\in C_0(R^n)$ 时(4.5.1)成立.

如果 $u\in H^m(R^n)$,则存在序列 $\{u_j\}\subset C_0(R^n)$,使得当 $j\to$ 时,有

$$u_j\to u \quad (H^m(R^n))$$

从而 $\{u_j\}$ 是 $H^m(R^n)$ 中的 Cauchy 列,由(4.5.1)得

$$\|\gamma u_j-\gamma u_k\|_{H^{m-\frac{1}{2}}(R^{n-1})}\leqslant C\|u_j-u_k\|_{H^m(R^n)}\to 0 \quad (j,k\to \quad) \tag{4.5.6}$$

即 $\{\gamma u_j\}$ 是 $H^{m-\frac{1}{2}}(R^{n-1})$ 中的 Cauchy 列. $H^{m-\frac{1}{2}}(R^{n-1})$ 的完备性说明,存在 $v\in H^{m-\frac{1}{2}}(R^{n-1})$,使得当 $j\to$ 时有

$$\gamma u_j\to v \quad (H^{m-\frac{1}{2}}(R^{n-1})) \tag{4.5.7}$$

容易看出 v 与 $\{u_j\}$ 的选取是无关的,于是,我们就定义 u 在 $x_n=0$ 上的迹为

$$\gamma u=v \tag{4.5.8}$$

由

$$\|\gamma u_j\|_{H^{m-\frac{1}{2}}(R^{n-1})}\leqslant C\|u_j\|_{H^m(R^n)}$$

可得

$$\|\gamma u\|_{H^{m-\frac{1}{2}}(R^{n-1})}\leqslant C\|u\|_{H^m(R^n)}$$

至此,定理 4.5.1 获证.

从证明(4.5.5)的过程中,我们可以注意到并未用到 u 在整个空间 R^n 内的值,只用到了 u 在 $R_+^n=\{x\in R^n \mid x_n>0\}$ 上的值(例如见(4.5.4)). 因此,对于 $C(\overline{R_+^n})$ 上的函数,只要它对 $x'=(x_1,\cdots,x_{n-1})$ 是急减的,当 x_n 充分大时它为零,也可得到

$$\|\gamma u\|_{H^{m-\frac{1}{2}}(R^{n-1})}\leqslant C\|u\|_{H^m(R_+^n)} \tag{4.5.9}$$

下面对 $H^m(R_+^n)$ **中的函数证明与定理** 4.5.1 **类似的结论,先证明一个引理.**

引理 4.5.2　$C(\overline{R_+^n})$ **在** $H^{m,p}(R_+^n)$ **中是稠密的,其中** m **是非负整数,** $p \geqslant 1$.

证明　**设** $j(s) \in C_0(R^1)$,**且** $\mathrm{supp}\, j(s) \subset \{s \mid -1 \leqslant s \leqslant 1\}$ **及**

$$\int_{R^1} j(s)\,ds = 1$$

对 $u \in H^{m,p}(R_+^n)$,**作**

$$J_\varepsilon^+ u(x) = \varepsilon^{-n}\int_{R_+^n} j\left(\frac{x_1 - x_1'}{\varepsilon}\right)\cdots j\left(\frac{x_{n-1} - x_{n-1}'}{\varepsilon}\right) j\left(\frac{x_n - x_n' + 2\varepsilon}{\varepsilon}\right) u(x')\,dx' \tag{4.5.10}$$

其中 $x' = (x_1', \cdots, x_n')$. **显然** $J_\varepsilon^+ u \in C(\overline{R_+^n})$,**且当** $\varepsilon \to 0$ **时,有**

$$J_\varepsilon^+ u \to u \ (L^p(R_+^n)) \tag{4.5.11}$$

下面要证明

$$J_\varepsilon^+ u \to u \ (H^{m,p}(R_+^n)) \quad (\varepsilon \to 0) \tag{4.5.12}$$

由(4.5.11) **及** $H^{m,p}(R_+^n)$ **的定义知,问题在于证明对任意** $|\alpha| \leqslant m$,**有**

$$D^\alpha(J_\varepsilon^+ u) = J_\varepsilon^+(D^\alpha u) \tag{4.5.13}$$

先看一阶导数,对任意 $1 \leqslant i \leqslant n-1$,**有**

$$\begin{aligned}
\partial_{x_i}(J_\varepsilon^+ u) &= \varepsilon^{-n}\int_{R_+^n} j\left(\frac{x_1 - x_1'}{\varepsilon}\right)\cdots \partial_{x_i} j\left(\frac{x_i - x_i'}{\varepsilon}\right)\cdots j\left(\frac{x_n - x_n' + 2\varepsilon}{\varepsilon}\right) u(x')\,dx' \\
&= -\varepsilon^{-n}\int_{R_+^n} j\left(\frac{x_1 - x_1'}{\varepsilon}\right)\cdots \partial_{x_i'} j\left(\frac{x_i - x_i'}{\varepsilon}\right)\cdots j\left(\frac{x_n - x_n' + 2\varepsilon}{\varepsilon}\right) u(x')\,dx' \\
&= \varepsilon^{-n}\int_{R_+^n} j\left(\frac{x_1 - x_1'}{\varepsilon}\right)\cdots j\left(\frac{x_n - x_n' + 2\varepsilon}{\varepsilon}\right) \partial_{x_i'} u(x')\,dx' \\
&= J_\varepsilon^+(\partial_{x_i} u)
\end{aligned}$$

再计算 $\partial_{x_n}(J_\varepsilon^+ u)$.

$$\partial_{x_n}(J_\varepsilon^+ u) = -\varepsilon^{-n}\int_{R_+^n} j\left(\frac{x_1 - x_1'}{\varepsilon}\right)\cdots j\left(\frac{x_{n-1} - x_{n-1}'}{\varepsilon}\right) \partial_{x_n'} j\left(\frac{x_n - x_n' + 2\varepsilon}{\varepsilon}\right) u(x')\,dx' \tag{4.5.14}$$

注意到 $j(s)$ 的支集在 $|s| \leqslant 1$ 内，故 $j\left(\dfrac{x_n - x_n' + 2\varepsilon}{\varepsilon}\right)\Bigg|_{x_n'=0}^{x_n'=+} =$ $- j\left(\dfrac{x_n + 2\varepsilon}{\varepsilon}\right) = 0$，所以在(4.5.14)右端利用分部积分法同样可得

$$\partial_{x_n}(J_\varepsilon^+ u) = J_\varepsilon^+(\partial_{x_n} u)$$

类似地可证(4.5.13).

定理 4.5.3　设 m 为非负整数，$u \in H^m(R_+^n)$，则可以定义 u 在 $x_n = 0$ 上的迹 γu，且存在常数 C，使得

$$\|\gamma u\|_{H^{m-\frac{1}{2}}(R^{n-1})} \leqslant C\|u\|_{H^m(R_+^n)} \tag{4.5.15}$$

证明　作函数列 $\{g_k\}$ 满足 $g_k \in C_0(R^n)$，且

$$g_k(x) = \begin{cases} 1, & x \in B(0,k) \\ 0, & x \overline{\in B(0,k+1)} \end{cases}$$

利用第二章定理 2.3.4 中的方法可证，对任意 $u \in H^m(R_+^n)$，当 $k \to$ 　时，有

$$g_k u \to u\ (H^m(R_+^n))$$

即当 k 充分大时，有

$$\|g_k u - u\|_{H^m(R_+^n)} < \frac{1}{2^k} \tag{4.5.16}$$

由引理 4.5.2 知，对 $g_k u \in H^m(R_+^n)$，存在序列 $\{\varepsilon_k\}$，使得

$$\|J_{\varepsilon_k}^+(g_k u) - g_k u\|_{H^m(R_+^n)} < \frac{1}{2^k} \tag{4.5.17}$$

由(4.5.16)与(4.5.17)知，当 $k \to$ 　时，有

$$u_k \equiv J_{\varepsilon_k}^+(g_k u) \to u \quad (H^m(R_+^n))$$

由于 $g_k u$ 在 $|x|$ 充分大时为零，故 u_k 当 $|x|$ 充分大时也为零，故可利用定理 4.5.1 中的方法证明 u_k 在 $x_n = 0$ 上的迹 γu_k 满足

$$\|\gamma u_k\|_{H^{m-\frac{1}{2}}(R^{n-1})} \leqslant C\|u_k\|_{H^m(R_+^n)}$$

$$\|\gamma u_k - \gamma u_{k'}\|_{H^{m-\frac{1}{2}}(R^{n-1})} \leqslant C\|u_k - u_{k'}\|_{H^m(R_+^n)}$$

即存在 $v \in H^{m-\frac{1}{2}}(R^{n-1})$，使当 $k \to$ 　时，$\gamma u_k \to v(H^{m-\frac{1}{2}}(R^{n-1}))$. 定义 u 在

$x_n = 0$ 上的迹为 v,即

$$\gamma u = v$$

则

$$\| \gamma u \|_{H^{m-\frac{1}{2}}(R^{n-1})} \leqslant C \| u \|_{H^m(R^n_+)}$$

(4.5.15)得证.

上面两个定理说明了,定义在 $x_n = 0$ 上的迹算子 γ 是一个从 $H^m(R^n)$ 或 $H^m(R^n_+)$ 到 $H^{m-\frac{1}{2}}(R^{n-1})$ 的线性连续算子. 这个结果可以推广到更一般的情形,即利用局部化和展平的技巧,可以得到如下的结论.

