Séance IV : Mesure, intégrale et espaces L^p

A) Objectifs de la séance

A la fin de cette séance,

- je sais vérifier qu'une fonction définie sur des ensembles est une mesure;
- je maîtrise la construction de l'intégrale de fonctions positives par rapport à une mesure;
- je sais passer à la limite sous le signe intégral, lorsque la suite de fonctions est monotone;
- je sais particulariser au cas des probabilités le cadre général de l'intégration par rapport à une mesure;
- je sais ce qu'est une mesure de probabilités et je sais déterminer la loi d'une variable aléatoire discrète;
- je connais l'espace vectoriel normé L^p.

B) Pour se familiariser avec les concepts (à traiter avant les séances de TD)

Les questions IV.1 et IV.2 sont à traiter avant la séance de TD. Les corrigés sont disponibles sur internet.

Question IV.1 (Questions diverses sur les mesures)

Q. IV.1.1 Soient E_1, E_2 deux ensembles et $\mathcal{G}$ une tribu sur E_2. Soit f une application de E_1 vers E_2. Montrer que $\{f^{-1}(B) : \ B \in \mathcal{G}\}$ est une tribu sur E_1 (on l'appelle tribu engendrée par f, notée $\sigma(f)$. Vous pouvez vérifier que c'est la plus petite tribu qui rend f mesurable).

Q. IV.1.2 Soit $(E, \mathcal{F})$ un espace mesurable. Pour $x \in E$, on définit

$$\begin{aligned} \delta_x : & \mathcal{F} \to \mathbb{R}_+ \\ & A \mapsto \delta_x(A) = \begin{cases} = 1 & \text{si } x \in A \\ = 0 & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned}$$

Montrer que δ_x est une mesure.

Q. IV.1.3 La somme de deux mesures est-elle une mesure?

Question IV.2

Q. IV.2.1 Dans un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements de probabilité nulle. Montrer que $B = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ est un événement de probabilité nulle.

Q. IV.2.2 Plus généralement, considérons maintenant $(E, \mathcal{F}, \mu)$ un espace mesuré tel que $\mu(E) < \infty$. Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}^{\mathbb{N}}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mu(A_n) = \mu(E)$. Montrer que $\mu\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \mu(E)$.

C) Exercices

La notation pour l'intégrale d'une fonction $f : E \to \mathbb{R}$ par rapport à une mesure ν peut s'écrire indifféremment

$$\int_E f(x)\,\nu(dx) \quad \text{ou} \quad \int_E f\,d\nu.$$

D'autre part, lorsqu'on parlera simplement d'intégrale, il s'agit de l'intégrale au sens de la mesure. Si la mesure est celle de Lebesgue, on parlera éventuellement d'intégrale de Lebesgue. Enfin, on écrira systématiquement "intégrale de Riemann" lorsque cette intégrale apparaît.

On se tourne désormais vers des exercices faisant intervenir l'intégrale construites en cours. En probabilités, on appelle "espérance", notée $\mathbb{E}[\cdot]$, l'intégrale par rapport à une mesure de probabilité $\mathbb{P}$.

Montrons pour commencer que l'intégrale permet d'unifier les notions de fonction intégrable et de suite sommable.

Exercice IV.1 (Mesure sur $\mathbb{N}$)
Soit $\Omega = \mathbb{N}$ et $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$.

E. IV.1.1 Vérifier que $\mathcal{F}$ est bien une tribu sur l'ensemble Ω.

E. IV.1.2 Vérifier que $\nu = \text{Card}$ est bien une mesure sur $\mathcal{F}$ (on l'appelle mesure de comptage).

E. IV.1.3 Vérifier que toute fonction f de $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ est bien mesurable.

E. IV.1.4 Soit f de $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ positive.

(a) Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} f(k)\mathbf{1}_{\{k\}} \uparrow f$.

(b) En déduire la valeur de $\displaystyle\int_{\mathbb{N}} f\,d\nu$.

E. IV.1.5 Déterminer les fonctions de $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \nu)$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ qui sont intégrables.

E. IV.1.6 Montrer que, pour toute famille de réels positifs $(x_{i,j})_{(i,j)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ on a dans $\overline{\mathbb{R}}_+$:

$$\sum_{i\in\mathbb{N}}\sum_{j\in\mathbb{N}} x_{i,j} = \sum_{j\in\mathbb{N}}\sum_{i\in\mathbb{N}} x_{i,j}.$$

Exercice IV.2 (Inégalité de Markov)

E. IV.2.1 Soit $(E, \mathcal{F}, \mu)$ un espace mesuré et f une fonction mesurable à valeurs dans $\mathbb{R}$. Démontrer l'inégalité de Markov:

$$\forall \alpha > 0,\ \mu\left(\{x \in E :\ |f(x)| > \alpha\}\right) \leq \frac{1}{\alpha}\int_E |f|\,d\mu\,.$$

E. IV.2.2 Soit f comme dans la question précédente. Montrer que $\mu\left(\{x \in E :\ f(x) = +\infty\}\right) \leq \lim_{n\to+\infty} \mu\left(\{x \in E :\ |f(x)| \geq n\}\right)$. En s'aidant du résultat de la question précédente, en déduire que si $f \in L^1(E, \mathcal{F}, \mu)$, alors $\mu\left(\{x \in E :\ f(x) = +\infty\}\right) = 0$. La réciproque est-elle vraie?

Exercice IV.3 (Mesure image)
Soit f une application mesurable de $(E, \mathcal{E})$ sur $(F, \mathcal{F})$ ($\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ sont respectivement des tribus sur E et F). Soit ν une mesure définie sur la tribu $\mathcal{E}$.

On pose

$$\forall B \in \mathcal{F}, \quad \nu_f(B) = \nu\big(f^{-1}(B)\big).$$

On considère une application $\varphi : F \to \mathbb{R}_+$ mesurable.

