Séance IV : Distributions

A) Objectifs de la séance

A la fin de cette séance,

- Je sais définir la convergence d'une suite de fonctions-tests.
- Je sais vérifier qu'une forme linéaire simple est une distribution.
- Je sais ce qu'est une distribution régulière.
- Je sais dériver au sens des distributions en dimension 1.
- Je sais montrer qu'une fonction appartient à l'espace de Sobolev H^1.
- Je connais la définition de H_0^1.
- Je sais démontrer l'inégalité de Poincaré en dimension 1.

B) Pour se familiariser avec les concepts (à traiter avant les séances de TD)

Les questions IV.1 et IV.2 sont à traiter avant la séance de TD 4. Les corrigés sont disponibles sur internet.

Question IV.1
Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ contenant 0. On définit les applications

$$T_1 : \varphi \in \mathcal{D}(I) \mapsto \varphi(0)^2$$
$$T_2 : \varphi \in \mathcal{D}(I) \mapsto \int_I \varphi$$
$$T_3 : \varphi \in \mathcal{D}(I) \mapsto \int_I |\varphi|$$

T_1, T_2 et T_3 sont-elles des distributions ?

Question IV.2
Soit f définie par

$$\begin{cases} f : & [-1,1] \to \mathbb{R}, \\ & x \mapsto \dfrac{|x|+x}{2}. \end{cases}$$

Montrer que $f \in H^1(-1,1)$ et que $f' \notin H^1(-1,1)$.

C) Exercices

Exercice IV.1
Soient I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $\theta_0 \in \mathcal{D}(I)$ une fonction donnée telle que

$$\int_I \theta_0(x)dx = 1.$$

E. IV.1.1 Montrer que pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{D}(I)$, il existe un unique scalaire $\lambda \in \mathbb{R}$ et une unique fonction $\psi \in \mathcal{D}(I)$ tels que

$$\varphi = \lambda\theta_0 + \psi'.$$

E. IV.1.2 En déduire que, si $T \in \mathcal{D}'(I)$ vérifie $T' = 0$, alors T est une distribution constante.

E. IV.1.3 En déduire que, si $T \in \mathcal{D}'(I)$ vérifie T' régulière et $T' \in C^\infty(I)$, alors T est régulière et $T \in C^\infty(I)$.

Exercice IV.2
Soient I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ contenant 0 et $\theta \in \mathcal{D}(I)$ une fonction donnée telle que $\theta(0) = 1$.

E. IV.2.1 Montrer que, pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{D}(I)$, il existe une unique fonction $\psi \in \mathcal{D}(I)$ telle que

$$\forall x \in I, \quad \varphi(x) = \varphi(0)\theta(x) + x\psi(x).$$

E. IV.2.2 En utilisant Q.IV.2.1, chercher les solutions au sens des distributions de l'équation $xT = 0$.

E. IV.2.3 Soient $a, b \in I$. Déterminer les solutions au sens des distributions de l'équation $(x-a)(x-b)T = 0$. On distinguera les cas $a \neq b$ et $a = b$.

Exercice IV.3
Pour tout $k \geq 0$, on rappelle que pour deux fonctions f et g éléments de $C^k(I)$, le produit $fg \in C^k(I)$ et que la dérivée $k^{\text{ème}}$ est donnée par la formule de Leibniz

$$(fg)^{(k)} = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} f^{(j)} g^{(k-j)}, \quad \text{où } \binom{k}{j} = \frac{k!}{j!(k-j)!}.$$

E. IV.3.1 Pour $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ et $\psi \in C^\infty(\mathbb{R})$, montrer par récurrence que

$$(\psi T)^{(k)} = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \psi^{(k-j)} T^{(j)} \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}).$$

E. IV.3.2 (Application) Soit $I = \mathbb{R}$. Calculer les dérivées premières et secondes au sens des distributions de $x \mapsto H_0(x)\cos x$ et de $x \mapsto H_0(x)\sin x$. En déduire une solution de l'EDO $y'' + y = \delta_0$.