定理 4.5.4 设区域 $\Omega \subset R^n$ 具有一致 C^m 光滑的边界 Γ,对于任一 $H^m(\Omega)$ 函数 u,可以定义它在边界 Γ 上的迹 $\gamma u \in H^{m-\frac{1}{2}}(\Gamma)$,且 γ 是 $H^m(\Omega)$ 到 $H^{m-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ 上的线性连续映射.

这个定理的证明可以在[6]中找到.

注 区域 Ω 称为具有一致 C^m 正则性,如果存在 $\partial\Omega$ 的一个局部有限开复盖 $\{U_j\}$ 满足下列条件:

(1) 存在正数 N,使得 $\{U_j\}$ 中任意 $N+1$ 个 U_j 的交为空集.

(2) 存在正数 M,对每一个 U_j,存在 U_j 到单位球 $B = \{y \in R^n \mid |y| < 1\}$ 的映射 $y = \varphi_j(x)$ 及其逆映射 $x = \psi_j(y)$,并且 $\varphi_j(x) \in C^m(U_j)$,$\psi_j(y) \in C^m(B)$,使得

$$\varphi_j(U_j \cap \Omega) = B_+ = \{y \in B \mid y_n > 0\}$$

$$\varphi_j(U_j \cap \partial\Omega) = B_0 = \{y \in B \mid y_n = 0\}$$

且对所有 $|\alpha| \leqslant m$,有

$$|D^\alpha \varphi_j(x)| \leqslant M, \quad x \in U_j$$

$$|D^\alpha \psi_j(y)| \leqslant M, \quad y \in B$$

(3) 存在正数 δ,使得

$$\Omega_\delta = \{x \in \Omega \mid \mathrm{dist}(x, \partial\Omega) < \delta\} \subset \bigcup_{j=1} \psi_j\left(\{y \in R^n \mid |y| < \frac{1}{2}\}\right)$$

可以证明,具一致 C^m 正则性的区域必具有强局部 Lipschitz 性质.

第五章　整指数Sobolev空间嵌入定理的证明

在第2章内,我们已经讲了嵌入定理的含义和结论,但没有给出证明,在这章内我们将给出这个定理的证明,为了不使篇幅过大,一些基础性的结果仍不予证明.

5.1　一些引理

为了证明嵌入定理,还需要做许多准备工作,我们把这些结果写成一系列的引理.

引理5.1.1　设Ω是具强局部Lipschitz性质的区域,简称L型区域,则:

(1) 存在开集$O_1, O_2, \cdots, O_m$,使$\partial\Omega \subset \bigcup_{i=1}^{m} O_i$.

(2) 存在开集O_0,使$\Omega \subset \bigcup_{i=0}^{m} O_i$.

(3) 设$\Omega_\delta = \{x \in \Omega \mid \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) < \delta\}$, $V_j = \{x \in O_j \mid \operatorname{dist}(x, \partial O_j) > \delta_1\}$,则存在一个充分小的$\delta_1 > 0$,当$x, y \in \Omega_{\delta_1}$,且$|x - y| < \delta_1$时,有一个$j$使$x, y \in V_j$.

(4) 对任意j,存在顶点在原点的多面体P_j,使当$x \in V_j \cap \Omega$时,$x + P_j \subset \Omega$.

(5) 存在$\delta_2 > 0$, $\delta_2 < \delta_1$,及常数K,使得当$x, y \in V_j \cap \Omega$,且$|x - y| < \delta_2$时,有$z \in (x + P_j) \cap (y + P_j)$,使

$$|x - z| + |y - z| \leqslant K|x - y|$$

(6) 存在一个顶点在原点的多面体P_0,当$x \in \Omega \setminus \Omega_{\delta_1}$时,$x + P_0 \subset \Omega$. 此外存在$\delta_3 > 0$,当$x, y \in \Omega \setminus \Omega_{\delta_1}$,且$|x - y| < \delta_3$时,$(x + P_0) \cap (y + P_0) \neq$.

(7) 存在向量y_i,当$x \in \partial\Omega \cap O_i$时,$x + ty_i \in \Omega$,对任意$0 < t < 1$.

引理 5.1.2(Gagliardo 定理) 设 Ω 是 R^n 中的有界锥形区域,对任意 $d > 0$,存在开集 $\Omega_1, \Omega_2, \cdots, \Omega_m$,满足:

(1) $\Omega = \bigcup\limits_{i=1}^{m} \Omega_i$;

(2) 对每一个 Ω_i,存在一个顶点在原点的平行多面体 P_{oi},使 $\Omega_i = \bigcup\limits_{x \in A_i} (x + P_{oi})$,其中 $A_i \subset \overline{\Omega}_i$ 且其直径小于等于 d.

此外,若 d 充分小,则每个 Ω_i 具有强局部 Lipschitz 性质.

这个引理的证明可在[1] 中找到,这里从略. 我们只说明一下,什么是平行多面体. 给定线性无关向量 $y_1, y_2, \cdots, y_n \in R^n$,集合

$$P = \left\{ \sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_j \,\middle|\, 0 < \lambda_j < 1, 1 \leqslant j \leqslant n \right\}$$

是一个有一个顶点在原点的平行多面体. 类似地,$x + P$ 为 P 的平移,它有一个顶点在 x.

引理 5.1.3 设 $1 \leqslant p < +$,Ω 是有界区域,$M \subset L^p(\Omega)$ 是列紧的充分必要条件为:

(1) M 是 $L^p(\Omega)$ 中的有界集,即存在 $K > 0$,使对任意 $f \in M$,$\| f \|_{L^p(\Omega)} \leqslant K$;

(2) M 在 $L^p(\Omega)$ 中等度连续,即对任意 $\varepsilon > 0$,存在 $\delta > 0$,当 $|y| < \delta$ 时

$$\int_{\Omega} |\tilde{f}(x + y) - \tilde{f}(x)|^p dx < \varepsilon^p \quad (\text{对任意 } f \in M)$$

其中 $\tilde{f}$ 是 f 的延拓函数,定义为 $\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \in \Omega. \\ 0, & x \in \Omega. \end{cases}$

这个引理的证明在泛函分析的教材内可找到.

为了叙述下列引理,先引进一些记号.

Ω 是 $R^n (n \geqslant 2)$ 中的有界开集,$K = (K_1, K_2, \cdots, K_k)$ 是 k 重指标,其中 $K_1, K_2, \cdots, K_k$ 满足 $1 \leqslant K_1 < K_2 < \cdots < K_k \leqslant n$. 令 $S = \{K \mid K = (K_1, K_2, \cdots, K_k)\}$,则 S 中有 $\binom{n}{k}$ 个 k 重指标. 记 $K' = (1, \cdots, K_1 - 1, K_1 + 1, \cdots, K_2 -$

$1,K_2+1,\cdots,K_{k-1},K_{k+1},\cdots,n)$，它是由$(1,2,\cdots,n)$中除了$K$中的$k$个分量后剩余的分量构成的$n-k$重指标.

记R_K^k是由坐标轴$x_{K_1},x_{K_2},\cdots x_{K_k}$张成的子空间，显然它是$R^n$的$k$维子空间，则$R_{K'}^{n-k}$是$R_K^k$在$R^n$中的直交补空间，即$R^n=R_K^k\oplus R_{K'}^{n-k}$. 记$x^K=(x_{K_1},\cdots x_{K_k})$，$x^{K'}=(x_1,\cdots,x_{K_1-1},\cdots x_{K_{k+1}},\cdots,x_n)$；记$dx=dx_1dx_2\cdots dx_n$，$dx^K=dx_{K_1}\cdots dx_{K_k}$，$dx^{K'}=dx_1\cdots dx_{K_1-1}\cdots dx_{K_{k+1}}\cdots dx_n$，$dx=dx^K\cdot dx^{K'}$. 记$x=x^K\oplus x^{K'}$.

记Ω_K^k为Ω在R_K^k上的投影，即$\Omega_K^k=\{x^k\mid x=x^K\oplus x^{K'}\in\Omega\}$，设$\xi^K=(\xi_{K_1},\cdots\xi_{K_k})$，记$\Omega(\xi^K)=\{x=x^K\oplus x^{K'}\in\Omega\mid x^K=\xi^K\}$是$n-k$维平面$x^K=\xi^K$和$\Omega$的截面.

引理5.1.4 设Ω是R^n中的有界开集，k为正整数，使$1\leqslant k\leqslant n$，$\lambda=\binom{n-1}{k-1}$，$F_K(x^K)=F_K(x_{K_1},\cdots x_{K_k})\in L^\lambda(\Omega_K^k)$，$F(x)=\prod_{K\in S}F_K(x^K)$，则

$$\int_\Omega|F(x)|dx\leqslant\prod_{K\in S}\left[\int_{\Omega_K^k}|F_K(x^K)|^\lambda dx^K\right]^{\frac{1}{\lambda}}$$

证明 对维数n作归纳.

(1) $n=2$，此时$k=1$或2. 若$k=2$，则只有$K=(1,2)$，$\lambda=1$. S中只有一个元素，所以结论显然成立. 若$k=1$，则$K=(1),(2)$，此时S中有两个指标，于是$F(x_1,x_2)=F_1(x_1)\cdot F(x_2)$，$\lambda=1$，令$\Omega_1^1$和$\Omega_2^1$分别是$\Omega$在$x_1$和$x_2$轴上的投影，则

$$\begin{aligned}\int_\Omega|F(x_1,x_2)|dx_1dx_2&=\int_\Omega|F_1(x_1)||F_2(x_2)|dx_1dx_2\\&\leqslant\int_{\Omega_1^1\times\Omega_2^1}|F_1(x_1)||F_2(x_2)|dx_1dx_2\\&\leqslant\int_{\Omega_1^1}|F_1(x_1)|dx_1\cdot\int_{\Omega_2^1}|F_2(x_2)|dx_2\end{aligned}$$

所以结论也成立.

