Séance I : Analyse théorique des équations différentielles

NB: Les questions précédées du symbole $*$ ou $**$ sont facultatives et demandent une compréhension et/ou des techniques qui vont au-delà de ce qui est exigé pour valider l'examen. Elles peuvent être passées et le cas échéant, admises pour répondre au reste de l'exercice.

A) Objectifs de la séance

A la fin de cette séance,

- Je sais ce qu'est une EDO.
- Je sais ce qu'est un problème de Cauchy.
- Je sais montrer qu'une fonction est globalement lipschitzienne.
- Je sais montrer l'existence et l'unicité de la solution d'un problème de Cauchy en vérifiant les hypothèses du théorème de Cauchy-Lipschitz adapté.
- Je sais ce qu'est un point d'équilibre, stable, asymptotiquement, exponentiellement stable.
- Je sais comment montrer qu'un point d'équilibre est asymptotiquement stable.

B) Pour se familiariser avec les concepts (à traiter avant les séances de TD)

Les questions I.1 et I.2 sont à traiter avant la première séance de TD. Les corrigés sont disponibles sur internet. *Ne regardez pas* les solutions avant d'avoir fini de travailler sur ces questions.

Question I.1
On considère un problème de Cauchy sur l'équation de Riccati à $y^0 \in \mathbb{R}$ donné

$$\begin{cases} y' = y^2, \\ y(0) = y^0. \end{cases}$$

Q. I.1.1 Montrer que ce problème de Cauchy admet une unique solution locale.

Q. I.1.2 Déterminer explicitement cette solution.

Q. I.1.3 A quelle condition sur y^0 ce problème admet-il une solution globale ?

Question I.2

Q. I.2.1 Résoudre le problème de Cauchy

$$u'(t) = e^{u(t)} \sin t, \quad u(0) = 0.$$

Pour quel t la solution existe-t-elle?

Q. I.2.2 Résoudre le problème de Cauchy

$$x'(t) = \frac{(x(t))^2}{1+t^2}, \quad x(0) = 1.$$

Pour quel t la solution existe-t-elle?

Q. I.2.3 Résoudre le problème de Cauchy

$$y' = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} y, \quad y(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

C) Exercices

Exercice I.1 (Méthode de tir)
Soient f une fonction continue sur $[0,1]$ et q une constante positive ou nulle.

E. I.1.1 Résoudre explicitement le problème aux limites

$$\textbf{(E)} \qquad \begin{cases} -u''(x) + qu(x) = f(x), & x \in]0,1[, \\ u(0) = 0 \text{ and } u(1) = 0, \end{cases}$$

à l'aide de la **méthode de tir** : on cherchera les solutions explicites du problème de Cauchy

$$\textbf{(D)} \qquad \begin{cases} -u''(x) + qu(x) = f(x), \;\; x \in]0,1[, \\ u(0) = 0 \text{ and } u'(0) = k, \end{cases}$$

avec k à relier à $u(1)$.

E. I.1.2 Qu'a-t-on fait et pourquoi la méthode porte-t-elle le nom de méthode de tir ?

E. I.1.3 Peut-on raisonner de la même façon si on prend $q < 0$?

Exercice I.2
On considère les problèmes de Cauchy suivants

$$u' = (\sin(u))^3, \quad u(0) = 1, \quad \text{et} \quad v' = (\sin(v))^3, \quad v(0) = \pi.$$

E. I.2.1 Montrer que la fonction $f : u \mapsto (\sin(u))^3$ est globalement lipschitzienne .

E. I.2.2 Montrer que ces deux problèmes de Cauchy admettent chacun une unique solution définie sur $\mathbb{R}$ dont les courbes ne s'intersectent pas.

