Séance IX : Transformée de Fourier et fonction caractéristique

A) Objectifs de la séance

A la fin de cette séance,

- je connais la définition et les propriétés de la transformée de Fourier d'une fonction intégrable;
- je connais la transformée de Fourier d'une gaussienne;
- je comprends la construction de la transformation de Fourier dans L^2 et je connais la formule d'inversion;
- je sais exprimer le fait que la transformation de Fourier dans L^2 est une isométrie (Parseval);
- je connais le lien entre transformée de Fourier et dérivation, ainsi qu'entre transformée de Fourier et convolution;
- je suis capable de déterminer la fonction caractéristique d'une variable aléatoire.

B) Pour se familiariser avec les concepts (à traiter avant les séances de TD)

Les questions IX.1 et IX.2 sont à traiter avant la séance de TD. Les corrigés sont disponibles sur internet.

En cours, on a vu que la transformée de Fourier est une application linéaire de L^1 dans C^0 ou de L^2 dans L^2. Nous allons vérifier que l'espace d'arrivée dépend bien de l'espace de départ.

Question IX.1 (Transformée de Fourier dans L^1 et L^2)

Q. IX.1.1 (a) Calculer $\mathcal{F}\mathbf{1}_{[-1,1]}$.

(b) En déduire que $\mathcal{F}$ n'est pas une application de L^1 dans L^1.

Q. IX.1.2 (a) Prouver que $\mathcal{F}\frac{\sin(t)}{t}$ et $\bar{\mathcal{F}}\frac{\sin(t)}{t}$ existent.

(b) Utiliser 1)(a) pour calculer $\bar{\mathcal{F}}\frac{\sin(t)}{t}$, et en déduire $\mathcal{F}\frac{\sin(t)}{t}$.

(c) En déduire que $\mathcal{F}$ n'est pas une application de L^2 dans C^0.

Question IX.2

Soit X une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ et soit Y une loi de Poisson de paramètre $\mu > 0$.

Q. IX.2.1 Déterminer la fonction caractéristique de X.

Q. IX.2.2 Déterminer la fonction caractéristique de Y.

C) Exercices

Nous allons étudier l'exemple classique de la transformée d'un signal gaussien. Ceci permettra de mettre en oeuvre des méthodes usuelles de calcul de transformées.

Exercice IX.1 (Transformée de Fourier d'une gaussienne)

E. IX.1.1 Soit $f(x) = \exp(-cx^2)$ avec $c > 0$. Montrer que f admet une transformée de Fourier.

E. IX.1.2 (a) Trouver une équation différentielle simple vérifiée par f.

(b) En déduire une équation simple vérifiée par $\mathcal{F}f$.

(c) Déterminer $\mathcal{F}f$.

E. IX.1.3 Trouver un invariant pour la transformée de Fourier $\mathcal{F}$.

La transformée de Fourier d'une fonction de carré intégrable existe mais la formule usuelle

$$\mathcal{F}f(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x) \mathrm{e}^{-ixy}\, \lambda(dx)$$

n'est plus valable. Nous allons établir des formules adaptées à ce cas.

Exercice IX.2 (Transformée de Fourier-Plancherel)
Soit f une fonction de $L^2(\mathbb{R})$. On note $f_n = f\, \mathbf{1}_{[-n,n]}$.

E. IX.2.1 Etablir qu'on a dans L^2:

$$\mathcal{F}f(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{n\to+\infty} \int_{[-n,n]} f(x) \mathrm{e}^{-ixy}\, \lambda(dx).$$

E. IX.2.2 Montrer que pour toute fonction g de $L^2(\mathbb{R})$, on a:

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} g\, \mathcal{F}f_n \, d\lambda = \int_{\mathbb{R}} g\, \mathcal{F}f\, d\lambda.$$

E. IX.2.3 En prenant $g = \mathbf{1}_{[0,x]}$, montrer que:

$$\mathcal{F}f(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{d}{dy} \int_{\mathbb{R}} \frac{1 - \mathrm{e}^{-ixy}}{ix} f(x)\, \lambda(dx) \qquad \text{p.p.}$$

Soit $\mathcal{C}^0_\ell(\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ qui converge vers 0 en $\pm\infty$. On a vu en cours que $\mathcal{F}(L^1) \subseteq \mathcal{C}^0_\ell(\mathbb{R})$. Le but du prochain exercice est de démontrer la non-surjectivité de $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}) \to \mathcal{C}^0_\ell(\mathbb{R})$.

Exercice IX.3 (Non-surjectivité de la transformée de Fourier)
On considère la fonction $\theta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \theta(x) = \int_x^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\, du,$$

où l'intégrale est au sens de Riemann.

E. IX.3.1 Montrer que θ est bien définie, et qu'elle est continue et bornée sur $[0, +\infty[$.

E. IX.3.2 Soit f une fonction impaire et intégrable sur $\mathbb{R}$. On définit, pour tout $z \geq 1$,

$$\phi(z) = \int_1^z \frac{\mathcal{F}f(y)}{y}\, dy.$$

Montrer que $\phi(z)$ admet une limite finie lorsque $z \to +\infty$.

E. IX.3.3 Soit g la fonction (impaire) définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \frac{\arctan x}{\log(2 + x^2)}.$$

(a) Montrer que g est une fonction continue et tend vers 0 en $-\infty$ et $+\infty$ (i.e. $g \in \mathcal{C}^0_\ell(\mathbb{R})$).

(b) Montrer que si g est la transformée de Fourier d'une fonction f, alors nécessairement f est impaire. *[Indication: on pourra utiliser l'injectivité de la transformée de Fourier, en la démontrant.]*

(c) Montrer que g n'est pas la transformée de Fourier d'une fonction intégrable.

Exercice IX.4 (Transformée de Fourier dans L^1)
Dans cet exercice, L^1 désigne $L^1(\mathbb{R})$, $\mathcal{F}$ désigne la transformée de Fourier et $*$ désigne le produit de convolution.

E. IX.4.1 Montrer qu'il n'existe pas de fonction f de L^1 telle que $\mathcal{F}f = 1$.

E. IX.4.2 Trouver les fonctions f de L^1 telles que $f * f = f$. *[Indication: on pourra utiliser la transformée de Fourier.]*

E. IX.4.3 Montrer qu'il n'existe pas de fonction g de L^1 telle que, pour toute fonction f de L^1, $g * f = f$. *[Indication: on pourra utiliser la transformée de Fourier.]*

E. IX.4.4 Soit f une fonction de L^1 telle que la fonction $y \mapsto y\, \mathcal{F}f(y)$ est dans L^1.

(a) Montrer que $\mathcal{F}f$ appartient à L^1.

(b) En déduire que f admet un représentant dans $\mathcal{C}^1$.

D) Approfondissement

Exercice IX.5 (Une base de vecteurs propres pour $\mathcal{F}$)
On se place dans $L^2(\mathbb{R})$. On note $\mathcal{F}$ la transformée de Fourier et ψ_n la $n$ième fonction de Hermite. On rappelle que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\psi_n(x) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{2^n n! \sqrt{\pi}}} e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}.$$

E. IX.5.1 (a) Calculer $\mathcal{F}^4$.

(b) En déduire les valeurs propres possibles pour $\mathcal{F}$.

***E. IX.5.2** (a) Exprimer $\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{ixy}\psi_n(y)\,\lambda(dy)$ en fonction de $\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-y^2}\frac{d^n}{dy^n}\mathrm{e}^{y^2/2+ixy}\,\lambda(dy)$.

(b) En déduire $\bar{\mathcal{F}}\psi_n$ en fonction de $\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-y^2}\frac{d^n}{dx^n}\mathrm{e}^{(ix+y)^2/2}\,\lambda(dy)$.

