

# 本讲目的：究竟什么是电子的强关联？

- 专题一：整数和分数量子霍尔效应(阎守胜教材第11.1.3和12.4节)

- \* 针对电子气的独立电子近似 $\leftrightarrow$ 电子强关联

- %因为电子强关联是凝聚态物理中最重要的问题

- † 这是一个以物理问题出现的数学问题，目前尚看不出有任何有效的解决方法！

- 专题选择所遵循的原则

- \* 前沿的、重要的、与课程相关的内容，但前提是能够讲明白所选专题的物理究竟是怎么回事，...

- \* 能不能讲明白取决于我们现有的背景知识够不够

# 第5讲、整数和分数量子化霍尔效应

1. 什么是多体(多电子)问题?
2. 整数量子霍尔效应(IQHE)
3. Landau能级和局域态
4. 整数量子霍尔效应的解释
5. 分数量子霍尔效应(FQHE)
6. 换个图象看量子霍尔效应
7. 分数量子霍尔效应的解释

The logo of the Surface Physics Lab at Fudan University is a circular seal. It features the Chinese characters '表面物理' (Surface Physics) at the top and '复旦大学' (Fudan University) in the center. The English text 'SURFACE LAB' and 'FUDAN UNIVERSITY' is written around the bottom half of the circle.

# 1、什么是多体(多电子)问题？

# 比较：自由电子气体与理想气体

- 理想气体模型：
  - \* 研究对象是气体分子，相互作用是指气体分子与气体分子之间的相互作用——碰撞
- 自由电子气模型：
  - \* 研究对象是电子，但是电子与电子的相互作用（多电子问题）却被忽略→独立电子近似；
  - \* 另外还有一隐形的——离子，但是电子-离子的作用也被忽略→自由电子近似
  - \* 离子是不得不被加入的：否则，电子没有阻尼机制，将在外电场下将被无限加速。于是设计成与离子（不是所考察的运动对象）碰撞→弛豫时间近似

# 质疑：独立电子近似→关联(=非独立)

- 电子作为带电体至少有库仑相互作用
  - \* 忽略这样的作用，近似能够好到什么程度？
- 这是固体物理、凝聚态物理最重要的问题
  - \* 太复杂、太困难
  - \* 到上世纪末，颁发了8个直接与强关联有关的诺贝尔物理奖，足见这个问题的困难和重要！
    - %液氦(1962, 1978, 1996)
    - %超导(1913, 1972, 1987)
    - %量子化霍尔效应(1985, 1998)
- 事实：基本与低温有关←思考：有何猜想？
  - \* 关联只有在低温时才会更显著地显示出来→常识？



# 将分四个专题来专门介绍关联问题

- 单电子近似（专题二）：所有电子（包括被考虑的对象）作为一个整体对单个电子（被考虑的对象）的平均作用
- 绝缘的本质（专题四）：忽略电子关联会导致什么荒唐的结果？
- 超导（专题五）：电子关联又会引起什么奇异的结果？
- 整数和分数量子化霍尔效应（专题一）：电子必须作为整体关联在一起被考虑，才能解释量子霍尔效应→今天的主题

## 2、整数量子化霍尔效应

- K. von Klitzing (1943~): 观察到整数量子霍尔效应, PRL45, 494 (1980)
  - \* 极低温**1.5K**、强磁场**18T**、载流子浓度约 **$10^{13}/\text{cm}^2$** (?)
  - \* 二维电子气的霍尔电阻与栅电压的关系呈现一个个量子化的平台

$$\rho_H = \frac{V_H}{I_x} = -\frac{1}{j} \frac{h}{e^2}, \quad j \text{ 为整数。} \frac{h}{e^2} \text{ 1990年起定为电阻单位标准}$$

$$\frac{h}{e^2} = \frac{1}{2} \alpha^{-1} \mu_0 c, \text{ 称为 von Klitzing 常数, 用这个量来包装这个工作}$$

- 这个实验在1978年已经完成, 但当时没有注意霍尔电阻平台是量子化的, 平台平整度 $10^{-8}$
- 因为这个发现的重要意义, 1985年获Nobel奖

# **New Method for High-Accuracy Determination of the Fine-Structure Constant Based on Quantized Hall Resistance**

**K. v. Klitzing**

*Physikalisches Institut der Universität Würzburg, D-8700 Würzburg, Federal Republic of Germany, and  
Hochfeld-Magnetlabor des Max-Planck-Instituts für Festkörperforschung, F-38042 Grenoble, France*

and

**G. Dorda**

*Forschungslaboratorien der Siemens AG, D-8000 München, Federal Republic of Germany*

and

**M. Pepper**

*Cavendish Laboratory, Cambridge CB3 0HE, United Kingdom*

(Received 30 May 1980)

Measurements of the Hall voltage of a two-dimensional electron gas, realized with a silicon metal-oxide-semiconductor field-effect transistor, show that the Hall resistance at particular, experimentally well-defined surface carrier concentrations has fixed values which depend only on the fine-structure constant and speed of light, and is insensitive to the geometry of the device. Preliminary data are reported.

PACS numbers: 73.25.+i, 06.20.Jr, 72.20.Mv, 73.40.Qv



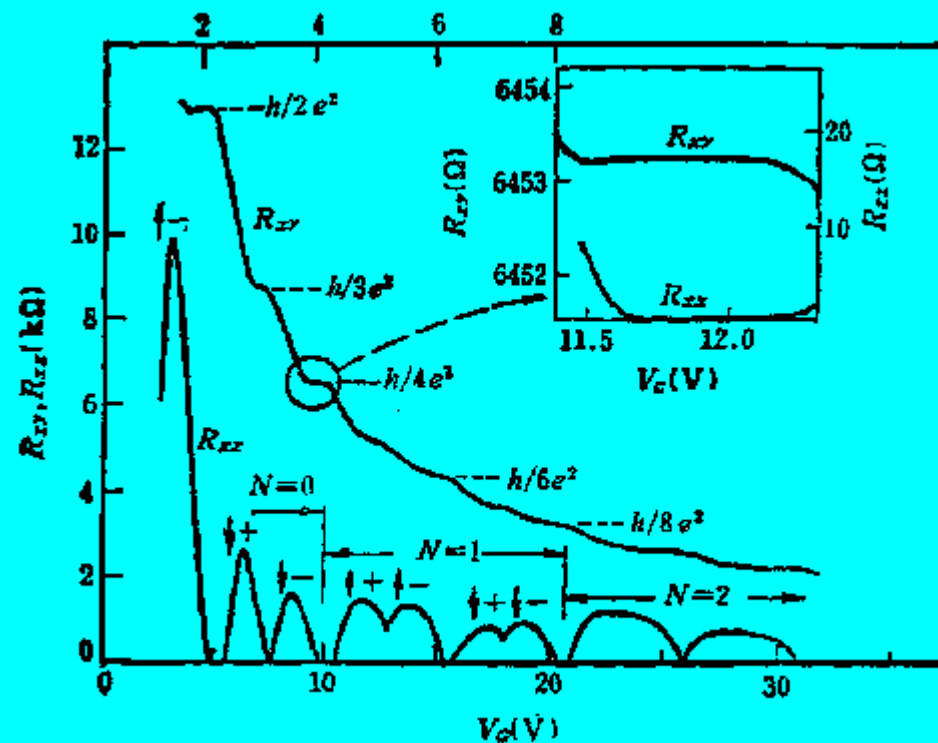
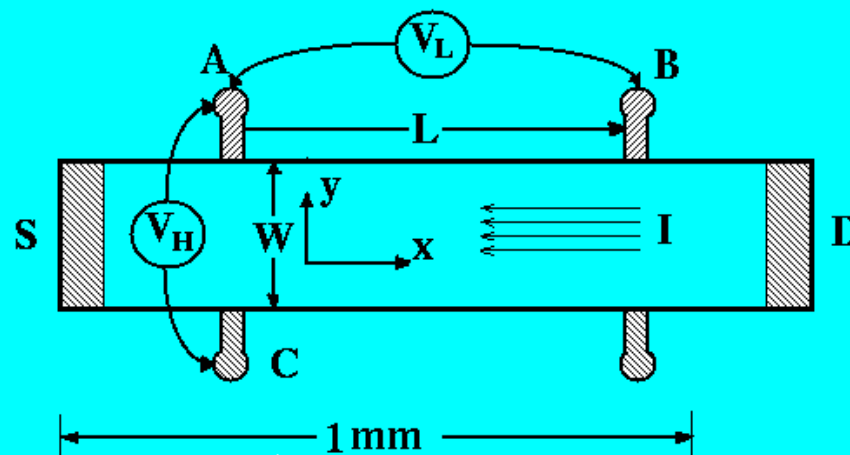
# 这个发现的重大意义

