Cours de Convergence, Intégration, Probabilités

Séance X - Transformée de Fourier. Fonctions caractéristiques. Vecteurs aléatoires gaussiens

Séance X - Transformée de Fourier. Fonctions caractéristiques.

CentraleSupélec - Cursus ingénieur

25 octobre 2019

Amphis CIP 10, 11, 12

- Ludovic Goudenège

  Chargé de Recherche CNRS

  Fédération de Mathématiques de CentraleSupélec.

  Bâtiment Bouygues. Laboratoire MICS. Bureau SC.102.

  goudenege@math.cnrs.fr

Des questions ?

- daskit.com/cip19-20 puis section "Amphi 10".

Support

- Support amphi X en version vierge disponible dès à présent sur edunao.
- Support amphi X en version annotée disponible ultérieurement.

Quelques éléments des CMs et TDs précédents

- Théorème de convergence dominée (continuité, dérivabilité, etc.)
- Changement de variables multi-dimensionnel
- Indépendance de variables aléatoires réelles
- Produit de convolution dans L^1
- Lemme de Riemann-Lebesgue
- Théorème IX.1.6 d'inversion de Fourier dans L^1

Programme

- Fonctions caractéristiques de vecteurs aléatoires
- Théorème d'inversion des fonctions caractéristiques
- Critère d'indépendance de variables aléatoires
- Régularité L^p de variables aléatoires
- Vecteurs gaussiens
- Caractérisation des vecteurs gaussiens

Objectifs de la séance

- je suis capable d'exprimer une condition nécessaire et suffisante d'indépendance de variables aléatoires en terme de fonctions caractéristiques
- je comprends la définition d'un vecteur gaussien et je ne le confonds pas avec un vecteur composé de variables réelles de loi normale
- je sais reconnaître qu'un vecteur est gaussien, à partir de la forme de sa fonction caractéristique ou de sa densité
- je sais exprimer la condition nécessaire et suffisante d'indépendance des composantes d'un vecteur gaussien en terme de matrice de covariance
- je maîtrise les changements de variables impliquant des vecteurs gaussiens

Rappel : vecteur aléatoire X dans $\mathbb{R}^d$

- Variable aléatoire dans $\mathbb{R}^d$: fonction mesurable

$$X : (\Omega, \mathcal{F}) \to \left(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\right).$$

- Loi de X : mesure de probabilité $\mathbb{P}_X$ sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$

$$\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \quad \mathbb{P}_X(B) = \mathbb{P}\left[X^{-1}(B)\right] = \mathbb{P}\{\omega : X(\omega) \in B\}.$$

- Théorème de transfert : pour une fonction $h : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ mesurable telle que $\displaystyle\int_\Omega |h(X(\omega))| \, \mathbb{P}(d\omega) < +\infty$,

$$\int_\Omega h(X(\omega)) \, \mathbb{P}(d\omega) = \int_{\mathbb{R}^d} h(x) \, \mathbb{P}_X(dx).$$

Rappel : indépendance entre les variables aléatoires $X : \Omega \to \mathbb{R}$ et $Y : \Omega \to \mathbb{R}$

- $\forall B, B' \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$,

$$\mathbb{P}(X \in B, Y \in B') = \mathbb{P}(X \in B)\ \mathbb{P}(Y \in B').$$

- $\forall B, B' \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$,

$$\mathbb{P}_{(X,Y)}(B \times B') = \mathbb{P}_X(B)\ \mathbb{P}_Y(B').$$

- $\mathbb{P}_{(X,Y)} = \mathbb{P}_X \otimes \mathbb{P}_Y$.
- Pour toutes fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mesurables bornées, on a

$$\mathbf{E}[f(X)g(Y)] = \mathbf{E}[f(X)]\ \mathbf{E}[g(Y)].$$

Rappel : indépendance de $X_1, \ldots, X_n$

Définition IV.4.5 (Indépendance)