(c) Montrer que $\bar{\mathcal{F}}\psi_n = i^n\psi_n$.

E. IX.5.3 (a) En déduire une base hilbertienne de vecteurs propres pour $\mathcal{F}$.

(b) Cette base est-elle aussi une base algébrique?

E. IX.5.4 Soit g une fonction de $L^2(\mathbb{R})$. Exprimer (en le justifiant) g puis $\mathcal{F}g$ en fonction des ψ_n.

La notion de fonction caractéristique est beaucoup manipulée en probabilités, en remarquant le lien avec la transformée de Fourier.

Exercice IX.6 (Loi de Cauchy)
Une v. a. X suit une loi de Cauchy de paramètre $c > 0$ si elle possède la densité

$$f : x \mapsto \frac{1}{\pi}\frac{c}{x^2+c^2}.$$

E. IX.6.1 Déterminer la fonction caractéristique de la loi exponentielle symétrique de paramètre $\lambda > 0$, définie par sa densité

$$g : x \mapsto \frac{\lambda}{2}e^{-\lambda|x|}.$$

E. IX.6.2 En déduire la fonction caractéristique de X.

E. IX.6.3 Montrer que si X et Y sont des v. a. indépendantes suivent des lois de Cauchy de paramètres c et c', alors $X+Y$ suit une loi de Cauchy de paramètre $c+c'$.

E. IX.6.4 Montrer que si X suit une loi de Cauchy de paramètre $c > 0$ et si $\alpha > 0$, alors αX suit une loi de Cauchy de paramètre αc. En particulier, montrer que $2X$ a la même loi que la somme de 2 v. a. de Cauchy indépendantes et de même paramètre.

E. IX.6.5 Montrer que si X et Y sont des v. a. i.i.d. suivant une loi de Cauchy, $\frac{X+Y}{2}$ a même loi que X.

E. IX.6.6 Montrer que si X et Y sont 2 v. a. i.i.d. qui ne sont pas constantes p.s. et de loi symétrique telles que

$$\forall \alpha, \alpha' > 0; \quad \alpha X + \alpha' Y \sim (\alpha+\alpha')X,$$

alors leur loi est une loi de Cauchy.

E) Trois problèmes en ouverture vers d'autres disciplines

Exercice IX.7 (Inégalité de Heisenberg)
Soit f une fonction dérivable en tout point de $\mathbb{R}$ telle que les fonctions f, f', $t \mapsto tf(t)$ et $t \mapsto tf'(t)$ soient de carré intégrable sur $\mathbb{R}$.

***E. IX.7.1** On note $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions infiniment dérivables sur $\mathbb{R}$ et à support compact. Cet espace ainsi que le résultat qui suit seront présentés plus en détails dans le cours d'EDP. Démontrer l'injectivité de l'application linéaire $\mathcal{T} : L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}) \to \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ qui à $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ associe la distribution régulière $\mathcal{T}_f : \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \mapsto \int_{\mathbb{R}} f\phi$. *[Indication: On pourra utiliser le résultat de la Question E.VIII.7.2].*

E. IX.7.2 $**$(a) Exprimer $\mathcal{F}(f')$ en fonction de $\mathcal{F}(f)$.

(b) Montrer que:

$$\left| \int_{\mathbb{R}} tf(t)\overline{f'(t)}\, \lambda(dt) \right|^2 \leq \langle tf(t), tf(t) \rangle_{L^2} \langle y\mathcal{F}f(y), y\mathcal{F}f(y) \rangle_{L^2},$$

où dans le précédent produit scalaire, "$tf(t)$" dénote abusivement la fonction $t \mapsto tf(t)$.

E. IX.7.3 (a) Soit $g(t) = tf(t)\bar{f}(t)$.
Montrer que g admet des limites en $\pm\infty$ puis que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} g'(t)\, \lambda(dt) = 0$.

(b) En utilisant g', montrer que

$$\int_{\mathbb{R}} f(t)\overline{f(t)}\, \lambda(dt) = -\int_{\mathbb{R}} tf(t)\overline{f'(t)}\, \lambda(dt) - \int_{\mathbb{R}} tf'(t)\overline{f(t)}\, \lambda(dt).$$

E. IX.7.4 (a) En déduire que si l'on pose $E = \|f\|^2_{L^2} = \|\mathcal{F}f\|^2_{L^2}$ alors

$$\|tf(t)\|^2_{L^2}\, \|y\mathcal{F}f(y)\|^2_{L^2} \geq \frac{E^2}{4}.$$

$*$(b) Montrer, en considérant la fonction $t \mapsto g(t) = \exp(-t^2/2)$, que $1/4$ est le coefficient optimal.

E. IX.7.5 (a) Soit $g(t) = f(t + t_0)\exp(-ity_0)$ pour t_0 et y_0 fixés dans $\mathbb{R}$. Calculer $\mathcal{F}g$.

(b) En déduire

$$\left(\int_{\mathbb{R}} (t - t_0)^2 \frac{|f(t)|^2}{E}\, \lambda(dt) \right) \left(\int_{\mathbb{R}} (y - y_0)^2 \frac{|\mathcal{F}f(y)|^2}{E}\, \lambda(dy) \right) \geq \frac{1}{4}.$$

(c) Trouver les valeurs de t_0 et y_0 qui minimisent les intégrales du membre de gauche de l'inégalité précédente.

Interpréter les valeurs obtenues t_m et y_m comme des valeurs moyennes.

En déduire que les intégrales représentent les variances de t et y.

On en déduit **l'inégalité de Heisenberg** : il existe une constante C telle que

$$Variance(\text{temps}).Variance(\text{energie}) \geq C$$

ou encore, il existe une constante K telle que

$$Variance(\text{temps}).Variance(\text{frequence}) \geq K.$$

Interprétation :
Les fonctions α et β peuvent être interprétées comme des densités (≥ 0, L^1, $\int \alpha \, d\lambda = \int \beta \, d\lambda = 1$).

Ainsi t_m est la valeur moyenne de t et y_m est la valeur moyenne de y et l'inégalité de 5b) fait apparaître des **variances** : $\mathbb{V}\mathrm{ar}(t)$ et $\mathbb{V}\mathrm{ar}(y)$.

Comme y s'interprète comme une pulsation ω, en multipliant par $\hbar^2$ et en remarquant que $E = \hbar\omega$ est une énergie, l'inégalité de 5b) peut s'écrire:

$$\mathbb{V}\mathrm{ar}(\text{temps})\ \mathbb{V}\mathrm{ar}(\text{energie}) \geq C = \frac{\hbar^2}{4}.$$

De même, en remarquant que la fréquence est donnée par $f = \omega/2\pi$, on trouve :

$$\mathbb{V}\mathrm{ar}(\text{temps})\ \mathbb{V}\mathrm{ar}(\text{frequence}) \geq K = \frac{1}{16\pi^2}.$$

Comme ces variances sont des précisions, on peut en déduire l'interprétation en traitement du signal :

Un signal localisé en temps ne peut pas l'être en fréquence (ou en énergie) et réciproquement.

Nous allons maintenant établir un résultat fondamental en traitement du signal:

> Tout signal borné en fréquence peut être reconstitué à partir d'un échantillonage de fréquence adapté.

Exercice IX.8 (Echantillonnage de Shannon)
Soit f un élément de $L^2(\mathbb{R})$ dont la transformée de Fourier est à support compact. Soit $a > 0$ tel que $[-a, a]$ contienne le support de $\mathcal{F}f$.

E. IX.8.1 (a) Montrer que f admet un représentant continu.

$*$(b) Montrer que f admet un représentant indéfiniment dérivable.