E. IV.3.1 Vérifier que ν_f définit une mesure sur la tribu $\mathcal{F}$.

E. IV.3.2 Rappeler le procédé de construction de l'intégrale dans le cas particulier de $\int_F \varphi(x)\, \nu_f(dx)$.

E. IV.3.3 En déduire que

$$\int_F \varphi(x)\, \nu_f(dx) = \int_E \varphi(f(x))\, \nu(dx).$$

La mesure ν_f est appelée *mesure image* de ν par l'application f.

Exercice IV.4 (Inégalité de Hölder)
Soit $(E, \mathcal{F}, \mu)$ un espace mesuré, et f, g deux fonctions mesurables à valeurs dans $\mathbb{R}$. On veut montrer l'inégalité de Hölder: pour tous $p, q \in [1, \infty]$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$,

$$\int_E |fg|\, d\mu \leq \left(\int_E |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_E |g|^q d\mu \right)^{\frac{1}{q}} . \tag{IV.1}$$

E. IV.4.1 Traiter les cas $\|f\|_p = 0$ et $\|f\|_p = \infty$.

On suppose dorénavant que $\|f\|_p \in]0, +\infty[$ et $\|g\|_q \in]0, +\infty[$.

E. IV.4.2 Traiter le cas $p = 1$.

On suppose désormais que $1 < p < \infty$.

E. IV.4.3 (a) Soit $\alpha \in]0, 1[$. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $x^\alpha - \alpha x \leq 1 - \alpha$. En déduire que pour tous $u, v \geq 0$, $u^\alpha v^{1-\alpha} \leq \alpha u + (1 - \alpha) v$.

(b) Appliquer l'inégalité précédente à $\alpha = \frac{1}{p}$, $u = \frac{|f(x)|^p}{\|f\|_p^p}$ et $v = \frac{|g(x)|^q}{\|g\|_q^q}$. Conclure.

***E. IV.4.4** Lorsque $1 < p < \infty$, trouver une CNS pour qu'il y ait égalité dans (IV.1).

De premiers exercices de probabilité faisant intervenir la mesure.

Exercice IV.5
Soit $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$.

E. IV.5.1 Existe-t-il une mesure de probabilité $\mathbb{P}$ sur Ω telle que $\mathbb{P}(\omega_1) = \mathbb{P}(\omega_2) = \mathbb{P}(\omega_3)$?

E. IV.5.2 On définit les applications X et Y de Ω dans $\mathbb{R}$ telles que

$$X(\omega_1) = 1, \quad X(\omega_2) = 2, \quad X(\omega_3) = 3,$$
$$Y(\omega_1) = 2, \quad Y(\omega_2) = 3, \quad Y(\omega_3) = 1.$$

(a) Justifier que X et Y définissent des variables aléatoires.

(b) Montrer que les variables aléatoires X et Y ont même loi.

(c) Déterminer les distributions de probabilité de $X+Y$ et XY.

Exercice IV.6
Soit $X = \{1,2,3,4\}$ et $\mathcal{F} = \{\{1,2\},\{2,3\},X\}$.
E. IV.6.1 Montrer que $\mathcal{F}$ engendre $\mathcal{P}(X)$ (i.e. $\sigma(\mathcal{F}) = \mathcal{P}(X)$). $\mathcal{F}$ est-il une tribu?

E. IV.6.2 On note $\mathcal{M}_1(X)$ l'ensemble des mesures *de probabilité* sur $(X, \mathcal{P}(X))$. Montrer que $\mathcal{M}_1(X)$ est en bijection avec l'ensemble $\{x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in [0,1]^4 : \sum_{i=1}^4 x_i = 1\}$.

E. IV.6.3 Utiliser la question précédente pour trouver deux mesures de probabilités (i.e. telles que $\mu_1(X) = \mu_2(X) = 1$) distinctes sur $\mathcal{P}(X)$ mais égales sur $\mathcal{F}$.

Exercice IV.7 (Probabilité de limite d'évènements)
Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite d'événements de l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. On définit, pour tout $n \geq 1$,

$$B_n = \bigcup_{m\geq n} A_m, \qquad C_n = \bigcap_{m\geq n} A_m.$$

Pour tout $n \geq 1$, $C_n \subset A_n \subset B_n$ et les suites $(B_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(C_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont respectivement décroissante et croissante. On définit alors

$$\lim_{n\to\infty} B_n = B = \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} B_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} \bigcup_{m\geq n} A_m,$$
$$\lim_{n\to\infty} C_n = C = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} C_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \bigcap_{m\geq n} A_m.$$

E. IV.7.1 Justifier que

(a) $B = \{\omega \in \Omega : \omega \in A_n,$ pour une infinité de valeurs de $n \in \mathbb{N}^*\}$.

(b) $C = \{\omega \in \Omega : \omega \in A_n,$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ sauf pour un nombre fini de valeurs de $n\}$.

E. IV.7.2 On dit que la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers A lorsque B et C sont égaux à A. Dans cette question, on suppose que A_n converge vers A, lorsque $n \to \infty$.

(a) Montrer que A est un événement, c'est-à-dire que $A \in \mathcal{F}$.

(b) Montrer que $\mathbb{P}(A_n)$ tend vers $\mathbb{P}(A)$, lorsque $n \to \infty$.

E. IV.7.3 On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les événements B_n et C_n sont indépendants.

(a) Montrer que B et C sont indépendants.

(b) En déduire que lorsque A_n tend vers A, lorsque $n \to \infty$, $\mathbb{P}(A)$ vaut 0 ou 1.