Exercice IV.4 (Estimation)
Montrer que

$$\forall x \in [0,1], \forall u \in H^1(0,1), \quad |u(x)| \leq \sqrt{2}\|u\|_{H^1}.$$

INDICATION : On pourra utiliser l'inégalité de Young : $\forall a, b \in \mathbb{R}, 2ab \leq a^2 + b^2$.

Exercice IV.5 (Problème variationnel)
Soient $f \in L^2(0,1)$ et

$$a : (u,v) \mapsto \int_{]0,1[} (u'v' + uv) - \frac{u(0)v(0)}{4}.$$

E. IV.5.1 Montrer que a est bien définie, bilinéaire, continue et coercive sur $H^1(0,1) \times H^1(0,1)$.

E. IV.5.2 Montrer qu'il existe un unique $u \in H^1(0,1)$ tel que $\forall v \in H^1(0,1), a(u,v) = \int_{]0,1[} fv$.

E. IV.5.3 Montrer qu'il existe un unique $u \in H^1(0,1)$ tel que $\forall v \in H^1(0,1), a(u,v) = v(0)$.

A suivre...

D) Approfondissement

Exercice IV.6
Vérifier que $v \mapsto \|v'\|_{L^2}$ est une norme sur $H^1(0,+\infty)$. Est-elle équivalente à $\|v\|_{H^1}$?

Exercice IV.7
Soient $(T_j)_{j\in\mathbb{N}}$ une suite de distributions sur I ouvert de $\mathbb{R}$ et $(f_j)_{j\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de classe $C^\infty(I)$ convergeant uniformément vers f, ainsi que toutes leurs dérivées, sur tout compact de I. Montrer que (F_jT_j) tend vers fT.

Chapitre IV : Corrections des exercices

Solution de Q. IV.1 T_1 et T_3 ne sont pas linéaires et ne peuvent donc pas être des distributions. T_2 est une distribution (voir cours).

Solution de Q. IV.2 Comme la fonction f est bornée sur $[-1,1]$, $f \in L^2(-1,1)$. Comme $f \in L^1(-1,1)$, on peut la représenter par une distribution. Calculons sa dérivée dans $\mathcal{D}'(]-1,1[)$.
Soit $\varphi \in \mathcal{D}(]-1,1[)$,

$$\begin{aligned}
\left\langle T_f', \varphi \right\rangle &= -\left\langle f, \varphi' \right\rangle = -\int_{]-1,1[} \left(\frac{x+|x|}{2} \varphi'(x) \right) \mathrm{d}\lambda_x \\
&= -\int_0^1 x\varphi'(x)\mathrm{d}x \\
&= -[x\varphi(x)]_0^1 + \int_0^1 \varphi(x)\mathrm{d}x \\
&= \int_{]-1,1[} \mathbf{1}_{[0,1]}\varphi \\
&= \left\langle \mathbf{1}_{[0,1]}, \varphi \right\rangle
\end{aligned}$$

car φ est à support compact dans $\mathcal{D}(]-,1,1[)$. On en déduit que $T_f' = \mathbf{1}_{[0,1]} = H_0$, qui n'est pas une fonction $H^1(-1,1)$, car $T_f'' = \delta_0$. Donc $f \in H^1(-1,1)$ et $f' \notin H^1(-1,1)$.

Solution de Q. IV.1.1 Soit $\varphi \in \mathcal{D}(I)$. Supposons que λ et ψ existent. Alors, nécessairement, comme $\psi \in \mathcal{D}(I)$, ψ' est à support compact et $\int_I \theta_0 = 1$, $\lambda = \int_I \varphi$.
Soit $y \leq \min(\mathrm{supp}(\theta_0) \cup \mathrm{supp}(\varphi))$. On définit alors

$$\psi : x \mapsto \int_I \left(\varphi - \left(\int_I \varphi \right) \theta_0 \right) \mathbf{1}_{[y,x]}. \tag{IV.1}$$

Cette fonction est de classe $C^\infty(I)$ et est à support inclus dans $\mathrm{supp}(\theta_0) \cup \mathrm{supp}(\varphi)$, en effet

$$z \geq \max(\mathrm{supp}(\theta_0) \cup \mathrm{supp}(\varphi)) \;\Rightarrow\; \psi(z) = \int_y^z \varphi - \lambda \int_y^z \theta_0 = 0.$$

Cette décomposition est unique : comme le problème est linéaire, il suffit de raisonner avec $\varphi = 0$. D'après les conditions nécessaires trouvées, $\lambda = 0$ et $\psi' = 0$ avec ψ à support compact : ψ est donc nulle.