E. IX.8.2 Soit $b > a$ et g la fonction $2b$-périodique valant $\mathcal{F}f$ sur $[-a, a]$ et 0 sur $[-b, -a[\cup]a, b]$.

(a) Trouver le développement en série de Fourier de g.

(b) La série de Fourier de g converge-t-elle vers g dans $L^2([-b, b])$?

E. IX.8.3 En déduire que:

$$\int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 \, \lambda(dt) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{\pi}{b} |f(\frac{n\pi}{b})|^2.$$

E. IX.8.4 En notant $\sin_c(u) = \sin(u)/u$ le sinus cardinal, montrer que la série

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(\frac{n\pi}{b}) \sin_c(tb - n\pi)$$

converge vers f dans $L^2(\mathbb{R})$.

****E. IX.8.5** Montrer que la convergence est uniforme.

E. IX.8.6 Enoncer précisément le théorème de Shannon que nous venons de démontrer.

Exercice IX.9 (Formule sommatoire de Poisson)

Soit f une fonction intégrable sur $\mathbb{R}$. On utilisera temporairement ici la variante suivante de la transformée de Fourier:

$$\hat{f}(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi xt} f(t)\,\lambda(dt).$$

On suppose en outre:

- f continue sur $\mathbb{R}$.
- $\exists M > 0,\ \exists\alpha > 1 :\ \forall x \in \mathbb{R},\quad |f(x)| \leq \frac{M}{(1+|x|)^\alpha}$.
- $\sum_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(n)| < \infty$.

On considère $F(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} f(x+n)$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.

E. IX.9.1 $*$(a) Montrer que la fonction F est continue.

(b) Montrer que la fonction F admet 1 pour période.

E. IX.9.2 Trouver le développement en série de Fourier de F.

***E. IX.9.2** Montrer que la série de Fourier de F converge simplement vers F. *[Indication : on pourra utiliser le théorème de Féjer.]*

E. IX.9.4 En déduire la formule sommatoire de Poisson:

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} f(n) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(n).$$

E. IX.9.5 En déduire la formule valable pour la définition usuelle (en mathématiques) de la transformée de Fourier:

$$\sqrt{2\pi} \sum_{-\infty}^{+\infty} f(2\pi n) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}f(n).$$

E. IX.9.6 Soit $a > 0$. Calculer la transformée de Fourier de $\exp(-2\pi a|t|)$. En déduire $\sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{n^2+a^2}$.

Séance 9 : Eléments de correction des exercices

Solution de Q. IX.1.1

(a) On calcule, pour tout $y \in \mathbb{R}$,

$$\mathcal{F}(\mathbf{1}_{[-1,1]})(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^{1} e^{-ixy}\, dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin(y)}{y}.$$

(b) $\mathcal{F}$ n'est pas une application de L^1 dans L^1 puisque d'après ce qui précède on peut avoir $f \in L^1$ et $\mathcal{F}f \notin L^1$.

Solution de Q. IX.1.2

(a) $\mathcal{F}\left(t \mapsto \frac{\sin(t)}{t}\right)$ existe puisque $t \mapsto \frac{\sin(t)}{t}$ est dans L^2.

(b) On a établi que

$$\mathcal{F}(\mathbf{1}_{[-1,1]})(y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin(y)}{y}.$$

Donc, grâce à la formule d'inversion dans L^2,

$$\bar{\mathcal{F}}\left(y \mapsto \frac{\sin(y)}{y}\right)(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \mathbf{1}_{[-1,1]}(x).$$

Or, d'après le cours (voir démonstration à l'exercice IX.2), pour une fonction g de L^2 (ou de L^1), on a la limite suivante dans L^2

$$\begin{aligned}\bar{\mathcal{F}}g(x) &= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{[-n,n]} g(y)\, e^{+iyx}\, dy \\ &= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{[-n,n]} g(y)\, e^{-iy(-x)}\, dy \\ &= \mathcal{F}g(-x).\end{aligned}$$

Donc

$$\mathcal{F}\left(y \mapsto \frac{\sin(y)}{y}\right)(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \mathbf{1}_{[-1,1]}(-x) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, \mathbf{1}_{[-1,1]}(x).$$

(c) $\mathcal{F}$ n'est pas un opérateur de L^2 dans C^0 puisque d'après ce qui précède, on peut avoir $f \in L^2$ et $\mathcal{F}f \notin C^0$.

Solution de Q. IX.2.1 La loi de X admet la densité $f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x)$. Donc par le théorème de transfert, pour $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[e^{itX}\right] &= \int_{\mathbb{R}} e^{itx} f_X(x)\lambda(dx) \\ &= \lambda \int_{\mathbb{R}_+} e^{x(it-\lambda)}\lambda(dx) \\ &= \frac{\lambda}{\lambda - it}.\end{aligned}$$

Solution de Q. IX.2.2 Par le théorème de transfert, on a pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[e^{itN}\right] &= \sum_{n=0}^{+\infty} e^{itn} e^{-\mu}\frac{\mu^n}{n!} \\ &= e^{-\mu}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\left(e^{it}\mu\right)^n}{n!} \\ &= \exp\left(\mu(e^{it}-1)\right).\end{aligned}$$

Solution de E. IX.1.1 La fonction f admet une transformée de Fourier car elle est dans $L^1(\mathbb{R})$ (mais aussi parce qu'elle est dans $L^2(\mathbb{R})$!).

Solution de E. IX.1.2

(a) La fonction f est solution de l'équation différentielle

$$f'(x) + 2cxf(x) = 0.$$

(b) Si l'on note $F = \mathcal{F}f$, les formules du cours conduisent à :

$$iyF(y) + i2cF'(y) = 0.$$

(c) Ainsi $F(y) = K\, e^{\frac{-y^2}{4c}}$ avec $K = F(0)$. Or:

$$K = F(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ct^2}dt = \sqrt{\frac{2}{\pi c}}\int_0^{\infty} e^{-u^2}du = \frac{1}{\sqrt{2c}},$$

et donc :

$$\mathcal{F}\left(x \mapsto e^{-cx^2}\right)(y) = \frac{1}{\sqrt{2c}}\, e^{\frac{-y^2}{4c}}.$$

Solution de E. IX.1.3 On trouve facilement que $\mathcal{F}f = f$ si et seulement si $c = \frac{1}{2}$.

Solution de E. IX.2.1 Comme f est dans L^2, on a f_n dans L^2 par domination et f_n dans L^1 par inégalité de Cauchy-Schwarz. Ainsi $f_n \in L^1 \cap L^2$. De plus on vérifie facilement que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers f dans L^2 (c'est-à-dire $\|f_n - f\|_2$ tend vers 0).

Vérifiez-le et ne confondez pas convergence simple et convergence dans L^2 !

Donc, par la propriété d'isométrie de $\mathcal{F}$ dans L^2, on trouve que $(\mathcal{F}f_n)$ converge vers $\mathcal{F}f$ dans L^2 :

$$\mathcal{F}f(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{n\to+\infty} \int_{[-n,n]} f(x)e^{-ixy}\,\lambda(dx).$$

Solution de E. IX.2.2 Par continuité du produit scalaire :

$$\lim(g, \mathcal{F}f_n) = (g, \lim \mathcal{F}f_n) = (g, \mathcal{F}f).$$

Solution de E. IX.2.3 Prenons $g = \mathbf{1}_{[0,x]}$. On a alors

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{[0,x]} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{[-n,n]} e^{-ity} f(y)\,\lambda(dy)\,\lambda(dt) = \int_{[0,x]} \mathcal{F}f(t)\,\lambda(dt).$$

Par le théorème de Fubini-Tonelli, la fonction $(t,y) \to \mathbf{1}_{[0,x]}(t)\mathbf{1}_{[-n,n]}(y)e^{-ity}f(y)$ est intégrable sur $\mathbb{R}^2$. On peut donc appliquer le théorème de Fubini-Lebesgue :

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{n\to+\infty} \int_{[-n,n]} f(y)\frac{e^{-ixy}-1}{-iy}\,\lambda(dy) = \int_{[0,x]} \mathcal{F}f(t)\,\lambda(dt).$$

Or $f \in L^2(\mathbb{R})$ et $y \mapsto \frac{e^{-ixy}-1}{-iy} \in L^2(\mathbb{R})$ pour tout x, donc $y \mapsto f(y)\frac{e^{-ixy}-1}{-iy} \in L^1(\mathbb{R})$.