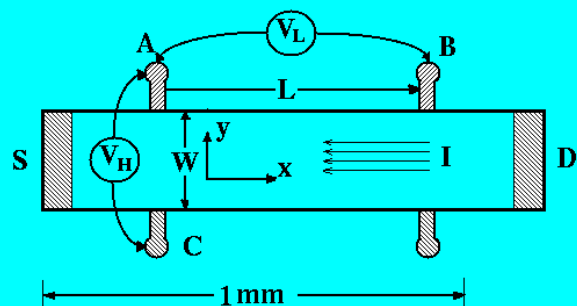
- 这个成果被包装成《用量子Hall电阻高精度地确定精细结构常数的新方法》——标题
  - \* 精确性，稳定性和可重复性
  - \* 精细结构常数是个基本物理常数，一个无量纲常数。以前测量精细结构常数一是与量子电动力学有关的实验；另一是从Josephson效应
  - \* 诺贝尔奖只授予那些改变了人类文明，促进了世界进步的成果
- 强关联，注意条件：
  - \* 强磁场18T，极低温1.5K，低密度的载流子
  - %载流子：传导的载体，现在可以理解为就是电子

- 观测量子霍尔效应示意图(与经典Hall效应相同): 固定 $B$ , 改变栅电压以改变载流子数目, 观察霍尔电压 $V_H$ 和栅电压 $V_L$ 的变化

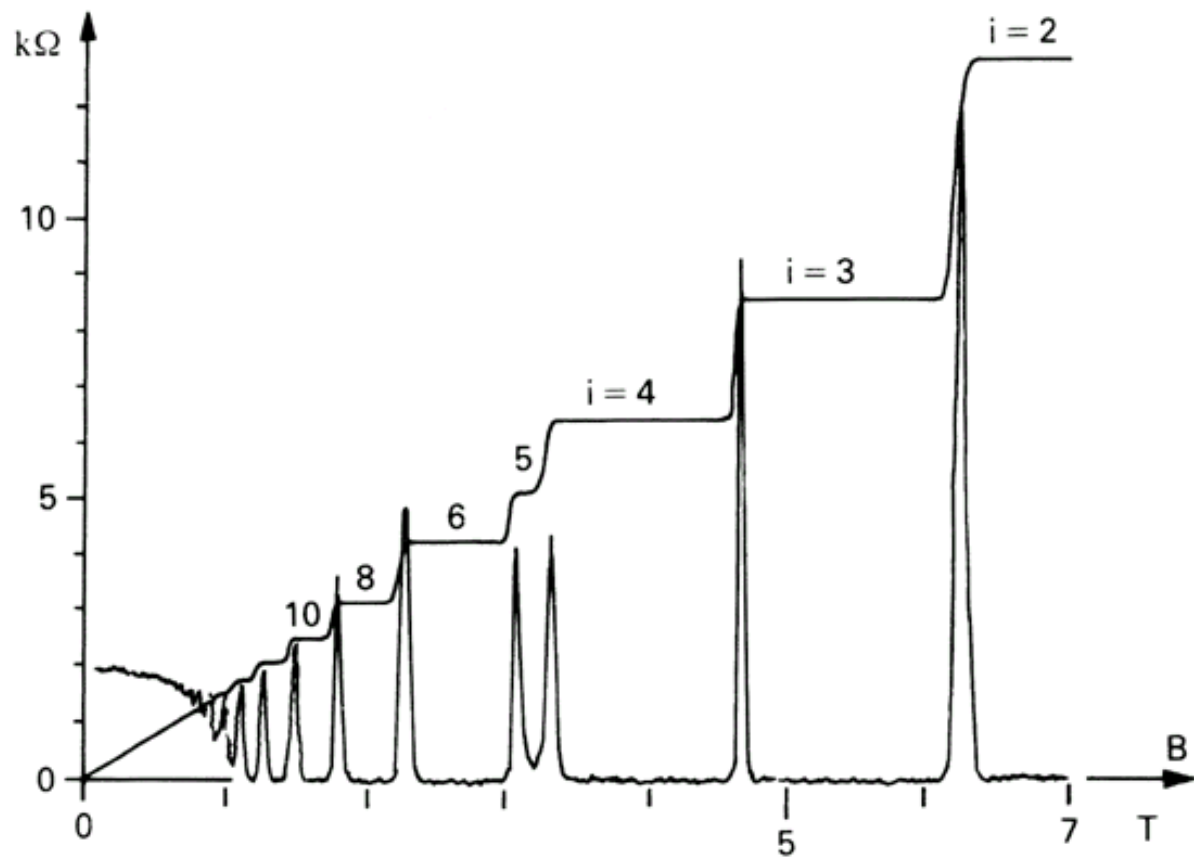
\* 霍尔电压呈现平台的地方, 纵向电压 $V_L$ 为零→  
纵向电阻为零!

- 几种样品都有同样的结果(外型尺寸、载流子类型、能带结构, ...), 这是一个普适现象





- 也可控制栅电压保持电流密度不变，只改变磁场，也可看到霍尔电阻的平台和纵向电阻为零
- 今天我们不讲它对世界文明有什么重要，只关心物理！即，**这现象背后的物理实质是什么？**



The logo is a circular seal for the Surface Physics Lab at Fudan University. It features the Chinese characters '表面物理' (Surface Physics) at the top and '复旦大学' (Fudan University) in the center. The English text 'SURFACE LAB' and 'FUDAN UNIVERSITY' is written around the bottom half of the circle.

怎么解释这个实验现象？



### 3、Landau能级和简并度

- 实验观测条件指出，这是一种强磁场下的二维约束的电子气体
- 三维自由电子气在均匀磁场(z方向)下如何运动
- $k_z$ 和绕磁场方向的角动量是好量子数
- 电子绕磁场方向作螺旋运动

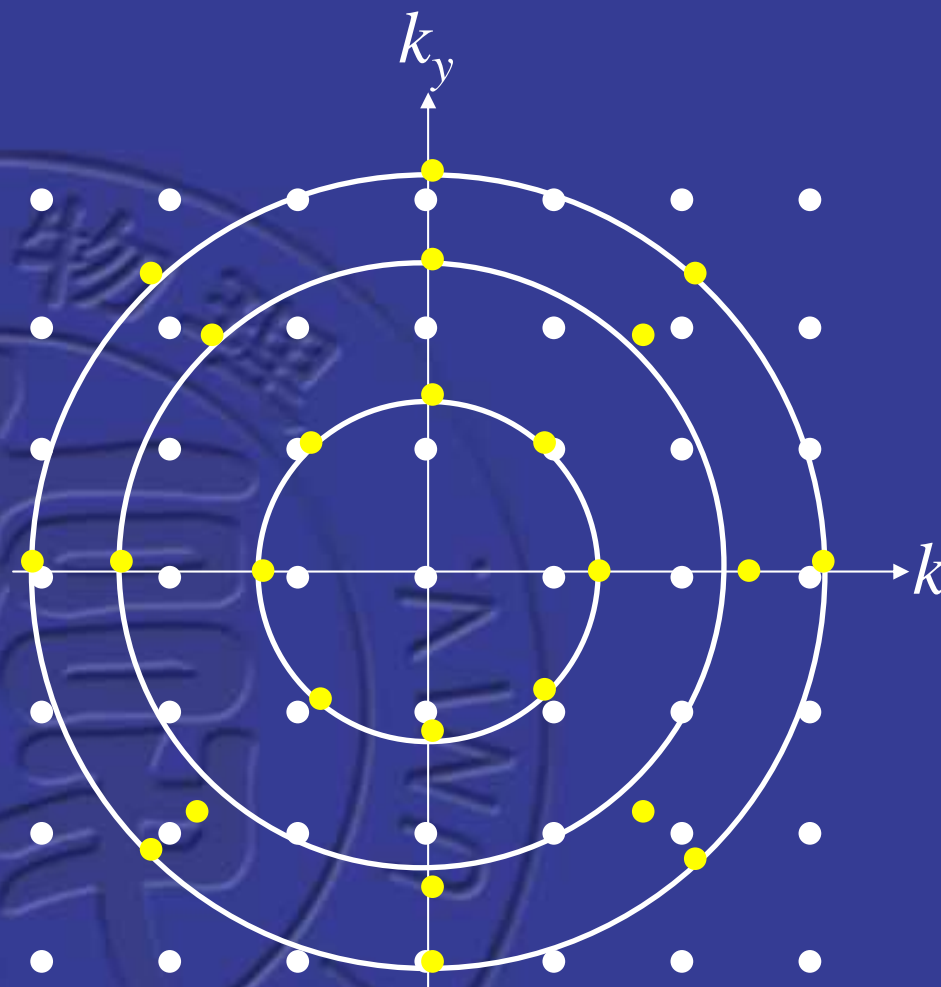
\* 其解为

$$E_n(k_z) = \frac{\hbar^2 k_z^2}{2m} + \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar \omega_c, \quad \omega_c = \frac{eB}{m}$$

