EDP : Guide de survie

Remerciements : Marion Favre D'Echallens, Cécile Gontier, Brice Hannebique, Abdelhak Lemkhenter, Florimond Manca, Camille Raffin, Yann Thanwerdas, Mehdi Tomas

1 Les 7 étapes de la formulation variationnelle (FV) (à savoir par cœur !)

Exemple : problème de Dirichlet homogène 1D sur $[0,1]$.

E1. Obtention de la formulation faible

Objectif : obtenir une égalité intégrale à partir de l'égalité différentielle de la forme : $\int_{[0,1]} \phi' u' = \int_{[0,1]} f\phi$

→ Intégration par parties en supposant une régularité sur la solution :

1. On suppose l'existence d'une solution $u \in C^2([0,1])$
2. On multiplie l'équation homogène par une fonction test $\phi \in D(]0,1[)$
3. On applique la formule de Green (intégration par parties généralisée, *c.f.* cours)
4. On utilise les propriétés de ϕ, ici $\phi(0) = \phi(1) = 0$, pour obtenir la formulation faible $\int_{[0,1]} \phi' u' = \int_{[0,1]} f\phi$

E2. Obtention de la FV

Objectif : préparer le terrain pour appliquer plus tard le *théorème de Lax Milgram*. Il faut réunir **3 éléments** :

1. Un **espace de Hilbert** H
2. Une **forme bilinéaire** $a : u, v \in H \mapsto a(u,v)$
3. Une **forme linéaire** $l : v \in H \mapsto l(v)$

Ces trois éléments sont **à définir à partir de la formulation faible**. Ils doivent être tels que la FV s'écrit : "Trouver u dans H telle que : $\forall v \in H, a(u,v) = l(v)$."

Dans notre exemple, on pose $a(u,v) = \int u'v'$ et $l(v) = \int fv$. Les étapes E3 et E4 sont d'autres hypothèses à vérifier pour pouvoir appliquer Lax Milgram.

E3. Continuité de a et l

Propriété : "une forme multilinéaire a est continue dans H si et seulement s'il existe une constante $C \geq 0$ telle que : $\forall u_1, u_2, ..., u_n, \in H, |a(u_1, ...u_n)| \leq C||u_1|| \times ... \times ||u_n||$"

→ On utilise donc **l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour** a et **l'inégalité de Poincaré pour** l.

E4. Coercivité de a

Objectif : montrer qu'il existe $C > 0$ tel que $a(u,u) > C||u||_H^2$ pour u dans H.

→ On minore $a(u,u)$ pour ne garder que le terme en $\int u'^2$ puis on utilise l'inégalité de Poincaré. **Mentionner explicitement sur la copie que C est strictement positive !**

E5. Existence et unicité de la solution variationnelle

On peut maintenant appliquer le théorème de Lax Milgram ! On a en effet :

1. Un espace de Hilbert $H (= H_0^1$ dans notre cas)
2. Une forme bilinéaire continue et coercive a
3. Une forme linéaire continue l

Lax Milgram → **Il existe un unique u dans H tel que pour tout v dans H, $a(u,v) = l(v)$.**
De plus, comme $a(u,u) = l(u)$, cette solution dépend continûment de la source f (on applique l'inégalité de Cauchy-Schwarz) donc **la formulation variationnelle est bien posée**.

E6. Résolution de l'EDP

Objectif : vérifier que u est bien solution du problème posé. On vérifie pour cela 2 choses :

1. Solution de l'EDP : on part de $a(u,v) = l(v)$, on le récrit avec les intégrales et on refait une IPP pour arriver à l'EDP de départ.
2. Vérifiant les CL : on prend des $v \in H$ particuliers pour trouver $u(0)$ et $u(1)$ (en général $v = id$ et $v = 1$ suffisent).

E7. Régularité de la solution

Objectif : trouver à quel ensemble appartient la solution trouvée.

→ On utilise l'EDP vérifiée par u et l'inégalité de Poincaré. Ici, u est dans $H^2(0,1)$ et dans $C^2([0,1])$ si f est continue et de carré intégrable sur $[0,1]$.