Comme

$$\left| f(y)\,\frac{e^{-ixy}-1}{-iy}\,1_{[-n,n]}(y)\right| \leq \left| f(y)\,\frac{e^{-ixy}-1}{-iy}\right|,$$

on en déduit, par le théorème de la convergence dominée,

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(y)\,\frac{e^{-ixy}-1}{-iy}\,\lambda(dy) = \int_{[0,x]} \mathcal{F}f(t)\,\lambda(dt).$$

En utilisant le théorème fondamental de l'analyse, on trouve maintenant

$$\mathcal{F}f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{d}{dx} \int_{\mathbb{R}} f(y)\,\frac{e^{-ixy}-1}{-iy}\,\lambda(dy).$$

Remarque : si de plus $f \in L^1$, on peut deriver sous le symbole $\int_{\mathbb{R}}$ et on retrouve la formule usuelle de la tranformée de Fourier dans L^1.

Solution de E. IX.3.1 Dans ce qui suit, la fonction $\frac{\sin u}{u}$ sera toujours supposée prolongée par continuité en 0 (égale à 1). On rappelle que cette fonction n'est pas dans $L^1(\mathbb{R})$, mais qu'elle est semi-convergente au sens de Riemann. En effet, par une intégration par parties de l'intégrale de Riemann: $\forall x > 0$,

$$\begin{aligned}\int_x^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\, du &= \left[\frac{-\cos u}{u}\right]_x^{+\infty} - \int_x^{+\infty} \frac{\cos u}{u^2}\, du \\ &= \frac{\cos x}{x} - \int_x^{+\infty} \frac{\cos u}{u^2}\, du.\end{aligned}$$

En particulier, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\theta(x)$ est bien définie et continue. En tant que fonction continue sur $\mathbb{R}_+$ qui tend vers 0 en $+\infty$, elle est donc également bornée.

Solution de E. IX.3.2 Comme f est dans $L^1(\mathbb{R})$ et est impaire, on a

$$\mathcal{F}f(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x)\, e^{-ixy}\, \lambda(dx) = -\frac{2i}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}_+} f(x) \sin(xy)\, \lambda(dx).$$

Donc

$$\phi(z) = \frac{-2i}{\sqrt{2\pi}} \int_{[1,z]} \frac{1}{y} \int_{\mathbb{R}_+} f(x)\ \sin(xy)\ \lambda(dx)\ \lambda(dy).$$

Pour tout $z \in \mathbb{R}_+^*$, la fonction $(x, y) \mapsto f(x)\frac{\sin(xy)}{y}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+ \times [1, z]$. Le théorème de Fubini implique donc que

$$\begin{aligned}\phi(z) &= \frac{-2i}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}_+} f(x)\ \int_{[1,z]} \frac{\sin(xy)}{y}\ \lambda(dy)\ \lambda(dx) \\ &= \frac{-2i}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}_+} f(x)\ \left(\int_{[x,xz]} \frac{\sin u}{u}\ \lambda(du)\right)\ \lambda(dx) \\ &= \frac{-2i}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}_+} f(x)\ \big(\theta(x) - \theta(xz)\big)\ \lambda(dx),\end{aligned}$$

en utilisant le changement de variable $y \mapsto u = xy$ dans la 2ème intégrale.

Le fait que $f \in L^1(\mathbb{R})$ et θ bornée sur $\mathbb{R}_+$ permet d'appliquer le théorème de convergence dominée dans l'expression de $\phi(z)$. En fait, on utilise une caractérisation séquentielle de la limite $z \to +\infty$.

Soit $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite quelconque qui tend vers $+\infty$. Comme $\phi(z_n) \to 0$, lorsque $n \to \infty$, on conclut (par convergence dominée) que

$$\lim_{z\to+\infty} \phi(z) = \int_{[1,+\infty)} \frac{\mathcal{F}f(y)}{y}\ dy = \frac{-2i}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}_+} f(x)\ \theta(x)\ \lambda(dx).$$

Solution de E. IX.3.3

(a)

(b) Supposons que $g = \mathcal{F}f$, pour une fonction $f \in L^1$. Soit $h(x) = -f(-x)$. Alors on vérifie aisément grâce à l'imparité de g que $\mathcal{F}h = \mathcal{F}f$. Par injectivité de la transformée de Fourier, on en conclut que $h = f$ λ-p.p. (l'injectivité s'obtient ainsi: soit $f \in L^1$ telle que $\mathcal{F}f = 0$. Alors $\overline{\mathcal{F}}\mathcal{F}f = 0$ p.p., donc $f = 0$ p.p.).

(c) Par l'absurde, supposons qu'il existe une fonction $f \in L^1(\mathbb{R})$ telle que $\mathcal{F}f = g$.

On a alors

$$\forall z \geq 1, \quad \phi(z) = \int_1^z \frac{g(y)}{y}\, dy = \int_1^z \frac{\arctan y}{y \log(2+y^2)} dy.$$

Or au voisinage de $+\infty$, $\frac{\arctan y}{y\log(2+y^2)} \sim \frac{\pi}{4y\log y}$ et l'intégrale de cet équivalent correspond à une intégrale de Bertrand, de la forme $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dy}{y^\alpha \ln^\beta(y)}$, dont on sait qu'elle converge si et seulement si $\alpha > 1$ ou ($\alpha = 1$ et $\beta > 1$). On en déduit que $\phi(z)$ n'admet pas de limite lorsque $z \to +\infty$, ce qui contredit la question 2).

On conclut qu'une telle fonction f n'existe pas, c'est-à-dire que g n'admet pas d'antécédent par la transformée de Fourier $\mathcal{F}$.

Solution de E. IX.4.1 Le lemme de Riemann-Lebesgue (cf Exercice VII.3) assure que pour f dans L^1, $\mathcal{F}f(x)$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$. Ainsi la fonction constante égale à 1 ne peut pas être la transformée de Fourier d'une fonction intégrable.

Solution de E. IX.4.2 Si $f * f = f$ alors $\sqrt{2\pi}(\mathcal{F}f)^2 = \mathcal{F}f$ et donc pour tout x de $\mathbb{R}$, $\mathcal{F}f(x)$ vaut 0 ou $1/\sqrt{2\pi}$. Comme $\mathcal{F}f$ est continue, on en déduit que $\mathcal{F}f = 0$ ou $\mathcal{F}f = 1/\sqrt{2\pi}$ et donc, d'après la question 1), seul $\mathcal{F}f = 0$ convient.

Solution de E. IX.4.3 Si pour tout f intégrable, $g * f = f$, alors $\sqrt{2\pi}\; \mathcal{F}g\; \mathcal{F}f = \mathcal{F}f$. Donc $\mathcal{F}g = 1/\sqrt{2\pi}$ ce qui est impossible d'après la question 1). Ainsi le problème n'a pas de solution.

