应用泛函分析．　第三次作业．　412115601２．

P38, 1.4

5．设 $f(x)$ 为可测集 E 上 (L) 可积函数，如果对任何有界可测函数 $\varphi(x)$ 都有 $(L)\int_E f(x)\varphi(x)dx=0$，证明：$f\sim 0$．

解：由 $\varphi(x)$ 是任意有界可测函数，则取 $\varphi(x)$ 为符号函数

$$\varphi(x)=\operatorname{sgn} f(x)=\begin{cases}1, & f(x)>0\\ 0, & f(x)=0\\ -1, & f(x)<0.\end{cases}$$

$$\Rightarrow (L)\int_E f(x)\varphi(x)dx=\int_E |f(x)|dx=0.$$

由唯一性定理，$(L)\int_E |f(x)|dx=0 \Leftrightarrow f\sim 0$ 于 E．得证．

8．讨论函数 $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$．

1)．在 $(0,1)$ 内是否 R 可积？

$f(x)$ 在 $(0,1)$ 上无界，故 R 不可积．

2)．在 $(0,1)$ 上是否广义 R 可积？

$$\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x}}dx=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^1\frac{1}{\sqrt{x}}dx=\lim_{\varepsilon\to 0}2\sqrt{x}\Big|_\varepsilon^1=2$$

$f(x)$ 在 $(0,1)$ 上广义 R 可积．

3)．在 $(0,1)$ 是否 L 可积？

$f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$ 在 $(0,1)$ 上广义 R 可积，且 $|f(x)|$ 在 $(0,1)$ 上亦广义 R 可积．

$\Rightarrow f(x)$ 在 $(0,1)$ 上 L 可积．

9．讨论函数 $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x}, & x\text{ 为无理数}\\ 1, & x\text{ 为有理数}\end{cases}$ 是否可积，如可积求其积分值：

1)．在 $[0,1]$ 上是否 R 可积．

$f(x)$ 在 $[0,1]$ 上除 1 外都不连续，故 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上不是 R 可积．

2)．在 $[0,1]$ 上是否广义 R 可积．

由 $f(x)$ 的定义，$f(x)$ 在任意一个以有理数为中心的邻域内都含有无理数，且 $f(x)$ 在该区间上不连续（即非 R 可积），故 $f(x)$ 也不是广义 R 可积．

3)．在 $[0,1]$ 上是否 L 可积．

$f(x)$ 在 $[0,1]$ 上是有界可测函数，故 $f(x)$ 是 L 可积．

令 Q 表示 $[0,1]$ 中的有理数点集，$Q^c=[0,1]/Q$ 表示 $[0,1]$ 上的无理数点集．

有 $m(Q)=0$, $m(Q^c)=m([0,1])-m(Q)=1$.

$$(L)\int_{[0,1]} f(x)\,dx = \int_Q 1\,dx + \int_{Q^c}\sqrt{x}\,dx$$
$$= 0 + \int_{[0,1]}\sqrt{x}\,dx = \int_0^1 \sqrt{x}\,dx$$
$$= \frac{2}{3}.$$

故 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上 L 可积，积分为 $\frac{2}{3}$.

$\boxed{\text{P41, 1.5}}$

① 证明离散型 Hölder 不等式：若
$$\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^p<+\infty,\quad \sum_{n=1}^{\infty}|y_n|^q<+\infty.$$
则
$$\sum_{n=1}^{\infty}|x_ny_n| \le \left(\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{n=1}^{\infty}|y_n|^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

证：已知不等式 $a^{\frac{1}{p}}b^{\frac{1}{q}} \le \frac{a}{p}+\frac{b}{q}$，$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ 且 $p>1, q>1$.

令 $a_i=\dfrac{|x_i|^p}{\sum_n |x_n|^p}$，$b_i=\dfrac{|y_i|^q}{\sum_n |y_n|^q}$.

