

# Lp空间

维基百科，自由的百科全书

在数学中，***L*<sup>*p*</sup>空间**是由*p*次可积函数组成的空间；对应的*l<sup>p</sup>空间*是由*p*次可和序列组成的空间。它們有時叫做**勒貝格空間**，以昂利勒貝格命名（Dunford & Schwartz 1958，III.3），儘管依據Bourbaki（1987）它們是Riesz（1910）首先介入。在泛函分析和拓扑向量空间中，他们构成了巴拿赫空间一类重要的例子。

*L<sup>p</sup>*空间在工程学领域的有限元分析中有应用。

## 目录

### 基本知识

长度、距离与范数

可数维度空间的*p*-范数

### *L<sup>p</sup>*空间

特例

### *L<sup>p</sup>*空间的性质

对偶空间

嵌入

稠密子空间

### 参见

### 参考来源

### 外部链接

## 基本知识

### 长度、距离与范数

泛函分析中，常常会在某类函数的集合上架设拓扑结构乃至更复杂的结构，以便使用拓扑乃至分析学的知识来讨论这些集合的属性。最常见的附加结构是赋范向量空间。将函数集合作为装备了范数向量空间来看待，有助于理解函数类的关系和性质。范数是欧几里德空间中长度概念的推广。在平面几何或立体几何中，长度以及距离是最基本的概念之一。对象的形状、位置、大小等性质或关系都是建立在长度和距离的定义上。最直观的长度概念是由平直物理空间中抽象而来，满足勾股定理。例如说在平面上，原点到点***P* = (*x*,*y*)**的向量长度是





√

x

2


+

y

2




{\displaystyle {\sqrt {x^{2}+y^{2}}}}

。三维空间中，原点到点***P* = (*x*,*y*,*z*)**的向量长度





√

x

2


+

y

2


+

z

2




{\displaystyle {\sqrt {x^{2}+y^{2}+z^{2}}}}

。长度函数*l*满足如下的基本性质：

- 只有零向量的长度是零：



l
(
v
)
=
0
⟺
v
=
0
,


{\displaystyle l(v)=0\iff v=0,}
- 数乘线性：



∀
λ
∈

R

,
l
(
λ
v
)
=
λ
l
(
v
)
,


{\displaystyle \forall \lambda \in \mathbb {R} ,\,l(\lambda v)=\lambda l(v),}
- 满足三角不等式：



l
(
u
)
+
l
(
v
)
≥
l
(
u
+
v
)
.


{\displaystyle l(u)+l(v)\geq l(u+v).}

比如说在更一般的*n*维欧几里德空间**R<sup>n</sup>**中，可以定义向量***v* = (*x*<sub>1</sub>,*x*<sub>2</sub>,⋯*x*<sub>*n*</sub>)**的欧几里德长度是

l
(
v
)
=
(

x

1


2


+

x

2


2


+
⋯
+

x

n


2


)


1
2




{\displaystyle l(v)=(x\_{1}^{2}+x\_{2}^{2}+\cdots +x\_{n}^{2})^{\frac {1}{2}}}

这个函数也满足以上的基本性质。更一般地，在向量空间**V**中，满足以上性质的函数：



N
:
V
→

R

+


{\displaystyle {\mathcal {N}}:V\rightarrow \mathbb {R} \_{+}}

称为**V**上的“长度”函数或**范数**。比如在欧几里德空间**R<sup>n</sup>**中也可以对给定的实数*p* ≥ 1定义范数：

N

p


(
x
)
=
‖
x
‖

p


=
(

|

x

1


|

p


+

|

x

2


|

p


+
⋯
+

|

x

n


|

p


)


1
p




{\displaystyle {\mathcal {N}}\_{p}(x)=\|x\|\_{p}=(|x\_{1}|^{p}+|x\_{2}|^{p}+\cdots +|x\_{n}|^{p})^{\frac {1}{p}}}

这个范数称为**R<sup>n</sup>**上的*p*-范数。*p* = 2的时候，就是常见的欧几里德范数。*p* = 1的时候，是所谓的**曼哈顿距离**。当*p*趋于无穷大的时候，*p*-范数趋于一个“极限”范数，称为**一致范数**（也记作*L<sup>∞</sup>*-范数），定义为：