D) Approfondissement

Exercice IV.8 (Construction de mesures)
Soit $(E, \mathcal{F}, \mu)$ un espace mesuré et f une fonction mesurable positive. Pour tout $A \in \mathcal{F}$, on définit

$$\nu(A) = \int_A f \, d\mu \, .$$

E. IV.8.1 Justifier *rigoureusement* que ν est une mesure.
On dit que ν a pour densité f par rapport à μ.

Exercice IV.9 (Uniforme continuité de l'intégrale)
Soit $(E, \mathcal{F}, \mu)$ un espace mesuré et $f \in L^1(\mu)$.
***E. IV.9.1** Montrer l'assertion suivante:

$$\forall \epsilon > 0, \; \exists \delta > 0 \text{ tel que } \mu(A) < \delta \Rightarrow \int_A |f| \, d\mu < \epsilon \, .$$

Exercice IV.10 (Mesure? *(cf exercice d'I.Kortchemski à l'ENS)***)**
Soit $\ell^\infty = \left\{ \mathbf{u} = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \; \|\mathbf{u}\|_\infty := \sup_{n\in\mathbb{N}} |u_n| < \infty \right\}$ l'ensemble des suites réelles bornées.
***E. IV.10.1** Montrer que $(\ell^\infty, \| \cdot \|_\infty)$ est un espace de Banach.

On admet la propriété suivante (conséquence du théorème de Hahn-Banach), selon laquelle il existe une forme linéaire continue $F : \ell^\infty \to \mathbb{R}$ qui vérifie les propriétés suivantes: pour tout $\mathbf{u} \in \ell^\infty$,

- $F(\mathbf{u}) \leq \|\mathbf{u}\|_\infty$,
- si $\lim_{n\to\infty} u_n = \alpha$, alors $F(\mathbf{u}) = \alpha$.

E. IV.10.2 Pour tout $A \subset \mathbb{N}$, on rappelle que $\mathbf{1}_A$ est l'indicatrice de A, définie par la relation suivante: $\mathbf{1}_A(n) = 1$ si $n \in A$, et $\mathbf{1}_A(n) = 0$ sinon. On peut donc considérer $\mathbf{1}_A$ comme un élément de ℓ^∞. On définit $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathbb{R}$ par la relation $\mu(A) = F(\mathbf{1}_A)$. Montrer que

- $\mu(\emptyset) = 1 - \mu(\mathbb{N}) = 0$,
- $\mu(A^c) = 1 - \mu(A)$,
- $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$ si $A \cap B = \emptyset$.

E. IV.10.3 Montrer que μ n'est pas une mesure.

Exercice IV.11
Soit X un ensemble non-dénombrable et définissons

$$\mathcal{M} = \{E \subset X : E \text{ est dénombrable ou } E^c \text{ est dénombrable}\}.$$

E. IV.11.1 Montrer que $\mathcal{M}$ est une tribu.

E. IV.11.2 On définit $\mu : \mathcal{M} \to \{0,1\}$ par $\mu(E) = 0$ si E est dénombrable et $\mu(E) = 1$ sinon. Montrer que μ est une mesure sur $(X, \mathcal{M})$.

****E. IV.11.3** Décrire les fonctions mesurables de $(X, \mathcal{M})$ vers $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ et leur intégrale par rapport à μ.

Exercice IV.12 (Fonction d'Euler)
On choisit au hasard un des entiers $1, 2, \dots, n$, de manière équiprobable. Pour tout nombre entier p tel que $0 < p \leq n$, on considère l'événement

$$A_p = \{\text{le nombre choisi est divisible par } p\}\,.$$

E. IV.12.1 Calculer $\mathbb{P}(A_p)$ lorsque p divise n.

E. IV.12.2 Montrer que si $p_1, p_2, \dots, p_k$ sont des diviseurs premiers distincts de n, alors les événements $A_{p_1}, A_{p_2}, \dots, A_{p_k}$ sont indépendants.

E. IV.12.3 On rappelle que la *fonction indicatrice d'Euler* $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est définie par : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\phi(n)$ est égal au nombre d'entiers dans $\{1, \dots, n\}$ premiers avec n.
Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\phi(n) = n \prod_{\substack{p \in \mathcal{P} \\ p | n}} (1 - \tfrac{1}{p}).$$

Exercice IV.13 (Indépendance conditionnelle)
Deux événements E et F sont dits *indépendants conditionnellement à un événement* C si

$$\mathbb{P}(E \cap F \mid C) = \mathbb{P}(E \mid C)\mathbb{P}(F \mid C).$$

E. IV.13.1 Montrer que E et F peuvent être indépendants, et ne pas l'être conditionnellement à un événement C.

Séance 4 : Eléments de correction des exercices

Solution de Q. IV.1.1 Notons $\mathcal{F} = \{f^{-1}(B) : B \in \mathcal{G}\}$. $\emptyset$ et E_2 appartiennent à $\mathcal{G}$ donc $\emptyset$ et E_1 appartiennent à $\mathcal{F}$. Pour prouver la stabilité par passage au complémentaire, on remarque que $f^{-1}(A \setminus B) = f^{-1}(A) \setminus f^{-1}(B)$, et pour la stabilité par union dénombrable, $f^{-1}(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f^{-1}(A_n)$.

On note désormais $\sigma(f) = \{f^{-1}(B) : B \in \mathcal{G}\}$. f est mesurable de $(E_1, \sigma(f))$ dans $(E_2, \mathcal{G})$. Donc la plus petite tribu sur E_1 rendant mesurable f est incluse dans $\sigma(f)$. Réciproquement, toute tribu rendant mesurable f doit contenir $f^{-1}(B)$ pour tout $B \in \mathcal{G}$, et contient donc $\sigma(f)$.

Solution de Q. IV.1.2 Soit $x \in E$. $x \notin \emptyset$ donc $\delta_x(\emptyset) = 0$. Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}^{\mathbb{N}}$ une famille d'éléments deux à deux disjoints. On considère alors deux cas:

- soit $x \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Alors par définition, $\delta_x(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = 1$ et il existe $n_x \in \mathbb{N}$ tel que $x \in A_{n_x}$. Les A_n étant disjoints, un tel n_x est unique. Ainsi $\delta_x(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \delta_x(A_{n_x}) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \delta_x(A_n)$.
- Soit $x \in (\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n)^c$, alors $\delta_x(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\delta_x(A_n) = 0$. Ce qui donne à nouveau $\delta_x(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \delta_x(A_n)$.

