维基百科

巴拿赫不动点定理

维基百科，自由的百科全书

巴拿赫不动点定理，又称为**压缩映射定理**或**压缩映射原理**，是度量空间理论的一个重要工具。它保证了度量空间的一定自映射的不动点的存在性和唯一性，并提供了求出这些不动点的构造性方法。这个定理是以斯特凡·巴拿赫命名的，他在1922年提出了这个定理。

目录

定理

设(X, d)为非空的完备度量空间。设$T : X \to X$为X上的一个压缩映射，也就是说，存在一个非负的实数$q < 1$，使得对于所有X内的x和y，都有：

$$d(T(x),T(y)) \leq q \cdot d(x,y)$$

那么映射T在X内有且只有一个不动点x^*（这就是说，$Tx^* = x^*$）。更进一步，这个不动点可以用以下的方法来求出：从X内的任意一个元素x_0开始，定义一个迭代序列$x_n = Tx_{n-1}$，其中$n = 1$，2，3，……。那么，这个序列收敛，极限为x^*。以下的不等式描述了收敛的速率：

$$d(x^*, x_n) \leq \frac{q^n}{1-q} d(x_1, x_0).$$

等价地：

$$d(x^*, x_{n+1}) \leq \frac{q}{1-q} d(x_{n+1}, x_n)$$

且

$$d(x^*, x_{n+1}) \leq q d(x_n, x^*).$$

满足以上不等式的最小的q有时称为利普希茨常数。

注意对于所有不同的x和y都有$\mathrm{d}(Tx, Ty) < \mathrm{d}(x, y)$的要求，一般来说是不足以保证不动点的存在的，例如映射$T : [1,\infty) \to [1,\infty)$，$T(x) = x + 1/x$，就没有不动点。但是，如果空间$X$是紧的，则这个较弱的假设也能保证不动点的存在。

当实际应用这个定理时，最艰难的部分通常是如何恰当地定义X，使T把元素从X映射到X，即Tx总是X的一个元素。

证明

选择任何$x_0 \in (X, d)$。如果$Tx_0 = x_0$，则不必证明；以下设$x_1 = Tx_0 \neq x_0$。对于每一个$n \in \{2, \ldots\}$，定义$x_n = Tx_{n-1}$。我们声称对于所有的$n \in \{1, 2, \ldots\}$，以下等式都成立：

$$d(x_{n+1}, x_n) \leq q^n d(x_1, x_0)。$$

我们用数学归纳法来证明。对于$n = 1$的情况，命题是成立的，这是因为：

$$d(x_{1+1}, x_1) = d(x_2, x_1) = d(Tx_1, Tx_0) \leq qd(x_1, x_0)。$$

假设命题对于某个$k \in \{1, 2, \ldots\}$是成立的。那么，我们有：

$$\begin{aligned} d(x_{(k+1)+1}, x_{k+1}) &= d(x_{k+2}, x_{k+1}) \\ &= d(Tx_{k+1}, Tx_k) \\ &\leq qd(x_{k+1}, x_k) \\ &\leq q \cdot q^k d(x_1, x_0) \\ &= q^{k+1} d(x_1, x_0)。 \end{aligned}$$

从第三行到第四行，我们用到了归纳假设。根据数学归纳法原理，对于所有的$n \in \{1, 2, \ldots\}$，以上的命题都成立。

设$\epsilon > 0$。由于$0 \leq q < 1$，我们便可以找出一个较大的$N \in \{1, 2, \ldots\}$，使得：

$$q^N < \frac{\epsilon(1-q)}{d(x_1, x_0)}。$$

利用以上的命题，我们便有对于任何m，$n \in \{0, 1, \ldots\}$以及$m > n \geq N$，都有：

$$\begin{aligned} d\left(x_m, x_n\right) &\leq d(x_m, x_{m-1}) + d(x_{m-1}, x_{m-2}) + \cdots + d(x_{n+1}, x_n) \\ &\leq q^{m-1} d(x_1, x_0) + q^{m-2} d(x_1, x_0) + \cdots + q^n d(x_1, x_0) \\ &= d(x_1, x_0) q^n \cdot \sum_{k=0}^{m-n-1} q^k \\ &< d(x_1, x_0) q^n \cdot \sum_{k=0}^{\infty} q^k \\ &= d(x_1, x_0) q^n \frac{1}{1-q} \\ &= q^n \frac{d(x_1, x_0)}{1-q} \\ &< \frac{\epsilon(1-q)}{d(x_1, x_0)} \cdot \frac{d(x_1, x_0)}{1-q} \\ &= \epsilon。 \end{aligned}$$