- 即在平行于磁场方向，能量仍是连续的，但在垂直于磁场平面，原来无磁场时的连续能量，量子化，简并到分立的Landau能级

# Landau环

- 对二维电子气体，在垂直于该平面加上均匀磁场后， $k$ 空间被等分成一个个面积为常数的Landau环，每个环上的能量各自相等；三维时，则被等分成一个个横截面为常数Landau管
- 原均匀分布的 $k$ 点，简并到Landau环，简并度

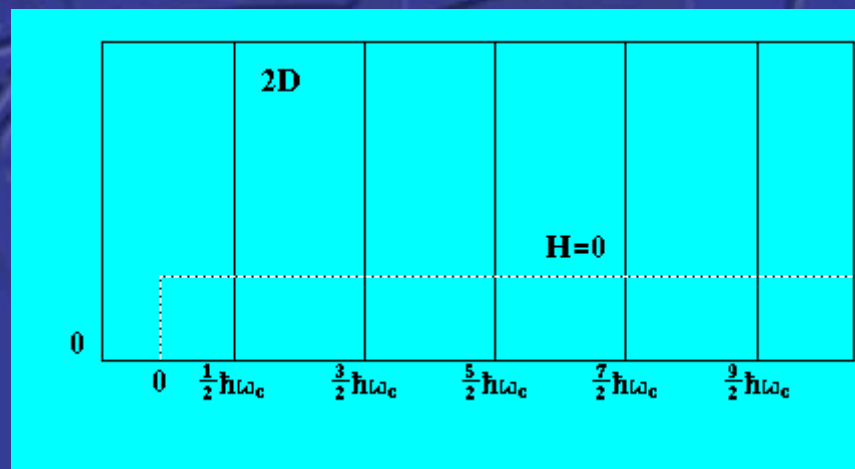


$$p = \Delta A \frac{1}{\Delta \mathbf{k}} = \frac{2\pi e B}{\hbar} \left( \frac{L}{2\pi} \right)^2 = \frac{eB}{h} L^2 = \frac{eB}{h} \text{单位面积}$$

$$\begin{aligned} \Delta A &= \pi \Delta (k_x^2 + k_y^2) = \frac{2\pi m \Delta E}{\hbar^2} \\ &= \frac{2\pi m \hbar \omega_c}{\hbar^2} = \frac{2\pi e B}{\hbar} \end{aligned}$$

# 磁场下的二维电子气态密度

- 磁场垂直于二维面
- 如果是二维电子气，那么加磁场垂直于二维电子所在面，能量态密度也是量子化的
- 能量态密度是  $\delta$  函数形式， $\delta$  函数乘以简并度
  - \* 注意，朗道能级间隔与B有关！



# 霍尔电阻 $j$ 参数的物理意义：填充因子

- 看电子密度为 $n$ 时对Landau能级密度 $p$ 的填充！填充因子为


$$j = \frac{n}{p} = \frac{nh}{eB}$$

- 将 $n$ 代入霍尔电阻公式( $I_x$ 纵向电流 $V_H$ 霍尔电压)

$$\rho_H = \frac{V_H}{I_x} = \frac{V_H / w}{I_x / w} = \frac{E_H}{J_x B} B = R_H B = -\frac{B}{ne} = -\frac{1}{j} \frac{h}{e^2}$$

- 霍尔电阻中的 $j$ 参数的物理意义就是填充因子，即电子填充到哪个Landau能级

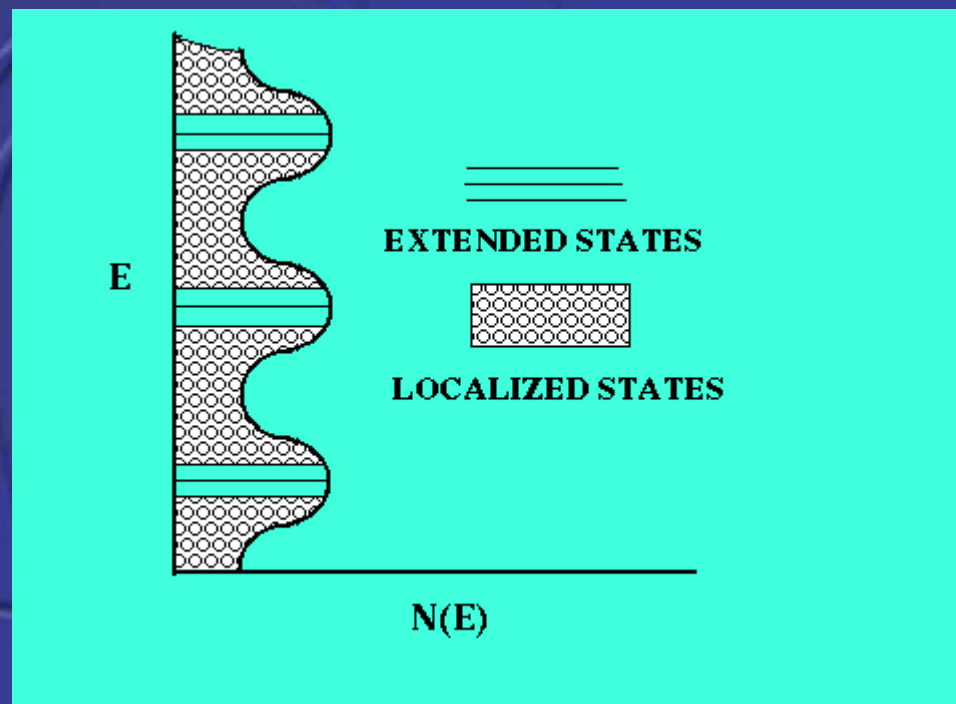


The logo of the Surface Physics Lab at Fudan University is a circular seal. It features the Chinese characters '表面物理' (Surface Physics) at the top and '复旦大学' (Fudan University) in the center. The English text 'SURFACE LAB' and 'FUDAN UNIV.' is also present around the inner circle.

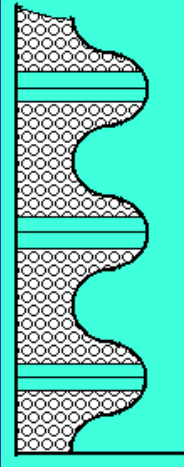
思考：能不能用金属来观察量子霍尔效应？

## 4、整数量子霍尔效应的解释

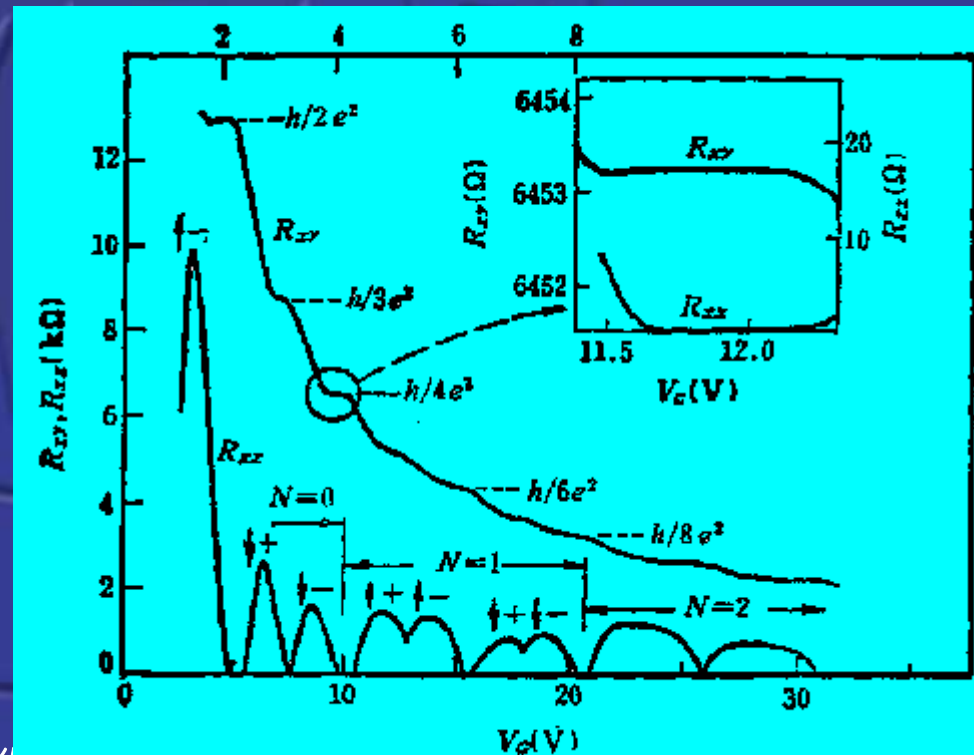
- 如果材料有缺陷，会使**Landau**能级的简并度降低，Landau能级展宽成有限宽度的局域态
- **扩展态**：传导电子态 → Landau能级态
- **局域态**：被束缚在某区域电子态 → 束缚在缺陷附近，如芯电子被束缚在原子核周围
- 霍尔电阻的平台就是由这些局域态产生