则
$$\frac{|x_i|}{(\sum_n|x_n|^p)^{\frac{1}{p}}}\cdot\frac{|y_i|}{(\sum_n|y_n|^q)^{1/q}} \le \frac{|x_i|^p}{\sum_n|x_n|^p}\frac{1}{p}+\frac{|y_i|^q}{\sum_n|y_n|^q}\frac{1}{q}.$$

两边对 i 求和：
$$\frac{\sum_i|x_iy_i|}{(\sum_n|x_n|^p)^{\frac{1}{p}}(\sum_n|y_n|^q)^{1/q}} \le \frac{\sum_i|x_i|^p}{\sum_n|x_n|^p}\frac{1}{p}+\frac{\sum_i|y_i|^q}{\sum_n|y_n|^q}\frac{1}{q}=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1.$$

即
$$\sum_i|x_iy_i| \le \left(\sum_n|x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_n|y_n|^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

得证.

② 证明离散型 Minkowski 不等式：若
$$\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^p<+\infty,\quad \sum_{n=1}^{\infty}|y_n|^p<+\infty.$$
则
$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}|x_n+y_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{n=1}^{\infty}|y_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

证：当 $p=1$ 时，不等式显然成立；

当 $p>1$ 时，若 $(\sum_{n=1}^{\infty}|x_n+y_n|^p)^{1/p}=0$，该不等式亦成立.

若 $\sum_{n=1}^{\infty}|x_n+y_n|^p>0$，取 $q>1$ 使 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.（即 $\frac{p}{q}=p-1$）.

有
$$\sum_n|x_n|\,|x_n+y_n|^{\frac{p}{q}} \le \left(\sum_n|x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_n|x_n+y_n|^p\right)^{\frac{1}{q}} \quad —①$$
$$\sum_n|y_n|\,|x_n+y_n|^{\frac{p}{q}} \le \left(\sum_n|y_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_n|x_n+y_n|^p\right)^{\frac{1}{q}}. \quad —②$$
（Hölder 不等式）.

①式 + ②式，有
$$\sum_n(|x_n|+|y_n|)|x_n+y_n|^{\frac{p}{q}} \le \left[\left(\sum_n|x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_n|y_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right]\left(\sum_n|x_n+y_n|^p\right)^{\frac{1}{q}}$$

$\Rightarrow$ ~~$\sum_n (|x_n + y_n|)|x_n+y_n|^{\frac{p}{q}}$~~

$$\sum_n (|x_n+y_n|\,|x_n+y_n|^{\frac{p}{q}}) \le \sum_n (|x_n|+|y_n|)|x_n+y_n|^{\frac{p}{q}} \le \left((\sum_n |x_n|^p)^{\frac{1}{p}} + (\sum_n |y_n|^p)^{\frac{1}{p}}\right)\cdot(\sum_n |x_n+y_n|^p)^{\frac{1}{q}}$$

即 $(\sum_n |x_n+y_n|^p)^{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}-\frac{1}{q}} \le (\sum_n |x_n|^p)^{\frac{1}{p}} + (\sum_n |y_n|^p)^{\frac{1}{p}}$.

$\Rightarrow (\sum_{n=1}^{\infty} |x_n+y_n|^p)^{\frac{1}{p}} \le (\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p)^{\frac{1}{p}} + (\sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^p)^{\frac{1}{p}}$. 得证.

4. 若 $f \in L(E)$，问是否有 $f^2 \in L(E)$？

解：不一定，举一反例即可.

例如 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$, $E=(0,1)$, 则 $f \in L(E)$ 但 $f^2 \notin L(E)$.

P48, 2.1.

2. 对 $x, y \in \mathbb{R}$，规定 $\rho(x,y) = \sqrt{|x-y|}$，证明 $(\mathbb{R}, \rho)$ 是距离空间.

证：由距离空间的定义：

①. 非负性：$x, y \in \mathbb{R}$，有 $\rho(x,y) = \sqrt{|x-y|} \ge 0$ 且 $\rho(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.

②. 对称性：$x, y \in \mathbb{R}$，有 $\rho(x,y) = \sqrt{|x-y|} = \rho(y,x)$.

