

Cours d'Équations aux Dérivées Partielles

Séance X - Résolution théorique et numérique
des problèmes paraboliques

Séance X - Problèmes paraboliques

CentraleSupélec - Cursus ingénieur

10 mars 2020

Amphis EDP 10

- Ludovic Goudenège

Chargé de Recherche CNRS

Fédération de Mathématiques de CentraleSupélec.

Bâtiment Bouygues. Laboratoire MICS. Bureau SC.102.

goudeneg@math.cnrs.fr

Des questions ?

- daskit.com/edp19-20 puis section “Amphi 10”.

Support

- Support amphi X en version vierge disponible dès à présent sur edunao.
- Support amphi X en version annotée disponible ultérieurement.

Quelques éléments des CMs et TDs précédents

- Problème de Dirichlet-Neumann
- Équations elliptiques

Programme

- Quelques exemples d'EDP paraboliques
- Étude théorique des EDP paraboliques
- Étude numérique des EDP paraboliques

Objectifs de la séance

- Je sais reconnaître une équation parabolique.
- Je connais les propriétés qualitatives fondamentales d'une équation parabolique (comportement asymptotique, principe du maximum, régularisation).
- Je sais discréteriser un problème parabolique en temps par un schéma d'Euler et en espace par la méthode des éléments finis ou des différences finies.
- Je sais programmer un algorithme itératif me donnant une solution numérique évoluant en temps.