E. I.2.3 Estimer la différence $|u(t) - v(t)|$ pour $t \geq 0$.

E. I.2.4 Déterminer la solution v.

Exercice I.3
Le système de Lotka-Volterra s'écrit : pour $\alpha, \beta, \gamma, \delta > 0$, $x^0, y^0 > 0$,

$$\begin{cases} x' = \alpha x - \beta xy, \\ y' = -\gamma y + \delta xy, \\ x(0) = x^0, \\ y(0) = y^0. \end{cases}$$

E. I.3.1 Montrer qu'il existe une solution locale de ce système, définie sur $[0, T[$, pour $T > 0$.

E. I.3.2 Montrer que, pour tout $T > 0$, $x(t) > 0$ et $y(t) > 0$. En déduire que la solution est en fait globale.

E. I.3.3 Déterminer les équilibres du système de Lotka-Volterra.

E. I.3.4 Indiquer la stabilité de chaque équilibre.

D) Approfondissement

Exercice I.4 (Preuve du théorème de Lyapounov)
L'objectif de cet exercice est de prouver le théorème suivant :

Théorème. *Soit v un point singulier du champ de vecteur $f \in C^1(\mathcal{U}, \mathbb{R}^d)$. On suppose que la matrice Jacobienne $Df(v)$ est telle que*

$$\mathrm{Sp}(Df(v)) \subset \{\mu \in \mathbb{C} \,:\, \mathrm{Re}(\mu) < 0\}.$$

Alors v est asymptotiquement stable.

On note $A = Df(v)$.

E. I.4.1 Soit B une matrice complexe de taille n, $n \geq 1$. Montrer que la somme suivante

$$\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{B^j}{j!}.$$

est bien définie. On la note $\exp(B)$.

E. I.4.2 Soit B une matrice carrée réelle de taille n, $n \geq 1$. Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ les valeurs propres distinctes de B. Montrer qu'il existe un polynôme P tel que pour tous $t \in \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}^n$, on a

$$\|e^{tB}x\| \leq P(|t|) \left(\sum_{j=1}^{k} e^{t\mathrm{Re}(\lambda_j)} \right) \|x\|.$$

pour toute norme $\|\cdot\|$ sur $\mathbb{C}^n$.

Soit $x \in \mathbb{R}^n$. Soit z la solution de

$$\begin{cases} z' = Az \\ z(0) = x. \end{cases}$$

Soient $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$ et $\|\cdot\|$ la norme associée.

E. I.4.3 Montrer qu'il existe deux constantes $a, C > 0$ telles que, pour tout $t \geq 0$,

$$\|z(t)\| \leq C\, e^{-at}\, \|x\|$$

On considère l'application

$$b : (x, y) \longmapsto \int_0^{+\infty} \langle e^{tA}x, e^{tA}y \rangle.$$

E. I.4.4 Montrer que b est bien définie, bilinéaire, symétrique et continue.

Soit q la forme quadratique associée, c'est-à-dire $q : x \mapsto b(x, x)$.

E. I.4.5 Montrer que q est définie positive, c'est-à-dire que $q(x) = 0$ si et seulement si $x = 0$.

E. I.4.6 Calculer $(\mathrm{grad}\, q)(x)$.

E. I.4.7 Montrer que $\langle (\mathrm{grad}\, q)(x), Ax \rangle = -\|x\|^2$.

Il faut maintenant montrer que la solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} y' = f(y) \\ y(0) = x \end{cases}$$

est globale.

E. I.4.8 Justifier l'existence de $T > 0$ tel que y soit solution de ce problème de Cauchy sur $[0, T[$.

E. I.4.9 Montrer que $q(y)' \leq -\|y\|^2 + 2b(y, f(y) - Ay)$.

E. I.4.10 Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\alpha > 0$ tel que, si $q(y) \leq \alpha$, $\sqrt{q(f(y) - Ay)} \leq \varepsilon \sqrt{q(y)}$.

E. I.4.11 Montrer qu'il existe $\beta > 0$ tel que $q(y) \leq \alpha \Rightarrow q(y)' \leq -\beta q(y)$.

On suppose que $q(x) < \alpha$.

E. I.4.12 Montrer que pour tout $t \in [0, a[$, $q(y(t)) < \alpha$.

E. I.4.13 En déduire que y est globale.

E. I.4.14 Montrer que $q(y)$ tend vers 0 exponentiellement rapidement et conclure.

Chapitre I : Corrections des exercices

Solution de Q. I.1.1 La fonction $y \mapsto y^2$ étant de classe C^1, elle est localement lipschitzienne. On peut donc appliquer le théorème de Cauchy-Lipschitz local.