③. 三角不等式：$x, y, z \in \mathbb{R}$，

有 $\rho(x,y) = \sqrt{|x-y|} = |x-z+z-y|^{\frac{1}{2}}$

$\le |x-z|^{\frac{1}{2}} + |z-y|^{\frac{1}{2}} = \rho(x,z) + \rho(z,y)$.

以上三条性质均满足，故 $(\mathbb{R}, \rho)$ 是距离空间.

7. 设 X 是度量空间，在 X 中若 $x_n \to x$, $y_n \to y$ $(n \to \infty)$，证明：$\rho(x_n, y_n) \to \rho(x,y)$.

证明：令 $\varepsilon_n = x_n - x$, $\xi_n = y_n - y$，则 $\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = \lim_{n\to\infty} \xi_n = 0$.

$$\rho(x_n, y_n) = \rho(x+\varepsilon_n, y+\xi_n)$$

$$\le \rho(x+\varepsilon_n, y) + \rho(y, y+\xi_n) \quad \cancel{=\rho(x}$$

$$\le \rho(x,y) + \rho(x, x+\varepsilon_n) + \rho(y, y+\varepsilon_n).$$

两边取 $n \to \infty$，有：

$$\rho(x_n, y_n) \le \rho(x,y) + \rho(x,x) + \rho(y,y) = \rho(x,y).$$

同理：$\rho(x,y) \le \rho(x_n,y_n) + \rho(x_n, x_n-\varepsilon_n) + \rho(y_n, y_n-\xi_n)$ 两边取极限，有 $\rho(x,y) \le \rho(x_n,y_n)$.

由于 $\varlimsup_{n\to\infty}\rho(x_n,y_n)\le\rho(x,y)$ 且 $\varliminf_{n\to\infty}\rho(x_n,y_n)\ge\rho(x,y)$.

$\Rightarrow \rho(x_n,y_n)\to\rho(x,y)$.

$\boxed{P_{52}.\ 2.2}$

3. 设 X 是距离空间，$A\subset X$，证明：A 是闭集的充要条件是对于任意 $\{x_n\}\subset A$，若 $x_n\to x_0\ (n\to\infty)$，则 $x_0\in A$.

证：

$\Rightarrow$ $\forall\{x_n\}\subset A$，$x_n\to x_0(n\to\infty)$，~~且 x_0~~ 则 x_0 是 A 的聚点，$x_0\in A'$.

又 $x_0\in A$，则 ~~$x_0\in$~~ $A'\subset A$ $\Rightarrow$ A 是闭集.

$\Leftarrow$ 设 A 是闭集，若 x_0 是 A 的聚点，则 $x_0\in A$；否则若 $x_0\notin A$，总能找到 A 外一点，使得 $B(x_0,r)\cap(A-\{x_0\})=\phi$，与 x_0 为 A 的聚点不符.

7. 设 F_1 与 F_2 是度量空间 X 中的闭集，且 $F_1\cap F_2=\phi$，证明：存在开集 G_1,G_2，使 $F_1\subset G_1$，$F_2\subset G_2$，且 $G_1\cap G_2=\phi$.

证：由 F_1 与 F_2 是 X 中的闭集，且 $F_1\cap F_2=\phi$

$\Rightarrow \forall x_1\in F_1,\ \rho(x_1,F_2)>0;\ \forall x_2\in F_2,\ \rho(x_2,F_1)>0.$

取 $G_1=\bigcup\limits_{x_1\in F_1}B(x_1,\frac{1}{2}\rho(x_1,F_2))$，$G_2=\bigcup\limits_{x_2\in F_2}B(x_2,\frac{1}{2}\rho(x_2,F_1))$.

则 G_1,G_2 为开集，且 $F_1\subset G_1$，$F_2\subset G_2$. 下证 $G_1\cap G_2=\phi$.