(2) 假设维数为$n-1$时结论已成立.

（3）下证当维数为 n 时，结论也成立.

类似于（1）的情形，当 $k=1$，或 n 时，容易知道结论成立，所以不妨设 $1<k<n$.

设 $\beta=\binom{n-2}{k-1}$，$\gamma=\binom{n-2}{k-2}$. 令 $S=S_A\cup S_B$，其中 S_A 中的指标第 k 个分量不等于 n，而 S_B 中指标的第 k 个分量均为 n. 则 S_B 中元素的个数为 $\lambda=\binom{n-1}{k-1}$. 此外 $F(x)=\prod\limits_{K\in S}F_K(x^K)=\prod\limits_{K\in S_A}F_K(x^K)\prod\limits_{K\in S_B}F_K(x^K)$.

当 $K\in S_A$ 时，由 $F_K(x^K)\in L^\lambda(\Omega_K^k)$ 知 $\left|F_K(x^K)\right|^{\frac{\lambda}{\beta}}\in L^\beta(\Omega_K^k)$. 又显然 $(\Omega(x^n))_K^k\subset\Omega_K^k$，其中 x^n 固定. 于是 $\left|F_K(x^K)\right|^{\frac{\lambda}{\beta}}\in L^\beta((\Omega(x^n))_K^k)$. 又 $\prod\limits_{K\in S_A}\left|F_K(x_K)\right|^{\frac{\lambda}{\beta}}$ 是 $x_1,x_2,\cdots,x_{n-1}$ 的函数. 于是由归纳假设（2）得

$$\int_{\Omega(x^n)}\prod_{K\in S_A}|F_K(x_k)|^{\frac{\lambda}{\beta}}dx_1dx_2\cdots dx_{n-1}$$

$$\leqslant\prod_{K\in S_A}\left[\int_{(\Omega(x^n))_K^k}|F_K(x^K)|^\lambda dx^K\right]^{\frac{1}{\beta}}$$

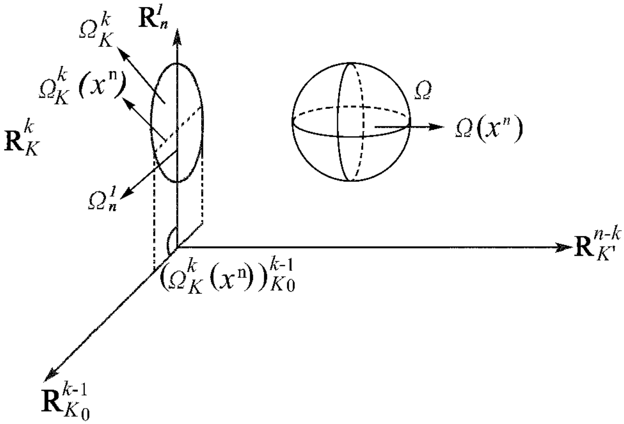
下面考虑函数 $\prod\limits_{K\in S_B}F_K(x^K)$，其中 $F_K(x^K)$ 均与 x_n 变量有关. 记 Ω_n^1 为 Ω 在 x_n 轴上的投影，$K_0=(K_1,K_2,\cdots,K_{k-1})$. 固定 x_n，则 $F_K(x^K)$ 在 $\Omega(x^n)$ 上是 $x_1,x_2,\cdots x_{n-1}$ 的函数. 因 $F_K(x^K)\in L^\lambda(\Omega_K^k)$，由 Fubini 定理，对几乎处处的 $x_n\in\Omega_n^1$，$F_K(x^K)\in L^\lambda((\Omega_K^k(x^n))_{K_0}^{k-1})$.

由下图易知 $(\Omega_K^k(x^n))_{K_0}^{k-1}=(\Omega(x^n))_{K_0}^{k-1}$，从而

$$\left|F_K(x^K)\right|^{\frac{\lambda}{\gamma}}\in L^\gamma((\Omega(x^n))_{K_0}^{k-1})$$

固定 x_n，把 $F_K(x^K)$ 作为 $x_1,x_2,\cdots,x_{n-1}$ 的函数，利用归纳假设有 对几乎处处的 $x_n\in\Omega_n^1$，

$$\int_{\Omega(x_n)}\prod_{K\in S_B}|F_K(x^K)|^{\frac{\lambda}{\gamma}}dx_1dx_2\cdots dx_{n-1}$$



$$\leqslant \prod_{K\in S_B}\left[\int_{(\Omega(x^n))_{K_0}^{k-1}} |F_K(x^K)|^{\lambda} dx_{K_1}\cdots dx_{K_{k-1}}\right]^{\frac{1}{\gamma}}$$

令 $p=\frac{\lambda}{\beta}$**，**$p'=\frac{\lambda}{\gamma}$**，因** $\beta+\gamma=\lambda$**，故** p,p' **为一对共轭指数**. **由** Hölder **不等式得**

$$\int_{\Omega(x^n)} |F(x)|dx_1\cdots dx_{n-1} = \int_{\Omega(x^n)} \prod_{K\in S_A}|F_K(x^K)|\prod_{K\in S_B}|F_K(x^K)|dx_1\cdots dx_{n-1}$$

$$\leqslant \left(\int_{\Omega(x^n)}\left(\prod_{K\in S_A}|F_K(x^K)|\right)^{p}dx_1\cdots dx_{n-1}\right)^{\frac{1}{p}}\cdot\left(\int_{\Omega(x^n)}\left(\prod_{K\in S_B}|F_K(x^K)|\right)^{p'}dx_1\cdots dx_{n-1}\right)^{\frac{1}{p'}}$$

$$\leqslant \left[\prod_{K\in S_A}\int_{(\Omega(x^n))_K^k}|F_K(x^K)|^{\lambda}dx^K\right]^{\frac{1}{\lambda}}\times\left[\prod_{K\in S_B}\int_{(\Omega(x^n))_{K_0}^{k-1}}|F_K(x^K)|^{\lambda}dx_{K_1}\cdots dx_{K_{k-1}}\right]^{\frac{1}{\lambda}}$$

故

$$\int_{\Omega}|F(x)|dx = \int_{\Omega_n^1}dx_n\int_{\Omega(x^n)}|F(x)|dx_1\cdots dx_{n-1}$$

$$\leqslant \prod_{K\in S_A}\left[\int_{\Omega_K^k}|F_K(x^K)|^{\lambda}dx^K\right]^{\frac{1}{\lambda}}$$

$$\int_{\Omega_n^1}dx_n\prod_{K\in S_B}\left[\int_{\Omega(x^n)_{K_0}^{k-1}}|F_K(x^K)|^{\lambda}dx_{K_1}\cdots dx_{K_{k-1}}\right]^{\frac{1}{\lambda}}$$

$$\leqslant \prod_{K\in S_A}\left[\int_{\Omega_K^k}|F_K(x^K)|^{\lambda}dx^K\right]^{\frac{1}{\lambda}}$$

$$\prod_{K\in S_B}\left[\int_{\Omega_n^1}dx_n\int_{(\Omega(x^n))_{K_0}^{k-1}}|F_K(x^K)|^{\lambda}dx_{K_1}\cdots dx_{K_{k-1}}\right]^{\frac{1}{\lambda}}$$

$$\leqslant \prod_{K\in S_A}\left[\int_{\Omega_K^k}|F_K(x^K)|^{\lambda}dx^K\right]^{\frac{1}{\lambda}}\cdot\prod_{K\in S_B}\left[\int_{\Omega_K^k}|F_k(x^K)|^{\lambda}dx^K\right]^{\frac{1}{\lambda}}$$

$$=\prod_{K\in S}\left[\int_{\Omega_K^k}|F_K(x^K)|^{\lambda}dx^K\right]^{\frac{1}{\lambda}}$$

上述第 2 个不等式中利用 S_B 中恰有 λ 个元素.

引理 5.1.5　**设** Q **是** R^n **中边长为** 2 **的立方体,其边分别平行于坐标轴,而** Ω **是由** Q **经平移得到的** L **型区域,又** $1\leqslant p<n$**,**$q=\dfrac{np}{n-p}$**,**$f\in C_0(R^n,\Omega)$**,则**

$$\|f\|_q\leqslant K\|f\|_{1,p}$$

其中 K **是与** f **无关的常数.**

证明　**设** $x\in\Omega$**,通过** x **作平行于** x_i **轴的直线,与** Ω **的交集记为** $W_i(x)$. **由区域的特点,**$W_i(x)$ **中含有一段以** x **为端点,长度为** 1 **的线段** l_x. **取** x_i **轴上的一单位向量** e_i**,使** $l_x=\left\{x+te_i\,\middle|\,0\leqslant t\leqslant 1\right\}$.