Conseils finaux

Dans les exercices et contrôles, ces 7 étapes sont généralement décomposées en plusieurs questions :

1. "Ecrire la formulation variationnelle du problème aux limites" : E1, E2
2. "Montrer que le problème variationnel a une solution unique" : E3, E4, E5
3. "Déterminer un espace dans lequel le problème est bien posé" : E6, E7.

Exercices pour s'entraîner

- Exemple du cours utilisé dans cette fiche
- Exercice 4 du TD3
- Exercice 4, Q1 du TD4
- Annales corrigées

2 Le théorème de Lax Milgram

Énoncé

Soit H un espace de Hilbert $a : H \times H \to \mathbb{R}$ une forme bilinéaire continue et coercive. Alors

$$\forall \phi \in H', \exists! u \in H : \forall v \in H, a(u,v) = \langle \phi, v \rangle$$

On l'utilise plus généralement sous la forme :
Soit H un espace de Hilbert, $a : H \times H \to \mathbb{R}$ une forme bilinéaire continue et coercive. Alors pour tout $l : H \to \mathbb{R}$ forme linéaire continue,

$$\exists! u \in H : \forall v \in H, a(u,v) = l(v)$$

Cas d'utilisation classique

Dans la méthode de résolution d'une EDP se trouvant dans le cours, ce théorème s'utilise dans l'étape E5 (p.72 du poly). Il permet de répondre à la question "montrer que la formulation variationnelle de cette EDP est bien posée". Il s'agit de montrer que la solution existe et qu'elle est unique.
Pour utiliser ce théorème il faut bien se souvenir de ses **quatre hypothèses** que l'on prouve avec Cauchy-Schwarz et l'inégalité de Poincaré :

1. H est un espace de Hilbert
2. a est continue
3. a est coercive
4. l est continue

et retenir que **ce théorème prouve à la fois l'existence et l'unicité d'une solution, et le fait qu'elle appartienne à H.**

Exemple

Cet exemple est tiré de l'annale 2015, Q8.

Après calculs on est arrivé à la forme variationnelle suivante :
Trouver $w \in H$ telle que

$$\forall z \in H, \iint \zeta \partial_x w \partial_x z + \iint \zeta \partial_y w \partial_y z + \iint cwz = 0$$

avec $H := \{v \in H^1(]0,1[\times]0,1[) : v(0,\cdot) = v(\cdot,0) = v(\cdot,1) = 0 \text{ dans } L^2(0,1)\}$
On pose :

$$a : (w,z) \to \iint \zeta \partial_x w \partial_x z + \iint \zeta \partial_y w \partial_y z + \iint cwz$$

et

$$l : z \to 0$$

Ensuite on prouve les quatre hypothèses citées juste avant (se référer à la correction de l'annale pour les détails).
Comme les hypothèses sont vérifiées, on peut utiliser le théorème de Lax Milgram : il existe une unique solution $w \in H$ vérifiant

$$\forall z \in H, a(w,z) = l(z)$$

Comme ici il y a une solution évidente $w = 0$, avec le théorème on sait que c'est en fait l'unique solution !

3 Inégalité de Poincaré

Enoncé

L'inégalité de Poincaré permet de relier la norme 2 de la dérivée d'une fonction de H_0^1 avec la norme 2 de cette fonction.

Théorème : Il existe $C > 0$ tel que pour tout $u \in H_0^1$, on a : $\int_\Omega u^2 \leq C \int_\Omega u'^2$.

Cas d'utilisation classiques

Cette inégalité permet de montrer que des fonctions bilinéaires symétriques sont des produits scalaires. En effet, lorsque ces fonctions font intervenir les dérivées, il n'est pas évident de montrer la séparation ($\|u\| = 0 \leftrightarrow u = 0$). Dans ce cas, on montre d'abord que dans l'espace de notre fonction, qui est un espace de Hilbert, l'inégalité de Poincaré est vérifiée. Ensuite, on applique cette inégalité pour montrer que la séparation est vérifiée. Parfois, il faut appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz avant l'inégalité de Poincaré.