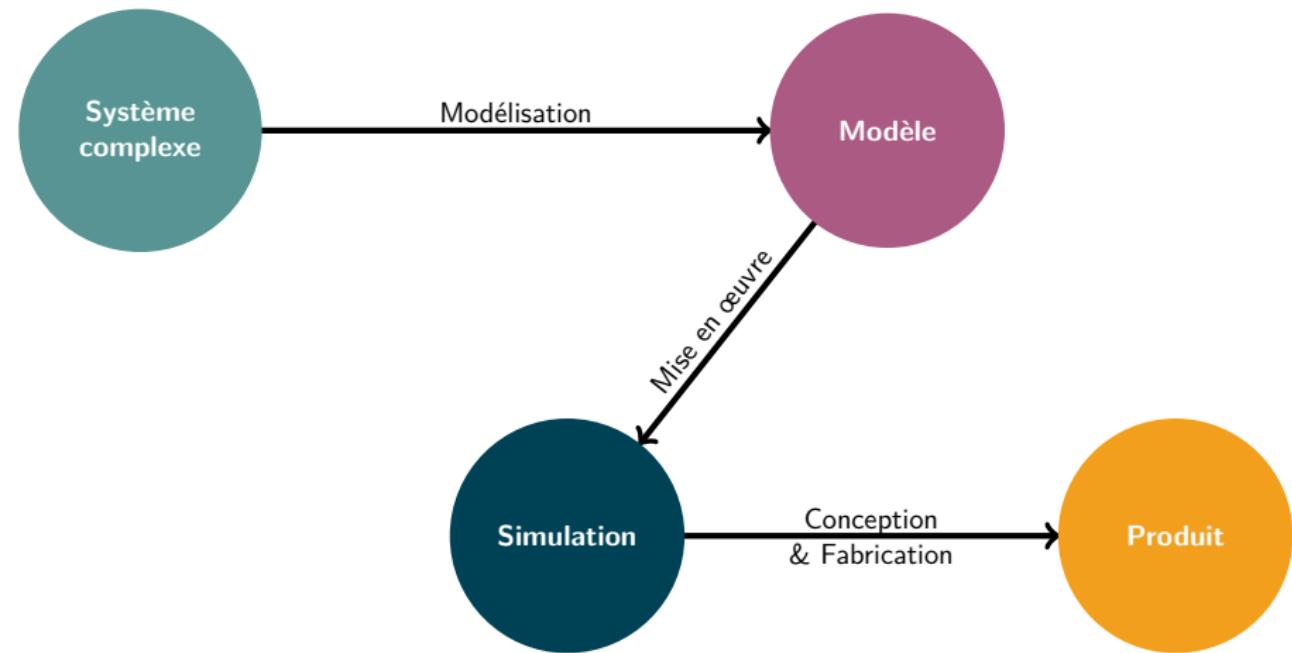
1 Motivation

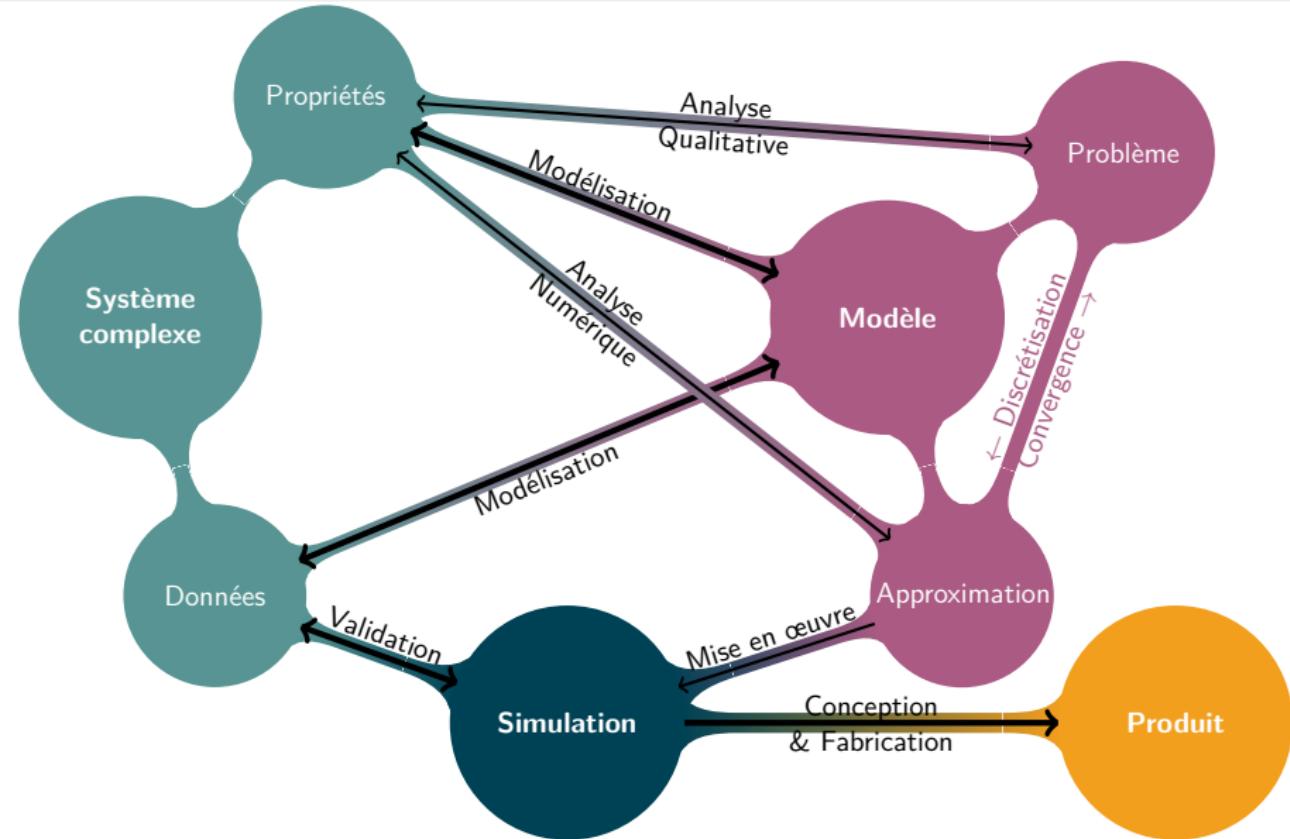
- Contexte
- Exemples

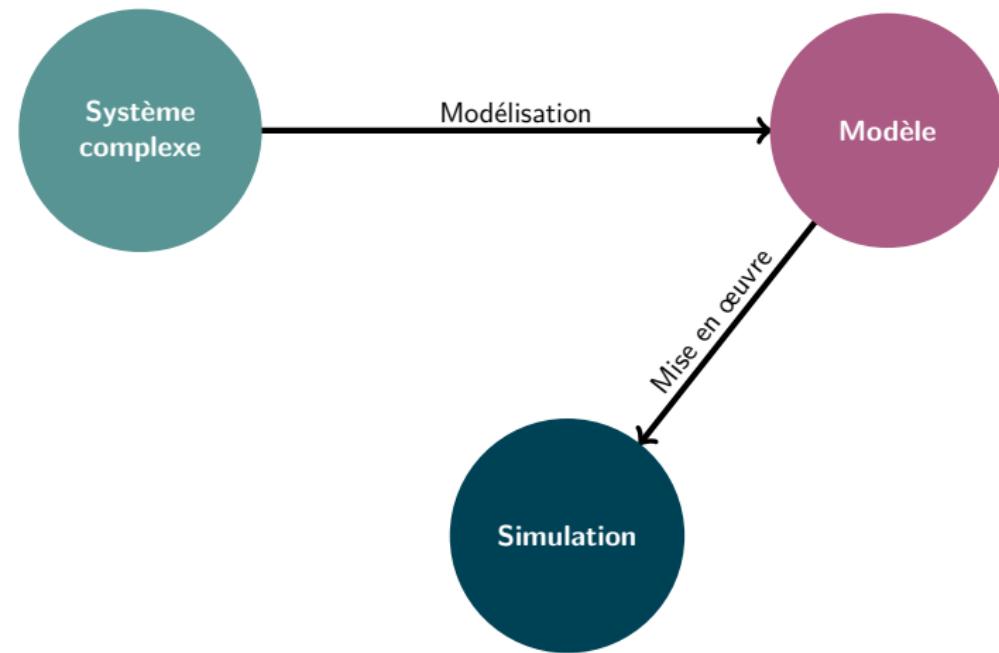
2 Etude théorique

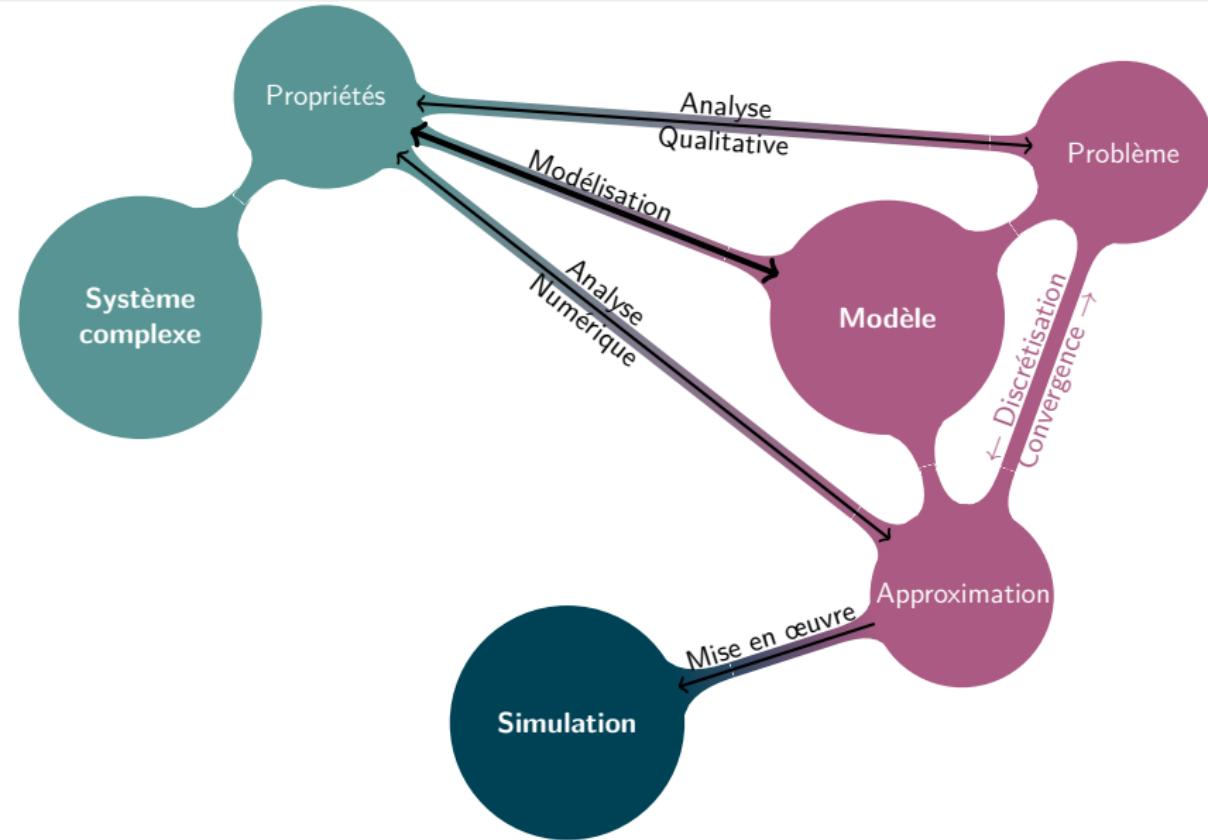
3 Etude numérique

4 Conclusion









Équations paraboliques

Classification et Résolution des EDPs [CM3]

Équation de réaction-advection-diffusion instationnaire

$$\partial_t \theta(t, x) + \operatorname{div}_x(\theta \vec{u})(t, x) - \nu \Delta_x \theta(t, x) = f(t, x, \theta(t, x)), \quad t > 0, x \in \Omega$$

où

- Ω est le domaine en espace,
- θ est la température,
- \vec{u} est la vitesse d'advection,
- f est la source de chaleur.