记 $\gamma=\dfrac{np-p}{n-p}$**,则** $\gamma\geqslant 1$. **因** $f\in C_0(R^n,\Omega)$**,故** $|f|$ **在** l_x **上绝对连续,从而几乎处处可导. 于是**

$$\int_0^1|f(x+(1-t)e_i)|^{\gamma}dt$$

$$=|f(x)|^{\gamma}$$

$$-\gamma\int_0^1 t|f(x+(1-t)e_i)|^{\gamma-1}\frac{d}{dt}|f(x+(1-t)e_i)|dt$$

令 $F_i(x_1,\cdots x_{i-1},x_{i+1},\cdots,x_n)=\sup\limits_{y\in W_i(x)}|f(y)|^{\frac{p}{n-p}}$**, 记** $x_i=(x_1,\cdots,x_{i-1},x_{i+1},\cdots,x_n)$**,则**

$$F_i(x_i)^{n-1} = \sup_{y\in W_i(x)} |f(y)|^{\gamma}$$

$$= \sup_{y\in W_i(x)} \Big[\int_0^1 |f(y+(1-t)e_i)|^{\gamma} dt$$

$$+ \gamma\int_0^1 t|f(y+(1-t)e_i)|^{\gamma-1} \frac{d}{dt}|f(y+(1-t)e_i)|dt\Big]$$

$$\leqslant \int_{W_i(x)} |f(x)|^{\gamma} dx_i + \gamma \int_{W_i(x)} |f(x)|^{\gamma-1} |D_i f| dx_i$$

设 $K(i) = (1,\cdots,i-1,i+1,\cdots,n)$，则它是 $n-1$ 重指标. 由 Fubini 定理有

$$\int_{\Omega^{n-1}_{K(i)}} |F_i(x_i)|^{n-1} dx_i \leqslant \int_{\Omega} |f(x)|^{\gamma} dx + \gamma \int_{\Omega} |f(x)|^{\gamma-1} |D_i f| dx$$

下面对 p 分两种情形来考虑.

（1）$p>1$ 的情形. 此时 $\gamma = \dfrac{np-p}{n-p} > 1$，$q = (\gamma-1)p'$，于是

$$\|F_i(x_i)\|^{n-1}_{L^{n-1}(\Omega^{n-1}_{K(i)})}$$

$$\leqslant \int_{\Omega} |f(x)|^{\gamma-1}(|f(x)| + \gamma|D_i f(x)|) dx$$

$$\leqslant \Big(\int_{\Omega}(|f(x)| + \gamma|D_i f(x)|^p dx\Big)^{\frac{1}{p}} \Big(\int_{\Omega}|f(x)|^{(\gamma-1)p'} dx\Big)^{\frac{1}{p'}}$$

$$\leqslant K_{\varepsilon}\|f\|_{1,p}\cdot\|f\|_q^{\frac{q}{p'}}$$

对 $F_i(x_i)(i=1,2,\cdots,n)$，利用引理 5.1.4 得

$$\|f\|_q^q = \int_{\Omega}|f|^{\frac{np}{n-p}} dx = \int_{\Omega}(|f|^{\frac{\gamma}{n-1}})^n dx$$

$$= \int_{\Omega}(|f|^{\frac{p}{n-p}})^n dx \leqslant \int_{\Omega}\prod_{i=1}^{n} F_i(x_i) dx$$

$$\leqslant \prod_{i=1}^{n}\|F_i(x_i)\|_{L^{n-1}(\Omega^{n-1}_{K(i)})}$$

$$\leqslant (K\|f\|_{1,p}\|f\|_q^{\frac{q}{p'}})^{\frac{n}{n-1}}$$

因为

$$\frac{(n-1)q}{n} - \frac{q}{p'} = 1$$

所以

$$\|f\|_q \leqslant K\|f\|_{1,p}$$

（2）$p = 1$ 的情形. 此时 $\gamma = 1$，于是

$$\|F_i(x_i)\|^{n-1}_{L^{n-1}(\Omega^{n-1}_{K(i)})} \leqslant \int |f(x)|dx + \int_{\Omega} |D_i f(x)|dx \leqslant \|f\|_{1,1}$$

同样利用引理 5.1.4 可证.

引理 5.1.6 设 Q 是 R^n 中边长为 1 的立方体，Q_t 表示边长为 t 的立方体，其表面分别平行于 Q 的表面. 如果 $f \in C(Q) \cap W^{1,p}(Q)$，而 $n < p \leqslant$ ，则

$$|f(x) - f(y)| \leqslant K|x-y|^{1-\frac{n}{p}} \|\nabla f\|_p \quad (\text{对任意 } x, y \in Q)$$

其中 K 是与 f 无关的常数.

证明 对任意 $x, y \in Q$，令 $\sigma = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} |x_i - y_i|$，则 $\sigma < 1$. 于是存在一个 Q_σ，使 $x, y \in \overline{Q}_\sigma < Q_\sigma$. 设 $z \in Q_\sigma$，则

$$f(x) = f(z) - \int_0^1 \frac{d}{dt} f(x + t(z-x))dt$$

又

$$\left|\frac{d}{dt} f(x + t(z-x))\right| = |\langle \nabla f(x + t(z-x)), z-x\rangle|$$

$$\leqslant \sqrt{n} \cdot \sigma |\nabla f(x + t(z-x))|$$

因此

$$|f(x) - f(z)| \leqslant \sqrt{n}\sigma \int_0^1 |\nabla f(x + t(z-x))|dt$$

从而

$$\left|f(x) - \frac{1}{\sigma^n}\int_{Q_\sigma} f(z)dz\right| = \left|\frac{1}{\sigma^n}\int_{Q_\sigma} (f(x) - f(z))dz\right|$$

$$\leqslant \frac{\sqrt{n}}{\sigma^{n-1}} \int_{Q_\sigma} dz \int_0^1 |\nabla f(x + t(z-x))|dt$$

下面关于 p 分两种情形讨论.

(1) $n<p<+\infty$. 作变换 $y=x+t(z-x)$,则 $dy=t^n dz$. 这样

$$\left|f(x)-\frac{1}{\sigma^n}\int_{Q_\sigma} f(z)\,dz\right|$$

$$\leqslant \frac{\sqrt{n}}{\sigma^{n-1}}\int_0^1 t^{-n}dt\int_{Q_{t\sigma}}|\nabla f(y)|\,dy$$

$$\leqslant \frac{\sqrt{n}}{\sigma^{n-1}}\int_0^1 t^{-n}dt\cdot\left(\int_{Q_{t\sigma}}|\nabla f(y)|^p dy\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_{Q_{t\sigma}}1^{p'}dy\right)^{\frac{1}{p'}}$$

$$\leqslant \frac{\sqrt{n}}{\sigma^{n-1}}\|\nabla f\|_p\int_0^1 t^{-n}\cdot|Q_{t\sigma}|^{\frac{1}{p'}}dt$$

$$\leqslant K_1\sigma^{1-\frac{n}{p}}\|\nabla f\|_p$$

同理可得

$$\left|f(y)-\frac{1}{\sigma^n}\int_{Q_6} f(z)\,dz\right|\leqslant K_1\sigma^{1-\frac{n}{p}}\|\nabla f\|_p$$

于是

$$|f(x)-f(y)|\leqslant 2K_1\sigma^{1-\frac{n}{p}}\|\nabla f\|_p$$

(2) $p=+\infty$ 的情形.

由上述推论可知

$$|f(x)-f(z)|\leqslant\sqrt{n}\sigma\|\nabla f\|$$

同理

$$|f(y)-f(z)|\leqslant\sqrt{n}\sigma\|\nabla f\|$$

于是

$$|f(x)-f(y)|\leqslant 2\sqrt{n}\sigma\|\nabla f\|$$

引理 5.1.7 设 Ω 是 R^n 中具有锥性质的有界区域,简称有界锥形区域,$p>n$,若 $f\in C^{\infty}(\Omega)\cap W^{1,p}(\Omega)$,则 $\sup\limits_{x\in\Omega}|f(x)|\leqslant K\|f\|_{1,p}$,其中 K 是与 f 无关的常数.

证明 设 $x_0\in\Omega$. 因为 Ω 是有界锥形区域,所以存在顶点在 x_0 的有限

锥 $S_{x_0} \subset \Omega$. 以 x_0 为原点考虑球面坐标$(\varphi_1, \cdots, \varphi_{n-1}, r)$,

$$S_{x_0} = \{(\varphi_1, \cdots, \varphi_{n-1}, r) \mid 0 < r < h, (\varphi_1, \cdots, \varphi_{n-1}) \in A\}$$

$f(x)$ 在球面坐标下记为 $f(r, \varphi)$,其中 $\varphi = (\varphi_1, \cdots, \varphi_{n-1})$. 于是

$$f(x_0) = f(0, \varphi) = f(r, \varphi) - \int_0^r \frac{d}{dt} f(t, \varphi)\, dt$$

由梯度的性质知道

$$|\nabla f(r, \varphi)| \geqslant \left| \frac{d}{dr} f(r, \varphi) \right|$$

这样

$$|f(x_0)| \leqslant |f(r, \varphi)| + \int_0^h |\nabla f(t, \varphi)|\, dt$$

两边在 S_{x_0} 上积分,得

$$\begin{aligned} & |f(x_0)| \cdot |S_{x_0}| \\ & \leqslant \int_0^h \int_A |f(r, \varphi)| r^{n-1} \omega(\varphi)\, dr d\varphi \\ & + \int_0^h r^{n-1} dr \int_A \int_0^h |\nabla f(t, \varphi)| \omega(\varphi)\, d\varphi dt \\ & = \int_{S_{x_0}} |f(y)|\, dy + \frac{h^n}{n} \int_0^h \int_A \frac{|\nabla f(t\varphi)|}{t^{n-1}} t^{n-1} \omega(\varphi)\, d\varphi dt \end{aligned}$$

其中 $\omega(\varphi)$ 是 R^n 中单位球面的表面积.