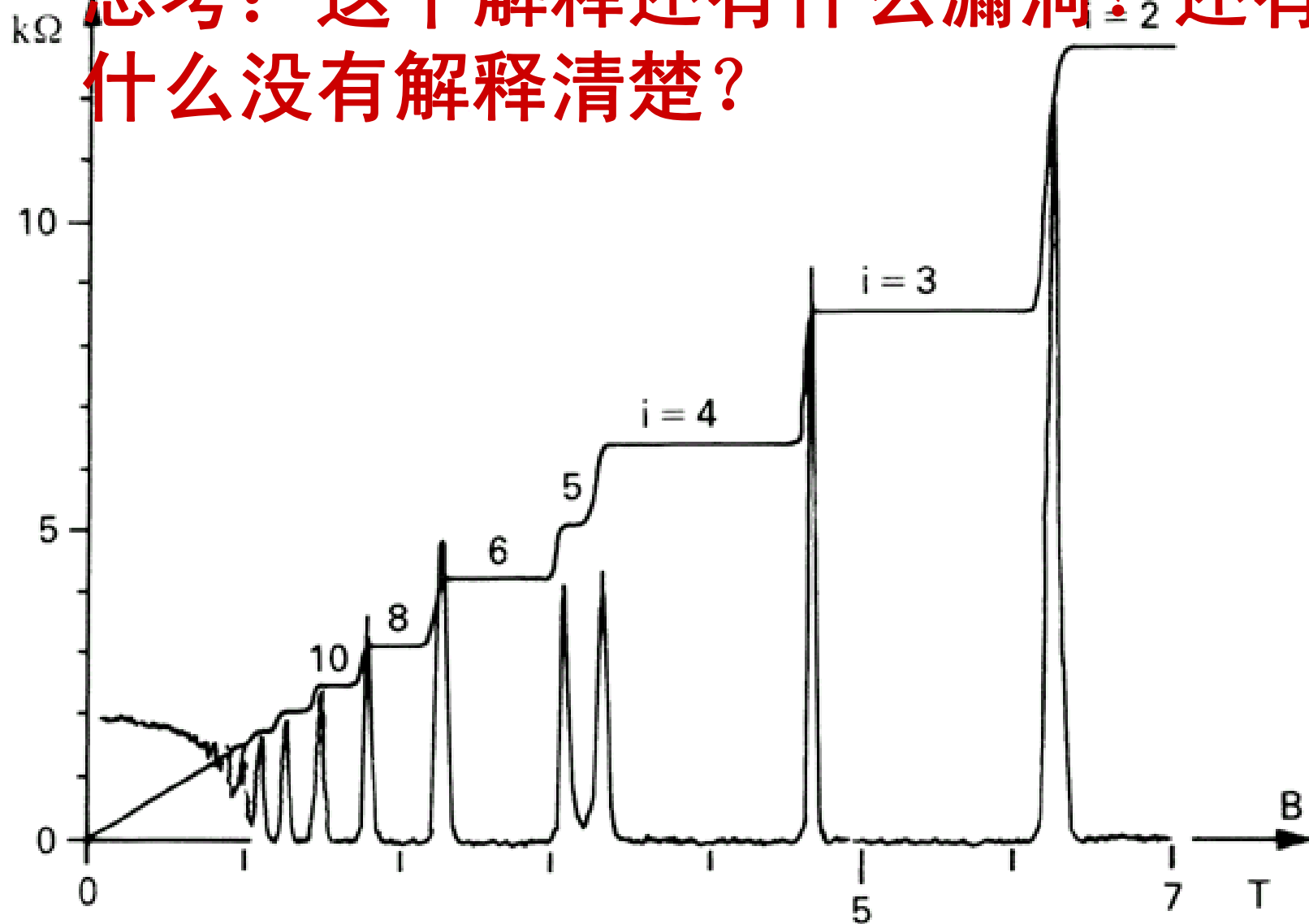
# 整数量子霍尔效应的单电子图象解释



- 固定B, 使栅电压变化( $E_F$ 变化), 相当于 $E_F$ 在向上移动。 $E_F$ 在能隙(局域态)中时, 这些电子对电流没有贡献, 电流不变, 霍尔电阻不变, 形成霍尔电阻平台;
- 当 $E_F$ 上升至Landau能级时, 这是扩展态, 对电流有贡献, 电流突然增大, 所以, 对应霍尔电阻突然增加; 跃上一个台阶