Solution de Q. IV.1.2 Soit $\varphi \in \mathcal{D}(I)$. Alors d'après Q.IV.1.1, il existe un unique couple (λ, ψ), avec $\lambda = \int_I \varphi$ tel que $\varphi = \lambda\theta_0 + \psi'$. On applique T à φ :

$$\begin{aligned}
\langle T, \varphi \rangle &= \left\langle T, \lambda\theta_0 + \psi' \right\rangle = \lambda \langle T, \theta_0 \rangle + \left\langle T, \psi' \right\rangle \\
&= \lambda \langle T, \theta_0 \rangle - \left\langle T', \psi \right\rangle \\
&= \left(\int_I \varphi \right) \langle T, \theta_0 \rangle .
\end{aligned}$$

Ainsi
$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(I), < T, \varphi >= C \int_I \varphi(x)dx =< C, \varphi >,$$
car $x \mapsto C \in L^1_{loc}(I)$ et $T = C$ au sens des distributions..

Solution de Q. IV.1.3 Soit $g \in L^1_{loc}(I)$ telle que $T' = g$. D'après l'hypothèse, $g \in C^\infty(I)$. Soit G une primitive de g. Alors $G' = g$ est à la fois la dérivée usuelle et la dérivée au sens des distributions, d'où $T' = g = G'$. Donc $(T - G)' = 0$ au sens des distributions, et, d'après la question précédente, $T = G + c$, avec c constante. De plus, $G \in C^\infty(I)$. D'où la conclusion.

Solution de Q. IV.2.1 Soit $\varphi \in \mathcal{D}(I)$. Or, pour tout $x \in I \setminus \{0\}$, on peut définir
$$\psi : x \mapsto \frac{\varphi(x) - \varphi(0)\theta(x)}{x} = \frac{1}{x}\int_0^x (\varphi'(t) - \varphi(0)\theta'(t))\mathrm{d}t = \int_0^1 (\varphi'(xs) - \varphi(0)\theta'(xs))\mathrm{d}s$$
par changement de variable $t = xs$.
La fonction ψ est prolongeable en 0, est bien de classe $C^\infty(I)$ par les théorèmes de continuité et de dérivation sous l'intégrale et est à support compact inclus dans $\mathrm{supp}(\theta) \cup \mathrm{supp}(\varphi)$. On note que $\psi(0) = \varphi'(0) - \varphi(0)\theta'(0)$.
La seule décomposition de la fonction nulle est $\psi = 0$.

Solution de Q. IV.2.2 Soient $\varphi \in \mathcal{D}(I)$ et $\psi \in \mathcal{D}(I)$ telle que $\forall x \in I$, $\varphi(x) = \varphi(0)\theta(x) + x\psi(x)$. On applique xT à ψ :
$$\begin{aligned} 0 = \langle xT, \psi\rangle &= \langle T, x\psi\rangle \qquad \text{car } x \mapsto x \in C^\infty(I) \\ &= \langle T, \varphi - \varphi(0)\theta\rangle \end{aligned}$$
Alors $\langle T, \varphi\rangle = \varphi(0)\langle T, \theta\rangle$. Donc $T = \mu\delta_0$ avec $\mu \in \mathbb{R}$. Réciproquement, $T = \mu\delta_0$ est bien solution de l'équation.