Solution de Q. I.1.2 Remarquons tout d'abord que, si $y^0 = 0$, la solution y est nulle partout. Par unicité de la solution du problème de Cauchy, si $y^0 \neq 0$, la solution y ne s'annule pas.
Supposons $y^0 \neq 0$. Alors il existe $T_* \in \mathbb{R}^-$, $T^* \in \mathbb{R}^+$ tel que pour tout $t \in]T_*, T^*[$,

$$\frac{y'}{y^2} = 1$$

d'où

$$\int_0^t \frac{y'}{y^2}\, ds = \int_0^t 1\, ds$$

d'où

$$\left[-\frac{1}{y(s)}\right]_0^t = t$$

d'où

$$-\frac{1}{y(t)} + \frac{1}{y^0} = t$$

d'où

$$y(t) = \frac{y^0}{1 - ty^0}.$$

La solution est donc définie sur $]-\infty, 1/y^0[$ si $y^0 > 0$ et sur $]1/y^0, +\infty[$ si $y^0 < 0$. Elle est définie sur $\mathbb{R}$ si $y^0 = 0$.

Solution de Q. I.1.3 Voir question précédente.

Solution de Q. I.2.1 La fonction $f : (t, u) \mapsto \exp(u)\sin(t)$ est C^1 en t et en u, donc localement lipschitzienne en u, et on peut appliquer le théorème de Cauchy-Lipschitz local.
On raisonne par séparation de variable : l'équation s'écrit encore

$$u' \exp(-u) = \sin.$$

En intégrant entre 0 et t, on a donc, là où la solution est définie

$$-\exp(-u(t)) + 1 = -\cos(t) + 1,$$

donc

$$u(t) = -\ln(\cos(t)).$$

L'intervalle de définition est donc $I =]-\pi/2, \pi/2[$. Remarquons que f n'est pas globalement lipschitzienne en u. Il n'est donc pas étonnant que la solution ne soit pas globale.

Solution de Q. I.2.2 La fonction $f : (t, x) \mapsto x^2/(1+t^2)$ est C^1 en t et en x, donc localement lipschitzienne en x, et on peut appliquer le théorème de Cauchy-Lipschitz local.
On raisonne par séparation de variable : l'équation s'écrit encore

$$\frac{x'}{x^2}(t) = \frac{1}{1+t^2}.$$

En intégrant entre 0 et t, on a donc, là où la solution est définie

$$-\frac{1}{x(t)} + 1 = \arctan(t) - 0 = \arctan(t),$$

donc

$$x(t) = \frac{1}{1 - \arctan(t)}.$$

L'intervalle de définition est donc $I =]-\infty, \tan(1)[$. Remarquons que f n'est pas globalement lipschitzienne en x. Il n'est donc pas étonnant que la solution ne soit pas globale.

Solution de Q. I.2.3 La solution globale (on applique le théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire) est donnée par

$$y : t \in \mathbb{R} \mapsto e^{tA} y(0)$$

où e^A est l'exponentielle de la matrice A. Or cette matrice est diagonalisable de valeurs propres $\lambda_1 = 2$ et $\lambda_2 = -1$, de vecteurs propres associés

$$v_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

On trouve donc

$$y : t \mapsto \begin{pmatrix} 4e^{2x} - e^{-x} \\ -e^{2x} + e^{-x} \end{pmatrix}.$$

Solution de Q. I.1.1 Résolvons explicitement **(E)** : il s'agit d'un problème de Cauchy dont l'équation est linéaire à coefficients constants du second ordre. On la réécrit sous forme d'un système différentiel à deux équations du premier ordre en posant

$$W = \begin{pmatrix} u \\ u' \end{pmatrix} \qquad \text{d'où} \qquad W' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ q & 0 \end{pmatrix} W - \begin{pmatrix} 0 \\ f \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad W(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ k \end{pmatrix}.$$