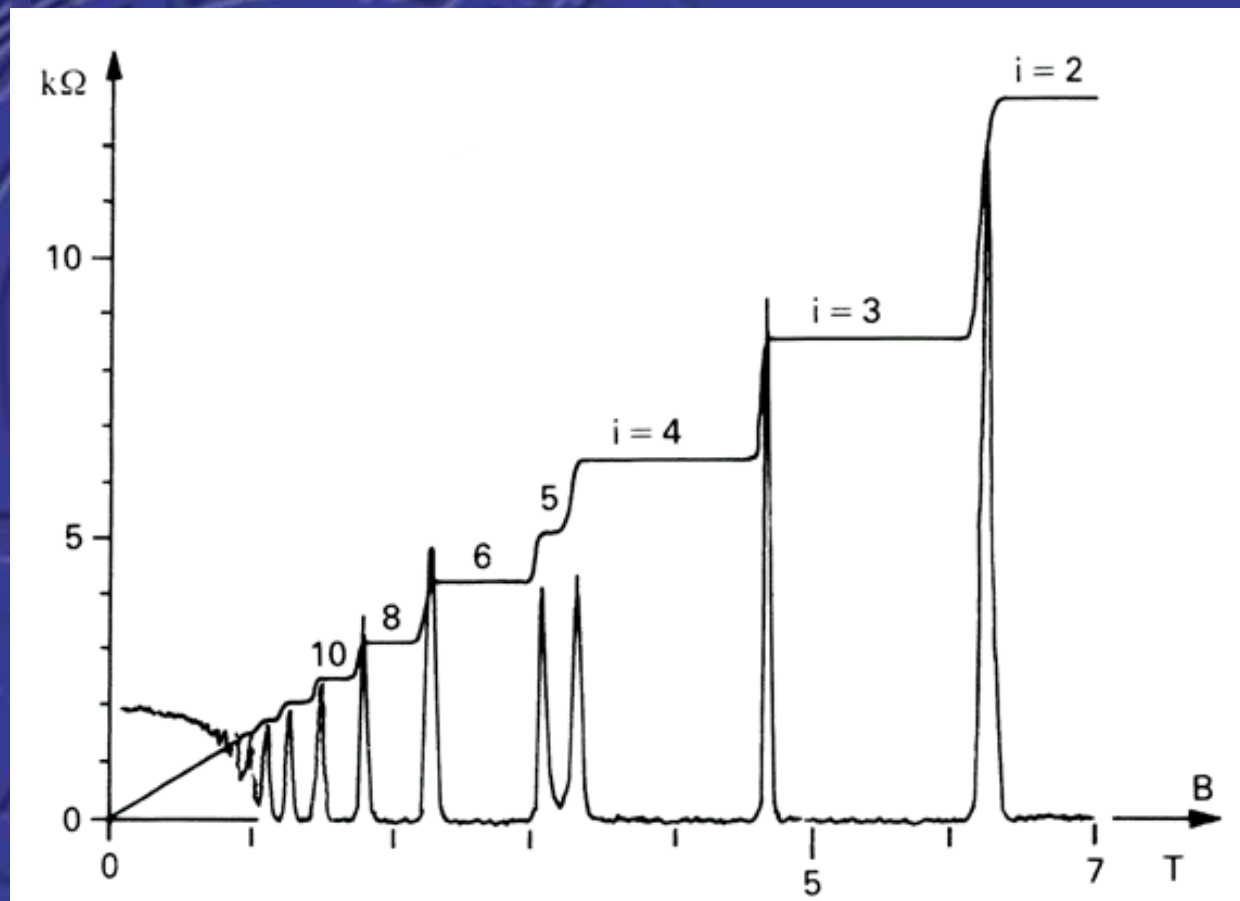
思考：这个解释还有什么漏洞？还有什么没有解释清楚？





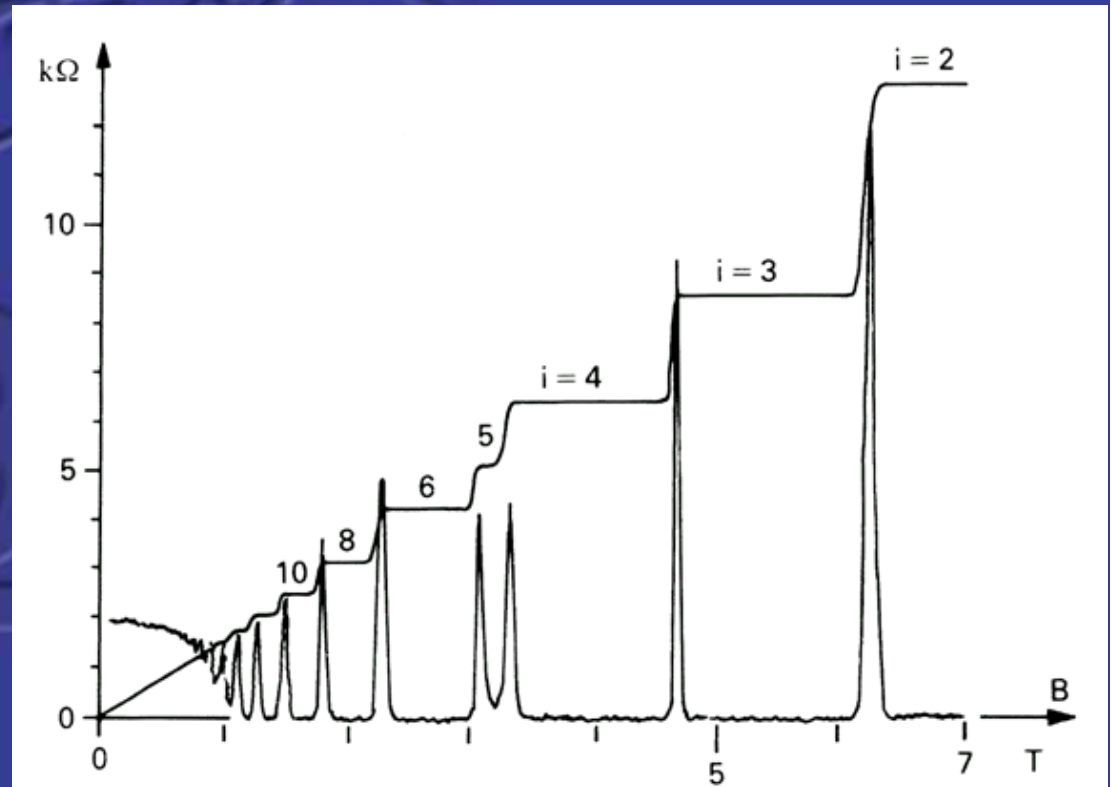
# 似乎已经自圆其说地解释了IQH! ?

- 填充时，局域态对电流没有贡献，因此对应电阻平台，只有填充到更高级的朗道能级，才进入下一个平台



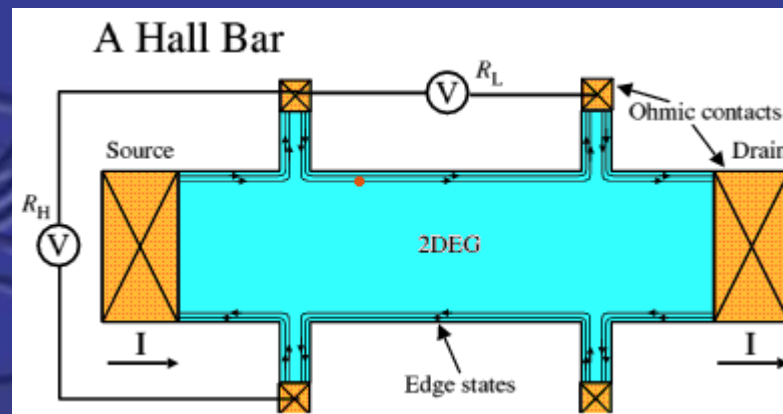
## 尚有两个问题没有解释！

1. 对应霍尔电阻平台为什么纵向电阻会变成零？
  2. Landau能级展宽后，霍尔电阻平台数值是否还正好等于实验值？
- 较新的固体教材如涉量子霍尔效应就到此为止了。不能用前面的图象解释，那是单粒子图象



## 5、分数量子霍尔效应

- R. B. Laughlin (T)  
D. C. Tsui (E, 崔琦)  
H. L. Stoermer (E)
- 1982年, 0.5K, 20T,  $10^{11}/\text{cm}^2$ , 发现分数量子霍尔效应,  
PRL48, 1559 (1982)
- 同年由Laughlin对此进行理论解释, 论文发表在 PRL50, 1395 (1983)
- 1998年上述三人共同分享诺贝尔物理奖
  - \* 实验论文发表是三个人署名, 还有A. C. Gossard, 主要提供样品



$$\rho_H = -\frac{1}{j} \frac{h}{e^2}, \quad j \text{ 为分数}$$

# Anomalous Quantum Hall Effect: An Incompressible Quantum Fluid with Fractionally Charged Excitations

R. B. Laughlin

*Lawrence Livermore National Laboratory, University of California, Livermore, California 94550*

(Received 22 February 1983)

This Letter presents variational ground-state and excited-state wave functions which describe the condensation of a two-dimensional electron gas into a new state of matter.

PACS numbers: 71.45.Nt, 72.20.My, 73.40.Lq

The  $\nu = \frac{1}{3}$  effect, recently discovered by Tsui, Störmer, and Gossard,<sup>1</sup> results from the condensation of the two-dimensional electron gas in a GaAs-Ga<sub>x</sub>Al<sub>1-x</sub>As heterostructure into a new type of collective ground state. Important experimental facts are the following: (1) The electrons con-

sistent with all the experimental facts and explain the effect. The ground state is a new state of matter, a quantum fluid the elementary excitations of which, the quasielectrons and quasiholes, are fractionally charged. I have verified the correctness of these wave functions for the

# Two-Dimensional Magnetotransport in the Extreme Quantum Limit

D. C. Tsui,<sup>(a), (b)</sup> H. L. Stormer,<sup>(a)</sup> and A. C. Gossard

*Bell Laboratories, Murray Hill, New Jersey 07974*

(Received 5 March 1982)

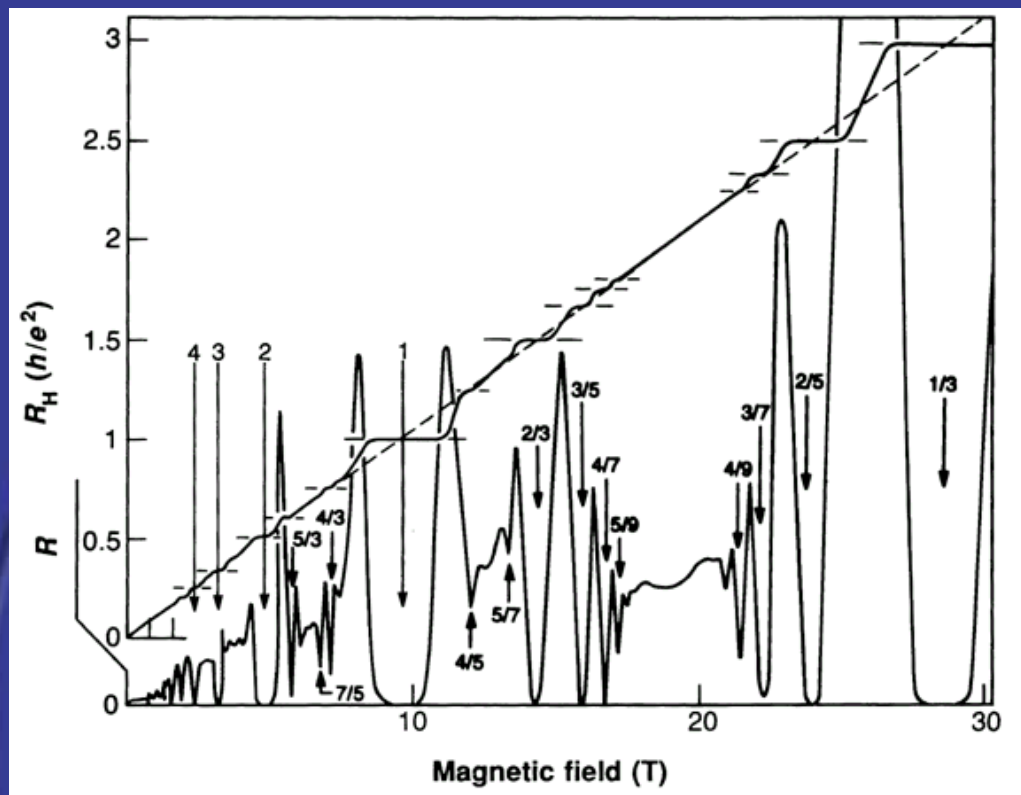
A quantized Hall plateau of  $\rho_{xy} = 3k/e^2$ , accompanied by a minimum in  $\rho_{xx}$ , was observed at  $T < 5$  K in magnetotransport of high-mobility, two-dimensional electrons, when the lowest-energy, spin-polarized Landau level is  $\frac{1}{3}$  filled. The formation of a Wigner solid or charge-density-wave state with triangular symmetry is suggested as a possible explanation.