Équations paraboliques

Classification et Résolution des EDPs **[CM1/2]**

Équation de réaction

$$\partial_t \theta(t-) = f(t, \theta(t-)), t > 0$$

$$\partial_t \theta(t-) = f(t, \theta(t-)) \text{ EDO - PbC/Euler}$$

Parabolique - PbC/Euler+FV/EF/DF

Équations paraboliques

Classification et Résolution des EDPs [CM3/5]

Équation de

diffusion stationnaire

$$-\nu\Delta_x\theta(x) = f(x), \quad x \in \Omega$$

$$\partial_t\theta(t) = f(t, \theta(t)) \text{ EDO - PbC/Euler}$$

$$-\nu\Delta_x\theta(x) = f(x) \text{ elliptique - FV/EF/DF}$$

Parabolique - PbC/Euler+FV/EF/DF

Équations paraboliques

Classification et Résolution des EDPs [CM3/5]

Équation de **advection-diffusion stationnaire**

$$\operatorname{div}_x(\theta \vec{u})(x) - \nu \Delta_x \theta(x) = f(x),$$

$$\partial_t \theta(t) = f(t, \theta(t)) \text{ EDO - PbC/Euler}$$

$$-\nu \Delta_x \theta(x) = f(x) \text{ elliptique - FV/EF/DF}$$

$$\operatorname{div}_x(\theta \vec{u})(x) - \nu \Delta_x \theta(x) = f(x) \text{ elliptique - FV/EF/DF}$$

Parabolique - PbC/Euler+FV/EF/DF

Équations paraboliques

Classification et Résolution des EDPs [CM1/2/3/5]

Équation de réaction-advection-diffusion instationnaire

$$\partial_t \theta(t, x) + \operatorname{div}_x(\theta \vec{u})(t, x) - \nu \Delta_x \theta(t, x) = f(t, x, \theta(t, x)), \quad t > 0, x \in \Omega$$

$$\partial_t \theta(t, x) = f(t, x, \theta(t, x)) \text{ EDO - PbC/Euler}$$

$$-\nu \Delta_x \theta(x) = f(x) \text{ elliptique - FV/EF/DF}$$

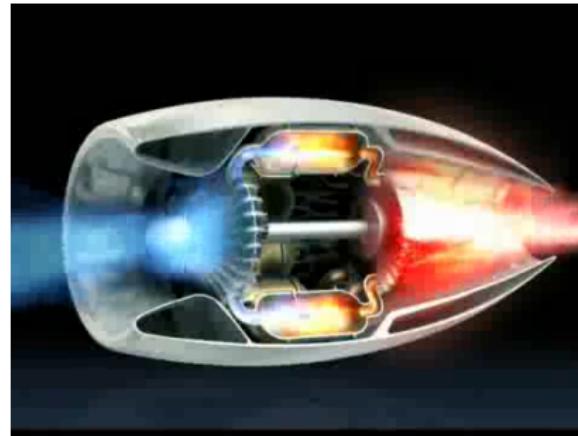
$$\operatorname{div}_x(\theta \vec{u})(x) - \nu \Delta_x \theta(x) = f(x) \text{ elliptique - FV/EF/DF}$$

Parabolique - PbC/Euler+FV/EF/DF

Equation de la chaleur instationnaire

CM 1/2/3/5 :

$$\partial_t \theta(t, x) + \operatorname{div}_x(\theta \vec{u})(t, x) - \nu \Delta_x \theta(t, x) = f(t, x, \theta(t, x)), \quad t > 0, x \in \Omega$$



Exemple en chimie : ondes spirales

CM 1/2 : Phénomènes réactifs instationnaires

$$y' = f(y) \in \mathbb{R}^{11}$$



<http://pcsi.emperi.free.fr>

Exemple en chimie : ondes spirales

CM 1/2 : Phénomènes réactifs instationnaires

$$\begin{aligned} a &= [Ce(IV)] \\ b &= [HBrO_2] \\ c &= [Br^-] \end{aligned} \quad \left\{ \begin{array}{l} \partial_t a - D_a \Delta_x a = (-a - ab + c)/\mu \\ \partial_t b - D_b \Delta_x b = (a - ab + b(1 - b))/\varepsilon \\ \partial_t c - D_c \Delta_x c = b - c \end{array} \right.$$



Source : N. Derstine & J. Landis, 2009

Exemple en biologie : taches du léopard

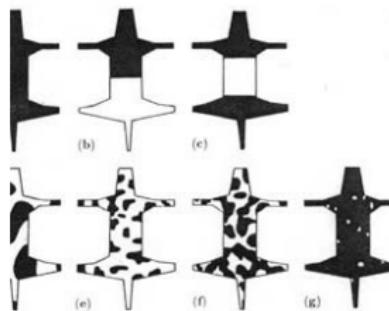
Instabilités de Turing : diffusion des mélanocytes

$$\begin{cases} \partial_t u = \Delta_x u + f(u, v) \\ \partial_t v = d\Delta_x v + g(u, v) \end{cases}$$

Exemple en biologie : taches du léopard

Instabilités de Turing : diffusion des mélanocytes

$$\begin{cases} \partial_t u = \Delta_x u + f(u, v) \\ \partial_t v = d\Delta_x v + g(u, v) \end{cases}$$

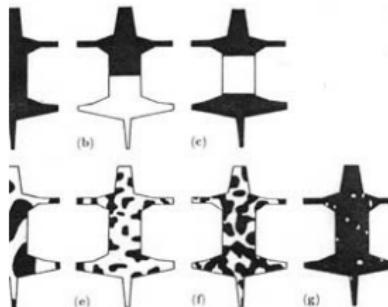


Source : J. D. Murray, Mathematical Biology, Springer, 1993

Exemple en biologie : taches du léopard

Instabilités de Turing : diffusion des mélanocytes

$$\begin{cases} \partial_t u = \Delta_x u + f(u, v) \\ \partial_t v = d\Delta_x v + g(u, v) \end{cases}$$