D'après le théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire, sous la condition initiale $(u(0), u'(0)) = (0, k)$, le problème de Cauchy associé au système admet une unique solution globale.
Posons

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ q & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad F = -\begin{pmatrix} 0 \\ f \end{pmatrix}.$$

Examinons 2 cas :

- **Cas** $q = 0$:
  Il suffit d'intégrer deux fois par rapport à x :

  $$u : x \mapsto -\int_0^x \left(\int_0^t f \right) \mathrm{d}t + kx$$

  On a donc

  $$k = u(1) + \int_0^1 \left(\int_0^t f \right) \mathrm{d}t.$$

  La fonction $u(1) \mapsto k$ est une fonction affine (de coefficient directeur 1) de $u(1)$. C'est donc une bijection.

- **Cas** $q > 0$:
  La matrice A est diagonalisable de valeurs propres $\pm\sqrt{q}$ de vecteurs propres associés $(1, \pm\sqrt{q})^T$: $A = P\mathrm{diag}(\sqrt{q}, -\sqrt{q})P^{-1}$ avec P de colonnes $(1, \pm\sqrt{q})^T$ et P^{-1} de colonnes $(1/2)(1,1)^T$ et $(1/(2\sqrt{q}))(1,-1)^T$.

  Déterminons la solution du problème de Cauchy avec second membre par une méthode directe (formule de Duhamel) : en effet, remarquons que

  $$W' = AW + F \Longleftrightarrow (x \mapsto \exp(-xA)W(x))' = \exp(-xA)F(x)$$

  donc W est solution de **(E)** si et seulement si, pour tout $x \in [0,1]$,

  $$\exp(-xA)W(x) - W(0) = \int_0^x \exp(-yA)F(y)\mathrm{d}y$$

  si et seulement si, pour tout $x \in [0,1]$,

  $$W(x) = \exp(xA)W(0) + \int_0^x \exp((x-y)A)F(y)\mathrm{d}y,$$

  c'est-à-dire

  $$W(x) = P\mathrm{diag}(e^{x\sqrt{q}}, e^{-x\sqrt{q}})P^{-1}W(0) + P\int_0^x \mathrm{diag}(e^{(x-y)\sqrt{q}}, e^{-(x-y)\sqrt{q}})P^{-1}F(y)\mathrm{d}y.$$

  On trouve donc

  $$W : x \mapsto \frac{k}{\sqrt{q}} \begin{pmatrix} \sinh(x\sqrt{q}) \\ \sqrt{q}\cosh(x\sqrt{q}) \end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{q}} \int_0^x \begin{pmatrix} \sinh((x-y)\sqrt{q})f(y) \\ \sqrt{q}\cosh((x-y)\sqrt{q})f(y) \end{pmatrix} \mathrm{d}y.$$

Relions maintenant k à $u(1)$:

$$u(1) = k\frac{\sinh(\sqrt{q})}{\sqrt{q}} - \frac{\displaystyle\int_0^1 \sinh((1-y)\sqrt{q})f(y)\mathrm{d}y}{\sqrt{q}}$$

d'où

$$k = \frac{\sqrt{q}\,u(1) + \displaystyle\int_0^1 \sinh((1-y)\sqrt{q})f(y)\mathrm{d}y}{\sinh(\sqrt{q})}.$$

Comme dans le cas $q = 0$, k est une fonction affine (de coefficient directeur non nul) de $u(1)$. C'est donc une bijection[1].

Remarque 1
On peut aussi raisonner en résolvant tout d'abord l'équation sans second membre puis en utilisant la méthode de variation des constantes (il s'agit d'utiliser la structure affine de l'espace des solutions). La solution du système sans second membre s'écrit à l'aide de l'exponentielle de matrice :

$$\widetilde{W} : x \mapsto \exp(xA)\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}$$

où (α, β) sont des paramètres réels, ce qui donne

$$\widetilde{W} : x \mapsto P\mathrm{diag}(e^{x\sqrt{q}}, e^{-x\sqrt{q}})P^{-1}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}.$$