PACS numbers: 72.20.My, 71.45.-d, 73.40.Lq, 73.60.Fw

In the presence of an intense perpendicular magnetic field  $B$ , a system of two-dimensional (2D) electrons is expected to form a Wigner solid<sup>1,2</sup> at low temperatures ( $T$ ). In the infinite- $B$

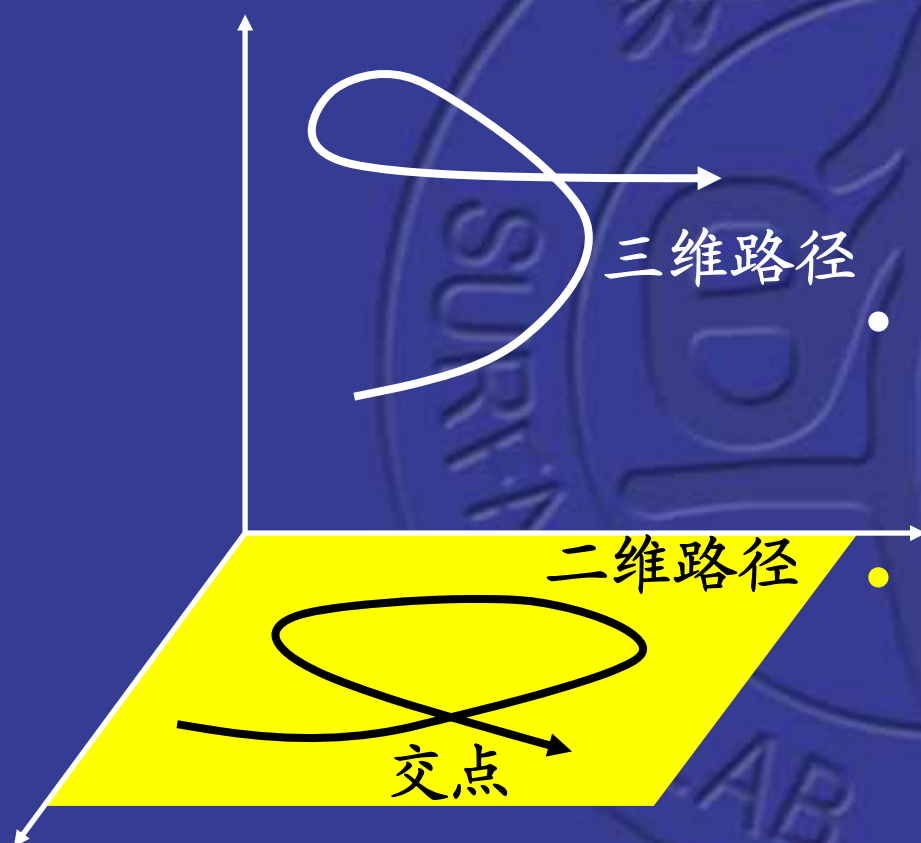
shows a dip at  $\nu = \frac{1}{3}$ , which becomes stronger at lower  $T$ . For  $\nu < \frac{1}{3}$ ,  $\rho_{xx}$  follows an approximately exponential increase with inverse  $T$ . The Hall resistivity  $\rho_{xy}$  on the other hand, approaches a





- 对于整数量子霍尔效应的单粒子图象不再适用：实验条件指明是强关联！
- 新稳定态好象在电子填充Landau能级到一个分数时产生！而且分母都是奇数！ Landau能级中间还有新的态，态与态之间有能隙？

## 6、换个图象看量子霍尔效应



- 二维路径绕一圈必有一点交点，三维则不然

\* 考虑到电子有波动性时这有很大不同

- 电子波在封闭路径上必须形成驻波才有稳定态，三维没有此约束条件

- **Landau能级的物理原因！**

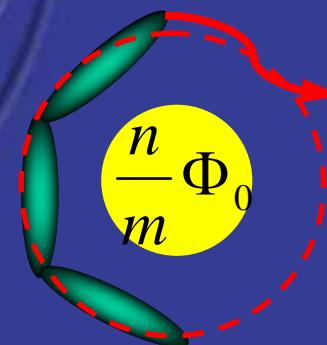
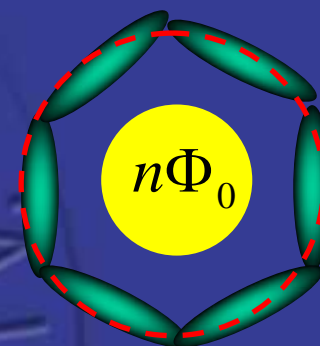
\* 形成本征值问题，即只有特定的波长才能满足驻波条件。这个条件决定2D电子在磁场中能量是不连续的。

# 磁通量子

- 用磁通量子作磁的基本单位

$$\Phi_0 = \frac{h}{e}$$

- 由前面的分析可以知道：一个被束缚在二维空间运动的电子必须包围整数倍磁通量子时才是稳定的，即绕磁通量子一圈，位相变化必须正好是 $2\pi$ 的整数倍，这样形成的驻波才是稳定的，因为二维时路径一定是闭合的，不闭合就是发散的
- 否则，分数的磁通不能使相位等于 $2\pi$ 的整数倍，因而不稳定的



# 为何引入磁通量子？

$$p = \frac{e}{h} B = \frac{B}{\Phi_0}$$

- Landau能级的简并度等于磁场以磁通量子为单位的数目！
  - \* 就是单位面积内有多少个磁通量子： $p$ =磁通密度！
- 这样，填充因子 $j$ 就等于二维电子气的电子数目与磁通量子数目的比
  - \* 即 $j$ =电子密度/磁通密度
  - \*  $j$ 就是每个磁通量子分配到的电子数目
  - \* 电子气中电子数固定，磁场越大， $j$ 就越小；磁场固定，电子数越大， $j$ 就越大

$$j = \frac{n}{p} = \frac{n}{eB/h}$$

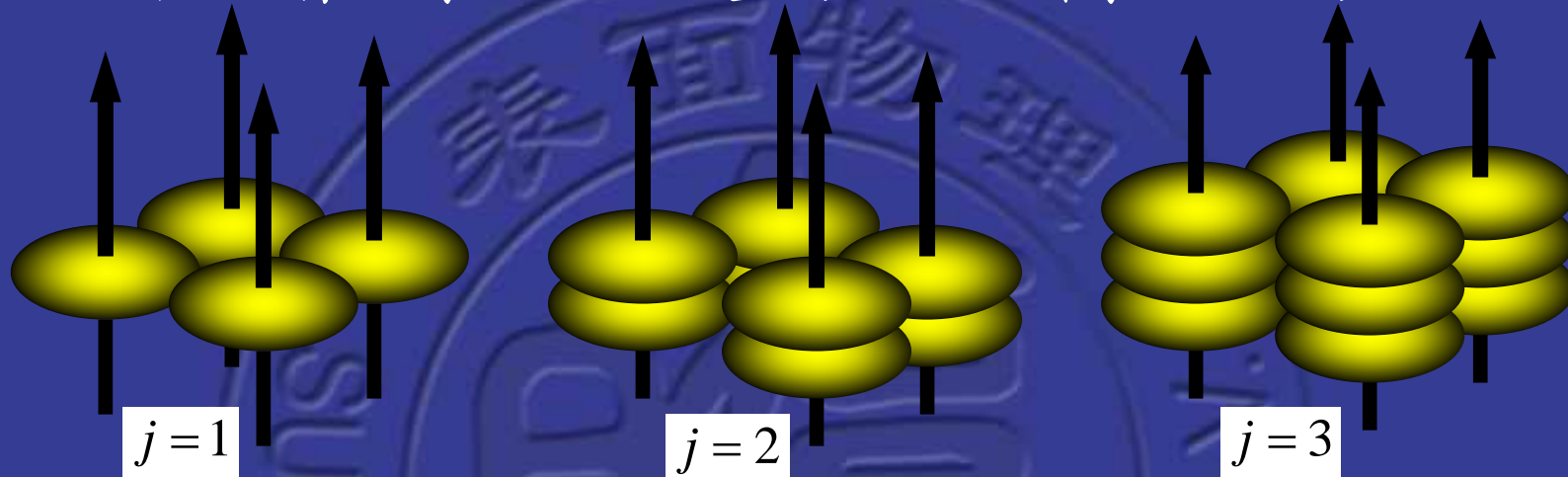


The logo of the Surface Physics Lab at Fudan University is a circular emblem. It features the Chinese characters '表面物理' (Surface Physics) at the top and 'FUDAN UNIVERSITY' at the bottom. In the center, there is a stylized graphic of a person or a tree. The text 'SURFACE LAB' is also visible within the circle.