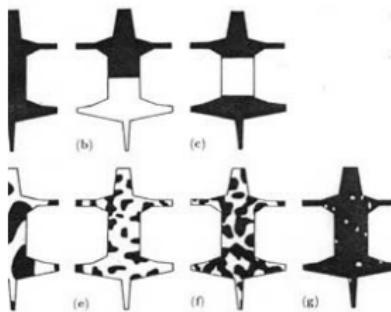


Source : J. D. Murray, Mathematical Biology, Springer, 1993

Exemple en biologie : taches du léopard

Instabilités de Turing : diffusion des mélanocytes

$$\begin{cases} \partial_t u = \Delta_x u + f(u, v) \\ \partial_t v = d\Delta_x v + g(u, v) \end{cases}$$



Source : J. D. Murray, Mathematical Biology, Springer, 1993

1 Motivation

2 Etude théorique

- Problème bien posé
- Propriétés qualitatives

3 Etude numérique

4 Conclusion

Cadre linéaire

Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ouvert borné, $f: (t, x) \mapsto f(t, x)$, u^0 données.

Définition X.2.1 (Équation de diffusion instationnaire, « de la chaleur »)

$$\begin{cases} \partial_t u(t, x) - \nu \Delta_x u(t, x) = f(t, x), & \forall (t, x) \in \mathbb{R}^{+*} \times \Omega, \\ u(\cdot, x) = 0, & \forall x \in \partial\Omega, \\ u(0, \cdot) = u^0. \end{cases}$$

Cadre linéaire

Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ouvert borné, $f: (t, x) \mapsto f(t, x)$, u^0 données.

Définition X.2.1 (Équation de diffusion instationnaire, « de la chaleur »)

$$\begin{cases} \partial_t u(t, x) - \nu \Delta_x u(t, x) = f(t, x), & \forall (t, x) \in \mathbb{R}^{+*} \times \Omega, \\ u(\cdot, x) = 0, & \forall x \in \partial\Omega, \\ u(0, \cdot) = u^0. \end{cases}$$

« Séparation de variables » :

$u \mapsto u(t, x)$ vue comme $u: t \mapsto u(t) \in X$, où X est un espace fonctionnel

Un peu d'analyse fonctionnelle [CM 3/4]

Définition-Théorème X.2.2 (Espaces fonctionnels classiques)

Soit $(X, (\cdot, \cdot)_X, \|\cdot\|_X)$ un espace de Hilbert. Soit $T > 0$.

Un peu d'analyse fonctionnelle [CM 3/4]

Définition-Théorème X.2.2 (Espaces fonctionnels classiques)

Soit $(X, (\cdot, \cdot)_X, \|\cdot\|_X)$ un espace de Hilbert. Soit $T > 0$.

On définit $L^2(]0, T[, X)$.

Un peu d'analyse fonctionnelle [CM 3/4]

Définition-Théorème X.2.2 (Espaces fonctionnels classiques)

Soit $(X, (\cdot, \cdot)_X, \|\cdot\|_X)$ un espace de Hilbert. Soit $T > 0$.

On définit $L^2(]0, T[, X)$. C'est un Hilbert pour le produit scalaire

$$(f, g)_{L^2(]0, T[, X)} = \int_0^T (f(t), g(t))_X dt.$$

Un peu d'analyse fonctionnelle [CM 3/4]

Définition-Théorème X.2.2 (Espaces fonctionnels classiques)

Soit $(X, (\cdot, \cdot)_X, \|\cdot\|_X)$ un espace de Hilbert. Soit $T > 0$.

On définit $L^2(]0, T[, X)$. C'est un Hilbert pour le produit scalaire

$$(f, g)_{L^2(]0, T[, X)} = \int_0^T (f(t), g(t))_X dt.$$

On définit $C^k([0, T], X)$, $k \geq 0$,

Un peu d'analyse fonctionnelle [CM 3/4]

Définition-Théorème X.2.2 (Espaces fonctionnels classiques)

Soit $(X, (\cdot, \cdot)_X, \|\cdot\|_X)$ un espace de Hilbert. Soit $T > 0$.

On définit $L^2(]0, T[, X)$. C'est un Hilbert pour le produit scalaire

$$(f, g)_{L^2(]0, T[, X)} = \int_0^T (f(t), g(t))_X dt.$$

On définit $C^k([0, T], X)$, $k \geq 0$, un Banach pour la norme

$$f \longmapsto \|f\|_{C^k([0, T], X)} := \sum_{m=0}^k \sup_{0 \leq t \leq T} \left\| \frac{d^m}{dt^m} f(t) \right\|_X.$$

Résolution de l'équation de la chaleur [CM 3/4/5]

Théorème X.2.3

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert borné, $d \geq 1$.

Soient $T > 0$, $u^0 \in L^2(\Omega)$, $f \in L^2(]0, T[, L^2(\Omega))$: $(u^0, f) \in F$.

Alors l'équation de la chaleur admet une et une seule solution

Résolution de l'équation de la chaleur [CM 3/4/5]

Théorème X.2.3

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert borné, $d \geq 1$.

Soient $T > 0$, $u^0 \in L^2(\Omega)$, $f \in L^2(]0, T[, L^2(\Omega))$: $(u^0, f) \in F$.

Alors l'équation de la chaleur admet une et une seule solution

$$u \in L^2(]0, T[, H_0^1(\Omega)) \cap C^0([0, T], L^2(\Omega)) =: E.$$

Résolution de l'équation de la chaleur [CM 3/4/5]

Théorème X.2.3

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert borné, $d \geq 1$.

Soient $T > 0$, $u^0 \in L^2(\Omega)$, $f \in L^2([0, T], L^2(\Omega))$: $(u^0, f) \in F$.

Alors l'équation de la chaleur admet une et une seule solution

$$u \in L^2([0, T], H_0^1(\Omega)) \cap C^0([0, T], L^2(\Omega)) =: E.$$

et il existe une constante C telle qu'on ait l'estimation d'énergie

$$\forall t, \|u(t)\|_{L^2}^2 + \int_0^t \|u(s)\|_{H_0^1}^2 ds \leq C \left(\|u(0)\|_{L^2}^2 + \int_0^t \|f(s)\|_{L^2}^2 ds \right)$$

Résolution de l'équation de la chaleur [CM 3/4/5]

Théorème X.2.3

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert borné, $d \geq 1$.

