Cursus ingénieur CentraleSupélec

CIPEDP - 1ère année

Examen partiel no. 2

Vendredi 11 janvier 2019

Epreuve 1h30 sans document (2 pages)

Consignes

- Les documents ne sont pas autorisés.
- L'usage de tout ordinateur, calculatrice ou téléphone est interdit.
- Ne pas utiliser de correcteur fluide.
- Ecrire avec un stylo à encre noire ou bleu foncé (éviter le stylo plume à encre claire).
- Bien remplir le cartouche de chaque copie en majuscule.
- Bien numéroter les copies.
- Rendre les copies à plat toutes dans le même sens (coin coupé en haut à droite).
- L'épreuve ne durant que 1h30, les sorties ne sont pas autorisées.
- *Chacune des affirmations doit être justifiée par une démonstration.*
- *Les 2 exercices sont indépendants.*

Exercice 1

Soit une masse m de $500g$ pendue à un fil de longueur ℓ égale à $10cm$, inélastique et de masse supposée négligeable. On suppose qu'il n'y a pas de frottement. On arrondit la constante de gravité terrestre à $10m.s^{-2}$. On appelle θ l'angle que fait le fil avec l'axe vertical dirigé vers le bas, mesuré dans le sens trigonométrique. On fixe un temps d'observation T.

Q.1.1 Montrez que l'équation adimensionnée qui régit le mouvement angulaire du centre de gravité de la masse est $\theta'' + 100\,T^2 \sin(\theta) = 0$. Faire un dessin est fortement recommandé.

Q.1.2 Rappelez la définition d'un problème de Cauchy.

Q. 1.3 On suppose que l'angle θ^0 de départ vaut $0,01 rad$ et que la vitesse initiale est nulle. Ecrivez le problème de Cauchy (sans dimension) satisfait par le vecteur $\Theta = (\theta, \theta')^T$. On notera f le champ de vecteurs associé : $\Theta' = f(\Theta)$.

Q.1.4 Montrez que f est une fonction globalement Lipschitzienne sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Q.1.5 Rappelez la définition d'une solution globale.

Q. 1.6 Le problème de la question Q.1.3 admet-il une solution globale ? Que dire de l'unicité ? Justifiez précisément votre réponse grâce aux résultats du cours.

L'angle θ^0 étant faible, on linéarise le problème de la question Q.1.3.

Q.1.7 Donnez explicitement la solution de ce problème linéarisé.

Exercice 2

Soit $\Omega =]0,1[$. On s'intéresse au problème

$$\begin{cases} -\nu(x)u''(x) + q(x)u(x) = f(x), & x \in]0,1[, \\ u'(0) = u'(1) = 0, \end{cases} \tag{1}$$

avec $\nu, q \in C^0([0,1], \mathbb{R}^{+*})$, $f \in C^0([0,1])$.

Q.2.1 Quel est le type de ce problème ? Quel est le nom des conditions aux limites ?

Q.2.2 Montrez que la formulation variationnelle

« *Trouver* $u \in H^1(0,1)$ *solution de*

$$\forall v \in H^1(0,1), \qquad \int_{]0,1[} u'v' + \int_{]0,1[} \tilde{q}uv = \int_{]0,1[} \tilde{f}v$$

»

peut être associée au problème (1) pour des fonctions $\tilde{q}$ et $\tilde{f}$ à préciser.

Q. 2.3 Montrez qu'il existe une et une seule solution de la formulation variationnelle précédente dans $H^1(0,1)$.

Q.2.4 Montrez que le problème (1) est bien posé au sens de Hadamard dans $H^2(0,1)$.

Q.2.5 Montrez que la solution de (1) est classique.

Q.2.6 Décrivez la méthode des éléments finis $\mathbb{P}_1$ sur un maillage uniforme de $[0,1]$ comportant J points uniformément répartis pour $J \geq 3$. Vous devrez fournir les expressions explicites

— le pas h,

— du sous-espace $H_h \subset H^1(0,1)$ d'approximation et sa dimension,

— de la base de H_h choisie,

— de la matrice de rigidité A_h du système linéaire et le second membre b_h.

Vous donnerez explicitement la matrice A_h pour $J = 4$ et $q = \nu$.

Q.2.7 Que dire de la matrice A_h si q est la fonction nulle ? Si q est simplement supposée positive et non strictement positive ? Le raisonnement fait précédemment est-il mis en défaut et si oui, à quel étape ?

Q.2.8 Proposez un phénomène physique qui peut être modélisé par le problème (1).