由 Hölder 不等式

$$\begin{aligned} & \int_0^h \int_A \frac{|\nabla f(t, \varphi)|}{t^{n-1}} t^{n-1} \omega(\varphi)\, d\varphi dt \\ & \leqslant \left(\int_0^h \int_A \left| \nabla f(t, \varphi) \right|^p t^{n-1} \omega(\varphi)\, d\varphi dt \right)^{\frac{1}{p}} \\ & \cdot \left(\int_0^h \int_A \left(\frac{1}{t^{n-1}} \right)^{p'} \cdot t^{n-1} \omega(\varphi)\, d\varphi dt \right)^{\frac{1}{p'}} \\ & = \int_A \omega(\varphi)\, d\varphi \int_0^h t^{(n-1)(1-p')}\, dt \cdot \| Df \|_{L^p(S_{x_0})} \end{aligned}$$

所以

$$|f(x_0)||S_{x_0}| \leqslant |S_{x_0}|^{\frac{1}{p'}}\left(\int_{S_{x_0}}|f(y)|^p dy\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$+\frac{h^n}{n}\int_A \omega(\varphi)d\varphi\int_0^h t^{(n-1)(1-p')}dt \cdot \|Df\|_{L^p(S_{x_0})}$$

$$|f(x_0)| \leqslant \left[|S_{x_0}|^{\frac{1}{p'}-1}+|S_{x_0}|^{-1}\frac{h^n}{n}\int_A \omega(\varphi)d\varphi\int_0^h t^{(n-1)(1-p')}dt\right]\|f\|_{W^{1,p}(\Omega)}$$

$$= K\|f\|_{1,p}$$

其中常数 K 只与区域的锥形性质有关.

引理 5.1.8 设 $Q_i = \left\{x \in R^i \,\middle|\, 0 < x_j < 1, j = 1,2,\cdots,i\right\}$,其中 $i = 1, 2,\cdots,n, p \geqslant 1$. 则下列结论成立:

(1) $\|u(x_1,\cdots,x_{n-1},x_n)\|_{L^p(Q_{n-1})} \leqslant K\|u\|_{W^{1,p}(Q_n)}$, 对任意 $u \in W^{1,p}(Q_n)$,对几乎处处 $x_n \in (0,1)$.

(2) $\sup\limits_{x\in Q_n}|u(x_1,\cdots,x_n)| \leqslant K\|u\|(x_1,\cdots,x_n)\|_{W^{n,1}(Q_n)}$, 对任意 $u \in W^{n,1}(Q_n)$.

其中 K 是与 u 无关的常数.

证明 首先就 $u \in C_0(R^n,Q_n)$ 证明上述结论. 由积分中值定理,存在 $\eta \in (0,1)$,使

$$\int_0^1 dx_n \int_{Q_{n-1}}|u(x_1,x_2,\cdots,x_{n-1},x_n)|^p dx_1 dx_2\cdots dx_{n-1}$$

$$= \int_{Q_{n-1}}|u(x_1,x_2,\cdots,x_{n-1},\eta)|^p dx_1,dx_2,\cdots,dx_{n-1}$$

因为

$$u(x_1,x_2,\cdots,x_{n-1},x_n) = u(x_1,x_2,\cdots,x_{n-1},\eta)$$

$$+\int_\eta^{x_n} D_n u(x_1,x_2\cdots x_{n-1},t)dt$$

所以

$$\int_{Q_{n-1}}|u(x_1,x_2,\cdots,x_{n-1},x_n)|^p dx_1 dx_2\cdots dx_{n-1}$$

$$\leqslant 2^p\left[\int_{Q_{n-1}}\left|u(x_1,x_2,\cdots,x_{n-1},\eta)\right|^p dx_1,dx_2\cdots dx_{n-1}\right.$$

$$+\int_{Q_{n-1}}\left|\int_{\eta}^{x_n} D_n u(x_1,x_2,\cdots x_{n-1},t)\,dt\right|^p dx_1 dx_2\cdots dx_{n-1}\Big]$$

$$\leqslant 2^p\Big[\int_{Q_{n-1}}|u(x_1,x_2,\cdots,x_{n-1},\eta)|^p dx_1 dx_2\cdots dx_{n-1}$$

$$+\int_{Q_{n-1}}\int_{\eta}^{x_n}\left|D_n u(x_1,x_2\cdots x_{n-1},t)\right|^p dt dx_1 dx_2\cdots dx_{n-1}\Big]$$

$$\leqslant 2^p\Big[\int_{Q_n}|u|^p dx+\int_{Q_{n-1}} dx_1 dx_2\cdots dx_{n-1}\int_{\eta}^{x_n}|D_n u(x_1,x_2,\cdots x_{n-1},t)|^p dt\Big]$$

$$\leqslant 2^p\Big[\int_{Q_n}|u|^p dx+\int_{Q_n}|D_n u|^p dx\Big]$$

于是

$$\| u(x_1,x_2,\cdots x_{n-1},x_n)\|_{L^p(Q_{n-1})}\leqslant 2\| u\|_{W^{1,p}(Q_n)}$$

故结论(1)**对** $C_0(R^n,Q_n)$ **中函数成立**.

为了证明结论(2),**利用结论**(1)**得**

$$\| D^\alpha u(x_1,\cdots,x_{n-1},x_n)\|_{L^p(Q_{n-1})}\leqslant 2\| D^\alpha u\|_{W^{1,p}(Q_n)}$$

于是

$$\| u(x_1,\cdots,x_{n-1},x_n)\|_{W^{n-1,p}(Q_{n-1})}\leqslant 2\| u\|_{W^{n,p}(Q_n)}$$

反复利用上式得

$$\| u(x_1,x_2,\cdots,x_n)\|_{W^{1,1}(Q_1)}\leqslant 2\| u(x_1,x_2,\cdots,x_n)\|_{W^{2,1}(Q_2)}$$

$$\leqslant\cdots\leqslant 2^{n-1}\| u\|_{W^{n,1}(Q_n)}$$

同理可证

$$|u(x_1,x_2,\cdots x_n)|\leqslant 2\| u(x_, x_2,\cdots x_n)\|_{W^{1,1}(Q_1)}$$

于是

$$|u(x_1,x_2,\cdots x_n)|\leqslant 2^n\| u\|_{W^{n,1}(Q_n)}$$

下面利用 $C_0(R^n,Q_n)$ **在** $W^{n,p}(Q_n)$ **中的稠密性来证明**(1)**和**(2).

设 $f\in W^{1,p}(Q_n)$,**存在** $f_m\in C_0(R^n,Q_n)$,**使**

$$\| f_m-f\|_{W^{1,p}(Q_n)}\to 0\quad (m\to\quad)$$

于是 $\{f_m\}$ 是 $W^{1,p}(Q_n)$ 中的基本列. 对固定的 x_n,由已得的结论知,$\{f_m\}$ 是 $L^p(Q_{n-1})$ 中的基本列,因 $L^p(Q_{n-1})$ 完备,所以 $\{f_m\}$ 在 $L^p(Q_{n-1})$ 中收敛. 又

$$\int_0^1 \left(\int_{Q_{n-1}} |f_m - f|^p dx_1 \cdots dx_{n-1}\right) dx_n \to 0 \quad (m \to \quad)$$

所以存在 $\{f_m\}$ 的子列,使对几乎处处的 x_n,有

$$\int_{Q_{n-1}} |f_{n_k} - f|^p dx_1 \cdots dx_{n-1} \to 0 \quad (k \to \quad)$$

于是对几乎处处的 x_n,有

$$\| f_{n_k} \|_{L^p(Q_{n-1})} \to \| f \|_{L^p(Q_{n-1})} \quad (k \to \quad)$$

因为 $f_{n_k} \in C_0(R^n, Q_n)$,所以

$$\| f_{n_k} \|_{L^p(Q_{n-1})} \leqslant 2 \| f_{n_k} \|_{W^{1,p}(Q_n)}$$

令 $k \to \quad$,$\| f \|_{L^p(Q_{n-1})} \leqslant 2 \| f \|_{W^{1,p}(Q_n)}$,对几乎处处 $x_n \in (0,1)$.

即结论(1)成立.

设 $f \in W^{n,1}(Q_n)$,取 $f_m \in C_0(R^n, Q_n)$,使

$$\| f_m - f \|_{W^{n,1}(Q_n)} \to 0 \quad (m \to \quad)$$

由于 $\{f_m\}$ 为 $W^{n,1}(Q_n)$ 的基本列,由(2)对 $C_0(R^n, Q_n)$ 中函数已成立,得到 $\{f_m\}$ 也是 $C_B(Q_n)$ 中的基本列,从而 $\{f_m\}$ 在 $C_B(Q_n)$ 中收敛. 又

$$\| f_m - f \|_{L^1(Q_n)} \to 0 (m \to \quad)$$

所以 $\{f_m\}$ 在 $C_B(Q_n)$ 中的极限为 f. 于是由 $\sup\limits_{Q_n} |f_m| \leqslant 2^n \| f_m \|_{W^{n,1}(Q_n)}$ 得

$$\sup_{Q_n} |f(x_1, x_2, \cdots, x_n)| \leqslant 2^n \| f \|_{W^{n,1}(Q_n)}$$

引理 5.1.9 设 Ω 是 R^n 中的有界开集,$0 < \mu \leqslant 1$,则 $C^{0,\mu}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow\hookrightarrow C(\overline{\Omega})$.

证明 由 Arzala - Ascoli 定理易得.