1. Indépendance d'évènements :
   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, les évènements $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{F}$ sont **indépendants** si pour tout $\mathcal{J} \subseteq \{1, \ldots, n\}$,
   $$\mathbb{P}\Big(\bigcap_{k \in \mathcal{J}} A_k\Big) = \prod_{k \in \mathcal{J}} \mathbb{P}(A_k).$$
2. Indépendance de variables aléatoires :
   $X_1, \ldots, X_n$ sont **indépendantes** si $\forall (B_1, \ldots, B_n) \in \mathcal{E}_1 \times \cdots \times \mathcal{E}_n$,
   $$\mathbb{P}\left(\{X_1 \in B_1\} \cap \cdots \cap \{X_n \in B_n\}\right) = \prod_{k=1}^{n} \mathbb{P}\left(X_k \in B_k\right).$$

Définition X.1.1

On appelle **fonction caractéristique** *d'un vecteur aléatoire* X *à valeurs dans* $\mathbb{R}^d$ *l'application* $\varphi_X : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ *définie par*

$$t \mapsto \varphi_X(t) = \mathbf{E}\left[e^{i\langle t,X\rangle}\right] = \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\langle t,x\rangle} P_X(dx)$$

Proposition X.1.2

- $\varphi_X(0) = 1$ *et pour tout* $t \in \mathbb{R}^d$, $|\varphi_X(t)| \leq 1$.
- *Pour tout* $\lambda \in \mathbb{R}$ *et tout* $a \in \mathbb{R}^d$, $\varphi_{\lambda X+a}(t) = e^{iat}\varphi_X(\lambda t)$.
- φ_X *est une fonction semi-positive, i.e. pour tous* $n \geq 1$ *et tous* $t_1, \ldots, t_n \in \mathbb{R}^d$, *on a*

$$\forall z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}, \qquad \sum_{1 \leq j,k \leq n} z_j\, \varphi_X(t_j - t_k)\, \overline{z_k} \geq 0.$$

Proposition X.1.3

La fonction caractéristique d'un vecteur aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ est continue sur $\mathbb{R}^d$.

Proposition X.1.4

Si la loi de X admet une densité de probabilité, alors

$$\lim_{|t|\to\infty} \varphi_X(t) = 0.$$

Théorème X.1.5 (Théorème d'unicité)

Soient deux vecteurs aléatoires X et Y dans $\mathbb{R}^d$.
Elles ont même loi (i.e. $\mathbb{P}_X = \mathbb{P}_Y$) si et seulement si $\varphi_X = \varphi_Y$.

Théorème X.1.6 (Théorème d'inversion)

Soit X un vecteur aléatoire dans $\mathbb{R}^d$.
Si la fonction caractéristique φ_X est dans $\mathbf{L}^1(\mathbb{R})$, alors X admet la densité $f_X : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}_+$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, \quad f_X(x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \varphi_X(t) e^{-i\langle t,x\rangle} \, \lambda(dt).$$

Théorème X.1.7

Les variables aléatoires réelles $X_1, \ldots, X_n$ sont indépendantes si et seulement si leurs fonctions caractéristiques vérifient

$$\forall t \in \mathbb{R}^n, \quad \varphi_X(t) = \prod_{k=1}^{n} \varphi_{X_k}(t_k) \quad \textit{où } X = (X_1, \ldots, X_n).$$

Proposition X.1.8

Soient $X_1, \dots, X_n$ des vecteurs aléatoires **indépendants** *à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, de lois respectives $\mathbb{P}_{X_1}, \dots, \mathbb{P}_{X_n}$. La loi de $X_1 + \cdots + X_n$ est donnée par le produit de convolution $\mathbb{P}_{X_1+\cdots+X_n} = \mathbb{P}_{X_1} * \cdots * \mathbb{P}_{X_n}$ et elle a pour fonction caractéristique*

$$\varphi_{X_1+\cdots+X_n} = \prod_{j=1}^{n} \varphi_{X_j}.$$

Proposition X.1.9

Soit $p \geq 1$. *Soit* X *une variable aléatoire à valeurs réelles telle que* $X \in \mathbf{L}^p(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ $(n \geq 1)$.
Alors, sa fonction caractéristique φ_X *est de classe* C^p *et*

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \varphi_X^{(p)}(t) = i^p \, \mathbf{E}[X^p e^{itX}].$$

En particulier, $\mathbf{E}[X^p] = i^{-p} \varphi_X^{(p)}(0)$.