Solution de E. IX.4.4

(a) Puisque f est intégrable, on a $\mathcal{F}f$ qui est borné et :

$$\int_{\mathbb{R}} |\mathcal{F}f(x)|\, \lambda(dx) = \int_{\{|x|<1\}} |\mathcal{F}f(x)|\, \lambda(dx) + \int_{\{|x|\geq 1\}} |\mathcal{F}f(x)|\, \lambda(dx).$$

Donc

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} |\mathcal{F}f(x)|\, \lambda(dx) &\leq 2\|\mathcal{F}f\|_\infty + \int_{\{|x|\geq 1\}} |x\mathcal{F}f(x)|\, \lambda(dx) \\ &\leq 2\|\mathcal{F}f\|_\infty + \|x\mathcal{F}f(x)\|_1 < +\infty.\end{aligned}$$

Ceci prouve que $\mathcal{F}f$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

(b) Puisque f et $\mathcal{F}f$ sont intégrables, la formule d'inversion de Fourier donne :

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}f(x) e^{itx}\, \lambda(dx) \qquad \text{p.p.}$$

Or

- Pour tout x de $\mathbb{R}$ la fonction $x \mapsto \mathcal{F}f(x)\, e^{itx}$ est intégrable car $\mathcal{F}f$ est intégrable.
- Pour tout t de $\mathbb{R}$ la fonction $t \mapsto \mathcal{F}f(x)\, e^{itx}$ est continûment dérivable sur $\mathbb{R}$.
- Pour tout x et tout t de $\mathbb{R}$, $|ix\mathcal{F}f(x)\, e^{-itx}|$ est dominée par $|x\mathcal{F}f(x)|$ qui est intégrable.

Ainsi par théorème sur les intégrales dépendant d'un paramètre, f admet un représentant continûment dérivable.

Solution de E. IX.5.1

(a) Grâce au théorème d'inversion et aux formules

$$(\mathcal{F}f)(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{n\to+\infty} \int_{[-n,n]} f(x)\, e^{-ixy}\, \lambda(dx)$$

et

$$(\bar{\mathcal{F}}g)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{n\to+\infty} \int_{[-n,n]} g(y)\, e^{+ixy}\, \lambda(dy) = \mathcal{F}g(-x),$$

on montre facilement que $\mathcal{F}\mathcal{F}(f(x)) = f(-x)$. En appliquant une 2^{eme} fois cette formule on obtient :

$$\mathcal{F}^4(f) = f.$$

(b) Si a est une valeur propre pour $\mathcal{F}$, alors il existe une fonction non nulle f de L^2 telle que $\mathcal{F}(f) = a.f$.

Le résultat précédent implique donc $a^4 = 1$.

On en déduit que les valeurs propres possibles pour $\mathcal{F}$ sont : 1, -1, i et $-i$.

Solution de E. IX.5.2

(a) Posons $\alpha_n = (\sqrt{\pi}2^n n!)^{-1/2}$.

Après n intégrations par parties on obtient :

$$\int_{\mathbb{R}} e^{ixy} \psi_n(y)\, \lambda(dy) = \alpha_n \int_{\mathbb{R}} e^{-y^2} \frac{d^n}{dy^n} e^{y^2/2+ixy}\, \lambda(dy).$$

(b) D'où :

$$\begin{aligned}
\bar{\mathcal{F}}\psi_n(x) &= \frac{\alpha_n}{\sqrt{2\pi}} e^{x^2/2} \int_{\mathbb{R}} e^{-y^2} \frac{d^n}{dy^n} e^{(ix+y)^2/2}\, \lambda(dy) \\
&= \frac{\alpha_n}{\sqrt{2\pi}} e^{x^2/2} (-i)^n \int_{\mathbb{R}} e^{-y^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{(ix+y)^2/2}\, \lambda(dy).
\end{aligned}$$

(c) En utilisant le théorème de dérivation des intégrales à paramètre pour sortir la dérivation de l'intégrale et en calculant l'intégrale obtenue, on trouve $\bar{\mathcal{F}}\psi_n = i^n \psi_n$.

Solution de E. IX.5.3

(a) D'après la question précédente, $\mathcal{F}\psi_n = (-i)^n \psi_n$.

Donc les ψ_n sont tous vecteurs propres pour $\mathcal{F}$.

Or on sait que les ψ_n forment une base hilbertienne de L^2. Ils constituent donc une base hilbertienne de vecteurs propres pour $\mathcal{F}$.

(b) Cette base n'est pas une base algébrique de L^2.

En effet, l'espace vectoriel engendré par les polynômes de Hermite est l'espace des fonctions polynômiales.

Donc l'espace vectoriel engendré par les fonctions de Hermite est l'espace des fonctions produits d'une fonction polynômiale et de $x \mapsto \exp(-x^2/2)$ qui n'est qu'un sous-espace strict de L^2.

Solution de E. IX.5.4 Soit g une fonction de $L^2(\mathbb{R})$. Les ψ_n forment une base hilbertienne donc, en notant $c_n = (\psi_n|g)$:

$$g = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n \psi_n.$$

Par continuité de $\mathcal{F}$, on a :

$$\mathcal{F}g = \mathcal{F} \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n \psi_n = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n \mathcal{F}\psi_n = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n (-i)^n \psi_n.$$

Solution de E. IX.6.1 Soit Z une variable aléatoire réelle de densité

$$g : x \mapsto \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda|x|}.$$

La fonction caractéristique de Z est définie par

$$\begin{aligned}
\forall t \in \mathbb{R}, \quad \varphi_Z(t) = \mathbb{E}[e^{itZ}] &= \int_{\mathbb{R}} e^{itx}\, P_Z(dx) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx}\, g(x)\, dx \\
&= \frac{\lambda}{2} \int_{-\infty}^{0} e^{x(it+\lambda)}\, dx + \frac{\lambda}{2} \int_{0}^{+\infty} e^{x(it-\lambda)}\, dx \\
&= \frac{\lambda}{2(it+\lambda)} \left[e^{x(it+\lambda)} \right]_{-\infty}^{0} + \frac{\lambda}{2(it-\lambda)} \left[e^{x(it-\lambda)} \right]_{0}^{+\infty} \\
&= \frac{\lambda}{2(it+\lambda)} - \frac{\lambda}{2(it-\lambda)} = \frac{\lambda^2}{\lambda^2 + t^2}.
\end{aligned}$$

Solution de E. IX.6.2 En utilisant le théorème d'inversion, on a

$$\frac{\lambda}{2}e^{-\lambda|x|} = g(x) = \frac{1}{2\pi}\int \frac{\lambda^2}{\lambda^2+t^2}e^{-itx}\,dt.$$

En posant $\lambda = c$, on trouve

$$\int \frac{1}{\pi}\frac{c}{c^2+t^2}\,e^{itx}\,dt = e^{-c|x|},$$

c'est-à-dire

$$\mathbb{E}[e^{itX}] = e^{-c|t|}.$$

Solution de E. IX.6.3 Comme X et Y sont indépendantes, la loi de $X+Y$ est le produit de convolution des lois de X et de Y. Ainsi, la fonction caractéristique de $X+Y$ est égale au produit des fonctions caractéristiques de X et de Y,

$$\begin{aligned}\forall t \in \mathbb{R}, \quad \varphi_{X+Y}(t) &= \varphi_X(t)\,\varphi_Y(t)\\ &= e^{-c|t|}e^{-c'|t|} = e^{-(c+c')|t|}.\end{aligned}$$

On reconnait la fonction caractéristique d'une loi de Cauchy de paramètre $c+c'$. Comme la fonction caractéristique *caractérise* la loi d'une variable aléatoire, on en déduit que $X+Y$ suit une loi de Cauchy de paramètre $c+c'$.