Solution de Q. IV.2.3 Posons $S = (x - b)T$. Alors, d'après la question précédente, il existe $\mu \in \mathbb{R}$ tel que $S = \mu\delta_a$ (on fait une translation de x en $x - a$).
On doit maintenant résoudre $(x - b)T = S = \mu\delta_a$.
Soit $\varphi \in \mathcal{D}(I)$. Alors d'après Q.IV.2.1, la fonction ψ définie par
$$\psi : x \mapsto \int_0^1 (\varphi'((x - b)t + b) - \varphi(b)\theta'((x - b)t))\mathrm{d}t$$
satisfait à la décomposition $\forall x \in I$, $\varphi(x) = \varphi(b)\theta(x - b) + (x - b)\psi(x)$. Notons que $\psi(b) = \varphi'(b) - \varphi(b)\theta'(0)$.
Distinguons les deux cas :

- si $a \neq b$: alors on applique $(x-b)T = \mu\delta_a$ à ψ

$$\begin{aligned}
\langle (x-b)T, \psi \rangle = \langle T, (x-b)\psi \rangle = \langle T, \varphi - \varphi(b)\theta(\cdot - b) \rangle &= \langle T, \varphi \rangle - \langle T, \theta(\cdot - b) \rangle \langle \delta_b, \varphi \rangle \\
&= \mu \langle \delta_a, \psi \rangle = \mu\psi(a) = \mu \frac{\varphi(a) - \varphi(b)\theta(a-b)}{a-b} \\
&= \mu \frac{\langle \delta_a, \varphi \rangle - \theta(a-b) \langle \delta_b, \varphi \rangle}{a-b} \\
&= \frac{\mu}{a-b} \langle \delta_a, \varphi \rangle + \frac{\mu\theta(a-b)}{b-a} \langle \delta_b, \varphi \rangle
\end{aligned}$$

On en conclut que $T = \langle T, \theta(\cdot - b) \rangle \delta_b + \frac{\mu}{a-b}\delta_a + \frac{\mu\theta(a-b)}{b-a}\delta_b$. Les solutions sont donc de la forme

$$T = \mu\delta_a + \nu\delta_b, \qquad \text{pour } \mu, \nu \in \mathbb{R}.$$

- si $a = b$, en appliquant $(x-a)T = \mu\delta_a$ à ψ, on a

$$\begin{aligned}
\langle (x-a)T, \psi \rangle = \langle T, (x-a)\psi \rangle = \langle T, \varphi - \varphi(a)\theta(\cdot - a) \rangle &= \langle T, \varphi \rangle - \langle T, \theta(\cdot - a) \rangle \langle \delta_a, \varphi \rangle \\
&= \mu \langle \delta_a, \psi \rangle = \mu\psi(a) = \mu(\varphi'(a) - \varphi(a)\theta'(0)) \\
&= \mu \langle \delta_a, \varphi' \rangle - \mu\theta'(0) \langle \delta_a, \varphi \rangle = -\mu \langle \delta_a', \varphi \rangle - \mu\theta'(0) \langle \delta_a, \varphi \rangle .
\end{aligned}$$

Les solutions sont donc de la forme

$$T = \mu\delta_a + \nu\delta_a', \qquad \text{pour } \mu, \nu \in \mathbb{R}.$$

Solution de Q. IV.3.1 Rappelons que ψT est encore une distribution. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(I)$.
Alors pour $k = 1$

$$\begin{aligned}
\langle (\psi T)', \varphi \rangle &= - \langle \psi T, \varphi' \rangle = - \langle T, \psi\varphi' \rangle \\
&= - \langle T, (\psi\varphi)' \rangle + \langle T, \psi'\varphi \rangle \\
&= \langle T', \psi\varphi \rangle + \langle T, \psi'\varphi \rangle \\
&= \langle \psi T' + \psi T', \varphi \rangle .
\end{aligned}$$

