数量积 [编辑]

维基百科，自由的百科全书

“内积”重定向至此，关于外代数上的内积，参见内乘。

此条目**没有列出任何参考或来源**。 *(2013年12月13日)*
维基百科所有的内容都应该可供查证。请协助添加来自可靠来源的引用以改善这篇条目。无法查证的内容可能被提出异议而移除。

在数学中，**点积**（德语：Skalarprodukt、英语：Dot Product）又称**数量积**或**标量积**（德语：Skalarprodukt、英语：Scalar Product），是一种接受两个等长的数字序列（通常是坐标向量）、返回单个数字的代数运算。在欧几里得几何中，两个笛卡尔坐标向量的点积常称为**内积**（德语：inneres Produkt、英语：Inner Product），见内积空间。

从代数角度看，先对两个数字序列中的每组对应元素求积，再对所有积求和，结果即为点积。从几何角度看，点积则是两个向量的长度与它们夹角余弦的积。这两种定义在笛卡尔坐标系中等价。

点积的名称源自表示点乘运算的点号（$a \bullet b$），**标量积**的叫法则是在强调其运算结果为标量而非向量。向量的另一种乘法是**叉乘**（**a**×**b**），其结果为向量，称为**叉积**或**向量积**。

点积是**内积**的一种特殊形式。

线性代数

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

向量 • 向量空间 • 行列式 • 矩阵

向量 [显示]
矩阵与行列式 [显示]
线性空间与线性变换 [显示]

查 • 论 • 编

目录 [隐藏]

定义 [编辑]

点积有两种定义方式：代数方式和几何方式。通过在欧氏空间中引入笛卡尔坐标系，向量之间的**点积**既可以由向量坐标的代数运算得出，也可以通过引入两个向量的**长度**和**角度**等几何概念来求解。

代数定义 [编辑]

两个向量$\vec{a} = [a_1, a_2, \cdots, a_n]$和$\vec{b} = [b_1, b_2, \cdots, b_n]$的点积定义为：

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n$$

这里的Σ是求和符号，而n是向量空间的维数。

例如，两个三维向量$[1, 3, -5]$和$[4, -2, -1]$的点积是

$$\begin{aligned}[1, 3, -5] \cdot [4, -2, -1] &= (1)(4) + (3)(-2) + (-5)(-1) \\ &= 4 - 6 + 5 \\ &= 3\end{aligned}$$

点积还可以写为：

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a}\vec{b}^T。$$

这里，$\vec{b}^T$是行向量$\vec{b}$的转置。

使用上面的例子，一个1×3矩阵（行向量）乘以一个3×1矩阵（列向量）的行列式就是结果(通过矩阵乘法得到1×1矩阵)：

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \end{bmatrix} = 3。$$

几何定义 [编辑]

在欧几里得空间中，点积可以直观地定义为

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}| \cos\theta$$

这里 $|\vec{x}|$ 表示$\vec{x}$的模（长度），θ表示两个向量之间的角度。

注意：点积的形式定义和这个定义不同；在形式定义中，$\vec{a}$和$\vec{b}$的夹角是通过上述等式定义的。

这样，两个互相垂直的向量的点积总是零。若$\vec{a}$和$\vec{b}$都是单位向量（长度为1），它们的点积就是它们的夹角的余弦。那么，给定两个向量，它们之间的夹角可以通过下列公式得到：

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|}$$

这个运算可以简单地理解为：在点积运算中，第一个向量投影到第二个向量上（这里，向量的顺序是不重要的，点积运算是可交换的），然后通过除以它们的标量长度来“标准化”。这样，这个分数一定是小于等于1的，可以简单地转化成一个角度值。

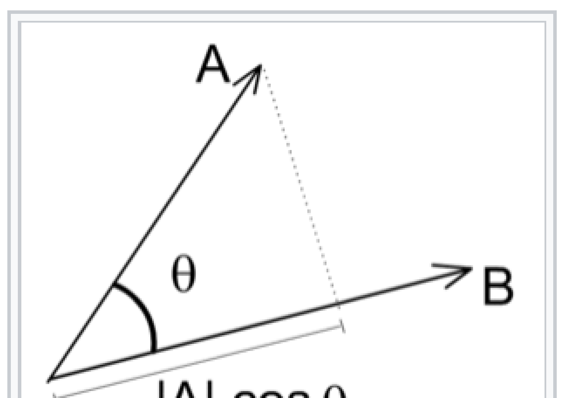
标量投影 [编辑]