Solution de Q. IV.1.3 La somme de deux mesures sur un même espace mesurable est une mesure, il suffit de vérifier les points de la définition.

Solution de Q. IV.2.1 Pour toute mesure de probabilité $\mathbb{P}$ (et même plus généralement pour toute mesure positive) sur la tribu $\mathcal{F}$ et pour toute suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $\mathcal{F}$, on a

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n).$$

Comme $\mathbb{P}(A_n) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on en déduit

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n) = 0,$$

d'où $\mathbb{P}(B) = 0$.

Solution de Q. IV.2.2 Montrons que $\mu\left((\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n)^c\right) = 0$.

Notons que $(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n)^c = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n^c$ et que $\mu(A_n^c) = \mu(E \setminus A_n) = \mu(E) - \mu(A_n) = 0$. Ainsi, $\mu\left((\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n)^c\right) = \mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n^c\right) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n^c) = 0$.

Solution de E. IV.1.1 $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$ vérifie bien les axiomes de définition d'une tribu.

Solution de E. IV.1.2 $\nu = card$ vérifie bien les axiomes de définition d'une mesure.

Solution de E. IV.1.3 Toute fonction f de $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ est mesurable puisque :

$$\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), \quad f^{-1}(B) \in \mathcal{P}(\mathbb{N}).$$

Solution de E. IV.1.4

(a) Soit $f_n = \sum_{k=0}^{n} f(k)\mathbf{1}_{\{k\}}$. On a $f_{n+1} - f_n = f(n+1)\mathbf{1}_{\{n+1\}} \geq 0$ donc la suite (f_n) est croissante. En outre, pour tout p fixé dans $\mathbb{N}$, $f_n(p) = f(p)$ pour $n \geq p$. Ainsi $(f_n(p))$ converge vers $f(p)$ quand n tend vers $+\infty$. Ceci prouve la convergence de (f_n) vers f.

(b) Ainsi, puisque les fonctions f_n sont étagées positives:

$$\int f\, d\nu = \lim_{n\to+\infty} \int f_n\, d\nu = \lim_{n\to+\infty} \int \sum_{k=0}^{n} f(k)1_{\{k\}} d\nu = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} f(k)\nu\{k\} = \sum_{k=0}^{+\infty} f(k).$$

Solution de E. IV.1.5 Une fonction f est intégrable si et seulement si $|f|$ est intégrable c'est-à-dire

$$\sum_{k=0}^{+\infty} |f(k)| < +\infty,$$

ou encore $\sum f(k)$ est absolument convergente.

Solution de E. IV.1.6 Pour un entier i fixé, considérons la fonction f_i définie de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$ par $f_i(j) = x_{i,j}$.

Pour tout i, la fonction f_i est à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}_+$ et mesurable puisque, pour tout réel a, $f_i^{-1}(]-\infty, a]) \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$.

Ainsi, par propriété de convergence monotone de l'intégrale des fonctions positives,

$$\int_{\mathbb{N}} \sum_{i=0}^{+\infty} f_i\, d\nu = \sum_{i=0}^{+\infty} \int_{\mathbb{N}} f_i\, d\nu,$$

ce qui s'écrit

$$\sum_{j=0}^{+\infty} \sum_{i=0}^{+\infty} x_{i,j} = \sum_{i=0}^{+\infty} \sum_{j=0}^{+\infty} x_{i,j}.$$

Solution de E. IV.2.1 $|f|$ étant une fonction mesurable à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, son intégrale par rapport à μ est bien définie (dans $[0, +\infty]$). Soit $\alpha > 0$, on définit $E_\alpha = \{|f| > \alpha\}$ (notation pour $\{x \in E : |f(x)| > \alpha\}$). Alors

$$\int_E |f|\, d\mu \geq \int_E |f| \mathbf{1}_{E_\alpha}\, d\mu \geq \int_E \alpha \mathbf{1}_{E_\alpha}\, d\mu = \alpha\mu(E_\alpha),$$

ce qui donne le résultat.

Solution de E. IV.2.2 On a pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\mu(\{f = +\infty\}) \leq \mu(\{|f| = +\infty\}) \leq \mu(\{|f| \geq n\}).$$

Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mu(\{|f| \geq n\}) = +\infty$, alors l'inégalité recherchée est automatiquement vérifiée. Si au contraire il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\mu(\{|f| \geq n_0\}) < +\infty$, alors la suite $(\mu(\{|f| \geq n\}))_{n \geq n_0}$ converge, puisqu'elle est décroissante et minorée (par 0). On a en outre dans ce cas que $\lim_{n\to\infty} \mu(\{|f| \geq n\}) = \mu(\{|f| = +\infty\})$ par la Proposition 3.24 du cours (en effet $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\{|f| \geq n\} = \{|f| = +\infty\}$). Ceci répond à la première partie de la question.

Ensuite, par l'inégalité de Markov,

$$\mu(\{f = +\infty\}) \leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \int_E |f| \, d\mu$$

et le membre de droite vaut 0 grâce à l'hypothèse d'intégrabilité de f.

La réciproque est fausse, n'importe quelle fonction constante (non nulle) sur un espace mesuré $(E, \mathcal{E}, \mu)$ tel que $\mu(E) = +\infty$, le prouve.

Solution de E. IV.3.1 Il s'agit de vérifier les conditions de la définition d'une mesure. *Remarquez qu'on vérifie ainsi que la loi d'une variable aléatoire est bien une mesure de probabilité sur l'espace d'arrivée.*

Solution de E. IV.3.2 Voir le cours...

Solution de E. IV.3.3 Il suffit de vérifier l'égalité sur les fonctions indicatrices $\mathbf{1}_B$ où $B \in \mathcal{F}$.