N

∞


(
x
)
=
‖
x
‖

∞


=
max
⁡
(

|

x

1


|
,

|

x

2


|
,
⋯
,

|

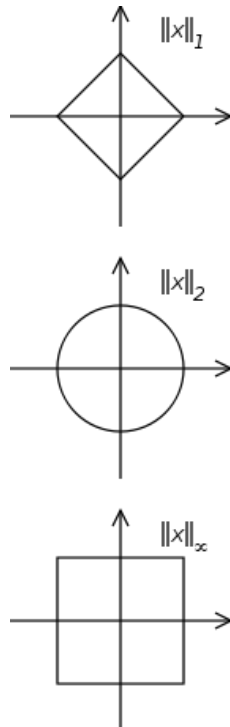
x

n


|
)
.


{\displaystyle {\mathcal {N}}\_{\infty }(x)=\|x\|\_{\infty }=\max \left(|x\_{1}|,|x\_{2}|,\cdots ,|x\_{n}|\right).}

对不同的*p*来说，等长度点的集合是不一样的。比如右图列出了三种不同范数下**单位圆**（从原点出发，“长度”等于1的点的集合）形状。



展示在不同的*p*-範數下的單位圓。

## 可数维度空间的 $p$ -范数

有限维空间中的 $p$ -范数可以如 $\mathbb{R}^n$ 一般定义。当空间维数是可数无限时，也可以将 $p$ -范数的定义拓展到其上。这个定义一般适用于由数列或序列构成的空间，称为 $\ell^p$ 空间。常见的有如下例子：

- $\ell^1$ 空间，所有绝对收敛级数构成的空间；
- $\ell^2$ 空间，所有平方收敛级数构成的空间；
- $\ell^\infty$ 空间，所有有界数列构成的空间。

事实上，序列集合上可以自然地按照序列的加法和数乘定义出向量空间。而 $\ell^p$ 空间则是在这个向量空间中定义如下的 $p$ -范数：

$$\|(x_n)_{n \in \mathbb{N}}\|_p = (|x_1|^p + |x_2|^p + \cdots + |x_n|^p + |x_{n+1}|^p + \cdots)^{\frac{1}{p}} = \left( \sum_{n \in \mathbb{N}} |x_n|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

然而，上式中右侧的级数不总是收敛的（有可能其级数和是无穷大）。所以 $\ell^p$ 空间实际上是所有序列集合中，令上式右侧的级数能够收敛的元素组成的子集。

可以证明，随着 $p$ 增大， $\ell^p$ 空间包含的元素也越多。实际上，如果 $p < q$ ，那么 $\ell^p$ 空间是 $\ell^q$ 空间的真子集。比如说，以下的数列：

$$a = \left( \frac{1}{n} \right)_{n \in \mathbb{N}^*} = \left( 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots \right)$$

不属 $\ell^1$ ，因为 $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$ 的和是无穷大。不过，由于

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \cdots$$

的和是有限的，所以数列 $a$ 属于 $\ell^2$ 。

## $L^p$ 空间

当空间维度是无穷而且不可数的时候（没有一个可数的基底），无法运用有限维或可数维度空间的办法来定义范数，但对于可积函数空间，仍然能够定义类似的概念。具体来说，给定可测空间 $(S, \Sigma, \mu)$ 以及大于等于1的实数 $p$ ，考虑所有从 $S$ 到域 $\mathbb{K}$ （ $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ 或 $\mathbb{R}$ ）上的可测函数。考虑所有绝对值的 $p$ 次幂在 $S$ 可积的函数，也就是集合：

$$\mathcal{L}^p(S, \mu) = \left\{ f; \|f\|_p = \left( \int_S |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} < \infty \right\}$$

集合中的函数可以进行加法和数乘：

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \quad (\lambda f)(x) = \lambda f(x), \quad \lambda \in \mathbb{K}$$