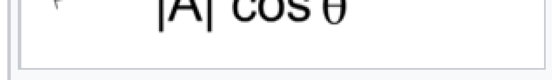
欧氏空间中向量$\mathbf{A}$在向量$\mathbf{B}$上的标量投影是指

$$A_B = |\mathbf{A}| \cos\theta$$

这里θ是$\mathbf{A}$和$\mathbf{B}$的夹角。从点积的几何定义$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = |\mathbf{A}||\mathbf{B}| \cos\theta$不难得出，两个向量的点积：$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$可以理解为向量$\mathbf{A}$在向量$\mathbf{B}$上的投影再乘以$\mathbf{B}$的长度。

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_B |\mathbf{B}| = B_A |\mathbf{A}|$$





$A\cdot B = |A|\,|B|\cos(\theta)$.
$|A|\cos(\theta)$是A到B的投影。

两种定义的等价性 [编辑]

点积的两种定义中，只需给定一种定义，另外一种定义就可以推出。

由几何定义推出代数定义 [编辑]

设$e_1, \ldots, e_n$是$\mathbb{R}^n$空间的一组标准正交基，可以得出：

$$\mathbf{A} = [a_1, \ldots, a_n] = \sum_i a_i \mathbf{e}_i$$

$$\mathbf{B} = [b_1, \ldots, b_n] = \sum_i b_i \mathbf{e}_i.$$

上文中已经得知两个向量点积的几何定义实际上就是一个向量在另外一个向量上的投影，故$\mathbf{A}$在任一标准基e_n的点积$\mathbf{A}\cdot\mathbf{e}_i$就是$\mathbf{A}$在此标准基向量上的投影，而根据向量自身的定义，这个投影即为a_i。因此：

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = \mathbf{A}\cdot\sum_i b_i \mathbf{e}_i = \sum_i b_i(\mathbf{A}\cdot\mathbf{e}_i) = \sum_i b_i a_i$$

由代数定义推出几何定义 [编辑]

应用余弦定理。 **注意**：这个证明采用三维向量，但可以推广到n维的情形。

考虑向量

$$\vec{v} = v_1\vec{i} + v_2\vec{j} + v_3\vec{k}\,.$$

重复使用勾股定理得到

$$|\vec{v}|^2 = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2\,.$$

而由代数定义

$$\vec{v}\cdot\vec{v} = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2\,,$$

所以，根据向量点积的代数定义，向量$\vec{v}$和自身的点积就是其长度的平方。

引理1

$$\vec{v}\cdot\vec{v} = |\vec{v}|^2$$

现在，考虑两个从原点出发的向量$\vec{a}$和$\vec{b}$，夹角θ。第三个向量$\vec{c}$定义为

$$\vec{c} \equiv \vec{a} - \vec{b}\,,$$

构造以$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$为边的三角形，采用余弦定理，有

$$|\vec{c}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta\,.$$

根据引理1，用点积代替向量长度的平方，有

$$\vec{c}\cdot\vec{c} = \vec{a}\cdot\vec{a} + \vec{b}\cdot\vec{b} - 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta\,.\quad (1)$$

同时，根据定义$\vec{c} \equiv \vec{a} - \vec{b}$，有

$$\vec{c}\cdot\vec{c} = (\vec{a} - \vec{b})\cdot(\vec{a} - \vec{b})\,,$$

根据分配律，得

$$\vec{c}\cdot\vec{c} = \vec{a}\cdot\vec{a} + \vec{b}\cdot\vec{b} - 2(\vec{a}\cdot\vec{b})\,.\quad (2)$$

连接等式 *(1)* 和 *(2)* 有

$$\vec{a}\cdot\vec{a} + \vec{b}\cdot\vec{b} - 2(\vec{a}\cdot\vec{b}) = \vec{a}\cdot\vec{a} + \vec{b}\cdot\vec{b} - 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta\,.$$