Solution de E. IV.4.1 Si $\|f\|_p = 0$, alors $f = 0$ μ-p.p. En effet, si $p = +\infty$, c'est vrai par définition. Si $p < +\infty$, la Proposition 4.9 fournit le résultat. Pour rappel, ce résultat peut se démontrer de la façon suivante: pour tout $\epsilon > 0$,

$$\int_E |f|^p \, d\mu \geq \int_E \mathbf{1}_{\{|f|>\epsilon\}} |f|^p \, d\mu \geq \mu(\{|f| > \epsilon\})\epsilon^p.$$

Donc si il existe $\epsilon > 0$ tel que $\mu(\{|f| > \epsilon\}) > 0$, $\int_E |f|^p \, d\mu$ est strictement positif. Par contraposée, on a que $\|f\|_p = 0 \Rightarrow f = 0$ μ-p.p.
Il en découle que $|fg| = 0$ μ-p.p. et donc $\int_E |fg| \, d\mu = 0$, et l'inégalité est vérifiée.

Si $\|f\|_p = +\infty$, alors l'inégalité est trivialement vérifiée.

Solution de E. IV.4.2 Si $p = 1$, $q = +\infty$. Les cas $\|f\|_1 = 0$ et $\|f\|_1 = \infty$ ayant été traités à la question précédente, on peut supposer que $\|f\|_1 \in]0, +\infty[$ et $\|g\|_\infty \in]0, +\infty[$. On a alors

$$\int_E |fg| \, d\mu \leq \|g\|_\infty \int_E |f| d\mu.$$

Solution de E. IV.4.3

(a) Soit $\alpha \in]0,1[$. Il suffit d'étudier la fonction $f : x \mapsto x^\alpha - \alpha x$ définie sur $\mathbb{R}_+$ et de montrer qu'elle atteint son maximum en $x = 1$.

L'inégalité est bien vérifiée dans le cas $v = 0$. Soit donc $u \in \mathbb{R}_+$ et $v \in \mathbb{R}_+^*$. Le résultat recherché provient de l'ingalité $x^\alpha - \alpha x \leq 1 - \alpha$ appliquée en $x = \frac{u}{v}$.

(b) L'inégalité précédente donne:

$$\frac{|f(x)|\ |g(x)|^{q(1-\frac{1}{p})}}{\|f\|_p\ \|g\|_q^{q(1-\frac{1}{p})}} = \frac{|f(x)|}{\|f\|_p}\frac{|g(x)|}{\|g\|_q} \leq \frac{1}{p}\frac{|f(x)|^p}{\|f\|_p^p} + \frac{1}{q}\frac{|g(x)|^q}{\|g\|_q^q}.$$

En intégrant, on obtient:

$$\begin{aligned}\int_E |fg|\ d\mu &\leq \|f\|_p\ \|g\|_q \left(\frac{1}{p}\frac{\int_E |f|^p\ d\mu}{\|f\|_p^p} + \frac{1}{q}\frac{\int_E |g|^q\ d\mu}{\|g\|_q^q}\right) \\ &\leq \|f\|_p\ \|g\|_q \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right) = \|f\|_p\ \|g\|_q.\end{aligned}$$

Solution de E. IV.4.4 Nous allons montrer qu'il y a égalité sssi il existe $(\alpha, \beta) \neq (0,0)$ tel que $\alpha|f|^p = \beta|g|^q$ μ-p.p.

Pour cela, on remarque que la seule inégalité utilisée dans la preuve de l'inégalité de Hölder est issue de $x^\alpha - \alpha x \leq 1 - \alpha$. Or il y a égalité sssi $x = 1$, ce qui correspond avec notre choix de x à une égalité pour Hölder sssi $\frac{|f(x)|^p}{\|f\|_p^p} = \frac{|g(x)|^q}{\|g\|_q^q}$ μ-p.p. On en déduit l'équivalence annoncée en traitant séparément les cas où les normes de f, g s'annulent.

Solution de E. IV.5.1 L'ensemble Ω est fini. On le munit de la tribu $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$, ensemble des parties de Ω.

Toute mesure de probabilité sur $(\Omega, \mathcal{F})$ est déterminée par ses valeurs sur les singletons $\{\omega_i\}$ $(i = 1,2,3)$.

Ainsi, les valeurs $\mathbb{P}(\omega_1) = \mathbb{P}(\omega_2) = \mathbb{P}(\omega_3) = 1/3$ déterminent une unique mesure de probabilité sur $(\Omega, \mathcal{F})$.

Solution de E. IV.5.2

(a) Comme Ω est muni de la tribu la plus fine ($\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$), toute application de $(\Omega, \mathcal{F})$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ est mesurable. Par exemple dans le cas de X,

$$\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), \quad X^{-1}(B) \in \mathcal{F}.$$

Ainsi les applications X et Y sont des variables aléatoires.

Ce résultat reste-t-il valable si on remplace l'ensemble d'arrivée $\mathbb{R}$ par l'ensemble fini $\{1,2,3\}$?

(b) On a

$$\mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}\big(\{\omega \in \Omega : X(\omega) = 1\}\big) = \mathbb{P}(\omega_1) = 1/3$$
$$\mathbb{P}(Y = 1) = \mathbb{P}\big(\{\omega \in \Omega : Y(\omega) = 1\}\big) = \mathbb{P}(\omega_3) = 1/3.$$

De même, on a $\mathbb{P}(X = 2) = 1/3 = \mathbb{P}(Y = 2)$ et $\mathbb{P}(X = 3) = 1/3 = \mathbb{P}(Y = 3)$. Donc les variables aléatoires X et Y ont la même loi.

(c) Les variables aléatoires $X + Y$ et XY sont déterminées par leurs valeurs sur Ω :

$$\begin{array}{ccc} (X+Y)(\omega_1) = 3, & (X+Y)(\omega_2) = 5, & (X+Y)(\omega_3) = 4, \\ (XY)(\omega_1) = 2, & (XY)(\omega_2) = 6, & (XY)(\omega_3) = 3. \end{array}$$

On en déduit que la variable aléatoire $X + Y$ ne prend que les valeurs $\{3, 4, 5\}$ avec les probabilités $\mathbb{P}(X + Y = 3) = \mathbb{P}(X + Y = 5) = \mathbb{P}(X + Y = 4) = 1/3$.