从不等式： $|f + g|^p \leq 2^{p-1}(|f|^p + |g|^p)$ 可知，两个 $p$ 次可积函数的和，也是一个 $p$ 次可积函数。另外，容易证明 $\|\lambda f\|_p = \lambda \|f\|_p$ ；闵可夫斯基不等式的积分形式说明三角不等式对 $\|\cdot\|_p$ 成立。满足这样条件的 $\|\cdot\|_p$ 构成一个半范数，令 $\mathcal{L}^p(S, \mu)$ 成为一个半赋范向量空间。之所以是半范数，是因为满足 $\|f\|_p = 0$ 的函数 $f$ 不一定是零函数。然而可以通过一套标准的拓扑方法从这个半赋范空间得到一个赋范空间：考虑 $\mathcal{L}^p(S, \mu)$ 中所有使得 $\|f\|_p = 0$ 的函数 $f$ 的集合：

$$N = \{f; \|f\|_p = 0\}.$$

集合 $N$ 可以看作是映射 $f \mapsto \|f\|_p$ 的零空间。对可测函数 $f$ 来说， $\|f\|_p = 0 \iff \mu(f \neq 0) = 0 \iff f$ 几乎处处为零（在测度 $\mu$ 意义下）。所以

$$N \equiv \ker(\|\cdot\|_p) = \{f: f \text{ } \mu\text{-几乎处处为} 0\}.$$

而 $N$ 同时也是 $\mathcal{L}^p(S, \mu)$ 的一个子空间。设 $L^p(S, \mu)$ 是 $\mathcal{L}^p(S, \mu)$ 关于 $N$ 的商空间。 $L^p(S, \mu)$ 中的某个元素 $f$ 可以看作是是和函数 $f$ 相差一个 $N$ 中元素的函数构成的等价类。这样定义的空间 $L^p(S, \mu)$ 是一个赋范向量空间，称为 $S$ 上函数关于测度 $\mu$ 的 $L^p$ 空间。 $\|\cdot\|_p$ 称为 $L^p(S, \mu)$ 函数的 $p$ -范数。

需要注意的是， $L^p$ 空间中的元素严格来说并不是具体的函数，而是一族函数构成的等价类。而当需要将 $L^p$ 空间元素当作函数来计算的时候，参与计算的实际上是从这一族函数中抽取的一个代表函数。

与序列空间一样，在函数空间上也可以定义一致范数。定义的方法和范数一样，首先定义：

$$\|f\|_\infty \equiv \inf\{C \geq 0: |f(x)| \text{ } \mu\text{-几乎处处小于等于} C\}, \\ \mathcal{L}^\infty(S, \mu) = \{f; \|f\|_\infty < \infty\}$$

$\|\cdot\|_\infty$ 是一个半范数，取 $N \equiv \ker(\|\cdot\|_\infty) = \{f: f \text{ } \mu\text{-几乎处处为} 0\}$ ，则 $\mathcal{L}^\infty(S, \mu)$ 关于 $N$ 的商空间是一个赋范向量空间，记作 $L^\infty(S, \mu)$ 。

一致范数与 $p$ -范数之间存在以下关系：

$$\|f\|_{\infty} = \lim_{p \rightarrow \infty} \|f\|_p$$

可以证明， $L^p$ 空间是完备的空间，也即是说是一个巴拿赫空间（完备赋范向量空间）。 $L^p$ 空间的完备性通常被称为里兹－费舍尔定理。具体的证明可以借助测度上的勒贝格积分的相关收敛定理来完成。

## 特例

$L^p$ 空间都是巴拿赫空间，但只有当 $p = 2$ 的时候， $L^2$ 空间是希尔伯特空间。也就是说，可以为 $L^2$ 空间中的元素定义内积。具体形式是：

$$\langle f, g \rangle = \int_S f(x) \overline{g(x)} d\mu(x).$$

其中的 $\overline{g(x)}$ 表示复数的共轭。这个内积是从2-范数自然诱导的内积。 $L^2$ 空间在傅立叶级数和量子力学以及其他领域有着重要的运用。

$\ell^p$ 空间可以看作是 $L^p$ 空间的特例。只要取 $L^p$ 空间中的 $S = \mathbf{N}$ ，测度为 $\mathbf{n}$ 上的计数测度，则对应的 $L^p(S, \mu)$ 就是 $\ell^p$ 空间。