Solution de E. IX.6.4 La fonction caractéristique de la variable aléatoire αX est

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \varphi_{\alpha X}(t) = \mathbb{E}[e^{it\alpha X}] = \varphi_X(\alpha t) = e^{c\alpha|t|},$$

qui est la fonction caractéristique de la loi de Cauchy de paramètre αc.

En particulier pour $\alpha = 2$, $2X$ a même loi que la somme de deux v.a. de Cauchy de même paramètre c.

Solution de E. IX.6.5 Si X et Y sont des variables aléatoires indépendantes, de même loi de Cauchy de paramètre c, alors d'après la question précédente les variables $X/2$ et $Y/2$ suivent une loi de Cauchy de paramètre $c/2$. D'après la question 3., leur somme $\frac{X+Y}{2}$ suit donc une loi de Cauchy de paramètre c.

Solution de E. IX.7.1

Solution de E. IX.7.2

(a) L'idée est d'utiliser le résultat de la question précédente et d'appliquer trois fois Fubini-Tonelli. Plus précisément, nous allons montrer que

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}), \quad \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}(f')\varphi \, d\lambda = \int_{\mathbb{R}} (iy\mathcal{F}f(y))\, \varphi(y)\, \lambda(dy),$$

où on rappelle que $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ (parfois aussi noté $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$) est l'espace des fonctions indéfiniment dérivable à support compact.

Considérons une fonction φ indéfiniment dérivable et à support compact quelconque.

Comme f' est dans L^2, $\mathcal{F}(f')$ l'est aussi. Par ailleurs φ^2 est continue à support compact, donc φ est aussi L^2. Ainsi, par théorème de Cauchy-Schwarz, $\mathcal{F}(f')\varphi$ est L^1.

On peut donc écrire

$$\int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}(f')\varphi \, d\lambda = \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}(\lim_{n\to+\infty} f' 1_{[-n,n]})\varphi \, d\lambda.$$

Par continuité (dans L^2) de la transformée de Fourier et du produit scalaire

$$\int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}(f')\varphi \, d\lambda = (\mathcal{F}(\lim_{n\to+\infty} f' 1_{[-n,n]}), \varphi) = (\lim_{n\to+\infty} \mathcal{F}(f' 1_{[-n,n]}), \varphi) = \lim_{n\to+\infty} (\mathcal{F}(f' 1_{[-n,n]}), \varphi).$$

En justifiant précisément l'utilisation du théorème de Tonelli puis de Fubini, on trouve

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}(f')\varphi \, d\lambda &= \lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{[-n,n]} f'(x)\, e^{-ixy}\, \lambda(dy)\, \varphi(y)\, \lambda(dx) \\ &= \lim_{n\to+\infty} \int_{[-n,n]} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \varphi(y) e^{-ixy}\, \lambda(dy)\, f'(x)\, \lambda(dx) \\ &= \int_{\mathbb{R}} (\mathcal{F}\varphi)(x) f'(x)\, \lambda(dx). \qquad \text{(IX.1)}\end{aligned}$$

Maintenant, on veut démontrer que

$$\int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}(f')\varphi \, d\lambda = -\int_{\mathbb{R}} (\mathcal{F}\varphi)' f \, d\lambda. \qquad \text{(IX.2)}$$

Il s'agit d'appliquer une intégration-par-parties à l'égalité (IX.1). Pour cela, nous pouvons utiliser l'IPP établie pour la mesure de Lebesgue sur $[0,1]$ à l'Exercice 4.8 (cf cours plutôt). On vérifie ici qu'on peut bien appliquer cette formule à tout segment $[-A, A]$, $A \in \mathbb{R}_+$. L'équation (IX.2) découle alors d'un passage à la limite (à justifier) lorsque $A \to +\infty$.

Maintenant, comme les applications φ et $x \mapsto x\varphi(x)$ sont intégrables, la Proposition IX.1.4 assure que

$$(\mathcal{F}\varphi)' = \mathcal{F}(-iy\varphi(y)).$$

Ainsi

$$\int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}(f')\varphi \, d\lambda = -\int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}(-iy\varphi(y))(x)\, f(x)\, \lambda(dx).$$

Enfin, par application (à bien justifier) de Tonelli puis Fubini, on obtient

$$\int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}(f')\varphi \, d\lambda = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} iy\varphi(y) e^{-ixy}\, \lambda(dy)\, f(x)\, \lambda(dx) = \int_{\mathbb{R}} iy\varphi(y)(\mathcal{F}f)(y)\, \lambda(dy).$$

On a donc, pour toute fonction φ de $\mathcal{D}$,

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi(y) \left((\mathcal{F}f')(y) - iy(\mathcal{F}f)(y) \right) \lambda(dy) = 0.$$

Par le Théorème 1.22 du poly, on a donc $(\mathcal{F}f')(y) = iy(\mathcal{F}f)(y)$ presque partout (ou de manière équivalente, l'égalité au sens des classes).

(b) L'inégalité de Cauchy-Schwarz donne

$$\left|(tf, f')\right|^2 \leq (tf, tf)\,(f', f')\,,$$

puisque tf et f' sont dans L^2.

En outre $(f', f') = \|f'\|^2 = \|\mathcal{F}f'\|^2 = (\mathcal{F}f', \mathcal{F}f') = (iy\mathcal{F}f, iy\mathcal{F}f)$.

En effet $\mathcal{F}(f') = iy\mathcal{F}f(y)$ par la question 1)(a).

Solution de E. IX.7.3

(a) La fonction g est L^1 comme produit de fonction L^2.

On a, par simple dérivation :

$$g'(t) = (tf)'\overline{f} + tf\overline{f}' = f\overline{f} + tf'\overline{f} + tf\overline{f}'$$

donc g' est L^1 comme somme de fonctions de L^1.

Maintenant par application du Théorème V.3.2:

$$g(b) - g(a) = \int_{[a,b]} g'(t)\, \lambda(dt) = \int_{\mathbb{R}} g'(t) 1_{[a,b]}(t)\, \lambda(dt).$$

Or par domination de $g'(t)1_{[a,b]}(t)$ par $|g'|$, $\int_a^b g'\, d\lambda$ admet des limites $a \to -\infty$ et $b \to +\infty$, donc g aussi.

Comme g est intégrable, ces limites sont nulles d'où $\int_{\mathbb{R}} g'\, d\lambda = 0$.

(b) Comme $g'(t) = f\overline{f} + tf'\overline{f} + tf\overline{f}'$, on a :

$$\int_{\mathbb{R}} g'\, d\lambda = \int_{\mathbb{R}} f\overline{f}\, d\lambda + \int_{\mathbb{R}} tf'\overline{f}\, d\lambda + \int_{\mathbb{R}} tf\overline{f'}\, d\lambda.$$

Donc

$$\int_{\mathbb{R}} tf\overline{f}'\, d\lambda = -\int_{\mathbb{R}} f\overline{f}\, d\lambda - \int_{\mathbb{R}} tf'\overline{f}\, d\lambda.$$

Solution de E. IX.7.4

(a) D'après la question précédente :

$$E = \int_{\mathbb{R}} f\overline{f}\, d\lambda = -\int_{\mathbb{R}} tf\overline{f}'\, d\lambda - \int_{\mathbb{R}} t\overline{f}f'\, d\lambda \in \mathbb{R}.$$

Donc

$$E = -2Re\left(\int_{\mathbb{R}} tf\overline{f}'\, d\lambda\right) \leq 2\left|\int_{\mathbb{R}} tf\overline{f}'\, d\lambda\right|.$$