Soient $T > 0$, $u^0 \in L^2(\Omega)$, $f \in L^2([0, T], L^2(\Omega))$: $(u^0, f) \in F$.

Alors l'équation de la chaleur admet une et une seule solution

$$u \in L^2([0, T], H_0^1(\Omega)) \cap C^0([0, T], L^2(\Omega)) =: E.$$

et il existe une constante C telle qu'on ait l'estimation d'énergie

$$\forall t, \|u(t)\|_{L^2}^2 + \int_0^t \|u(s)\|_{H_0^1}^2 ds \leq C \left(\|u(0)\|_{L^2}^2 + \int_0^t \|f(s)\|_{L^2}^2 ds \right)$$

Définition X.2.4

On dit que l'équation de la chaleur est dissipative (voir TD).

Régularité et effet régularisant [CM 1/2/3/4/5]

Proposition X.2.5

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert borné régulier. Soient $(u^0, f) \in F$, et $u \in E$ la solution de

$$\begin{cases} \partial_t u - \nu \Delta_x u = f & \text{dans } \mathbb{R}^{+*} \times \Omega, \\ u(\cdot, x) = 0 & \forall x \in \partial\Omega, \\ u(0, \cdot) = u^0. \end{cases}$$

Alors

- si $f = 0$, u est de classe $C^\infty(]0, +\infty[\times \overline{\Omega})$,

Régularité et effet régularisant [CM 1/2/3/4/5]

Proposition X.2.5

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert borné régulier. Soient $(u^0, f) \in F$, et $u \in E$ la solution de

$$\begin{cases} \partial_t u - \nu \Delta_x u = f & \text{dans } \mathbb{R}^{+*} \times \Omega, \\ u(\cdot, x) = 0 & \forall x \in \partial\Omega, \\ u(0, \cdot) = u^0. \end{cases}$$

Alors

- si $f = 0$, u est de classe $C^\infty([0, +\infty[\times \overline{\Omega})$,
- si $f \neq 0$, $u^0 \in H_0^1(\Omega)$,

$$\partial_t u \in L^2([0, T[, L^2(\Omega))$$

$$u \in L^2([0, T[, H^2(\Omega))) \cap C^0([0, T], H_0^1(\Omega))$$

Régularité et effet régularisant [CM 1/2/3/4/5]

Proposition X.2.5

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert borné régulier. Soient $(u^0, f) \in F$, et $u \in E$ la solution de

$$\begin{cases} \partial_t u - \nu \Delta_x u = f & \text{dans } \mathbb{R}^{+*} \times \Omega, \\ u(\cdot, x) = 0 & \forall x \in \partial\Omega, \\ u(0, \cdot) = u^0. \end{cases}$$

Alors

- si $f = 0$, u est de classe $C^\infty([0, +\infty[\times \overline{\Omega})$,
- si $f \neq 0$, $u^0 \in H_0^1(\Omega)$,

$$\partial_t u \in L^2([0, T[, L^2(\Omega))$$

$$u \in L^2([0, T[, H^2(\Omega))) \cap C^0([0, T], H_0^1(\Omega))$$

Voir preuve en dimension 1 en TD.

Comportement asymptotique [CM 1/2/3/4/5]

Proposition X.2.6

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert borné régulier. Soient $(u^0, f) \in F$ et $u \in E$ la solution de $\begin{cases} \partial_t u - \nu \Delta_x u = f & \text{dans } \mathbb{R}^{+*} \times \Omega, \\ u(\cdot, x) = 0 & \forall x \in \partial\Omega, \\ u(0, \cdot) = u^0. \end{cases}$

Alors,

- si $f = 0$, $u(t)$ converge vers 0 quand $t \rightarrow +\infty$:

$$\|u(t)\|_{L^2(\Omega)} \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$$

Comportement asymptotique [CM 1/2/3/4/5]

Proposition X.2.6

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert borné régulier. Soient $(u^0, f) \in F$ et $u \in E$ la solution de

$$\begin{cases} \partial_t u - \nu \Delta_x u = f & \text{dans } \mathbb{R}^{+*} \times \Omega, \\ u(\cdot, x) = 0 & \forall x \in \partial\Omega, \\ u(0, \cdot) = u^0. \end{cases}$$

Alors,

- si $f = 0$, $u(t)$ converge vers 0 quand $t \rightarrow +\infty$:

$$\|u(t)\|_{L^2(\Omega)} \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$$

- si $f: x \mapsto f(x)$, $u(t)$ converge vers la sol. du pb stationnaire

$$-\nu \Delta_x \bar{u} = f \text{ dans } \Omega$$

Principe du maximum [CM 1/2/3/4/5]

Proposition X.2.7

Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert borné régulier et un temps final $T > 0$.

Soient $(u^0, f) \in F$ et $u \in E$ la solution de

$$\begin{cases} \partial_t u - \nu \Delta_x u = f & \text{dans } \mathbb{R}^{+*} \times \Omega, \\ u(\cdot, x) = 0 & \forall x \in \partial\Omega, \\ u(0, \cdot) = u^0. \end{cases}$$

- *Principe du maximum :*

si $f \geq 0$ p. p. dans $]0, T[\times \Omega$ et $u^0 \geq 0$ p. p. dans Ω ,
alors $u \geq 0$ p. p. dans $[0, T] \times \Omega$.

Principe du maximum [CM 1/2/3/4/5]

Proposition X.2.7

Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert borné régulier et un temps final $T > 0$.

Soient $(u^0, f) \in F$ et $u \in E$ la solution de

$$\begin{cases} \partial_t u - \nu \Delta_x u = f & \text{dans } \mathbb{R}^{+*} \times \Omega, \\ u(\cdot, x) = 0 & \forall x \in \partial\Omega, \\ u(0, \cdot) = u^0. \end{cases}$$

- *Principe du maximum :*

*si $f \geq 0$ p. p. dans $]0, T[\times \Omega$ et $u^0 \geq 0$ p. p. dans Ω ,
 alors $u \geq 0$ p. p. dans $[0, T] \times \Omega$.*

- *Propagation à vitesse infinie :*

si $f = 0$, $u^0 \geq 0$ p. p., $u^0 \not\equiv 0$, $\forall t \in]0, T]$, $x \in \Omega$, $u(t, x) > 0$.