De même, la variable aléatoire XY ne prend que les valeurs $\{2, 3, 6\}$ avec les probabilités $\mathbb{P}(XY = 2) = \mathbb{P}(XY = 6) = \mathbb{P}(XY = 3) = 1/3$.

Solution de E. IV.6.1 Il suffit de vérifier que tous les singletons peuvent être construits à partir d'union et de passage au complémentaire des éléments de $\mathcal{F}$.

$\mathcal{F}$ n'est pas une tribu ($\emptyset \notin \mathcal{F}$, $\mathcal{F}$ n'est pas stable par union, etc.).

Solution de E. IV.6.2 Soit le simplexe $\mathcal{S} = \{x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in [0, 1]^4 : \sum_{i=1}^4 x_i = 1\}$. Considérons l'application

$$\begin{aligned} \varphi : \mathcal{M}_1(X) &\to \mathcal{S} \\ P &\mapsto \{p_1, p_2, p_3, p_4\} \end{aligned}$$

où $p_i = P(\{i\})$ pour tout $i \in \{1, 2, 3, 4\}$. On vérifie d'abord aisément que φ est bien définie (en particulier $\varphi(\mathcal{M}_1(X)) \subset \mathcal{S}$).

Soient $P, Q \in \mathcal{M}_1(X)$ tels que $\varphi(P) = \varphi(Q)$. Puisque pour toute partie $A \in \mathcal{P}(X)$,

$$P(A) = \sum_{i=1}^{4} \mathbf{1}_{\{i \in A\}} p_i \,,$$

(idem pour Q) il vient que $P(A) = Q(A)$. D'où l'injectivité de φ. Par la formule précédente, on construit une mesure de $\mathcal{M}_1(X)$ à partir de tout élément de $\mathcal{S}$, assurant la surjectivité.

Solution de E. IV.6.3 On cherche les éléments de $\mathcal{S}$ dont la valeur est contrainte sur $\mathcal{F}$, ce qui impose un système de 3 équations à 4 inconnues (en ne tenant pas compte dans un premier temps de la contrainte $x_i \geq 0$). Il y a donc une infinité de solutions. On donnne par exemple $p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = \frac{1}{4}$ et $q_1 = q_3 = \frac{1}{3}$, $q_2 = q_4 = \frac{1}{6}$.

Solution de E. IV.7.1

(a) On a $\omega \in B$ si et seulement si pour tout $n \geq 1$, $\omega \in \bigcup_{m \geq n} A_m$, ce qui peut s'exprimer par : ω appartient à une infinité des A_n.

(b) On a $\omega \in C$ si et seulement si pour un certain $n \geq 1$, $\omega \in \bigcap_{m \geq n} A_m$, ce qui peut s'exprimer par : ω appartient à tous les A_m pour $m \geq 1$, sauf éventuellement aux A_m tels que $m < n$.

Solution de E. IV.7.2

(a) On a $A = B = \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} B_n = \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} \bigcup_{m \geq n} A_m$.

Or, pour tout $n \geq 1$, on a $B_n \in \mathcal{F}$ (union dénombrable des A_m, éléments de $\mathcal{F}$).

De même, $B \in \mathcal{F}$ (intersection dénombrable des B_n, éléments de $\mathcal{F}$).

Donc $A \in \mathcal{F}$.

(b) Pour tout $n \geq 1$, on a

$$C_n = \bigcap_{m \geq n} A_m \subset A_n \subset \bigcup_{m \geq n} A_m = B_n,$$

ce qui implique $\mathbb{P}(C_n) \leq \mathbb{P}(A_n) \leq \mathbb{P}(B_n)$.

Par continuité des mesures de probabilité (pour des suites monotones d'événements), on a $\mathbb{P}(B_n) \to \mathbb{P}(B)$ et $\mathbb{P}(C_n) \to \mathbb{P}(C)$, lorsque $n \to \infty$.

Comme $A = B = C$, on en déduit

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(C) \leq \lim_{n \to \infty} \mathbb{P}(A_n) \leq \mathbb{P}(C) = \mathbb{P}(A).$$

Solution de E. IV.7.3

(a) L'indépendance de B_n et C_n, puis le fait que $C_n \subset B_n$ impliquent

$$\mathbb{P}(B_n)\, \mathbb{P}(C_n) = \mathbb{P}(B_n \cap C_n) = \mathbb{P}(C_n) \to \mathbb{P}(C) \qquad \text{lorsque } n \to \infty.$$

Or, on sait que

$$\mathbb{P}(B_n)\, \mathbb{P}(C_n) \to \mathbb{P}(B)\, \mathbb{P}(C) \qquad \text{lorsque } n \to \infty.$$

On en déduit que $\mathbb{P}(B)\, \mathbb{P}(C) = \mathbb{P}(C)$, c'est-à-dire que $\mathbb{P}(B) = 1$ ou $\mathbb{P}(C) = 0$.

Dans les deux cas, on a $\mathbb{P}(B)\, \mathbb{P}(C) = \mathbb{P}(B \cap C)$, i.e. B et C sont indépendants.

(b) Lorsque $A_n \to A$, on a $A = B = C$, donc $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(C)$ vaut 0 ou 1.

Solution de E. IV.8.1 Pour tout $A \in \mathcal{F}$, $\nu(A)$ est bien défini (et à valeur dans $\overline{\mathbb{R}}_+$) car $\mathbf{1}_A f$ est une fonction mesurable positive. De façon évidente, $\nu(\emptyset) = 0$.