Exemple

(Annale 2015) Montrer que $(\cdot,\cdot) : u, v \mapsto u'v'$ est un produit scalaire sur $H = u \in H^1(0,1) : u(0) = 0$.
On vérifie d'abord que cette fonction est bilinéaire symétrique. Il suffit ensuite de montrer que $u \mapsto (u,u)$ est une norme. Pour cela, il faut montrer l'inégalité triangulaire (ok), la positivité (ok) et la séparation. Pour la séparation, $(u,u) = 0$ donne $\int_\Omega u'^2 = 0$. Or, par l'inégalité de Poincaré, $\int_\Omega u^2 \leq C \int_\Omega u'^2$. Donc $u = 0$ presque sûrement. Or, d'après le théorème de Rellich, u est continue. Donc comme $u(0) = 0$, on conclut que $u = 0$. D'où la séparation.

Exercices : annales 2014, 2015, 2016.

4 Théorème de trace

Enoncé

Le théorème de trace affirme que l'applicaiton linéaire : $\gamma : H^1(\Omega) \to L^2(\partial\Omega)$ qui à une fonction associe ses valeurs aux bords est continue.

Cas d'utilisation classiques

Ce théorème permet de montrer qu'un espace H est un espace de Hilbert. On utilise le résultat intermédiaire suivant : *tout fermé d'un espace de Hilbert est un espace de Hilbert*. Exemples d'espaces de Hilbert : $H_0^1(\Omega)$ et $H^k(\Omega)$ pour $k \in \mathbb{N}^*$. Pour montrer qu'un espace est un fermé, on utilise ceci : *l'image réciproque d'un fermé par une application continue est un fermé.* Comme application continue, on prend celle donnée par le théorème de trace. Dans l'ordre :

1. On identifie un espace de Hilbert H^* qui contient notre espace.
2. On montre que notre espace s'écrit comme intersection de H^* et d'un espace fermé, que l'on écrit comme image réciproque de l'application de trace qui est continue.
3. On peut alors affirmer que l'espace est Hilbertien.

Exemple (annale 2015)

(Annale 2015) Montrer que $H = \{u \in H^1(]0,1[^2) : u(\partial]0,1[^2) = 0\}$ *est un espace de Hilbert.*
On applique le théorème de trace : l'application $\gamma : H^1(]0,1[^2) \to L^2(\partial]0,1[^2)$ qui à une fonction associe ses valeurs aux bords est continue. Donc $H = H^1(]0,1[^2) \cap \gamma^{-1}(\{0\})$ est un fermé. Comme il est inclus dans l'espace de Hilbert $H^1(]0,1[^2)$, c'est bien un espace de Hilbert.

5 Théorème de Rellich

Enoncé

Soit I un intervalle ouvert borné de $\mathbb{R}$. Le théorème de Rellich affirme notamment qu'il existe une constante $C > 0$ ne dépendant que de I telle que :

$$\forall u \in H^1(I), ||u||_\infty < C||u||_{H^1}$$

Conséquence sur la régularité des fonctions de $H^1(I)$:

- Les fonctions de $H^1(I)$ sont prolongeables par continuité sur I ;
- Les fonctions de $H^1(I)$ sont plus régulières que les fonctions C^0 mais moins que les fonctions C^1 ;
- Par itération sur l'ordre, on a : $\forall k \geq 1, H^k(I) \subset C^{k-1}(I)$.

Attention, ce résultat est *FAUX* en dimension $d \geq 2$!

Cas d'utilisation classiques

Le théorème de Rellich permet de montrer la continuité d'une application linéaire définie sur $H^1(I)$.