电的基本单位是 $e$ ，如果考虑电磁场规范变化特性，磁的基本单位该是什么？



- 如果用箭头表示磁通量子，圆饼表示电子



- 磁通量子上的几个电子，能级是不连续的
- 磁通量子上串几个电子，就是被填充到哪个 Landau 能级
- 磁场强度小的时候，电子数目大于磁场的磁通数目，电子平均分在每个磁通量子上，所以每个磁通量子总有几个电子与之配对，填充因子是整数

# 电子-磁通量子串形成量子超流体

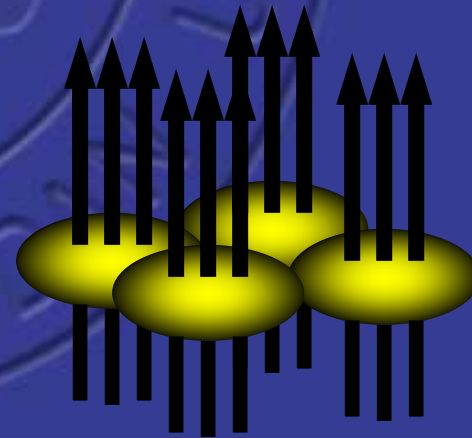
- $j$ 为整数的电子-磁通量子串，作为一种量子，相互排斥，形成一种不可压缩的量子流体
- **量子超流体没有散射**：量子超流体就好象是一挤满粒子的非常狭窄的通道，所有粒子只能一起行动，要么都往前，要么都往后走。因此就根本**没有碰撞和散射——没有阻尼机制**
- 没有同样配对的电子和磁通形成准粒子或缺陷，受其他超流体排斥，是局域的
- 这种准粒子或缺陷只有积累到一定程度，才会破坏超流体状态

# 量子超流体对IQHE的解释

- 前面遗留的两个问题现在可以解释
- 基态和激发态之间存在能隙，Landau能级间隔
- 在极低温下，超流体粒子不能获足够的能量跃迁到激发态，但低能态又全被占满，无处可去，挤在一起，形成所谓的超流，不会受散射，故沿栅电场方向电阻 $R_{xx}=0$ ，对应 $\rho_H$ 平台
- 磁场增加，破坏配对，开始破坏超流态，达到一定程度后，不再有超流态性质，霍尔电阻平台被破坏
- $j$ 为整数时，这幅图象比较简单
  - \* 纵向电阻为零得到了解释
  - \* 平台的数值与von Klitzing常数的关系也得到了解释

## 7、分数量子霍尔效应的解释

- 当 $j$ 为分数，怎么解释呢？
- 强磁场，低载流子浓度才能观察到！从磁通的观点这是由于电子密度小于磁通密度，如此，填充因子是分数。Landau能级被占了比如 $1/3$ ，还有 $2/3$ 空着
- 先看 $j$ 为分数时的磁通量子数和电子串图
- 这时，可以看成几个磁通穿一个电子，这里 $j=1/3$





# 不可压缩量子超流体

- 这样的圆饼箭头串形成不可压缩量子流体，称为量子超流体
- 这种量子超流体的状态与填充因子 $j$ 有关
- 压缩一个系统，等于改变电子密度，改变 $j$ 。当面积和磁场都固定时，这样的改变都要改变能量，有空隙的存在