1 Motivation

2 Etude théorique

3 Etude numérique

- Semi-discrétisation
- Discrétisation complète
- Numérique

4 Conclusion

Semi-discrétisation par différences finies [CM 1/2/9]

Méthode des lignes

Soient $\Omega =]0, 1[, J \geq 1$, $\Delta x = 1/(J+1)$, $(x_j)_{j \in \{1, \dots, J\}}$.

Soient $u^0 \in L^2(0, 1)$ et $f \in C^0(\mathbb{R}^+ \times [0, 1])$.

$$\begin{cases} \partial_t u - \nu \partial_{xx}^2 u = f & \text{dans } \mathbb{R}^{+*} \times]0, 1[, \\ u(\cdot, 0) = u(\cdot, 1) = 0, \\ u(0, \cdot) = u^0. \end{cases}$$

Semi-discrétisation en espace :

Semi-discrétisation par différences finies [CM 1/2/9]

Méthode des lignes

Soient $\Omega =]0, 1[, J \geq 1, \Delta x = 1/(J+1), (x_j)_{j \in \{1, \dots, J\}}.$

Soient $u^0 \in L^2(0, 1)$ et $f \in C^0(\mathbb{R}^+ \times [0, 1]).$

$$\begin{cases} \partial_t u - \nu \partial_{xx}^2 u = f & \text{dans } \mathbb{R}^{+*} \times]0, 1[, \\ u(\cdot, 0) = u(\cdot, 1) = 0, \\ u(0, \cdot) = u^0. \end{cases}$$

Semi-discrétisation en espace :

$$\forall j \in \{1, \dots, J\}, t \geq 0 \quad \begin{cases} v'_j(t) = \nu \frac{v_{j+1}(t) - 2v_j(t) + v_{j-1}(t)}{\Delta x^2} + f(t, x_j), \\ v_j(0) = u^0(x_j). \end{cases}$$

Différences Finies : Ecriture vectorielle [CM 1/2/9]

On note $A_{\Delta x}$ la matrice du Laplacien en différences finies,
 $V: t \mapsto (v_1(t), \dots, v_J(t))^T$ et $\mathcal{F}: t \mapsto (f(t, x_1), \dots, f(t, x_J))^T$.

Problème de Cauchy : solution globale

$$\begin{cases} V' = -\nu A_{\Delta x} V + \mathcal{F}, \\ V(0) = (u^0(x_1), \dots, u^0(x_J))^T. \end{cases}$$

Différences Finies : Ecriture vectorielle [CM 1/2/9]

On note $A_{\Delta x}$ la matrice du Laplacien en différences finies,
 $V : t \mapsto (v_1(t), \dots, v_J(t))^T$ et $\mathcal{F} : t \mapsto (f(t, x_1), \dots, f(t, x_J))^T$.

Problème de Cauchy : solution globale

$$\begin{cases} V' = -\nu A_{\Delta x} V + \mathcal{F}, \\ V(0) = (u^0(x_1), \dots, u^0(x_J))^T. \end{cases}$$

Théorème X.3.1 (Valeurs propres du Laplacien discret)

(Voir TD) La matrice $A_{\Delta x}$ a pour spectre

$$\text{Sp}(A_{\Delta x}) = \left\{ 4(J+1)^2 \sin^2 \left(\frac{\pi j}{2(J+1)} \right), \quad j \in \{1, \dots, J\} \right\}.$$

Différences Finies : Comportement asymptotique [CM1/2]

Proposition X.3.2 (Comportement temporel asymptotique)

Soient \mathcal{F} indépendant de t et \bar{V} solution de $-\nu A_{\Delta x} \bar{V} + \mathcal{F} = 0$. On a

$$\forall t \geq 0, \quad \|V(t) - \bar{V}\|_{\mathbb{R}^{J,2}} \leq e^{-\nu\lambda_1 t} \|V(0) - \bar{V}\|_{\mathbb{R}^{J,2}},$$

où $\lambda_1 = \min \text{Sp}(A_{\Delta x})$.

Différences Finies : Convergence [CM 1/2/9]

Rappel

Si $w \in C^0([0, T] \times [0, 1])$, $\Pi_{\Delta x} w(t) = \begin{pmatrix} w(t, x_1) \\ \vdots \\ w(t, x_J) \end{pmatrix}$.

Théorème X.3.3 (Convergence spatiale)

La solution du problème semi-discrétisé converge vers la solution du problème continu à l'ordre 2 :

*Soit $T > 0$, V solution du pb semi-discret et u sol du pb continu.
Alors il existe C ne dépendant que de u et de T telle que*

$$\sup_{t \in [0, T]} \|V(t) - \Pi_{\Delta x} u(t)\|_{\mathbb{R}^J, 2} \leq C \Delta x^2.$$

Démonstration par consistance et stabilité.

Semi-discrétisation par éléments finis [CM 1/2/5/6/7]

Soient Ω de \mathbb{R}^d , polyédrique. Formulation variationnelle :

$$\begin{cases} \text{trouver } u \in L^2(]0, T[, H_0^1(\Omega)) \text{ tq} \\ \forall v \in H_0^1(\Omega), \frac{d}{dt} \int_{\Omega} u(t, x) v(x) dx + \nu \int_{\Omega} \nabla_x u(t, x) \cdot \nabla_x v(x) dx = \int_{\Omega} f(t, x) v(x) dx. \end{cases}$$

Soit un maillage \mathcal{T}_h constitué de n_S sommets intérieurs $(S_j)_{j \in \{1, \dots, n_S\}}$ et n_T triangles $(T_i)_{i \in \{1, \dots, n_T\}}$.

Semi-discrétisation par éléments finis [CM 1/2/5/6/7]

Soient Ω de \mathbb{R}^d , polyédrique. Formulation variationnelle :

$$\begin{cases} \text{trouver } u \in L^2(]0, T[, H_0^1(\Omega)) \text{ tq} \\ \forall v \in H_0^1(\Omega), \frac{d}{dt} \int_{\Omega} u(t, x) v(x) dx + \nu \int_{\Omega} \nabla_x u(t, x) \cdot \nabla_x v(x) dx = \int_{\Omega} f(t, x) v(x) dx. \end{cases}$$

Soit un maillage \mathcal{T}_h constitué de n_S sommets intérieurs $(S_j)_{j \in \{1, \dots, n_S\}}$ et n_T triangles $(T_i)_{i \in \{1, \dots, n_T\}}$.

On considère la méthode \mathbb{P}_1 , de base $(\phi_j)_{j \in \{1, \dots, n_S\}}$.