## $L^p$ 空间的性质

### 对偶空间

一个拓扑向量空间的对偶空间是指由这个向量空间上的所有的连续线性泛函构成的泛函空间。对某个大于1的实数 $p$ ，设 $q$ 是满足 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ 的唯一实数，则空间 $L^p(S, \mu)$ 的对偶空间 $L^p(S, \mu)^*$ 与 $L^q(S, \mu)$ 同构。这个关系可以通过一个自然的同构映射展现：

$$\begin{aligned} \kappa_p: L^q(S, \mu) &\longrightarrow L^p(S, \mu)^* \\ f &\longmapsto \kappa_p(f) := \left( g \in L^p(S, \mu) \mapsto \int_S fg d\mu \right). \end{aligned}$$

赫尔德不等式保证了其中的泛函 $\kappa_p(f)$ 是良好定义并且是连续的。 $\kappa_p$ 是一个线性映射，根据赫尔德不等式的极限情况， $\kappa_p(f)$ 作为泛函的范数和 $f$ 一样，这说明 $\kappa_p$ 是一个等距映射。此外还可以证明，对偶空间 $L^p(S, \mu)^*$ 中的任一线性泛函对偶空间 $G$ 都能表示成某个 $\kappa_p(g)$ 的形式，所以 $\kappa_p$ 是一个满射。结合以上性质可以推出， $\kappa_p$ 是一个等距同构。在这个同构的意义下，我们常说 $L^p(S, \mu)$ 的对偶空间“是” $L^q(S, \mu)$ 。

以上性质说明，当大于1的时候， $L^p(S, \mu)$ 是一个自反空间： $L^p(S, \mu)$ 的二次对偶空间（对偶空间的对偶空间）“是”它自己（在同构的意义下）。具体来说，从 $\kappa_p$ 出发，可以构造出以下的关系：

$$j_p: L^p(S, \mu) \xrightarrow{\kappa_q} L^q(S, \mu)^* \xrightarrow{(\kappa_p^{-1})^*} L^p(S, \mu)^{**}$$

$\kappa_q$ 与 $(\kappa_p^{-1})^*$ 的复合映射 $j_p$ 是从 $L^p(S, \mu)$ 映射到其二次对偶空间的赋值嵌入映射：

$$\forall f \in L^p(S, \mu), G \in L^p(S, \mu)^*, \exists g \in L^q(S, \mu) \text{ 使得 } G = \kappa_p(g).$$

从而

$$[j_p(f)](G) = \left[ \left( (\kappa_p^{-1})^* \circ \kappa_q \right) (f) \right] (G) = \left[ (\kappa_p^{-1})^* (\kappa_q(f)) \right] (G) = [\kappa_q(f)] (\kappa_p^{-1}(G)) = [\kappa_q(f)] (g) = \int_S fg d\mu = G(f).$$

作为两个等距同构的复合映射， $j_p$ 也是等距同构。这说明 $L^p(S, \mu)$ 和 $L^p(S, \mu)^{**}$ 也是同构关系。

如果测度 $\mu$ 是 $\sigma$ -有限测度，那么 $L^1(S, \mu)^*$ 和 $L^\infty(S, \mu)$ 也是等距同构。可以证明，

$$\kappa_1: f \in L^\infty(S, \mu) \longmapsto \left( g \in L^1(S, \mu) \mapsto \int_S fg d\mu \right)$$

是 $L^\infty(S, \mu)$ 到 $L^1(S, \mu)^*$ 上的一个同构。

$L^\infty(S, \mu)$ 则更为复杂。 $L^\infty(S, \mu)^*$ 可以被刻画为所有关于测度 $\mu$ 绝对连续的有界带号有限可加测度的集合。如果承认选择公理，那么一般来说， $L^\infty(S, \mu)^*$ 这个集合要比 $L^1(S, \mu)$ “大得多”。只有对某些简单的测度 $\mu$ ， $L^\infty(S, \mu)^*$ 会和 $L^1(S, \mu)$ 同构。

### 嵌入

给定两个实数： $1 \leq p < q \leq \infty$ ，当比较 $L^p(S, \mu)$ 和 $L^q(S, \mu)$ 的时候会发现，前者中包含一些局部行为更加不规则的函数，而后者中则包含了“尾巴更粗”的函数。举例来说， $L^1(\mathbf{R})$ 中的连续函数（也就是实数域上的勒贝格可积函数）可以在0的附近取很大的值，但当自变量趋于无穷大的时候，函数的值必须趋于0。而对于 $L^\infty(\mathbf{R})$ 中的连续函数（有界连续函数），无论自变量多大，函数值都可以不在0附近，但反过来说，无论自变量取多少，函数的值也不能超