Définition X.2.1

Un vecteur aléatoire $X = (X_1, \ldots, X_d)$ à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ est dit **gaussien** *si toute combinaison linéaire de ses coordonnées suit une loi normale, i.e. si*

$$\forall \lambda_1, \ldots, \lambda_d \in \mathbb{R}, \quad \sum_{j=1}^{d} \lambda_j X_j \rightsquigarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma^2).$$

Définition X.2.1

Un vecteur aléatoire $X = (X_1, \ldots, X_d)$ à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ est dit **gaussien** *si toute combinaison linéaire de ses coordonnées suit une loi normale, i.e. si*

$$\forall \lambda_1, \ldots, \lambda_d \in \mathbb{R}, \quad \sum_{j=1}^{d} \lambda_j X_j \rightsquigarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma^2).$$

Si $X = (X_1, \ldots, X_d)$ est un vecteur gaussien, alors X_j est une variable aléatoire réelle gaussienne pour tout $1 \leq j \leq d$.

Définition X.2.1

Un vecteur aléatoire $X = (X_1, \ldots, X_d)$ à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ est dit **gaussien** *si toute combinaison linéaire de ses coordonnées suit une loi normale, i.e. si*

$$\forall \lambda_1, \ldots, \lambda_d \in \mathbb{R}, \quad \sum_{j=1}^{d} \lambda_j X_j \rightsquigarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma^2).$$

Si $X = (X_1, \ldots, X_d)$ est un vecteur gaussien, alors X_j est une variable aléatoire réelle gaussienne pour tout $1 \leq j \leq d$.

La réciproque est **fausse**.

Proposition X.2.2

Soit $X = (X_1, \ldots, X_d)$ un vecteur gaussien de vecteur moyenne $\mu = (\mu_j)_{1 \leq j \leq d}$ et de matrice de covariances $D = (D_{jk})_{1 \leq j,k \leq d}$. Sa fonction caractéristique $\varphi_X : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ est définie par

$$\begin{aligned} t \mapsto \varphi_X(t) &= \exp\left(i\langle \mu, t\rangle - \frac{1}{2}\langle t, Dt\rangle\right) \\ &= \exp\left(i\sum_{j=1}^{d} \mu_j t_j - \frac{1}{2}\sum_{1 \leq j,k \leq d} t_j D_{jk} t_k\right). \end{aligned}$$

Proposition X.2.2

Soit $X = (X_1, \dots, X_d)$ un vecteur gaussien de vecteur moyenne $\mu = (\mu_j)_{1 \leq j \leq d}$ et de matrice de covariances $D = (D_{jk})_{1 \leq j,k \leq d}$. Sa fonction caractéristique $\varphi_X : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ est définie par

$$t \mapsto \varphi_X(t) = \exp\left(i\langle \mu, t\rangle - \frac{1}{2}\langle t, Dt\rangle\right)$$
$$= \exp\left(i\sum_{j=1}^{d} \mu_j t_j - \frac{1}{2}\sum_{1 \leq j,k \leq d} t_j D_{jk} t_k\right).$$

1. Théorème X.1.5 : φ_X **caractérise** la loi de X ;

Proposition X.2.2

Soit $X = (X_1, \ldots, X_d)$ un vecteur gaussien de vecteur moyenne $\mu = (\mu_j)_{1\leq j\leq d}$ et de matrice de covariances $D = (D_{jk})_{1\leq j,k\leq d}$. Sa fonction caractéristique $\varphi_X : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ est définie par

$$\begin{aligned} t \mapsto \varphi_X(t) &= \exp\left(i\langle \mu, t\rangle - \frac{1}{2}\langle t, Dt\rangle\right) \\ &= \exp\left(i\sum_{j=1}^{d} \mu_j t_j - \frac{1}{2}\sum_{1\leq j,k\leq d} t_j D_{jk} t_k\right). \end{aligned}$$