Semi-discrétisation par éléments finis [CM 1/2/5/6/7]

Soient Ω de \mathbb{R}^d , polyédrique. Formulation variationnelle :

$$\begin{cases} \text{trouver } u \in L^2(]0, T[, H_0^1(\Omega)) \text{ tq} \\ \forall v \in H_0^1(\Omega), \frac{d}{dt} \int_{\Omega} u(t, x)v(x)dx + \nu \int_{\Omega} \nabla_x u(t, x) \cdot \nabla_x v(x)dx = \int_{\Omega} f(t, x)v(x)dx. \end{cases}$$

Soit un maillage \mathcal{T}_h constitué de n_S sommets intérieurs $(S_j)_{j \in \{1, \dots, n_S\}}$ et n_T triangles $(T_i)_{i \in \{1, \dots, n_T\}}$.

On considère la méthode \mathbb{P}_1 , de base $(\phi_j)_{j \in \{1, \dots, n_S\}}$.

On cherche une solution $u_h : t \mapsto \sum_{j=1}^{n_S} u_j(t)\phi_j$ de l'approximation variationnelle

$$\begin{cases} \forall i \in \{1, \dots, n_S\}, \sum_{j=1}^{n_S} u'_j(t) \int_{\Omega} \phi_j \phi_i + \nu \sum_{j=1}^{n_S} u_j(t) \int_{\Omega} \nabla_x \phi_j \cdot \nabla_x \phi_i = \int_{\Omega} f \phi_i, \\ \forall j \in \{1, \dots, n_S\}, u_j(0) = u^0(S_j). \end{cases}$$

Éléments Finis : Ecriture vectorielle [CM 1/2/5/6/7]

Problème de Cauchy : solution globale

$$\mathcal{M}_h U'_h + \nu \mathcal{A}_h U_h = \mathcal{F}_h$$

où

- \mathcal{A}_h est la matrice de rigidité,
- $\mathcal{F}_h = (\int_{\Omega} f \phi_i)_{1 \leq i \leq n_s}$,
- \mathcal{M}_h est appelée **matrice de masse**.

Même étude que précédemment.

Attention : Ce ne sont que des solutions théoriques et non explicites !

Nécessité de discréteriser en temps !

Discrétisation en temps et espace [CM 1/2/5/6/7/8/9]

Application du **schéma d'Euler explicite** à la semi-discrétisation

$$\begin{cases} V' = -\nu \mathcal{A}_h V + b_h, \\ V(0) = V^0 \end{cases}$$

Soit $T > 0$. On définit une discrétisation uniforme de $[0, T]$: pour $N \geq 1$, $\Delta t = T/N$ et $t^n = n\Delta t$ pour $n \in \{0, \dots, N\}$.

On note $b_h^n = b_h(t^n)$ pour $n \in \{0, \dots, N\}$.

Discrétisation en temps et espace [CM 1/2/5/6/7/8/9]

Application du **schéma d'Euler explicite** à la semi-discrétisation

$$\begin{cases} V' = -\nu \mathcal{A}_h V + b_h, \\ V(0) = V^0 \end{cases}$$

Soit $T > 0$. On définit une discrétisation uniforme de $[0, T]$: pour $N \geq 1$, $\Delta t = T/N$ et $t^n = n\Delta t$ pour $n \in \{0, \dots, N\}$.

On note $b_h^n = b_h(t^n)$ pour $n \in \{0, \dots, N\}$.

Définition X.3.4 (Schéma d'Euler explicite)

$$\begin{cases} V^0 = V(0), \\ \forall n \in \{0, \dots, N\}, \quad V^{n+1} = V^n - \Delta t \nu \mathcal{A}_h V^n + \Delta t b_h^n. \end{cases}$$

Stabilité en temps et espace [CM 1/2/5/6/7/8/9]

Suite arithmético-géométrique : $(V^n)_{n \in \{0, \dots, N\}}$ donnée par

$$\forall n \in \{0, \dots, N\}, \quad V^n = (I_J - \Delta t \nu \mathcal{A}_h)^n V^0 + \Delta t \sum_{k=0}^{n-1} (I_J - \Delta t \nu \mathcal{A}_h)^{n-1-k} b_h^k.$$

Définition X.3.5 (Stabilité des schémas)

On dit qu'un schéma complètement discret en temps et espace de la forme $W^{n+1} = BW^n + d^n$ est stable en norme d'espace $\|\cdot\|$ sur \mathbb{R}^J , $J \geq 1$, s'il existe une constante C pouvant dépendre de T mais indépendante de J et de N telle que

$$\forall N \geq 1, \quad \forall n \in \{0, \dots, N\}, \quad \forall J \geq 1, \quad \|B^n\|_{\mathcal{M}_J(\mathbb{R})} \leq C.$$

CS de stabilité dans le cas des DF [CM 1/2/8/9]

Définition X.3.6 (Schéma explicite centré pour l'équation de la chaleur)

$$N \geq 1, \quad \forall j \in \{1, \dots, J\}, \quad \begin{cases} \frac{v_j^{n+1} - v_j^n}{\Delta t} = \nu \frac{v_{j+1}^n - 2v_j^n + v_{j-1}^n}{\Delta x^2} + f(t^n, x_j), \\ v_j^0 = u^0(x_j). \end{cases}$$

Remarque X.3.7

Attention : $\mathcal{A}_h = A_{\Delta x}$

CS de stabilité dans le cas des DF [CM 1/2/8/9]

Définition X.3.6 (Schéma explicite centré pour l'équation de la chaleur)

$$N \geq 1, \quad \forall j \in \{1, \dots, J\}, \quad \begin{cases} \frac{v_j^{n+1} - v_j^n}{\Delta t} = \nu \frac{v_{j+1}^n - 2v_j^n + v_{j-1}^n}{\Delta x^2} + f(t^n, x_j), \\ v_j^0 = u^0(x_j). \end{cases}$$

Remarque X.3.7

Attention : $\mathcal{A}_h = A_{\Delta x}$

Proposition X.3.8

Une condition suffisante de stabilité en norme $\|\cdot\|_{\mathbb{R}^{J,2}}$ du schéma $V^{n+1} = (I_J - \Delta t \nu A_{\Delta x}) V^n + \Delta t F^n$ est $\rho(I_J - \Delta t \nu A_{\Delta x}) \leq 1$.

Condition Courant-Friedrichs-Léwy [CM 1/2/8/9]

Définition-Théorème X.3.9 (Condition CFL)

*On appelle **condition CFL** pour le schéma explicite centré en espace pour l'équation de la chaleur la Condition Suffisante de stabilité en $\|\cdot\|_{\mathbb{R}^{J,2}}$*

$$\nu \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \leq \frac{1}{2}.$$

Voir la démonstration en TD dans un cas plus général.