Supposons que, pour $k \geq 0$, $(\psi T)^{(k)} = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \psi^{(k-j)} T^{(j)}$ au sens des distributions. Alors

$$\begin{aligned}
\left\langle (\psi T)^{(k+1)}, \varphi \right\rangle &= -\left\langle (\psi T)^{(k)}, \varphi' \right\rangle = -\left\langle \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \psi^{(k-j)} T^{(j)}, \varphi' \right\rangle \\
&= -\sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \left\langle T^{(j)}, \psi^{(k-j)} \varphi' \right\rangle \\
&= -\sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \left\langle T^{(j)}, (\psi^{(k-j)} \varphi)' \right\rangle + \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \left\langle T^{(j)}, \psi^{(k-j+1)} \varphi \right\rangle \\
&= \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \left\langle T^{(j+1)}, \psi^{(k-j)} \varphi \right\rangle + \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \left\langle T^{(j)}, \psi^{(k-j+1)} \varphi \right\rangle \\
&= \sum_{j=1}^{k+1} \binom{k}{j-1} \left\langle T^{(j)}, \psi^{(k-(j-1))} \varphi \right\rangle + \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \left\langle T^{(j)}, \psi^{(k+1-j)} \varphi \right\rangle \\
&= \sum_{j=1}^{k+1} \left(\binom{k}{j-1} + \binom{k}{j} \right) \left\langle T^{(j)}, \psi^{(k+1-j)} \varphi \right\rangle \quad \text{en posant } \binom{k}{k+1} = \binom{k}{-1} = 0, \\
&= \left\langle \sum_{j=0}^{k+1} \binom{k+1}{j} \psi^{(k+1-j)} T^{(j)}, \varphi \right\rangle \qquad \text{(grâce à la formule du triangle de Pascal)}
\end{aligned}$$

On a montré la formule de Leibniz par récurrence.

Solution de Q. IV.3.2 Comme $\cos \in C^\infty(I)$, $\cos H_0 \in \mathcal{D}'(I)$.
Soit $\varphi \in \mathcal{D}(I)$.

$$\left\langle H_0', \varphi \right\rangle = -\left\langle H_0, \varphi' \right\rangle = -\int_0^{+\infty} \varphi'(x) \mathrm{d}x = \varphi(0) = \langle \delta_0, \varphi \rangle .$$

Donc $H_0' = \delta_0$ dans $\mathcal{D}'(I)$ et, par suite, $H_0'' = \delta_0'$.

En appliquant la formule de Leibniz, on a donc dans $\mathcal{D}'(I)$

$$\begin{aligned}
(\cos H_0)' &= -\sin H_0 + \cos H_0' = -\sin H_0 + \cos \delta_0 = -\sin H_0 + \delta_0 \\
(\sin H_0)' &= \cos H_0 + \sin \delta_0 = \cos H_0
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
(\cos H_0)'' &= -\cos H_0 + \delta_0' \\
(\sin H_0)'' &= -\sin H_0 + \delta_0
\end{aligned}$$

On a donc montré que $\sin H_0$ est solution de $y'' + y = \delta_0$. On parle alors de solution fondamentale.

Solution de Q. IV.4 Soient $u \in H^1(I)$ et $w \in \mathcal{D}(I)$. Calculons la dérivée au sens des distributions de uw puis montrons que $uw \in H^1(I)$. Nous en déduirons alors que la dérivée de u^2 au sens des

distributions est $2uu'$.
Comme $w \in L^\infty(I)$, $uw \in L^2(I)$. Soit $z \in \mathcal{D}(I)$.
Alors

$$\begin{aligned}\langle (uw)', z\rangle &= -\langle uw, z'\rangle = -\int_{[0,1]} uwz' = -\int_{[0,1]} u(wz)' + \int_{[0,1]} uw'z \\ &= \int_{[0,1]} u'wz + \int_{[0,1]} uw'z = \langle u'w + uw', z\rangle\end{aligned}$$

Donc, comme $u'w + uw' \in L^2(I)$, $uw \in H^1(I)$.
Soit $z \in \mathcal{D}(I)$.
Alors, par le théorème d'intégration par parties dans les espaces de Sobolev,

$$\begin{aligned}\langle (u^2)', z\rangle &= -\langle u^2, z'\rangle = -\int_{[0,1]} u^2z' = -\int_{[0,1]} u(uz)' + \int_{[0,1]} uu'z \\ &= \int_{[0,1]} u'uz + \int_{[0,1]} uu'z = \langle 2u'u, z\rangle\end{aligned}$$