On considère donc une famille $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}^{\mathbb{N}}$ d'éléments disjoints. Notons $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. On remarque que pour tout $N \in \mathbb{N}$,

$$\mathbf{1}_{\bigcup_{n=0}^N A_n} = \sum_{n=0}^N \mathbf{1}_{A_n}$$

car les A_n sont deux à deux disjoints. On en déduit deux propriétés: d'une part,

$$\int_E \mathbf{1}_{\bigcup_{n=0}^N A_n} f \, d\mu = \sum_{n=0}^N \int_{A_n} f \, d\mu.$$

D'autre part, la suite de fonctions $\mathbf{1}_{\bigcup_{n=0}^N A_n} f$ est croissante. Ainsi, une simple application du théorème de convergence monotone montre que $\int_A f \, d\mu = \sum_{n\in\mathbb{N}} \int_{A_n} f \, d\mu$, c'est-à-dire que

$$\nu(A) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \nu(A_n).$$

Solution de E. IV.9.1 On a vu à la question Q. IV.2.2 que si f est intégrable, alors f est finie μ-p.p. En particulier, $\lim_{n\to\infty} |f|\mathbf{1}_{\{|f|\geq n\}} = 0$ μ-p.p.. Ainsi, d'après le théorème de convergence dominée (Théorème 4.15, qu'on applique puisque pour tout n, $|f|\mathbf{1}_{\{|f|\geq n\}} \leq |f|$ et $|f|$ est intégrable),

$$\lim_{n\to\infty} \int_E |f|\mathbf{1}_{\{|f|\geq n\}} \, d\mu = 0.$$

Soit $\epsilon > 0$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $\int_E |f|\mathbf{1}_{\{|f|\geq n\}} \, d\mu \leq \frac{\epsilon}{2}$. Prenons $\delta = \frac{\epsilon}{2N}$. Alors, pour tout $A \in \mathcal{F}$ tel que $\mu(A) < \delta$,

$$\begin{aligned}
\int_A |f| \, d\mu = \int_E \mathbf{1}_A |f| \, d\mu &= \int_E \mathbf{1}_{A\cap\{|f|<N\}} |f| \, d\mu + \int_E \mathbf{1}_{A\cap\{|f|\geq N\}} |f| \, d\mu \\
&\leq N \int_E \mathbf{1}_A \, d\mu + \int_E \mathbf{1}_{\{|f|\geq N\}} |f| \, d\mu \\
&\leq N\mu(A) + \frac{\epsilon}{2} \\
&\leq \epsilon.
\end{aligned}$$

Solution de E. IV.10.1 $(\ell^\infty, \|\cdot\|_\infty)$ est un espace vectoriel normé. Montrons qu'il est complet. Soit $(\mathbf{u}^k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy d'éléments de ℓ^∞.

Soit $\epsilon > 0$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tous $j, k \geq N$,

$$\|\mathbf{u}^j - \mathbf{u}^k\|_\infty < \epsilon.$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(\mathbf{u}_n^k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans $\mathbb{R}$, donc elle converge vers un réel qu'on note $\mathbf{u}_n$. Soit $\mathbf{u} = (\mathbf{u}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite candidate pour être la limite de $(\mathbf{u}^k)_{k\in\mathbb{N}}$. Par la propriété de Cauchy de cette dernière, on a en laissant $j \to \infty$ que pour tout $k \geq N$,

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}^k\|_\infty < \epsilon.$$

Comme $(\mathbf{u}^k)_{k\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $(\ell^\infty, \|\cdot\|_\infty)$ (car c'est une suite de Cauchy), on en déduit que $\mathbf{u}$ est bornée également, car $\|\mathbf{u}\|_\infty < \epsilon + \|\mathbf{u}^k\|_\infty$.

Solution de E. IV.10.2

- Par définition, $\mu(\emptyset) = F(\mathbf{1}_\emptyset)$. Or $\mathbf{1}_\emptyset$ correspond à la suite uniformément nulle, dont la limite est donc 0, d'où $\mu(\emptyset) = 0$. De même $\mathbf{1}_\mathbb{N}$ a pour limite 1, d'où $\mu(\mathbb{N}) = 1$.
- Puisque F est linéaire, $\mu(A) + \mu(A^c) = F(\mathbf{1}_A + \mathbf{1}_{A^c}) = \mu(\mathbb{N}) = 1$.
- Soient A et B disjoints. Alors $\mathbf{1}_{A\cup B} = \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B$, donc on déduit à nouveau le résultat de la linéarité de F.

Solution de E. IV.10.3 On remarque que

$$1 = \mu(\mathbb{N}) = \mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{n\}\right) \neq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(\{n\}) = \sum_{n\in\mathbb{N}} 0 = 0.$$

Solution de E. IV.11.1 Voir corrigé de la question Q. **??**.

Solution de E. IV.11.2 Il suffit de vérifier les propriétés dans la définition d'une mesure.

Solution de E. IV.11.3 Si f est mesurable, on sait alors que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $f^{-1}(]-\infty, t[)$ ou $f^{-1}([t, \infty[)$ est dénombrable. Notons

$$\mathcal{F}_+ = \{f : X \to \mathbb{R} \text{ mesurable} : f^{-1}(]-\infty, t[) \text{ est dénombrable } \forall t \in \mathbb{R}\}$$
$$\mathcal{F}_- = \{f : X \to \mathbb{R} \text{ mesurable} : f^{-1}([t, +\infty[) \text{ est dénombrable } \forall t \in \mathbb{R}\}.$$

En s'en tenant rigoureusement à l'énoncé, on remarque que $\mathcal{F}_+$ est vide (idem pour $\mathcal{F}_-$), car si $f \in \mathcal{F}_+$, on doit avoir $f^{-1}(\mathbb{R}) = f^{-1}(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}]-\infty, n[)$ dénombrable, ce qui est impossible car $X = f^{-1}(\mathbb{R})$ est indénombrable par hypothèse. On procède sous cette hypothèse (f à valeurs dans $\mathbb{R}$) pour ce corrigé. Mais qu'en est-il si f est à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$?

