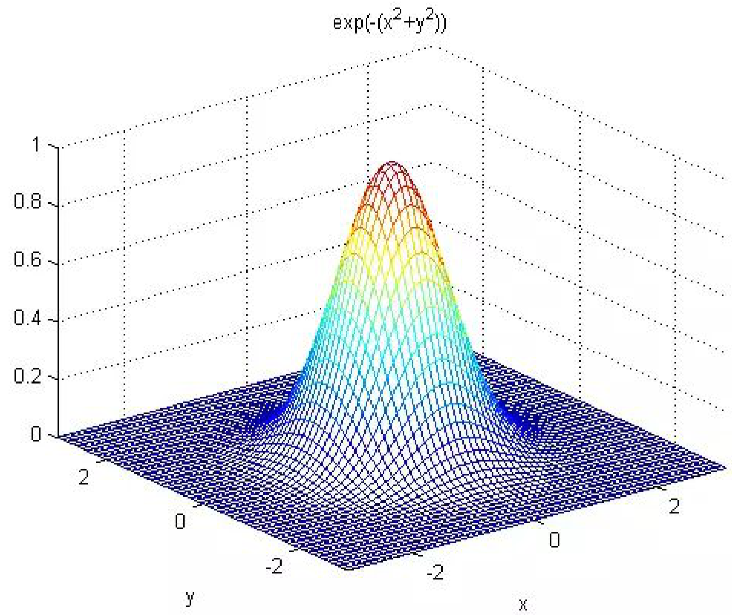
Box-Muller变换原理详解

GCME
中国科学院大学 基础数学硕士



Box-Muller变换

Box-Muller变换是通过服从均匀分布的随机变量，来构建服从高斯分布的随机变量的一种方法。

具体的描述为：选取两个服从[0,1]上均匀分布的随机变U1、U2，X、Y满足

$$X = cos(2\pi U_1)\sqrt{-2\ln U_2}$$
$$Y = sin(2\pi U_1)\sqrt{-2\ln U_2}$$

则X与Y服从均值为0，方差为1的高斯分布。

原理详解

假定X、Y服从均值为0，方差为1的高斯分布，且相互独立。令p(X)和p(Y)分别为其密度函数，则

$$p(X)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{X^2}{2}},p(Y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{Y^2}{2}}$$

由于X,Y相互独立，因此它们的联合概率密度满足

$$p(X,Y)=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{X^2+Y^2}{2}}$$

将X、Y作坐标变换，使

$$X=Rcos(\theta),Y=Rsin(\theta)$$

则

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{X^2+Y^2}{2}}dXdY=\int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{R^2}{2}}Rd\theta dR=1$$

由此可得R与θ的分布函数PR与Pθ

$$P_R(R\leq r)=\int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{r}\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{R^2}{2}}Rd\theta dR=1-e^{-\frac{r^2}{2}}$$
$$P_\theta(\theta\leq\phi)=\int_{0}^{\phi}\int_{0}^{\infty}\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{R^2}{2}}Rd\theta dR=\frac{\phi}{2\pi}$$

显然，θ服从[0,2π]上的均匀分布。令

$$F_R(r)=1-e^{-\frac{r^2}{2}},$$

则其反函数

$$R=F_R^{-1}(z)=\sqrt{-2\ln(1-z)}.$$

当z服从[0,1]上均匀分布时，R的分布函数为FR(r)。因此可以选取两个服从[0,1]上均匀分布的随机变量U1、U2，使得

$$\theta=2\pi U_1，1-z=U_2，\text{即}R=\sqrt{-2\ln U_2}。$$

将此带入

$$X=Rcos(\theta),Y=Rsin(\theta)$$

即可得到最初的两个关于X与Y的表达式，它们服从均值为0，方差为1的高斯分布。

编辑于 2018-06-29

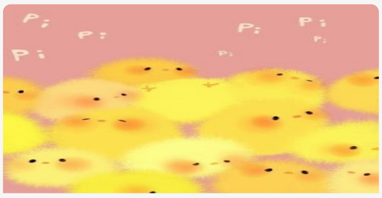
文章被以下专栏收录

人工智能·算法研讨

关注深度学习、计算机视觉、SLAM算法以及IOT与机器人等相关内容，分享关于这些...

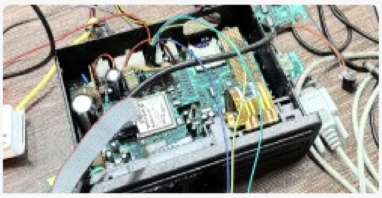
进入专栏

推荐阅读



图像配准传统算法总结

白小鱼发表于图像配准指...



浅析Batch Normalization

wangr...发表于算法管锥编

目标检测中的Anchor Free方法(二)

上周看了源于keypoint Motivation的anchor free方法，

扬之水发表于从目标检测...

1 条评论

写下你的评论...

Jeck Jogging 1 个月前

极坐标变换是不是给XY设置了限制了，X^2+Y^2=R？那不就是不相互独立了