Exemple

(Annale 2014, Q2.7) Montrer que l'application $\gamma_0 : v \mapsto (v(0), v(1))$ *qui va de* $H^2([0,1])$ *dans* $\mathbb{R}^2$ *est continue.*

Pour alléger les notations, on notera $H^1 = H^1([0,1])$, $H^2 = H^2([0,1])$ et $L^2 = L^2([0,1])$. D'après le théorème de Rellich, il existe $C > 0$ tel que : $\forall v \in H^2(\subset H^1), \forall x \in [0,1]$,

$$|v(x)| \leq C||v||_{H^1} \leq C||v||_{H^2}$$

La deuxième inégalité découle de, pour $v \in H^2$:

$$\begin{aligned} ||v||_{H^1}^2 &:= ||v||_{L^2}^2 + ||v'||_{L^2}^2 \\ &\leq ||v||_{L^2}^2 + ||v'||_{L^2}^2 + ||v''||_{L^2}^2 := ||v||_{H^2}^2. \end{aligned}$$

6 Discrétisation, consistance, Taylor-Lagrange

Exemple : problème de Dirichlet homogène 1D sur $[0,1]$

$$(1) : \begin{cases} -u''(x) = f(x), x \in]0,1[\\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

Rappels et méthode

- La **consistance** est définie à la définition 6.1.6, page 98 du polycopié.
- Pour le problème (1) approché par $A_h V_h = F_h$, l'**erreur de consistance** s'écrit $\epsilon_h = A_h u_h - F_h$ où $u_h = (u(x_1), ...u(x_J))^T$ est le vecteur colonne des valeurs de u en chaque point du maillage $(x_0, x_1, ..., x_{J+1})$ (de même pour F_h).
- L'**ordre de consistance** est, s'il existe, le plus grand p tel que $||\epsilon_h||_\infty = O(h^p)$. Il décrit la "vitesse" à laquelle le schéma converge lorsqu'on affine le maillage.

Pour prouver la consistance d'un schéma numérique, on écrit l'expression de ϵ_h et on y utilise **l'inégalité de Taylor-Lagrange** (TL) appliquée avec un pas h :

$$|u(x_{j+1}) - \sum_{k=0}^{n} u^{(k)}(x_j)\frac{h^k}{k!}| \leq ||u^{(n+1)}||_\infty \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}$$

Exemple

Dans notre problème (1), on trouve après discrétisation que A_h est la matrice du Laplacien discret. L'erreur de consistance est alors par définition le vecteur $\epsilon_h = A_h u_h - F_h$ de composantes :

$$\begin{aligned} \epsilon_h^j &= -\frac{u(x_{j-1}) - 2u(x_j) + u(x_{j+1})}{h^2} - f(x_j) \\ &= -\frac{u(x_{j-1}) - 2u(x_j) + u(x_{j+1})}{h^2} - u''(x_j) \end{aligned}$$

On suppose (pour l'exemple) que dans notre problème $f \in C^2([0,1])$ et donc $u \in C^4([0,1])$. On applique donc (TL) à l'ordre $n = 4$ en x_{j+1} et en x_{j-1} pour pouvoir majorer l'expression de chaque composante de ϵ_h (on n'a ici gardé que la partie *gauche* de l'inégalité développée selon $|a| \leq b \equiv -b \leq a \leq b$) car on veut *majorer* ϵ_h^j) :

$$u(x_{j+1}) - u(x_j) - u'(x_j)h - u''(x_j)\frac{h^2}{2} - u^{(3)}(x_j)\frac{h^3}{6} \geq -||u^4||_\infty \frac{h^4}{24}$$

$$u(x_{j-1}) - u(x_j) + u'(x_j)h - u''(x_j)\frac{h^2}{2} + u^{(3)}(x_j)\frac{h^3}{6} \geq -||u^4||_\infty \frac{h^4}{24}$$

En sommant ces deux inégalités, on obtient à droite $-h^2\epsilon_h^j$ et à gauche $-\frac{h^4}{12}||u^{(4)}||_\infty$, soit finalement en passant au sup :

$$||\epsilon_h||_\infty \leq \frac{h^2}{12}||u^{(4)}||_\infty = O(h^2)$$

Le schéma est donc consistant à l'ordre 2.

Exercices

Annale 2015, question 2.18.