維基百科

利普希茨連續

维基百科，自由的百科全书

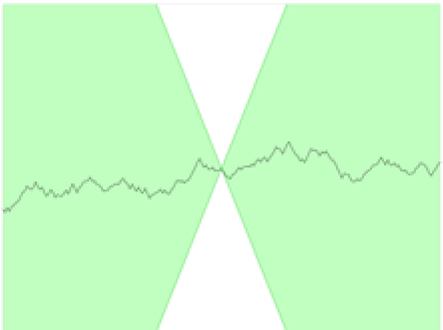
在數學中，特別是實分析，**利普希茨連續**（Lipschitz continuity）以德國數學家魯道夫·利普希茨命名，是一個比通常連續更強的光滑性條件。直覺上，利普希茨連續函數限制了函數改變的速度，符合利普希茨條件的函數的斜率，必小於一個稱為利普希茨常數的實數（該常數依函數而定）。

在微分方程，利普希茨連續是皮卡-林德洛夫定理中確保了初值問題存在唯一解的核心條件。一種特殊的利普希茨連續，稱為壓縮應用於巴拿赫不動點定理。

利普希茨連續可以定義在度量空間上以及賦范向量空間上；利普希茨連續的一種推廣稱為赫爾德連續。

目录

定義



对于利普希茨连续函数，存在一个双圆锥(白色)其顶点可以沿着曲线平移，使得曲线总是完全在这两个圆锥外。

對於在實數集的子集的函數$f\colon D\subseteq \mathbb{R}\to \mathbb{R}$，若存在常數$K$，使得$|f(a)-f(b)|\leq K|a-b|\quad \forall a,b\in D$，則稱$f$ 符合利普希茨條件，對於f 最小的常數K 稱為 f 的**利普希茨常數**。

若$K<1$，f 稱為收縮映射。

利普希茨條件也可對任意度量空間的函數定義：

給定兩個度量空間$(M,d_M),(N,d_N)$，$U\subseteq M$。若對於函數$f:U\to N$，存在常數K 使得

$$d_N(f(a),f(b))\leq Kd_M(a,b)\quad \forall a,b\in U$$

則說它符合利普希茨條件。

若存在$K\geq 1$使得

$$\frac{1}{K}d_M(a,b)\leq d_N(f(a),f(b))\leq Kd_M(a,b)\quad \forall a,b\in U$$

則稱f為**双李普希茨**(bi-Lipschitz)的。

皮卡-林德洛夫定理

若已知$y(t)$有界，f符合利普希茨條件，則微分方程初值問題$y'(t)=f(t,y(t)),\quad y(t_0)=y_0$剛好有一個解。

在應用上，t通常屬於一有界閉區間（如$[0,2\pi]$）。於是$y(t)$必有界，故y有唯一解。

例子

- $f:[-3,7]\to\mathbb{R},\quad f(x)=x^2$符合利普希茨條件，$K=14$。
- $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad f(x)=x^2$不符合利普希茨條件，當$x\to\infty,\quad f'(x)\to\infty$。
- 定義在所有實數值的$f(x)=\sqrt{x^2+5}$符合利普希茨條件，$K=1$。
- $f(x)=|x|$符合利普希茨條件，$K=1$。由此可見符合利普希茨條件的函數未必可微。
- $f:[0,1]\to[0,1],\quad f(x)=\sqrt{x}$不符合利普希茨條件，$x\to 0,\quad f'(x)\to\infty$。不過，它符合赫爾德條件。
- 若且唯若處處可微函數f的一次導函數有界，f符合利普希茨條件。這是中值定理的結果。所有C^1函數都是局部利普希茨的，因為局部緊緻空間的連續函數必定有界。

性質

- 符合利普希茨條件的函數連續，实际上一致連續。
- 双李普希茨(bi-Lipschitz)函數是單射。
- **Rademacher定理**：若$A\subseteq\mathbb{R}^n$且A為開集，$f:A''\to\mathbb{R}^n$符利普希茨條件，則f幾乎處處可微。[1]
- **Kirszbraun定理**：給定兩個希爾伯特空間H_1,H_2，$U\in H_1$，$f:U\to H_1$符合利普希茨條件，則存在符合利普希茨條件的$F:H_1\to H_2$，使得F的利普希茨常數和f的相同，且$F(x)=f(x)\quad\forall x\in U$。[2][3]

參考

1. Juha Heinonen, *Lectures on Lipschitz Analysis (http://www.math.jyu.fi/research/reports/rep100.pdf)* *（页面存档备份 (https://web.archive.org/web/20070418132957/http://www.math.jyu.fi/research/reports/rep100.pdf)，存于互联网档案馆）*, Lectures at the 14th Jyväskylä Summer School in August 2004. （第18頁以後）
2. M. D. Kirszbraun. *Uber die zusammenziehenden und Lipschitzchen Transformationen.* Fund. Math., (22):77–108, 1934.
3. J.T. Schwartz. *Nonlinear functional analysis*. Gordon and Breach Science Publishers, New York, 1969.