引理 5.1.10 设 Ω 是 R^n 中的开集,$0 < \lambda \leqslant \mu \leqslant 1$,则 $C^{0,\mu}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow\hookrightarrow C^{0,\lambda}(\overline{\Omega})$.

证明 设 M 是 $C^{0,\mu}(\overline{\Omega})$ 中的有界集. 由引理 5.1.9,存在 M 中的一点列 $\{f_m\}$ 在 $C(\overline{\Omega})$ 中收敛. 下证 $\{f_m\}$ 在 $C^{0,\lambda}(\overline{\Omega})$ 中也是收敛的.

令 $g_{mk}(x)=f_m(x)-f_k(x)$,则

$$\frac{|g_{mk}(x)-g_{mk}(y)|}{|x-y|^{\lambda}}$$

$$=\left[\frac{g_{mk}(x)-g_{mk}(y)}{|x-y|^{\mu}}\right]^{\frac{\lambda}{\mu}}\cdot|g_{mk}(x)-g_{mk}(y)|^{1-\frac{\lambda}{\mu}}$$

$$\leqslant\left[\frac{|f_m(x)-f_m(y)|}{|x-y|^{\mu}}+\frac{|f_k(x)-f_k(y)|}{|x-y|^{\mu}}\right]^{\frac{\lambda}{\mu}}\cdot[2\|g_{mk}(x)\|_{C(\overline{\Omega})}]^{1-\frac{\lambda}{\mu}}$$

$$\leqslant[2\sup_{m\geqslant1}\|f_m\|_{C^{0,\mu}(\overline{\Omega})}]^{\frac{\lambda}{\mu}}\cdot[2\|g_{mk}(x)\|_{C(\overline{\Omega})}]^{1-\frac{\lambda}{\mu}}\longrightarrow0\quad(m,k\to\quad)$$

从而

$$\|g_{m,k}\|_{C^{0,\lambda}(\overline{\Omega})}\to0\quad(m,k\to\quad)$$

故 $\{f_m\}$ 是 $C^{0,\lambda}(\overline{\Omega})$ 中基本列. 因 $C^{0,\lambda}(\overline{\Omega})$ 是完备的,故 $\{f_m\}$ 在 $C^{0,\lambda}(\overline{\Omega})$ 中收敛.

引理 5.1.11　设 Ω 是 R^n 中的一个区域,$1\leqslant q_1<q_0$. 如果 $W^{m,p}(\Omega)\hookrightarrow L^{q_0}(\Omega)$,$W^{m,p}(\Omega)\hookrightarrow\hookrightarrow L^{q_1}(\Omega)$,则对任意 $q\in[q_1,q_0)$,有 $W^{m,p}(\Omega)\hookrightarrow\hookrightarrow L^q(\Omega)$.

证明　设 $q\in(q_1,q_0)$. 令

$$\frac{1}{p}=\frac{q-q_0}{q_1-q_0},\quad\frac{1}{p'}=\frac{q_1-q}{q_1-q_0},\quad s=q_1\cdot\frac{q-q_0}{q_1-q_0},\quad t=q_0\cdot\frac{q_1-q}{q_1-q_0}$$

则 $s+t=q$,$\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$,$sp=q_1$,$tp'=q_0$.

对任意 $f\in W^{m,p}(\Omega)$,有

$$\|f\|_q=\left(\int_{\Omega}|f(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}=\left(\int_{\Omega}|f(x)|^s\cdot|f(x)|^t dx\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\leqslant\left(\int_{\Omega}|f(x)|^{sp}dx\right)^{\frac{1}{qp}}\cdot\left(\int_{\Omega}|f(x)|^{tp'}dx\right)^{\frac{1}{qp'}}$$

$$=\|f\|_{q_1}^{s/q}\cdot\|f\|_{q_0}^{t/q}$$

$$\leqslant K\|f\|_{q_1}^{s/q}\cdot\|f\|_{m,p}^{t/q}$$

设 $\{f_k\}$ 是 $W^{m,p}(\Omega)$ 中有界列,则存在子列 $\{f_{k_i}\}$ 在 $L^{q_1}(\Omega)$ 中收敛,从而

是 $L^{q_1}(\Omega)$ 中基本列. 由上述不等式得 $\{f_{k_i}\}$ 也是 $L^q(\Omega)$ 中的基本列,从而 $\{f_{k_i}\}$ 在 $L^q(\Omega)$ 中收敛.

5.2 嵌入定理的证明

有了上面准备工作,就可以证明嵌入定理了.

定理 5.2.1 设 Ω 为 R^n 中的有界锥形区域,$mp \leqslant n$.

(1) 如果 $mp < n, q = \dfrac{np}{n - mp}$,则 $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$;

(2) 如果 $mp = n, p > 1, 1 \leqslant q < +\infty$,则 $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$,

(3) 如果 $mp = n, p = 1$,则 $W^{n,1}(\Omega) \hookrightarrow C_B(\Omega)$.

证明 由 Gagliardo 定理(引理 5.1.2),有界锥形区域可以分解成一系列 L-型区域的并,即 $\Omega = \bigcup_{i=1}^{H} \Omega_i$,其中 Ω_i 是 L-型区域,H 为有限数. 如果 $W^{m,p}(\Omega_i) \hookrightarrow L^q(\Omega_i), i = 1, 2, \cdots, H$,则

$$\|f\|_{L^q(\Omega)} \leqslant \sum_{i=1}^{H} \|f\|_{L^q(\Omega_i)} \leqslant K \sum_{i=1}^{H} \|f\|_{W^{m,p}(\Omega_i)}$$
$$\leqslant K \cdot H \|f\|_{W^{m,p}(\Omega)}$$

所以 $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$. 再由 Gagliado 定理,L-型区域可由一平行多面体经过一系列平移得到,即 $\Omega_i = \bigcup_{x \in A} (x + V_i)$,其中 V_i 是一顶点在原点的平行多面体. 又平行多面体 V_i 可经一个可逆线性变换映成边长为 2 的 n 维立方体,记为 Q,则在此变换下 Ω_i 映成 $\Omega_i' = \bigcup_{x \in A} (x + Q)$. 综上所述,为了证明定理的(1)和(2),可以不妨假设 $\Omega = x + Q$.

(1) 考虑 $mp < n$ 的情形. 对 m 作归纳来证明.

① $m = 1$ 时,$1 \leqslant p < n, q = \dfrac{np}{n - p}$,要证 $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$. 由引理 5.1.5,对任意 $g \in C_0(R^n, \Omega)$, $\|g\|_{L^q(\Omega)} \leqslant K_1 \|g\|_{W^{1,p}}$,其中 K_1 是与 g 无关的常数. 设 $f \in W^{1,p}(\Omega)$,因 $C_0(R^n, \Omega)$ 在 $W^{1,p}(\Omega)$ 中稠密,故存在函数列 $\{g_n\} \subset C_0(R^n, \Omega)$,使 $\{g_n\}$ 在 $W^{1,p}(\Omega)$ 中收敛于 f,从而 $\{g_n\}$ 是 $W^{1,p}(\Omega)$ 中

的基本列. 由上述不等式知，$\{g_n\}$ 也是 $L^q(\Omega)$ 中的基本列，从而在 $L^q(\Omega)$ 中收敛，由实变函数论的基本定理，$\{g_n\}$ 在 $L^q(\Omega)$ 中的极限函数必为 f. 于是由 $\|g_n\|_{L^q(\Omega)} \leqslant K_1 \|g_n\|_{W^{1,p}(\Omega)}$ 得到 $\|f\|_{L^q(\Omega)} \leqslant K_1 \|f\|_{W^{1,p}(\Omega)}$. 这样就证明了 $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$.

② 假设结论(1)对 $m-1$ 时已成立，即当 $(m-1)p < n$，$q = \frac{np}{n-(m-1)p}$ 时，成立 $W^{m-1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$.

③ 下证结论(1)对 m 时也成立. 设 $f \in W^{m,p}(\Omega)$，则 f 的一阶偏导数 $D_i f \in W^{m-1,p}(\Omega)$ $(i = 1,2,\cdots,n)$. 记 $q_0 = \frac{np}{n-(m-1)p}$，由归纳假设得到

$$\begin{aligned}\|D_i f\|_{L^{q_0}(\Omega)} &\leqslant K_1 \|D_i f\|_{W^{m-1,p}(\Omega)} \\ &\leqslant K_1 \|f\|_{W^{m,p}(\Omega)} \quad (i = 1,2,\cdots,n)\end{aligned}$$

又显然 $f \in W^{m-1,p}(\Omega)$，故

$$\|f\|_{L^{q_0}(\Omega)} \leqslant K_1 \|f\|_{W^{m-1,p}(\Omega)} \leqslant K_1 \|f\|_{W^{m,p}(\Omega)}$$

于是 $f \in W^{1,q_0}(\Omega)$，且

$$\|f\|_{W^{1,q_0}(\Omega)} \leqslant K_2 \|f\|_{W^{m,p}(\Omega)}$$

由 $m = 1$ 的情形知 $W^{1,q_0}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$. 其中 $q = \frac{nq_0}{n-q_0} = \frac{np}{n-mp}$.

于是

$$\|f\|_{L^q(\Omega)} \leqslant K_3 \|f\|_{W^{1,q_0}(\Omega)}$$

结合前一不等式得

$$\|f\|_{L^q(\Omega)} \leqslant K_2 K_3 \|f\|_{W^{m,p}(\Omega)}$$

从而

$$W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$$

(2) 考虑 $mp = n$，$p > 1$ 的情形. 再分两种情形.