简化等式即得

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta\,,$$

以上即为向量点积的几何定义。

需要注意的是，点积的几何解释通常只适用于$\mathbb{R}^n$ ($n \le 3$)。在高维空间，其他的域或模中，点积只有一个定义，那就是

$$\left\langle \vec{a}, \vec{b} \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$$

点积可以用来计算合力和功。若$\vec{b}$为单向量，则点积即为$\vec{a}$在方向$\vec{b}$的投影，即给出了力在这个方向上的分解。功即是力和位移的点积。

性质 [编辑]

点积具有以下性质。

- 满足交换律：

  $$\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a},$$

  从定义即可证明（θ 为a与b的夹角）：

  $$\vec{a}\cdot\vec{b} = \|\vec{a}\|\,\|\vec{b}\|\cos\theta = \|\vec{b}\|\,\|\vec{a}\|\cos\theta = \vec{b}\cdot\vec{a}$$

- 对向量加法满足分配律：

  $$\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{a}\cdot\vec{c}$$

- 点积是双线性算子：

  $$\vec{a}\cdot(r\vec{b}+\vec{c}) = r(\vec{a}\cdot\vec{b}) + (\vec{a}\cdot\vec{c})$$

- 在乘以标量时满足：

  $$(c_1\vec{a})\cdot(c_2\vec{b}) = (c_1c_2)(\vec{a}\cdot\vec{b})$$

- 不满足结合律。因为标量（$\vec{a}\cdot\vec{b}$）与向量（$\vec{c}$）的点积没有定义，所以结合律相关的表达式 $(\vec{a}\cdot\vec{b})\cdot\vec{c}$ 和 $\vec{a}\cdot(\vec{b}\cdot\vec{c})$ 都没有良好的定义
- 两个非零向量$\vec{a}$和$\vec{b}$是正交的，当且仅当$\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$

如果$\vec{b}$是单位向量，则点积给出$\vec{a}$在方向$\vec{b}$上投影的大小，如果方向相反则带有负号。分解向量对求向量的和经常是有用的，比如在力学中计算合力。

不像普通数的乘法服从消去律，如果$ab = ac$，则b总是等于c，除非a等于零。而对于点积：

如果$\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{a}\cdot\vec{c}$并且$\vec{a} \ne 0$：

则根据分配律可以得出：$\vec{a}\cdot\left(\vec{b}-\vec{c}\right) = 0$；进而：

如果$\vec{a}$垂直于$\left(\vec{b}-\vec{c}\right)$，则$\left(\vec{b}-\vec{c}\right)$可能$\ne 0$，因而$\vec{b}$可能$\ne \vec{c}$；否则$\vec{b} = \vec{c}$。

推广 [编辑]

矩阵 [编辑]

矩阵具有弗罗比尼乌斯内积，可以类比于向量的内积。它被定义为两个相同大小的矩阵**A**和**B**的对应元素的内积之和。

复矩阵情况下：

$$\mathbf{A}:\mathbf{B}=\sum_i\sum_j A_{ij}\overline{B_{ij}}=\mathrm{tr}(\mathbf{B}^{\mathrm{H}}\mathbf{A})=\mathrm{tr}(\mathbf{A}\mathbf{B}^{\mathrm{H}}).$$

实矩阵情况下：

$$\mathbf{A}:\mathbf{B}=\sum_i\sum_j A_{ij}B_{ij}=\mathrm{tr}(\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{A})=\mathrm{tr}(\mathbf{A}\mathbf{B}^{\mathrm{T}})=\mathrm{tr}(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{B})=\mathrm{tr}(\mathbf{B}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}).$$

应用 [编辑]

物理学中力学的力做功的问题，经常用到点积计算。

计算机图形学常用来进行方向性判断，如两向量点积大于0，则它们的方向朝向相近；如果小于0，则方向相反。

向量内积是人工智能领域中的神经网络技术的数学基础之一。

此方法被用于动画渲染（Animation-Rendering）。

广义定义 [编辑]

在一个向量空间V中，定义在$V\times V$上的**正定对称双线性形式**函数即是V的数量积，而添加有一个数量积的向量空间即是内积空间。

参见 [编辑]

- 向量积

分类：向量 | 二元运算 | 解析几何