Consistance dans le cas des DF [CM 1/2/8/9]

Définition X.3.10

L'erreur de consistance pour le schéma explicite centré est définie par, $\forall n \in \{0, \dots, N-1\}$,

$$\mathcal{E}^n = \frac{\Pi_{\Delta x} u(t^{n+1}) - \Pi_{\Delta x} u(t^n)}{\Delta t} + \nu A_{\Delta x} \Pi_{\Delta x} u(t^n) - F_{\Delta x}^n.$$

Consistance dans le cas des DF [CM 1/2/8/9]

Définition X.3.10

L'erreur de consistance pour le schéma explicite centré est définie par, $\forall n \in \{0, \dots, N-1\}$,

$$\mathcal{E}^n = \frac{\Pi_{\Delta x} u(t^{n+1}) - \Pi_{\Delta x} u(t^n)}{\Delta t} + \nu A_{\Delta x} \Pi_{\Delta x} u(t^n) - F_{\Delta x}^n.$$

Par Taylor-Lagrange, $\max_{n \in \{0, \dots, N\}} \|\mathcal{E}^n\|_\infty = O(\Delta t) + O(\Delta x^2)$.

Consistance + Stabilité implique Convergence [CM 8]

Théorème X.3.11

Soit u la solution exacte. Alors, sous CFL $\nu\Delta t \leq \Delta x^2/2$, $(V^n)_{n \in \{0, \dots, N\}}$ converge vers u à l'ordre 2 en espace (ou 1 en temps) en norme $\|\cdot\|_2$:

pour tout $N \geq 0$, $J \geq 1$ tels que $\nu\Delta t \leq \Delta x^2/2$,

$$\forall n \in \{0, \dots, N\}, \|V^n - \Pi_{\Delta x} u(t^n)\|_2 = O(\Delta x^2) = O(\Delta t).$$

On peut de plus montrer un principe du maximum sous CFL, la décroissance de l'énergie, etc.

1 Motivation

2 Etude théorique

3 Etude numérique

4 Conclusion

Analyse fonctionnelle

On a montré que le problème continu est bien posé :

- **Problème de Cauchy** $\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), & t \in I, \\ y(0) = y^0 \text{ donnée} \end{cases}$
 - théorème de Cauchy-Lipschitz

Analyse fonctionnelle

On a montré que le problème continu est bien posé :

- **Problème de Cauchy** $\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), & t \in I, \\ y(0) = y^0 \text{ donnée} \end{cases}$
 - théorème de Cauchy-Lipschitz
- **Problème de Dirichlet** $\begin{cases} -\nu \Delta u = f \text{ dans } \Omega \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$
 - Régularité de u (distributions)
 - IPP - Formulation faible
 - Espaces fonctionnels adaptés (espaces de Sobolev)
 - Etude de formes bilinéaires dans des espaces de Hilbert

Analyse fonctionnelle

On a montré que le problème continu est bien posé :

- **Problème de Cauchy** $\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), & t \in I, \\ y(0) = y^0 \text{ donnée} \end{cases}$
 - théorème de Cauchy-Lipschitz
- **Problème de Dirichlet** $\begin{cases} -\nu \Delta u = f \text{ dans } \Omega \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$
 - Régularité de u (distributions)
 - IPP - Formulation faible
 - Espaces fonctionnels adaptés (espaces de Sobolev)
 - Etude de formes bilinéaires dans des espaces de Hilbert

Outils fonctionnels indispensables

- analyse hilbertienne
- distributions
- espaces de Sobolev

Analyse numérique

Techniques de **discrétisation** abordées :

- **différences finies** (temps et/ou espace)
 - description des fonctions par les valeurs aux nœuds
 - taux d'accroissement ; formules de Taylor
 - obtention de suites définies par récurrence en temps (Euler)
 - obtention de systèmes linéaires en espace de très grande taille

Analyse numérique

Techniques de **discrétisation** abordées :

- **différences finies** (temps et/ou espace)
 - description des fonctions par les valeurs aux nœuds
 - taux d'accroissement ; formules de Taylor
 - obtention de suites définies par récurrence en temps (Euler)
 - obtention de systèmes linéaires en espace de très grande taille
- **éléments finis** (espace)
 - description \mathbb{P}_1
 - utilisation de la formulation variationnelle
 - obtention de systèmes linéaires en espace de très grande taille

Analyse numérique

Techniques de **discrétisation** abordées :

- **différences finies** (temps et/ou espace)
 - description des fonctions par les valeurs aux nœuds
 - taux d'accroissement ; formules de Taylor
 - obtention de suites définies par récurrence en temps (Euler)
 - obtention de systèmes linéaires en espace de très grande taille
- **éléments finis** (espace)
 - description \mathbb{P}_1
 - utilisation de la formulation variationnelle
 - obtention de systèmes linéaires en espace de très grande taille

Outils numériques indispensables

- analyse spectrale des matrices
- résolution de grands systèmes linéaires

Ouverture

- 2A :
 - S7 : « Distributions et opérateurs » - Topologie

Ouverture

- 2A :
 - S7 : « Distributions et opérateurs » - Topologie
 - S7 : « Calcul scientifique » - EDP non linéaires et simulation

Ouverture

- 2A :
 - S7 : « Distributions et opérateurs » - Topologie
 - S7 : « Calcul scientifique » - EDP non linéaires et simulation
 - S8 : « Systèmes dynamiques »

Ouverture

- 2A :
 - S7 : « Distributions et opérateurs » - Topologie
 - S7 : « Calcul scientifique » - EDP non linéaires et simulation
 - S8 : « Systèmes dynamiques »
- 3A :

Option « Mathématiques Appliquées »
&
Master de l'Université Paris-Saclay
(parcours Analyse, Modélisation, Simulation)

Problèmes de l'équation de Navier-Stokes

- Mécanique des fluides : quand $UL/\nu \gg 1$, il y a turbulence



→ modélisation aléatoire

Problèmes de l'équation de Navier-Stokes

- Mécanique des fluides : quand $UL/\nu \gg 1$, il y a turbulence



→ modélisation aléatoire

- Problème mathématique : « well-posedness en 3D »
C'est un des 7 problèmes du millénaire (à 1 M\$) :
« Prove or give a counter-example of the following statement : In three space dimensions and time, given an initial velocity field, there exists a vector velocity and a scalar pressure field, which are both smooth and globally defined, that solve the Navier–Stokes equations. »