On cherche ensuite la solution de **(E)** sous la forme

$$W : x \mapsto P\mathrm{diag}(e^{x\sqrt{q}}, e^{-x\sqrt{q}})P^{-1}\begin{pmatrix}\alpha(x)\\ \beta(x)\end{pmatrix}.$$

On trouve alors un système différentiel très simple satisfait par α et β :

$$P\mathrm{diag}(e^{x\sqrt{q}}, e^{-x\sqrt{q}})P^{-1}\begin{pmatrix}\alpha'(x)\\ \beta'(x)\end{pmatrix} = F(x).$$

Par unicité, la solution de **(D)** est donc

$$u : x \mapsto k(0)\frac{\sinh(x\sqrt{q})}{\sqrt{q}} - \frac{\displaystyle\int_0^x \sinh((x-y)\sqrt{q})f(y)\mathrm{d}y}{\sqrt{q}}.$$

Solution de Q. I.1.2 Nous avons résolu **(D)** en le réduisant à la résolution du problème de Cauchy **(E)**: nous "tirons" à des vitesses différentes jusqu'à ce que nous trouvions une trajectoire ayant la valeur désirée au bord.

[1] on vérifie que la limite simple quand $q \to 0$ est bien la solution trouvée dans le cas $q = 0$.

Solution de Q. I.1.3 Non. En effet, si $f = 0$ et $q < 0$, il existe soit une infinité de solutions (cas où $q = -(n\pi)^2$, $n \in \mathbb{N}^*$) ou pas de solution non nulle.

Solution de Q. I.2.1 La fonction f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est $f' = 3\cos\sin^2$: on a ainsi $f' \in L^\infty(\mathbb{R})$. La fonction f est donc globalement Lipschitzienne.

Solution de Q. I.2.2 On applique le théorème de Cauchy-Lipschitz global. Si leur courbes s'intersectent, alors il existe un point $t \in \mathbb{R}$ tel que $u(t) = v(t)$. Par unicité, $u = v$. Or $u(0) \neq v(0)$. C'est donc impossible.

Solution de Q. I.2.3 Grâce à la question précédente, on sait que $w = v - u$ est une fonction positive. De plus,

$$w' = \sin(v)^3 - \sin(u)^3 \leq \|f'\|_\infty (v-u) \leq 3w.$$

Posons $\phi : t \mapsto \exp(-3t)w(t)$. Alors

$$\phi' \leq 0.$$

Donc $\phi(t) \leq \phi(0)$, c'est-à-dire $\forall t \in \mathbb{R}, 0 \leq w(t) \leq \exp(3t)(\pi - 1)$.

Solution de Q. I.2.4 On remarque que $\sin(\pi) = 0$: la solution est donc constante $v = \pi$.

Solution de Q. I.3.1 Le champ de vecteurs est $f : (x,y) \mapsto (\alpha x - \beta xy, -\gamma y + \delta xy)$. Ses coefficients sont polynomiaux, donc f est de classe $C^\infty(\mathbb{R}^2)$, et en particulier C^1 en la variable d'état (x,y). Donc le théorème de Cauchy-Lipchitz s'applique et il existe T_*, T^* strictement positifs et (x,y) fonction vectorielle de classe $C^1(]-T_*, T^*[)$ tels que $(]-T_*, T^*[, (x,y))$ soit solution maximale du problème de Cauchy.

Solution de Q. I.3.2 Etudions d'abord des problèmes de Cauchy particuliers :

- pour $t^1 \geq 0$,

$$\begin{cases} x' = \alpha x - \beta xy, \\ y' = -\gamma y + \delta xy, \\ x(t^1) = 0, \\ y(t^1) = 0. \end{cases}$$

  Alors la seule solution de ce système est $(\mathbb{R}, (0,0))$ (c'est une solution globale).

- pour $t^1 \geq 0, y^1 > 0$,
$$\begin{cases} x' = \alpha x - \beta xy, \\ y' = -\gamma y + \delta xy, \\ x(t^1) = 0, \\ y(t^1) = y^1. \end{cases}$$
Alors la seule solution de ce système est $(\mathbb{R}, (0, t \mapsto y^1 \exp(-\gamma(t - t^1))))$ (c'est une solution globale).