Alors $u^2 \in L^1(I)$ et $2uu' \in L^1(I)$ est la dérivée au sens des distributions de u^2. Donc, d'après le théorème fondamental de l'analyse,

$$\forall x, y \in [0,1], \quad u^2(x) = u^2(y) + 2\int_{[y,x]} u'u$$

d'où, en appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, puis en intégrant en y, on a pour tout $x \in [0,1]$,

$$u^2(x) \leq \|u\|_{L^2}^2 + 2\|u'\|_{L^2}\|u\|_{L^2}.$$

L'inégalité d'Young mène donc à

$$\forall x \in [0,1], \qquad u^2(x) \leq 2\|u\|_{L^2}^2 + \|u'\|_{L^2}^2 \leq 2\|u\|_{H^1}^2.$$

D'où le résultat.

Solution de Q. IV.5.1 Notons que $a : (u,v) \mapsto (u,v)_{H^1(0,1)} - u(0)v(0)/4$. La forme a est

- définie :

  1. (cours) si u et v sont dans $H^1(0,1)$, u, v, u', v' sont dans $L^2(0,1)$ et uv et $u'v'$ sont dans $L^1(0,1)$,
  2. d'après le théorème du cours, $H^1(0,1) \subset C^0([0,1])$, donc si $u, v \in H^1(0,1)$, $u(0)$ et $v(0)$ sont bien définies (on a refait la démonstration dans la question précédente).

  Donc a est bien définie.

- bilinéaire : évident

- continue :
  On a $\forall (u,v) \in H^1(0,1)^2$,

$$|a(u,v)| \le |(u,v)_{H^1(0,1)}| + \frac{1}{4}|u(0)v(0)| \le \|u\|_{H^1}\|v\|_{H^1} + \frac{1}{2}\|u\|_{H^1}\|v\|_{H^1} \le \frac{3}{2}\|u\|_{H^1}\|v\|_{H^1},$$

  grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz et à l'estimation montrée à la question précédente. D'où la continuité.

- coercive : pour tout $u \in H^1(0,1)$,

$$a(u,u) = \|u\|_{H^1}^2 - \frac{1}{4}u(0)^2 \ge \left(1 - \frac{2}{4}\right)\|u\|_{H^1}^2 = \frac{1}{2}\|u\|_{H^1}^2$$

  grâce à l'estimation montrée à la question précédente.

Solution de Q. IV.5.2 L'application $v \mapsto \int_{]0,1[} fv$ est une forme linéaire continue sur $H^1(0,1)$ (il suffit d'appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz).
L'espace $H^1(0,1)$ muni de son produit scalaire naturel étant un espace de Hilbert, la forme bilinéaire a étant définie, continue et coercive sur $H^1(0,1)$ et la forme linéaire $v \mapsto \int_{]0,1[} fv$ étant continue sur $H^1(0,1)$, on peut appliquer le théorème de Lax-Milgram : il existe un unique $u \in H^1(0,1)$ tel que

$$\forall v \in H^1(0,1), \quad a(u,v) = \int_{]0,1[} fv.$$

Solution de Q. IV.5.3 D'après l'exercice IV.4, l'application linéaire $v \mapsto v(0)$ est une forme linéaire continue sur $H^1(0,1)$. On peut donc encore appliquer le théorème de Lax-Milgram.

Solution de Q. IV.6 $v \mapsto \|v'\|_{L^2}$ est bien une semi-norme sur $H^1(0,+\infty)$. Si $\|v'\|_{L^2} = 0$ alors $v' = 0$ p.p. et donc v est une constante. Or la seule fonction constante dans $L^2(0,+\infty)$ est la fonction nulle, donc c'est bien une norme sur $H^1(0,+\infty)$. On a évidemment $\|v'\|_{L^2} \le \|v\|_{H^1}$.
On définit, pour tout $n \ge 0$, $u_n(x) = n - x$ si $x \le n$ et $u_n(x) = 0$ sinon. Alors $u_n \in H^1(0,+\infty)$, $\|u_n'\|_{L^2}^2 = n$ et $\|u_n\|_{L^2} = \sqrt{\frac{n^3}{3}}$ donc les deux normes ne peuvent pas être équivalentes sur $H^1(0,+\infty)$.