Donc par 1b),

$$E^2 \leq 4\left(\int_{\mathbb{R}} tff'\, d\lambda\right)^2 \leq 4(tf, tf)(y\mathcal{F}f, y\mathcal{F}f).$$

(b) Soit $f(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$ alors $\mathcal{F}f(y) = e^{-\frac{y^2}{2}}$ et ainsi

$$\begin{aligned}(tf, tf)(y\mathcal{F}f, y\mathcal{F}f) &= \left(\int_{\mathbb{R}} (xe^{-\frac{x^2}{2}})^2\, \lambda(dx)\right)^2 \\ &= \left(\int_{-\infty}^{+\infty} -\frac{x}{2}(-2x)e^{-x^2}dx\right)^2 \\ &= \frac{1}{4}\left(\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\, \lambda(dx)\right)^2 = \frac{E^2}{4}.\end{aligned}$$

Solution de E. IX.7.5

1. Par changement de variable :

$$\begin{aligned}\mathcal{F}g(y) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{n\to+\infty} \int_{[-n,n]} f(t+t_0)e^{-ity_0}e^{-ity}\, \lambda(dt) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{n\to+\infty} \int_{[-n+t_0, n+t_0]} f(u)e^{-i(u-t_0)(y+y_0)}\, \lambda(du).\end{aligned}$$

Donc

$$\mathcal{F}g(y) = e^{it_0(y+y_0)}\mathcal{F}f(y+y_0).$$

2. D'après 3a), en posant $u = t + t_0$ et $x = y + y_0$

$$\int_{\mathbb{R}} |tf(t+t_0)|^2\, \lambda(dt) \int_{\mathbb{R}} |y\mathcal{F}f(y+y_0)|^2\, \lambda(dy) \geq \frac{E^2}{4}$$

et donc :

$$\int_{\mathbb{R}} (u-t_0)^2 \frac{|f(u)|^2}{E}\, \lambda(du) \int_{\mathbb{R}} (x-y_0)^2 \frac{|\mathcal{F}f(x)|^2}{E}\, \lambda(dx) \geq \frac{1}{4}.$$

3. On calcule :

$$\int_{\mathbb{R}} (u-t_0)^2\,|f(u)|^2\ \lambda(du) = \int_{\mathbb{R}} u^2|f(u)|^2\,\lambda(du) - 2t_0\int_{\mathbb{R}} u|f(u)|^2\,\lambda(du) + t_0^2\int_{\mathbb{R}} |f(u)|^2\,\lambda(du).$$

Le minimum est atteint en $t_m = \frac{\int u|f|^2}{\int |f|^2} = \frac{\int u|f|^2}{E}$.

De même on prend $y_m = \frac{\int x|\mathcal{F}f|^2}{E}$.

Posons $\alpha(u) = \frac{|f(u)|^2}{E}$ et $\beta(x) = \frac{|\mathcal{F}f(x)|^2}{E}$.

Solution de E. IX.8.1

(a) Soit $\widetilde{f} \in \mathcal{L}^2$ un représentant de $f \in L^2$. Le théorème d'inversion dans L^2 donne $\bar{\mathcal{F}}\mathcal{F}\widetilde{f} = \widetilde{f}$ donc

$$\widetilde{f}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{[-a,a]} \mathcal{F}f(x)e^{itx}\,\lambda(dx)$$

ceci dans L^2 donc presque partout.

Maintenant en appliquant le théorème de continuité des intégrales à paramètres (en vérifiant bien chacune des trois hypothèses), on obtient bien que $\tilde{f}$ est égale presque partout à une fonction continue.

(b) Reprenons la formule établie précédemment :

$$\widetilde{f} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{[-a,a]} \mathcal{F}f(x)\,e^{itx}\,\lambda(dx).$$

Pour $x \in [-a,a]$, on a la domination :

$$\left|\mathcal{F}f(x)\sum_0^N \frac{(itx)^n}{n!}\right| \le |\mathcal{F}f(x)|\sum_0^\infty \frac{t^n a^n}{n!} = |\mathcal{F}f(x)|\,e^{ta} \in L^1([-a,a]).$$

On peut donc intervertir somme et intégrale et on on trouve presque partout :

$$\widetilde{f}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_0^\infty \left(\int_{-a}^{a} \mathcal{F}f(x)x^n dx\frac{(i)^n}{n!}\right) t^n$$

C'est la somme d'une série entière de rayon de convergence $+\infty$ donc le membre de droite est un représentant indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ de f.

Solution de E. IX.8.2

(a) La fonction g est $2b$ périodique et localement intégrable

$$\begin{aligned}
c_n &= \frac{1}{T}\int_T g(x)e^{-in\omega x}\,\lambda(dx)\\
&= \frac{1}{2b}\int_{-b}^{b} g(x)e^{-\frac{2i\pi}{2b}nx}\,dx\\
&= \frac{1}{2b}\int_{-a}^{a} \mathcal{F}f(x)e^{-i\frac{\pi n x}{b}}\,dx\\
&= \frac{1}{2b}\int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}f(x)e^{i(-\frac{n\pi}{b})x}\,\lambda(dx)\\
&= \frac{\sqrt{2\pi}}{2b}\overline{\mathcal{F}}(\mathcal{F}f)(-\frac{n\pi}{b})\\
&= \frac{\sqrt{2\pi}}{2b}f(-\frac{n\pi}{b}).
\end{aligned}$$

(b) Il y a convergence quadratique puisque $g \in L^2(\Gamma_b)$ et:

$$g(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{i\frac{n\pi x}{b}} = \frac{\sqrt{2\pi}}{2b}\sum_{-\infty}^{\infty} f(-\frac{n\pi}{b})e^{i\frac{n\pi}{b}x}$$

(égalité dans $L^2_{[-b,b]}$).

Solution de E. IX.8.3 L'égalité de Parseval sur les séries de Fourier donne

$$\|g\|_{L^2_{[-b,b]}} = \sum_{-\infty}^{\infty} |c_n|^2,$$

c'est-à-dire

$$\frac{1}{2b}\int_{-b}^{b} |g|^2 = \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{2\pi}{4b^2}\left|f(-\frac{n\pi}{b})\right|^2.$$

Or, grâce à l'égalité de Parseval sur les transformées de Fourier

$$\frac{1}{2b}\int_{-b}^{b} |g|^2 = \frac{1}{2b}\int_{-a}^{a} |\mathcal{F}f|^2 = \frac{1}{2b}\int_{\mathbb{R}} |\mathcal{F}f|^2 = \frac{1}{2b}\int_{\mathbb{R}} |f|^2.$$

D'où

$$\int_{\mathbb{R}} |f|^2 = \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{\pi}{b}\left|f(\frac{n\pi}{b})\right|^2.$$

Solution de E. IX.8.4 D'après la question 2b)

$$\frac{1}{2b}\int_{[-b,b]} \left|g(x) - \frac{\sqrt{2\pi}}{2b}\sum_{-N}^{N} f(-\frac{n\pi}{b})e^{i\frac{n\pi}{b}x}\right|^2 \lambda(dx) \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Posons $E_n(x) = e(i\frac{n\pi}{b}x)$ sur $[-b,b]$ et 0 ailleurs.
Comme $\mathcal{F}f(x) = g(x)$ sur $[-b,b]$ et 0 ailleurs, on a :

$$\int_{\mathbb{R}} \left| \mathcal{F}f(x) - \frac{\sqrt{2\pi}}{2b} \sum_{-N}^{N} f(-\frac{n\pi}{b}) E_n(x) \right|^2 \lambda(dx) \to 0,$$

c'est-à-dire :

$$\mathcal{F}f = \frac{\sqrt{2\pi}}{2b} \sum_{-\infty}^{+\infty} f(-\frac{n\pi}{b}) E_n \qquad (\text{dans } L^2(\mathbb{R})).$$