反证法，若 $\exists y\in G_1\cap G_2$，则 $\exists x_1\in F_1$，$x_2\in F_2$，使得

$$y\in B(x_1,\tfrac{1}{2}\rho(x_1,F_2))\cap B(x_2,\tfrac{1}{2}\rho(x_2,F_1)).$$

$\Rightarrow$ $\rho(x_1,y)<\frac{1}{2}\rho(x_1,F_2)$，$\rho(x_2,y)<\frac{1}{2}\rho(x_2,F_1)$.

由三角不等式，有 $\rho(x_1,x_2)<\rho(x_1,y)+\rho(x_2,y)=\frac{1}{2}(\rho(x_1,F_2)+\rho(x_2,F_1))$

与 $\rho(x_1,x_2)\ge\max\{\rho(x_1,F_2),\rho(x_2,F_1)\}$ 即 $F_1\cap F_2=\phi$ 矛盾！

故 $G_1\cap G_2=\phi$. 得证.

9. 设 X 是度量空间，$A,B\subset X$，证明：

1). 若 $A\subset B$，则 $\bar A\subset\bar B$.

证：若 A 是闭球，则 $\bar A=A\subset B\subset\bar B$，显然成立.

若 A 不是闭集，则 $\bar A=A\cup A'$；由 $A\subset B\Rightarrow A'\subset\bar B$（由定义）.

$\therefore A\subset B, A'\subset\bar B \Rightarrow \bar A=A\cup A'\subset\bar B$. 得证.

2). $\bar{\bar A}=\bar A$.

证：$\bar{\bar A}=\bar A\cup\bar A'=\bar A\cup\bar A=\bar A$.

得证.

3). $\overline{A\cup B}=\bar{A}\cup\bar{B}$;

证: ~~若A, B均为闭集~~ $\overline{A\cup B}=(A\cup B)\cup(A\cup B)'$.

其中$(A\cup B)'$表示$A\cup B$的聚点的集合.

$\bar{A}\cup\bar{B}=A\cup A'\cup B\cup B'=(A\cup B)\cup(A'\cup B')$.

$\Rightarrow\overline{A\cup B}=\bar{A}\cup\bar{B}$, 得证.

4). $\overline{A\cap B}\subset\bar{A}\cap\bar{B}$, 并举例说明等号未并必成立.

证: $\overline{A\cap B}=(A\cap B)\cup(A\cap B)'$.

$\bar{A}\cap\bar{B}=(A\cup A')\cap(B\cup B')$

$=(A\cap B)\cup(A'\cap B')$

又$(A\cap B)'\subset A'\cap B'$. 故$\overline{A\cap B}\subset\bar{A}\cap\bar{B}$.

举例: 取$A=\{1-\frac{1}{n}\}$, $n\in N$, $B=\{1\}$.

则$\overline{A\cap B}=\phi$, $\bar{A}\cap\bar{B}=\{1\}$.

等号不成立

10. 设X是度量空间, 证明:

1). X中每个非空闭集必为可列个开集的交;

证: 设F为X中任一非空闭集,

$n\in N$, $G_n=\{x\in X\mid\rho(x,F)<\frac{1}{n}\}$, 则$G_n$是开集, 且$G_n$可列.

下证$F=\bigcap_{n=1}^{\infty}G_n$, 即F可表示为$G_n$的交.

显然$F\subset G_n\Rightarrow F\subset\bigcap_{n=1}^{\infty}G_n$.

若$x\in\bigcap_{n=1}^{\infty}G_n$, 则$\rho(x,F)\to 0$; 且F为闭集$\Rightarrow x\in F$.

得证.

2). X中的每个非空开集必为可列个闭集的并.

证: 由开集和闭集的对偶性,

从第一问可得, 若F为非空开集, 则F^c为闭集.

$F^c=\bigcap_{n=1}^{\infty}G_n$

$\Rightarrow F=(\bigcap_{n=1}^{\infty}G_n)^c=\bigcup_{n=1}^{\infty}G_n^c$, 即F是可列个闭集$G_n$的并.

得证.