1. Théorème X.1.5 : φ_X **caractérise** la loi de X ;
2. Proposition X.2.2 : μ et D **caractérisent** φ_X ;

Proposition X.2.2

Soit $X = (X_1, \ldots, X_d)$ un vecteur gaussien de vecteur moyenne $\mu = (\mu_j)_{1\leq j\leq d}$ et de matrice de covariances $D = (D_{jk})_{1\leq j,k\leq d}$. Sa fonction caractéristique $\varphi_X : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ est définie par

$$\begin{aligned} t \mapsto \varphi_X(t) &= \exp\left(i\langle \mu, t\rangle - \frac{1}{2}\langle t, Dt\rangle\right) \\ &= \exp\left(i\sum_{j=1}^{d} \mu_j t_j - \frac{1}{2}\sum_{1\leq j,k\leq d} t_j D_{jk} t_k\right). \end{aligned}$$

1. Théorème X.1.5 : φ_X **caractérise** la loi de X ;
2. Proposition X.2.2 : μ et D **caractérisent** φ_X ;
3. On écrit $X \rightsquigarrow \mathcal{N}(\mu, D)$ (cohérent avec $X \rightsquigarrow \mathcal{N}(m, \sigma^2)$ pour une v.a. normale de moyenne m et de variance σ^2).

Théorème X.2.3

Soit $X = (X_1, \ldots, X_d)$ *un* **vecteur aléatoire gaussien** *à valeurs dans* $\mathbb{R}^d$*.*

Les composantes X_j *sont indépendantes si et seulement si la matrice de covariances* D *de* X *est diagonale.*

Théorème X.2.3

Soit $X = (X_1, \ldots, X_d)$ *un* **vecteur aléatoire gaussien** *à valeurs dans* $\mathbb{R}^d$*.*

Les composantes X_j *sont indépendantes si et seulement si la matrice de covariances* D *de* X *est diagonale.*

Attention : indépendance $\neq$ non-corrélation

Ce résultat est faux si X n'est pas un **vecteur gaussien**.

Proposition X.2.4

Soient $\mu \in \mathbb{R}^d$ et D une matrice $d \times d$ **symétrique positive**.
Alors, il existe un vecteur gaussien à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ de moyenne μ et de matrice de covariances D.

Proposition X.2.5

Soient $\mu \in \mathbb{R}^d$ et D une matrice $d \times d$ symétrique positive. Les deux assertions suivantes sont équivalentes :

(i) *La matrice D est non-dégénérée, i.e.* $\det D \neq 0$,

(ii) *La loi $\mathcal{N}(\mu, D)$ est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$.*

Dans ce cas, la loi $\mathcal{N}(\mu, D)$ a pour densité

$$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^d \det D}} \exp\left[-\frac{1}{2}\langle x-\mu, D^{-1}(x-\mu)\rangle\right]$$

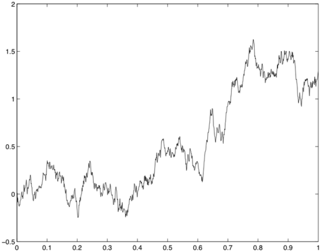
où D^{-1} est l'inverse de la matrice D.

Conclusion : ouverture vers les deux derniers chapitres

- Suites de variables aléatoires
- Différentes notions de limites
- Loi forte des grands nombres
- Théorème Central Limite

Conclusion : ouverture vers les deux derniers chapitres

- Mouvement brownien W



- Représentation probabiliste des EDPs, via la formule de Feynman-Kac :

Ex : $u(t,x) := \mathbb{E}\left[f(x+W_t)\right]$ est solution de l'équation de la chaleur

$$\begin{cases} \partial_t u - \frac{1}{2}\Delta u = 0 & \text{on } \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \\ u(0,x) = f(x) & \text{on } \mathbb{R}^d. \end{cases}$$

Références bibliographiques

- T. Gallouët, R. Herbin. *Mesure, intégration, probabilités*.
  https://www.i2m.univ-amu.fr/perso/thierry.gallouet/licence.d/mes-int-pro.pdf
- O. Garet. *Intégration et probabilités*.
  http://www.iecl.univ-lorraine.fr/~Olivier.Garet/cours/ip/ip-2016-2017.pdf
- J.-F. Le Gall. *Intégration, probabilités et processus aléatoires*.
  https://www.math.u-psud.fr/~jflegall/IPPA2.pdf
- W. Rudin. *Real and Complex Analysis*. McGraw-Hill.