① 设 $q \geqslant p' = \frac{p}{p-1}$. 令 $s = \frac{pq}{p+q}$，则 $q = \frac{ns}{n-ms}$. 因 $1 \leqslant s < p$，对任意 α，$0 \leqslant |\alpha| \leqslant m$. 由 Hölder 不等式易知

$$\|D^\alpha f\|_{L^s(\Omega)} \leqslant K_1 \|D^\alpha f\|_{L^p(\Omega)} \leqslant K_1 \|f\|_{W^{m,p}(\Omega)}$$

其中 K_1 与 f 无关. 于是 $\|f\|_{W^{m,s}(\Omega)} \leqslant K_1 \|f\|_{W^{m,p}(\Omega)}$, 即 $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{m,s}(\Omega)$,此时 $n = mp > ms$. 对 $W^{m,s}(\Omega)$,利用(1)得到

$$W^{m,s}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$$

结合前一嵌入有 $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$.

② 设 $q < p'$,由上述①的结论,$W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{p'}(\Omega)$. 因 Ω 为有界区域,由 Hölder 不等式易知 $L^{p'}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$,从而 $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$.

(3) $mp = n, p = 1$ 的情形.

由引理5.1.8,$W^{n,1}(Q) \hookrightarrow C_B(Q)$,其中 Q 为任一 n 维立方体. 设 V 是任一多面体,则存在可逆的仿射变换把 V 映成立方体 Q,于是 $W^{n,1}(V) \hookrightarrow C_B(V)$.

由前面讨论,设 $\Omega = \bigcup_{i=1}^{H} \Omega_i$,$\Omega_i = \bigcup_{x\in A_i} (x + V_i)$,$f \in W^{n,1}(\Omega)$,则 $f \in W^{n,1}(\Omega_i)$ 且 $f \in W^{n,1}(x_0 + V_i)$,对任意 $x_0 \in A_i$. 从而

$$\sup_{x\in x_0+V_i} |f(x)| \leqslant K_i \|f\|_{W^{n,1}(x_0+V_i)} \leqslant K_i \|f\|_{W^{n,1}(\Omega)}$$

若 $x_1 \in A_i$,$x_1 \neq x_0$,则 $x_1 + V_i$ 可经平移变换化为 $x_0 + V_i$. 于是有

$$\sup_{x\in x_1+V_i} |f(x)| \leqslant K_i \|f\|_{W^{n,1}(x_1+V_i)} = K_i \|f\|_{W^{n,1}(x_0+V_i)}$$
$$\leqslant K_i \|f\|_{W^{n,1}(\Omega)}$$

其中 K_i 是与 $x_0 \in A_i$ 无关的常数. 取 $K = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant H} K_i$,则

$$\sup_{x\in\Omega} |f(x)| \leqslant K \|f\|_{W^{n,1}(\Omega)}$$

从而 $W^{n,1}(\Omega) \hookrightarrow C_B(\Omega)$.

定理5.2.2 设 Ω 是 R^n 中的有界锥形区域,$mp > n$,则

$$W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow C_B(\Omega).$$

证明 因为 $C^{\infty}(\Omega)$ 在 $W^{m,p}(\Omega)$ 中稠密,所以只要证明对任意 $f \in C^{\infty}(\Omega) \cap W^{m,p}(\Omega)$,有

$$\sup_{x\in\Omega} |f(x)| \leqslant K \|f\|_{W^{m,p}(\Omega)},$$

其中 K 是 f 无关的常数.

(1) $m = 1, p > n$ 的情形. 利用引理5.1.7即可.

(2) $m>1$, $p>n$ 的情形. 因 $W^{m,p}(\Omega)\hookrightarrow W^{1,p}(\Omega)$,利用(1)的情形即可.

(3) $m>1$, $p\leqslant n$ 的情形. 取整数 j,使 $1\leqslant j\leqslant m-1$,且 $jp\leqslant n<(j+1)p$.

① 设 $jp<n$. 设 α 是 n 重指标,满足 $|\alpha|\leqslant m-j$. 如果 $f\in C(\Omega)\cap W^{m,p}(\Omega)$,则 $D^{\alpha}f\in W^{j,p}(\Omega)$. 由定理 5.1.1,得

$$\|D^{\alpha}f\|_{L^{r}(\Omega)}\leqslant K_1\|D^{\alpha}f\|_{W^{j,p}(\Omega)}$$

其中 $r=\dfrac{np}{n-jp}$. 从而

$$\|f\|_{W^{m-j,r}(\Omega)}\leqslant K_2\|f\|_{W^{m,p}(\Omega)}$$

因为 $r>n$,所以

$$\sup_{x\in\Omega}|f(x)|\leqslant K\|f\|_{W^{1,r}(\Omega)}\leqslant K\|f\|_{W^{m,p}(\Omega)}$$

② 设 $jp=n$. 此时 $D^{\alpha}f\in W^{j,p}(\Omega)$,对任意 $|\alpha|\leqslant m-j$.

由定理 5.1.1,对任意 $r\in[1.\mathrm{TIF}\ ;E+\ )$,有

$$\|D^{\alpha}f\|_{L^{r}(\Omega)}\leqslant K\|D^{\alpha}f\|_{W^{j,p}(\Omega)}$$

取 $r>n$,和情形 ① 类似可证.

定理 5.2.3　设 Ω 是 L 型区域,$mp>n\geqslant(m-1)p$,则

$$W^{m,p}(\Omega)\hookrightarrow C^{0,\lambda}(\overline{\Omega})$$

其中 λ 由下列条件确定:

(1) 如果 $n>(m-1)p$,则 $0<\lambda\leqslant m-\dfrac{n}{p}$;

(2) 如果 $n=(m-1)p$,则 $0<\lambda<1$;

(3) 如果 $p=1$, $n=m-1$,则 $0<\lambda\leqslant 1$.

证明　首先由定理 5.2.2 得 $W^{m,p}(\Omega)\hookrightarrow C_B(\Omega)$,即对任意 $f\in W^{m,p}(\Omega)$,有

$$\sup_{x\in\Omega}|f(x)|\leqslant K_1\|f\|_{W^{m,p}(\Omega)}$$

为了证明 $W^{m,p}(\Omega)\hookrightarrow C^{0,\lambda}(\overline{\Omega})$,只要证明对任意 $f\in W^{m,p}(\Omega)$,有

$$\frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^{\lambda}}\leqslant K_2\|f\|_{W^{m,p}(\Omega)}$$

其中 K_2 是与 f 无关的常数.

因为 $W^{m-1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^r$,所以

$$W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{1,r}(\Omega)$$

其中 r 根据下列几种情形确定.

(1) 当 $n > (m-1)p$ 时,取 $r = \dfrac{np}{n-(m-1)p}$,此时 $1 - \dfrac{n}{r} = m - \dfrac{n}{p}$;

(2) 当 $n = (m-1)p$ 且 $p > 1$ 时,可任意选取 $r \in (n.\ \mathrm{TIF}\ ;E +\quad)$,使 $0 < 1 - \dfrac{n}{r} < 1$;

(3) 当 $p = 1, n = m-1$ 时,取 $r = +\quad$. 此时 $1 - \dfrac{n}{r} = m - \dfrac{n}{p} = 1$.

对上述三种情形总有 $n < r \leqslant +\quad$. 于是只要证明,对任意 $0 < \lambda \leqslant 1 - \dfrac{n}{r}$,存在 K,使对任意 $f \in W^{1,r}(\Omega)$,成立

$$\sup_{\substack{x,y\in\Omega \\ x\neq y}} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x-y|^{\lambda}} \leqslant K\|f\|_{W^{1,r}(\Omega)} \qquad (*)$$

又 $C_0(R^n,\Omega)$ 在 $W^{1,r}(\Omega)$ 中稠,所以只要证明上式对 $C_0(R^n,\Omega)$ 中的函数成立即可.

当 Ω 是 R^n 中的立方体时,由引理 5.1.6,上述不等式已成立. 通过线性变换可知,对 R^n 中的任意多面体,上述不等式也成立.

当 Ω 是 L 型区域时,由 L 型区域的性质得(见引理 5.1.1)当 $\triangle$ 充分小时,如果 $x,y \in V_j \cap \Omega$,且 $|x-y| < \triangle$ 时,存在 $z \in (x+P_j) \cap (y+P_j)$,使 $|x-z| + |y-z| \leqslant C|x-y|$. 在多面体 $x+P_j$ 和 $y+P_j$ 上,结论已成立,于是

$$\begin{aligned}
|f(x) - f(y)| &\leqslant |f(x) - f(z)| + |f(z) - f(y)| \\
&\leqslant K|x-z|^{\lambda}\|f\|_{W^{1,r}(x+P_j)} \\
&\quad + K|z-y|^{\lambda}\|f\|_{W^{1,r}(y+P_j)} \\
&\leqslant 2^{1-\lambda}KC^{\lambda}|x-y|^{\lambda}\|f\|_{W^{1,r}(\Omega)}
\end{aligned}$$

若 x,y 不满足上述条件,则再分下列两种情形.