Donc, en utilisant $\bar{\mathcal{F}}$:

$$f = \frac{\sqrt{2\pi}}{2b} \sum_{-\infty}^{\infty} f(-\frac{n\pi}{b}) \overline{\mathcal{F}} E_n.$$

Or

$$\overline{\mathcal{F}} E_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-b}^{b} e^{i\frac{n\pi}{b}x + ixt} dx = \sin_c(n\pi + tb) \frac{2b}{\sqrt{2\pi}}.$$

D'où, dans $L^2(\mathbb{R})$,

$$f(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} f(-\frac{n\pi}{b}) \sin_c(n\pi + tb).$$

Ou encore

$$f(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} f(\frac{n\pi}{b}) \sin_c(tb - n\pi).$$

Solution de E. IX.8.5 Pour montrer qu'il y a convergence uniforme, il est nécessaire et suffisant de montrer que

$$\left\| f(t) - \sum_{-N}^{N} f_n(t) \right\|_{\infty} \underset{N \to \infty}{\longrightarrow} 0$$

avec $f_n(t) = f(-\frac{n\pi}{b}) \sin_c(n\pi + tb)$.

Or

$$f_n(t) = f(-\frac{n\pi}{b}) \sin_c(n\pi + tb) = f(-\frac{n\pi}{b}) \frac{1}{2b} \int_{-b}^{b} e^{i\frac{n\pi x}{b} + ixt} dx$$

et

$$f(t) = \overline{\mathcal{F}}\mathcal{F}f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-b}^{b} \mathcal{F}f(x) e^{ixt}\, dx.$$

Donc

$$\left| f(t) - \sum_{-N}^{N} f_n(t) \right| \leq \int_{-b}^{b} \left| \frac{\mathcal{F}f(x)}{\sqrt{2\pi}} - \sum_{-N}^{N} f(-\frac{n\pi}{b}) \frac{1}{2b} e^{\frac{in\pi x}{b}} \right| dx.$$

$$\left| f(t) - \sum_{-N}^{N} f_n(t) \right| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-b}^{b} \left| \mathcal{F}f(x) - \sum_{-N}^{N} f(-\frac{n\pi}{b}) \frac{\sqrt{2\pi}}{2b} e^{i\frac{n\pi x}{b}} \right| dx.$$

Par Cauchy-Schwarz,

$$\left|f(t)-\sum_{-N}^{N} f_n(t)\right| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(\int_{-b}^{b} 1dx)^{\frac{1}{2}}(\int_{-b}^{b}\left|\mathcal{F}f(x)-\sum_{-N}^{N} c_n e^{i\frac{n\pi x}{b}}\right|^2 dx)^{\frac{1}{2}}.$$

Donc, par la convergence en moyenne quadratique de la série de Fourier :

$$\left\|f(t)-\sum_{-N}^{N} f_n(t)\right\|_{\infty} \leq \frac{2b}{\sqrt{2\pi}}\left\|g(x)-\sum_{-N}^{N} c_n e^{i\frac{n\pi x}{b}}\right\|_2 \to 0.$$

Solution de E. IX.8.6 La plus haute fréquence du signal $f(t)$ correspond à $\omega_m = a$, c'est-à-dire $freq_m = \frac{a}{2\pi}$.

La fréquence d'échantillonnage correspond à $T_e = \frac{\pi}{b}$, c'est-à-dire $\omega_e = 2b$, c'est-à-dire $freq_e = \frac{b}{\pi}$. On a donc $freq_e > 2freq_m$.

Le théorème affirme que l'**on peut reconstruire un signal de fréquence maximale f_m en l'échantillonnant à une fréquence supérieure à $2f_m$**.

De plus, si l'on ne fait qu'un échantillonnage fini, l'erreur d'approximation est maitrisée en énergie (norme L^2) et en forme (norme $\|\cdot\|_\infty$).

Solution de E. IX.9.1

(a) Soit $A > 0$. Montrons que la suite $\sum_{n=-N}^{N} f(x+n)$ converge normalement sur $[-A, A]$.

Si $|n| \geq 2A$ et $|x| \leq A$ alors $|x+n| \geq |n| - |x| \geq |n| - A \geq |n|/2$ et donc $|f(x+n)| \leq \frac{M}{(1+|n|/2)^\alpha}$.

Comme $\alpha > 1$, la série des $\sup|f(x+n)|$ converge et donc $\sum_{n=-N}^{N} f(x+n)$ converge normalement (sur $[-A, A]$).

Comme les fonctions $x \mapsto f(x+n)$ sont continues, on peut en déduire que F est continue sur $\mathbb{R}$ (vous pourrez utiliser, en le démontrant si besoin, que la somme d'une série de fonctions continues qui converge uniformément est continue).

(b) On a :

$$F(x+1) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(x+n+1) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} f(x+m) = F(x).$$

Donc F admet 1 comme période.

Solution de E. IX.9.2 Calculons les coefficients de Fourier de F :

$$c_m = \int_0^1 F(t)\exp(-2i\pi mt)\,dt = \int_0^1 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(t+n)\exp(-2i\pi mt)\,dt.$$

L'application du Théorème de Fubini donne alors :

$$c_m = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_0^1 f(t+n)\exp(-2i\pi mt)\,dt$$

et donc

$$c_m = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_0^1 f(t+n) \exp(-2i\pi m(t+n))\, dt = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_n^{n+1} f(u) \exp(-2i\pi m u)\, du.$$

On en déduit

$$c_m = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) \exp(-2i\pi m u)\, du = \hat{f}(m).$$

Solution de E. IX.9.2 La série de Fourier $\sum c_m \exp(2i\pi m x)$ converge simplement car: pour tout x,

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} |c_m \exp(2i\pi m x)| = \sum_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(m)| < +\infty.$$

Il reste à prouver que sa somme vaut $F(x)$.

Notons S la somme de la série de de Fourier et S_N sa somme partielle. On a (S_N) qui converge simplement vers S, donc (S_N) converge en moyenne de Cesàro vers S.

Or, puisque F est continue, le Théorème de Féjer (voir Exercice E.II.6) assure la convergence uniforme et donc simple des moyennes de Cesàro de (S_N) vers F.

Par unicité de la limite, on a donc $S = F$ c'est-à-dire :

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} c_m \exp(2i\pi m x) = F(x).$$

Solution de E. IX.9.4 Par définition de F, on déduit de l'égalité précédente:

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(m) \exp(2i\pi m x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(x+n).$$

En faisant $x = 0$ on obtient :

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(m) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n).$$

Solution de E. IX.9.5 En posant $g(x) = f(2\pi x)$, on trouve $\hat{g}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathcal{F} f(x)$ et l'égalité précédente s'écrit alors :

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \mathcal{F} f(m) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(2\pi n).$$

Solution de E. IX.9.6 Pour $f(t) = \exp(-2\pi a|t|)$, on trouve $\hat{f}(x) = \dfrac{a}{\pi(a^2+x^2)}$.

Les hypothèses étant vérifiées, l'égalité obtenue à la question 4 conduit à :

$$\begin{aligned}\frac{a}{\pi}\sum_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{a^2+n^2} &= \sum_{-\infty}^{+\infty}\exp(-2\pi a|n|)\\ &= 2\sum_{0}^{+\infty}\exp(-2\pi a n) - 1\\ &= \frac{2}{1-\exp(-2\pi a)} - 1 = \coth(\pi a),\end{aligned}$$

pour $a > 0$.