第一行的不等式可以从三角不等式推出；第四行的级数是一个几何级数，其中$0 \leq q < 1$，因此它收敛。以上表明$\{x_n\}_{n\geq 0}$是(X, d)内的一个柯西序列，所以根据完备性，它是收敛的。因此设$x^* = \lim_{n\to\infty} x_n$。我们作出两个声明：第一，$x^*$是$T$的一个不动点，也就是说，$Tx^* = x^*$；第二，$x^*$是$T$在$(X, d)$中的唯一的不动点。

为了证明第一个命题，我们注意到对于任何的$n \in \{0, 1, \ldots\}$，都有：

$$0 \leq d(x_{n+1}, Tx^*) = d(Tx_n, Tx^*) \leq qd(x_n, x^*)。$$

由于当$n \to \infty$时，$qd(x_n, x^*) \to 0$，因此根据夹挤定理，可知$\lim_{n\to\infty} d(x_{n+1}, Tx^*) = 0$。这表明当$n \to \infty$时，$x_n \to Tx^*$。但当$n \to \infty$时，$x_n \to x^*$，且极限是唯一的；因此，一定是$x^* = Tx^*$的情况。

为了证明第二个命题，我们假设y也满足$Ty = y$。那么：

$$0 \leq d(x^*, y) = d(Tx^*, Ty) \leq qd(x^*, y)。$$

由于$0 \leq q < 1$，因此上式意味着$0 \leq (1-q)d(x^*, y) \leq 0$，这表明$d(x^*, y) = 0$，于是根据正定性，$x^* = y$，定理得证。

逆定理

巴拿赫不动点定理有许多逆定理，以下的一个是Czesław Bessaga在1959年发现的：

设$f: X \to X$为一个抽象集合的映射，使得每一个迭代f^n都有一个唯一的不动点。设q为一个实数，$0 < q < 1$。那么存在X上的一个完备度量，使得f是压缩映射，且q是压缩常数。

推广

一个有趣的事实是，若把某国的地图缩小后印在该国领土内部，那么在地图上有且仅有这样一个点，它在地图中的位置也恰巧表示它所落在的土地位置。证明如下：

- 为了方便起见，这里把地球近似看作是正球体。
- 首先，按照经纬度可以给地球表面上每一个点标出坐标 (x, y)，其中前元是经度、后元是纬度。又定义地面上任意两点间的距离 d(A, B) 是 A 到 B 间大圆弧的弧长。
- 其次，把这国家的地图上的点按照其所代表点的实际经纬度标出坐标 (u, v)。
- 那么对于地图上任意一点 P 而言，它既在地图上表示地点 (up, vp)，又实际在地面上占有点 (xp, yp)。显然，这构成了从集合 S={P|P 是地面上的点且 P 属于该国领土} 到其本身的映射，现记作 M(P)=M((up, vp))=(xp, yp)。
- 又因为地图是缩小的，即对于任意两个地点 A∈S、B∈S 而言，d(A, B)>d(M(A), M(B))，也即 M(P) 是一个压缩映射。
- 事实上，取实数 k>1 作为地图比例尺的分母、即 1:k，那么由比例尺的定义知 d(A, B)=kd(M(A), M(B))，两边同除以 k 得 d(A, B)*(1/k)=d(M(A), M(B))。换言之，存在实数 q=1/k<1 满足对于 S 内所有的 A 和 B，d(M(A), M(B))≤qd(A, B)，这里等号总是成立。
- 现在将 S 视为以 d 为度量的空间，那么它显然是一个完备度量空间。

- 根据巴拿赫不动点定理，M 在 S 内有且仅有一个不动点，即该点恰好被印在它所表示的土地位置上。Q.E.D.

关于巴拿赫不动点定理的推广，请参见无穷维空间中的不动点定理。

参考文献

- Vasile I. Istratescu, *Fixed Point Theory, An Introduction*, D.Reidel, the Netherlands (1981). ISBN 90-277-1224-7 See chapter 7.
- Andrzej Granas and James Dugundji, *Fixed Point Theory* (2003) Springer-Verlag, New York, ISBN 0-387-00173-5.
- Kirk, William A.; Khamsi, Mohamed A. An Introduction to Metric Spaces and Fixed Point Theory. John Wiley, New York. 2001. ISBN 978-0-471-41825-2.
- William A. Kirk and Brailey Sims, *Handbook of Metric Fixed Point Theory* (2001), Kluwer Academic, London ISBN 0-7923-7073-2.
- Bourbawiki (http://bourbawiki.no-ip.org)上巴拿赫不动点定理的证明 (https://archive.is/20121221140350/http://nfist.ist.utl.pt/~edgarc/wiki/index.php/Banach_fixed_point_theorem)