（a）$|x-y|<\triangle_0<\triangle$，其中 $\triangle_0$ 是待定常数．此时根据引理5.1.1再分三种情形考虑．

① 当 $x,y\in\Omega_{\delta_1}$ 时，存在 j，使 $x,y\in V_j\cap\Omega$，从而是已考虑的情形．

② 当 $x\in\Omega_{\delta_1}$，$y\in\Omega\backslash\Omega_{\delta_1}$ 时，取 $\triangle_0$ 充分小，仍可使 $x,y\in V_j$，从而也化为已考虑的情形．

③ 当 $x,y\in\Omega\backslash\Omega_{\delta_1}$ 时，则 $x+P_0$ 和 $y+P_0$ 必相交．取 $z\in(x+P_0)\cap(y+P_0)$，使得

$$|x-z|+|y-z|\leqslant C|x-y|$$

和上述类似推得不等式（$*$）也成立

（b）当 $|x-y|>\triangle_0$ 时，显然

$$\begin{aligned}|f(x)-f(y)|&\leqslant|f(x)|+|f(y)|\\&\leqslant K\|f\|_{W^{1,r}(\Omega)}\\&\leqslant K\triangle_0^{-\lambda}\cdot|x-y|^{\lambda}\cdot\|f\|_{W^{1,r}(\Omega)}\end{aligned}$$

综合上述三个定理，我们已经证明了第2章2.6.3小节中一些主要的结果，即 $k=n$ 时的所有结果．至于 $k<n$ 的情形这里就不再赘述了，读者可参阅[1]，[2]．

5.3 紧嵌入定理的证明

最后，我们来证明第2章中2.6.4小节的结论，同样也只证 $k=n$ 的情形．

定理5.3.1 设 Ω 是 R^n 中的L型区域．

（1）如果 $mp>n$，则 $W^{m,p}(\Omega)\hookrightarrow\hookrightarrow C(\overline{\Omega})$．

（2）如果 $mp>n\geqslant(m-1)p$，$0<\lambda<m-\dfrac{n}{p}$，则 $W^{m,p}(\Omega)\hookrightarrow\hookrightarrow C^{0,\lambda}(\overline{\Omega})$．

证明 先证（2）．取 μ 使 $0<\lambda<\mu<m-\dfrac{n}{p}$，由嵌入定理5.2.3得

$W^{m,p}(\Omega)\hookrightarrow C^{0,\mu}(\Omega)$. 再由引理 5.1.10,得

$$W^{m,p}(\Omega)\hookrightarrow C^{0,\mu}(\overline{\Omega})\hookrightarrow\hookrightarrow C^{0,\lambda}(\overline{\Omega})$$

再证(1). 因 $mp>n$,存在整数 $s\leqslant m$,使 $sp>n\geqslant(s-1)p$. 取 $0<\lambda<s-\dfrac{n}{p}$,则由(2)得 $W^{m,p}(\Omega)\hookrightarrow W^{s,p}(\Omega)\hookrightarrow C^{0,\lambda}(\overline{\Omega})\hookrightarrow\hookrightarrow C(\overline{\Omega})$.

定理 5.3.2 设 Ω 是 R^n 中的有界锥形区域,$mp>n$,则

$$W^{m,p}(\Omega)\hookrightarrow\hookrightarrow C_B(\overline{\Omega})$$

证明 因 Ω 是有界锥形区域,所以,$\Omega=\bigcup\limits_{i=1}^{m}\Omega_i$,其中 Ω_i 均为 L 型区域. 由定理 5.3.1 $W^{m,p}(\Omega_i)\hookrightarrow\hookrightarrow C(\overline{\Omega}_i)$. 设 $\{f_n\}$ 为 $W^{m,p}(\Omega)$ 中的有界列,则 $f_n(x)\in C(\overline{\Omega}_i)$,且存在子列 $\{f_{nk}^{(1)}\}$ 使在 $\overline{\Omega}_1$ 上一致收敛. 对 $\{f_{nk}^{(1)}\}$,又存在子列 $\{f_{nk}^{(2)}\}$ 使在 $\overline{\Omega}_2$ 上一致收敛. 依此类推,存在 $\{f_{nk}^{(m)}\}$ 在 $\overline{\Omega}_m$ 上一致收敛. 由子列选取法可知 $\{f_{nk}^{(k)}\}$ 在每一个 $\overline{\Omega}_i$ 上一致收敛,故 $\{f_{nk}^{(k)}\}$ 在 Ω 上一致收敛. 因 $\{f_{nk}^{k}\}$ 在 Ω 上连续,故极限函数 $f(x)\in C_B(\Omega)$.

定理 5.3.3 设 Ω 是 R^n 中的有界锥形区域,$0<mp\leqslant n$,$q_0=\dfrac{np}{n-mp}$,则对任意 $q\in[1,q_0)$,$W^{m,p}(\Omega)\hookrightarrow\hookrightarrow L^q(\Omega)$.

证明 由引理 5.1.11,只要证明 $W^{m,p}(\Omega)\hookrightarrow\hookrightarrow L^1(\Omega)$ 即可.

设 $\{f_n\}_{n=1}$ 是 $W^{m,p}(\Omega)$ 中的有界列. 由嵌入定理 5.2.1,$\{f_n\}$ 是 $L^1_{(\Omega)}$ 中的基本列. 下面根据引理 5.1.3 来证明 $\{f_n\}$ 是列紧的.

又有界锥形区域可以是有限个 L 型区域的并集(见引理 5.1.2),这样只要就 L 型区域证明即可.

令 $\Omega_i=\left\{x\in\Omega\,\middle|\,\operatorname{dist}(x,\partial\Omega)>\dfrac{2}{i}\right\}$. 因 Ω 是 L 型区域,故

$$\mu(\Omega\setminus\Omega_i)\to 0\quad(i\to\ \ )$$

因

$$\int_{\Omega\setminus\Omega_i}|f_n(x)|dx\leqslant|\Omega\setminus\Omega_i|^{1-\frac{1}{p'}}\|f_n\|_{L^p(\Omega\setminus\Omega_i)}$$

$$\leqslant|\Omega\setminus\Omega_i|^{1-\frac{1}{p'}}\|f_n\|_{W^{m,p}(\Omega)}$$

$$\leqslant C\,|\Omega \backslash \Omega_i|^{1-\frac{1}{p'}}$$

其中 $C = \sup\limits_{n\geqslant 1} \| f_n \|_{W^{m,p}(\Omega)}$.

取 i 充分大,使对任意 n,有

$$\int_{\Omega\backslash\Omega_i} |f_n(x)|\,dx \leqslant \frac{\varepsilon}{4}$$

类似地可得

$$\int_{\Omega\backslash\Omega_i} |\bar{f}_n(x+y)|\,dx \leqslant \frac{\varepsilon}{4}$$

设 h 使 $|h| < \frac{1}{i}$,$0 \leqslant t \leqslant 1$,当 $x \in \Omega_i$ 时,$x + th \in \Omega_{2i}$. 设 $f \in C_0(R^n, \Omega)$,则

$$\int_{\Omega_i} |f(x+h) - f(x)|\,dx$$

$$= \int_{\Omega_i} \left| \int_0^1 \frac{df(x+th)}{dt} dt \right| dx$$

$$\leqslant \int_0^1 dt \int_{\Omega_i} \left| \frac{df(x+th)}{dt} \right| dx$$

$$\leqslant \sqrt{n} \cdot |h| \cdot \int_0^1 dt \int_{\Omega_i} |\nabla f(x+th)|\,dx$$

$$\leqslant \sqrt{n} \cdot |h| \int_0^1 dt \int_{\Omega} |\nabla f(x)|\,dx \leqslant \sqrt{n}\,|h|\,\| f \|_{W^{1,1}(\Omega)}$$

因 $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{1,1}(\Omega)$,故

$$\int_{\Omega_i} |f(x+h) - f(x)|\,dx \leqslant \sqrt{n} \cdot |h|\,\| f \|_{W^{m,p}(\Omega)}$$

因 $C_0(R^n, \Omega)$ 在 $W^{m,p}(\Omega)$ 中稠,故上式对 $W^{m,p}(\Omega)$ 中的函数均成立. 于是

$$\int_{\Omega_i} |f_n(x+h) - f_n(x)|\,dx \leqslant K|h|\,\| f_n \|_{W^{m,p}(\Omega)} \leqslant K_1 |h|$$

取 $h_0 = \min\left\{\frac{\varepsilon}{2K_1}, \frac{1}{i}\right\}$,则当 $|h| < h_0$ 时,有

$$\int_{\Omega_i} |\bar{f}_n(x+h) - \bar{f}_n(x)|\,dx = \int_{\Omega_i} |f_n(x+h) - f(x)|\,dx < \frac{\varepsilon}{2}$$

从而对任意 n，有

$$\int_{\Omega}|f_n(x+h)-f_n(x)|dx$$

$$=\int_{\Omega\setminus\Omega_i}|f_n(x+h)-f_n(x)|dx$$

$$+\int_{\Omega_i}|f_n(x+h)-f_n(x)|dx$$

$$\leqslant\frac{\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

由引理 5.1.3，$\{f_n\}$ 是 $L^1(\Omega)$ 中的列紧集.

参考文献

[1] R. Adams. Sobolev Spaces. Academic Press，N. Y. ，1975

[2] 李立康，郭毓陶. 索伯列夫空间引论. 上海：上海科学技术出版社，1981

[3] 崔志勇，金德俊，卢喜观. 线性偏微分方程引论. 长春：吉林大学出版社，1991

[4] 陈恕行. 偏微分方程概论. 北京：人民教育出版社，1981

[5] Zofia Szmydt. Fourier Transformation and Linear Differential Equations. Warszawa，1977

[6] F. Traves. Basic Linear Partial Differential Equations. Academic Press，1975

[7] 王元明，管平. 线性偏微分方程引论. 南京：东南大学出版社，2002