On déduit de la remarque précédente que pour f mesurable,

$$I_f := \inf\{t \in \mathbb{R} : f^{-1}(]-\infty, t[) \text{ est indénombrable}\}$$
$$S_f := \sup\{t \in \mathbb{R} : f^{-1}([t, +\infty[) \text{ est indénombrable}\}$$

existent. On remarque ensuite que: 1) si $t < I_f$, $f^{-1}(]-\infty, t[)$ est dénombrable, donc $f^{-1}([t, +\infty[) = f^{-1}(\mathbb{R}\setminus]-\infty, t[) = X \setminus f^{-1}(]-\infty, t[)$ est indénombrable et donc $t \leq S_f$; 2) on en déduit $I_f \leq S_f$; 3) si $t > I_f$, $f^{-1}(]-\infty, t[)$ est indénombrable. Or $f^{-1}([t, +\infty[) = X \setminus f^{-1}(]-\infty, t[) \in \mathcal{M}$ et son complémentaire ($f^{-1}(]-\infty, t[)$) est indénombrable. Donc $f^{-1}([t, +\infty[)$ est dénombrable, ainsi $t \geq I_f$; 4) on en déduit $I_f \geq S_f$.

On note dès lors $\alpha_f = I_f = S_f$. On a donc $f^{-1}(\{\alpha_f\})$ est indénombrable et $f^{-1}(\{\beta\})$ est dénombrable pour tout $\beta \neq \alpha_f$.

Concernant l'intégrale, on conclut maintenant facilement que $\int_X f \, d\mu = \alpha_f$.

Solution de E. IV.12.1 L'espace d'état est $\Omega = \{1, 2, \dots, n\}$, la tribu des événements est $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$, et la probabilité $\mathbb{P}$ est la mesure de comptage sur Ω (probabilité uniforme).

p divise n (noté $p|n$) s'il existe un entier $\alpha \in \mathbb{N}^*$ tel que $n = \alpha\, p$. On peut alors écrire

$$A_p = \{kp;\ k \leq \alpha, k \in \mathbb{N}^*\},$$

et donc $\mathrm{Card}(A_p) = \alpha$.

On a alors

$$\mathbb{P}(A_p) = \frac{\mathrm{Card}(A_p)}{\mathrm{Card}(\Omega)} = \frac{\alpha}{n} = \frac{1}{p}.$$

Solution de E. IV.12.2 Soient $p_1, p_2, \dots, p_k$ des diviseurs premiers distincts de n.

Pour tout sous-ensemble $\{p_{i_1}, \dots, p_{i_r}\} \subset \{p_1, \dots, p_k\}$, on remarque que

$$[p_{i_1}|m,\ p_{i_2}|m, \dots,\ p_{i_r}|m] \Leftrightarrow [(p_{i_1}p_{i_2}\dots p_{i_r})|m].$$

Ainsi,

$$A_{p_{i_1}} \cap A_{p_{i_2}} \cap \dots \cap A_{p_{i_r}} = A_{p_{i_1}p_{i_2}\dots p_{i_r}}.$$

D'après 1), on en déduit

$$\mathbb{P}\left(A_{p_{i_1}p_{i_2}\dots p_{i_r}}\right) = \frac{1}{p_{i_1}p_{i_2}\dots p_{i_r}} = \mathbb{P}(A_{p_{i_1}})\mathbb{P}(A_{p_{i_2}})\dots\mathbb{P}(A_{p_{i_r}}),$$

ce qui montre l'indépendance (mutuelle) des $A_{p_1}, A_{p_2}, \dots, A_{p_k}$.

Solution de E. IV.12.3 Soit B_n l'ensemble des nombres inférieurs ou égaux à n et premiers avec n. Par définition de la fonction indicatrice d'Euler, on a

$$\phi(n) = \mathrm{Card}(B_n)$$

et comme la probabilité $\mathbb{P}$ est uniforme,

$$\mathbb{P}(B_n) = \frac{\mathrm{Card}(B_n)}{n}.$$

On cherche donc $\mathbb{P}(B_n)$.

Si $p_1, \dots, p_k$ sont les diviseurs premiers de n, on a

$$m \in B_n \Leftrightarrow [m \leq n \text{ et } m \text{ n'est multiple d'aucun } p_i]\,.$$

Ainsi,

$$B_n = \bigcap_{1 \leq i \leq k} A_{p_i}^c.$$

Or l'indépendance (mutuelle) des A_{p_i} entraîne l'indépendance (mutuelle) des $A_{p_i}^c$. On en déduit

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\bigcap_{1\leq i\leq k} A_{p_i}^c\right) &= \prod_{i=1}^{k} \mathbb{P}(A_{p_i}^c)\\ &= \prod_{i=1}^{k}\left(1-\frac{1}{p_i}\right).\end{aligned}$$

D'où

$$\phi(n) = n\prod_{i=1}^{k}\left(1-\frac{1}{p_i}\right).$$

Solution de E. IV.13.1 Il s'agit ici de trouver un contre-exemple. On considère alors deux événements indépendants $E, F \in \mathcal{F}$. Posons $C = E \cup F$. on a alors

$$\mathbb{P}(E\cap F \mid C) = \frac{\mathbb{P}(E\cap F\cap C)}{\mathbb{P}(C)} = \frac{\mathbb{P}(E\cap F)}{\mathbb{P}(C)},$$

en utilisant $E \cap F \subset C$. D'où

$$\mathbb{P}(E\cap F \mid C) = \mathbb{P}(E)\,\frac{\mathbb{P}(F)}{\mathbb{P}(C)} = \mathbb{P}(E)\,\mathbb{P}(F \mid C) \neq \mathbb{P}(E \mid C)\,\mathbb{P}(F \mid C),$$

car $\mathbb{P}(E \mid C) = \dfrac{\mathbb{P}(E)}{\mathbb{P}(C)} \neq \mathbb{P}(E)$ si $0 < \mathbb{P}(C) < 1$.