- pour $t^1 \geq 0, x^1 > 0$,
$$\begin{cases} x' = \alpha x - \beta xy, \\ y' = -\gamma y + \delta xy, \\ x(t^1) = x^1, \\ y(t^1) = 0. \end{cases}$$
Alors la seule solution de ce système est $(\mathbb{R}, (t \mapsto x^1 \exp(\alpha(t - t^1))))$ (c'est une solution globale).

Revenons au cas général.
On raisonne par l'absurde : on suppose qu'il existe $\tau > 0$ tel que $x(\tau) = 0$. Alors, du fait que les trajectoires ne se coupent pas, d'après l'étude menée précédemment, la solution est $(\mathbb{R}, (0, t \mapsto y(\tau) \exp(-\gamma(t - \tau))))$, ce qui implique que $x(0) = 0$. D'où la contradiction, et le fait que x ne s'annule pas. De même, y ne s'annule pas. Donc x et y sont strictement positives sur $[0, T^*[$.

Pour montrer que $T^* = +\infty$, on étudie le comportement de x et y au voisinage de T^* :

- soit $t \in [0, T^*[$. Alors $x'(t) \leq \alpha x(t)$ car $x(t)y(t) > 0$. Donc $x(t) \leq x(0) \exp(\alpha t)$. Donc x est majorée sur $[0, T^*[$ par la fonction $t \mapsto x(0) \exp(\alpha t)$ qui est elle-même bornée par $\exp(\alpha T^*)$ sur $[0, T^*]$.

- soit $t \in [0, T^*[$. Alors $y'(t) \leq \delta x(t)y(t) \leq \delta x(0)e^{\alpha t}y(t)$. Or y ne s'annule pas, donc $\ln(y)'(t) \leq \delta x(0)e^{\alpha t}$. On en conclut que $y(t) \leq y(0) \exp(\delta x(0)(e^{\alpha t} - 1)/\alpha)$ et donc que y est également majorée par une fonction bornée sur $[0, T^*]$.

  Par le théorème des bouts, qui implique que la solution maximale tend en norme vers $+\infty$ en la borne supérieure de l'intervalle maximal si elle est finie, on conclut que $T^* = +\infty$.

Solution de Q. I.3.3 On considère
$$\begin{cases} x' &= \alpha x - \beta xy \\ y' &= \delta xy - \gamma y \end{cases}$$
avec $\alpha > 0, \beta > 0, \gamma > 0, \delta > 0$. Le point (x^*, y^*) est un équilibre du système si et seulement si
$$\begin{cases} \alpha x^* - \beta x^* y^* = 0 \\ \delta x^* y^* - \gamma y^* = 0 \end{cases}$$

ce qui est logiquement équivalent à

$$(x^*, y^*) \in \left\{ (0,0), \left(\frac{\gamma}{\delta}, \frac{\alpha}{\beta} \right) \right\}$$

Solution de Q. I.3.4 Soit f définie par

$$F(x,y) = \begin{bmatrix} \alpha x - \beta xy \\ \delta xy - \gamma y \end{bmatrix}$$

Cette fonction est C^2 et

$$Df(x,y) = \begin{bmatrix} \alpha - \beta y & -\beta x \\ \delta y & \delta x - \gamma \end{bmatrix}$$

Ainsi

$$Df(0,0) = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & -\gamma \end{bmatrix} , \; Df\left(\frac{\gamma}{\delta}, \frac{\alpha}{\beta} \right) = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\beta\gamma}{\delta} \\ \frac{\alpha\delta}{\beta} & 0 \end{bmatrix}$$

L'une des valeurs propres de $Df(0,0)$ est strictement positive. On observe qu'en prenant $y(0) = 0$, $y(t) = 0$ et $x(t) = e^{\alpha t} x^0$ tend vers $+\infty$. L'équilibre est donc instable.
La partie réelle des valeurs propres de $D(\frac{\gamma}{\delta}, \frac{\alpha}{\beta})$ est nulle. On ne peut pas conclure sur la nature de l'équilibre.