过上界和下界。

假设全集*S*在*μ*中的测度有限，以及1 ≤ *p* < *q* ≤ ∞。那么由赫尔德不等式有如下限制：

‖
f
‖

p


≤
μ
(
S
)

(
1

/

p
)
−
(
1

/

q
)


‖
f
‖

q




{\displaystyle \|f\|\_{p}\leq \mu (S)^{(1/p)-(1/q)}\|f\|\_{q}}

这说明空间*L<sup>q</sup>*(*S*, *μ*)可以被连续地嵌入到*L<sup>p</sup>*(*S*, *μ*)里面。换句话说，*L<sup>q</sup>*(*S*, *μ*)到*L<sup>p</sup>*(*S*, *μ*)上的恒等映射***I<sub>p,q</sub>***是有界连续映射。***I<sub>p,q</sub>***的算子范数就是由以上不等式取等号的情形确定的：

‖

I

p
,
q


‖
=
μ
(
S
)

(
1

/

p
)
−
(
1

/

q
)


.


{\displaystyle \|I\_{p,q}\|=\mu (S)^{(1/p)-(1/q)}.}

### 稠密子空间

研究某个复杂的无穷维赋范空间的时候，常常会使用一个由空间中比较“简单”的元素构成的稠密子集来逼近空间中的一个元素。假设1 ≤ *p* < ∞，则空间*L<sup>p</sup>*(*S*, *μ*)中的元素可以用测度空间 (*S*, *Σ*, *μ*) 上的**简单可积函数**逼近。给定测度空间(*S*, *Σ*, *μ*)，其上的一个简单可积函数指的是形同：

f
=

∑

j
=
1


n



a

j



1

A

j




{\displaystyle f=\sum \_{j=1}^{n}a\_{j}\mathbf {1} \_{A\_{j}}}

的函数。其中的*a<sub>j</sub>*是实数或复数系数，*A<sub>j</sub>* ∈ *Σ* 是测度有限的可测集合。由勒贝格积分的构造方法可知，简单可积函数的集合在*L<sup>p</sup>*(*S*, *μ*)中稠密。

如果*S*本身也是测度空间，而*μ*是*S*上的博雷尔测度，那么可以通过乌雷松引理证明，所有*S*可测而且测度有限的子集对应的指示函数都可以通过连续函数逼近。所以所有的简单可积函数可以用连续函数逼近。因而可以证明，*L<sup>p</sup>*(*S*, *μ*)中的连续函数构成的集合在*L<sup>p</sup>*(*S*, *μ*)中稠密<sup>[1]:84</sup>。对于更具体的空间，可以证明更加强化的结果。比如说当*S*是*n*维欧几里德空间，而*μ*是*S*上的正则博雷尔测度的时候，可以证明，所有紧支撑的光滑函数的集合在*L<sup>p</sup>*(*S*, *μ*)中稠密。

## 参见

- 哈代空间
- 赫尔德平均
- 赫尔德空间
- 方均根

## 参考来源

- Piotr Hajlasz, Pekka Koskela. Sobolev Met Poincaré. American Mathematical Society: Memoirs of the American Mathematical Society. 2000, (688).

- Adams, Robert A. Sobolev Spaces. New York: Academic Press. 1975. ISBN 978-0-12-044150-1.

## 外部链接

- PlanetMath上Proof that *L<sup>p</sup>* spaces are complete (http://planetmath.org/?op=getobj&from=objects&id=6270)的資料。

取自“https://zh.wikipedia.org/w/index.php?title=Lp空间&oldid=54798402”

本页面最后修订于2019年6月12日 (星期三) 23:35。

本站的全部文字在知识共享 署名-相同方式共享 3.0协议之条款下提供，附加条款亦可能应用。（请参阅使用条款）

Wikipedia®和维基百科标志是维基媒体基金会的注册商标；维基™是维基媒体基金会的商标。

维基媒体基金会是按美国国内稅收法501(c)(3)登记的非营利慈善机构。