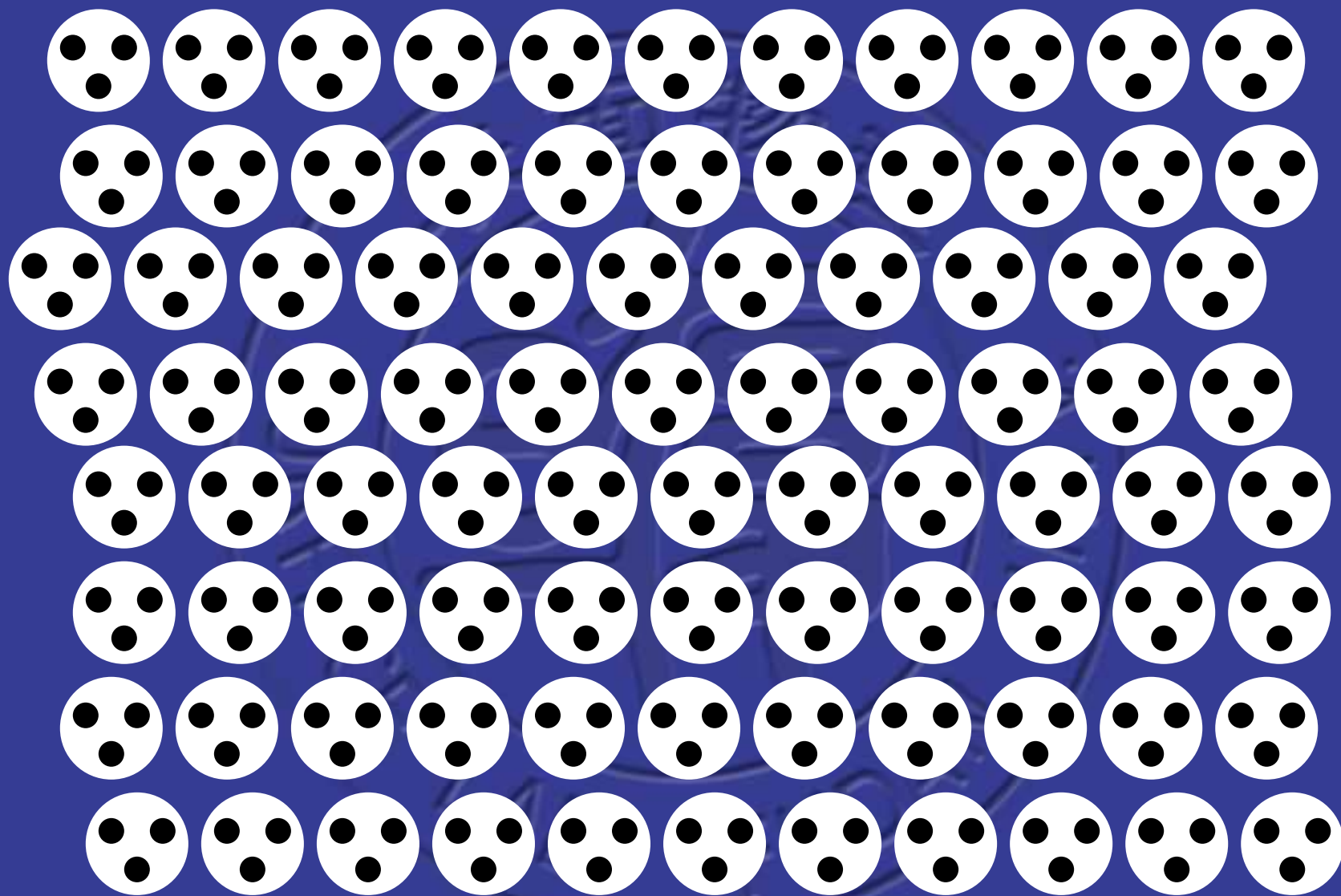


# 量子超流体状态在外场下如何变化？

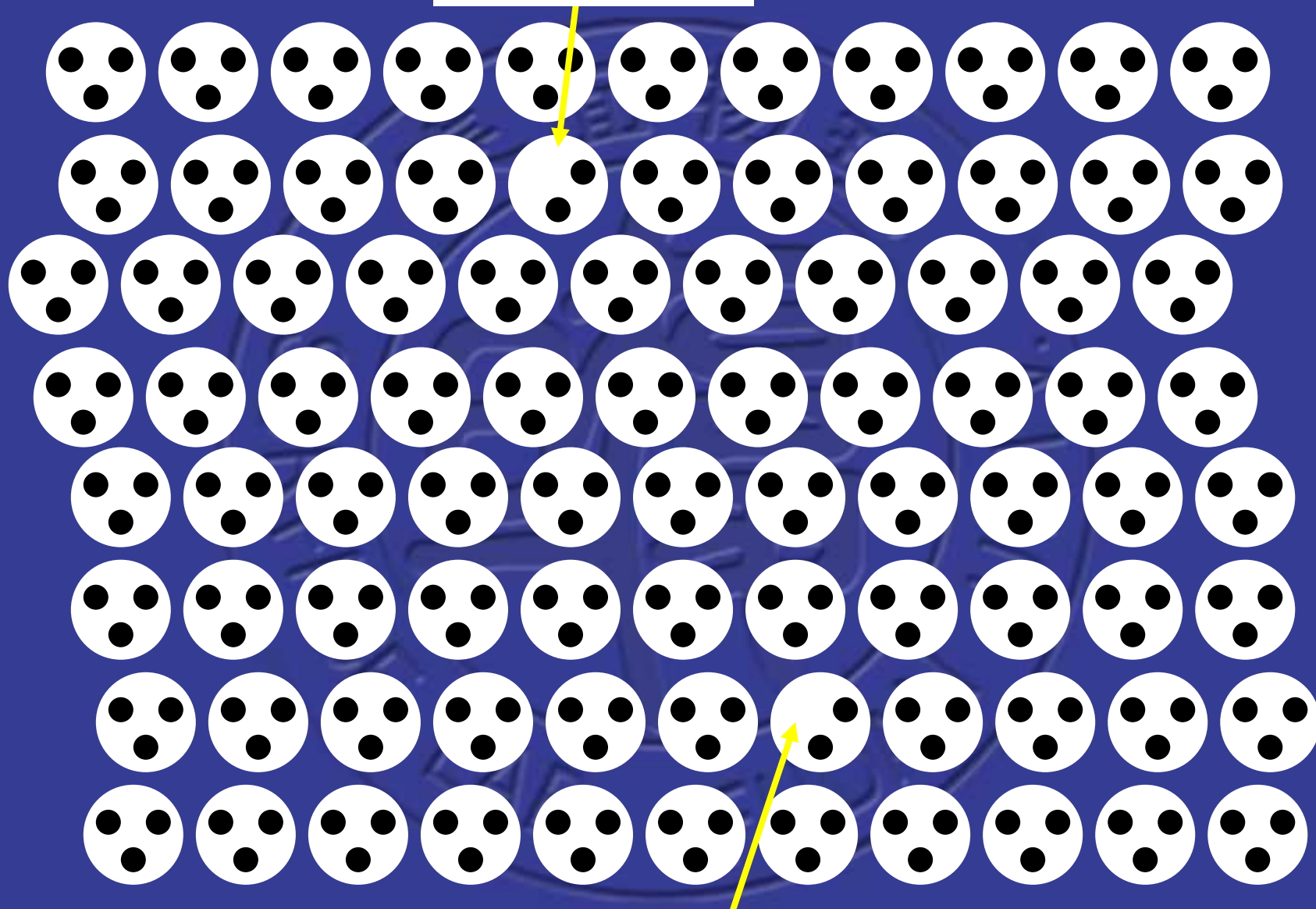
- 需要解释量子超流体如何变化。显然，填充因子 $j$ 是一个表示超流体状态的量。**因为**，这时所有超流子都是 $j$ 。如 $j$ 改变，才使超流体发生变化，观察的霍尔电阻才会发生改变
- 但当磁场增加或减少，磁通量变而电子数不变时，不会立即改变整个量子超流体的状态。这时，会出现有些圆饼（电子）少一个箭头（磁通），或有些箭头（磁通）没有圆饼（电子）这样的缺陷。这样的缺陷积累多了，达到一定程度，整个系统就不再是量子超流体，纵向电阻不为零，霍尔电阻发生改变
- 栅电压变化时，改变电子数，结果也一样

# 为什么量子超流体中有缺陷？

- 并不总是正好所有的电子分配到同样的磁通
  - \* 当正好都是三个磁通量子配一个电子，而有一个电子只分配到两个磁通量子，这就是一个 $j=1/3$ 态缺陷
  - \* 当正好都是三个磁通量子配一个电子，可能只有一个磁通量子没有任何电子，这也是一个 $j=1/3$ 态缺陷
- 准粒子
  - \* 由于缺陷的能量稍高，附近的超流体会排斥它使它孤立出来，其余部分仍保留超流体性质
  - \* 孤立出来的缺陷也可以流动，有自己的动量，能量，称为准粒子，占据准粒子能级
  - \* 准粒子带电量这样考虑：对少一个磁通量子而言，相当于多了 $-1/3e$ 的电量，而对多一个磁通量子而言，则少了 $1/3e$ 的电量，这就是准粒子带有的电量

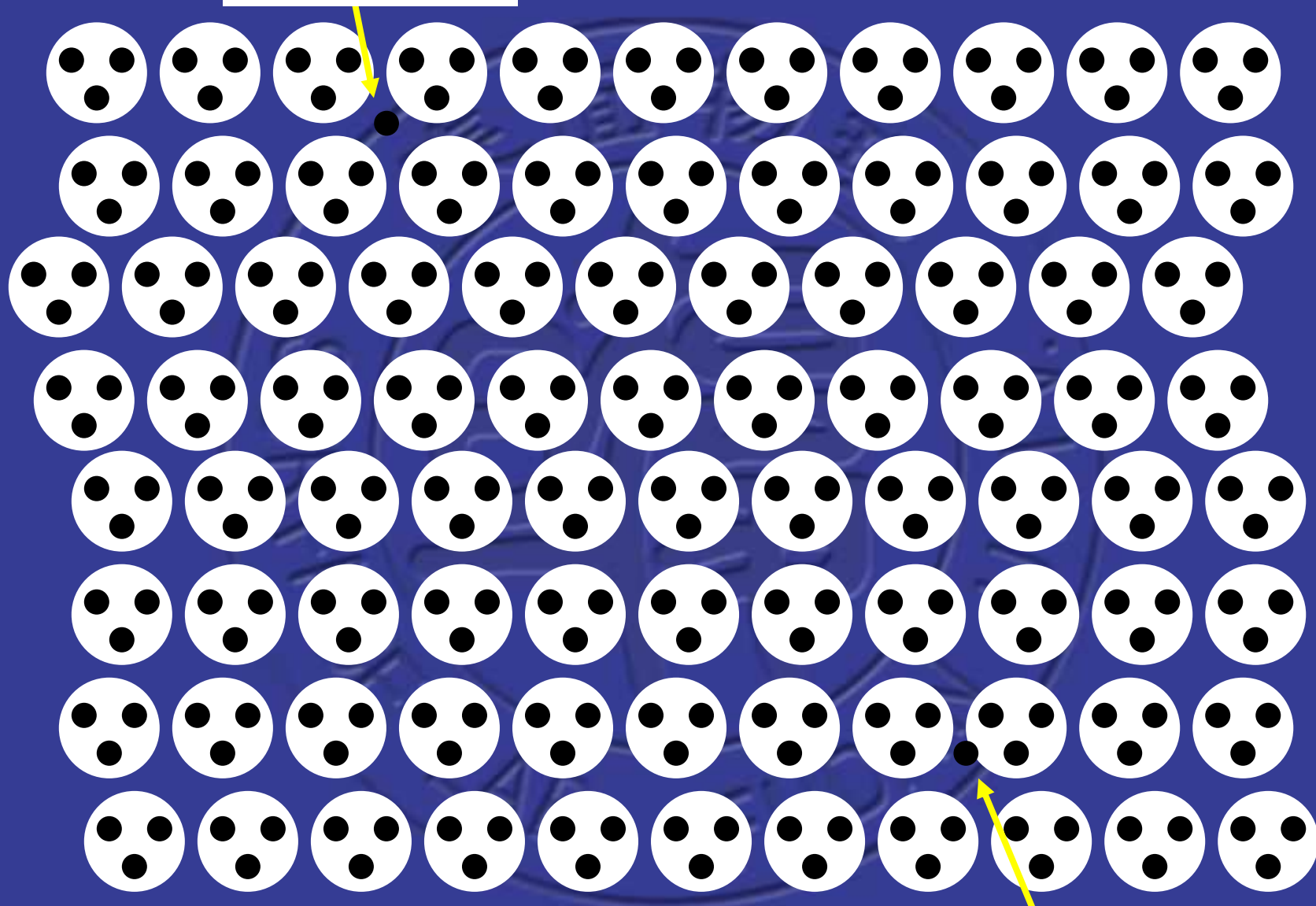


$-\frac{e}{3}$  电荷的准粒子





$\frac{e}{3}$  电荷的准空穴





# 准粒子或缺陷如何运动？

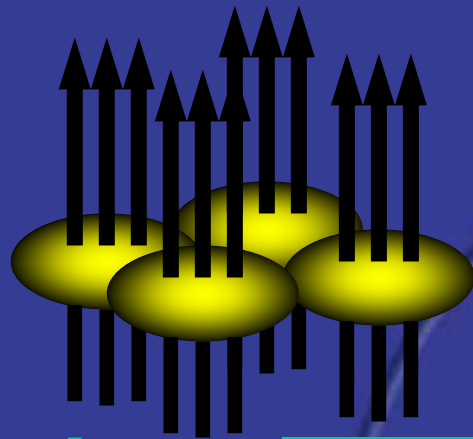
- 准粒子不是超流体，准粒子之间会有相互作用，会受到散射
  - \* 准粒子受散射，就会产生电阻
  - \* 改变外场，一些正常粒子被激发成准粒子，有能隙
- 问：为何准粒子少时，觉察不出来电阻变化？
- 准粒子能级也有**扩展态和局域态**！
  - \* 局域态不参与导电，而扩展态可以到处流动
  - \* 准粒子数量少时，先占据局域态，但多了后，就填到扩展态，参与导电

# 准粒子如何积累改变超流体状态？

- 准粒子被其他完整的**圆饼箭头串(粒子)**排斥
  - \* 排斥势能起伏，准粒子局域在势能的洼地
  - \* 这时，系统仍然是超流体，因此 $R_{xx}=0$ ，对应 $\rho_H$ 平台
- 随外场变化，准粒子开始增加，正常粒子减少，直至洼地全被填满，洼地开始连通
  - \* 超流态被破坏
  - \*  $R_{xx}$ 开始变， $\rho_H$ 平台消失

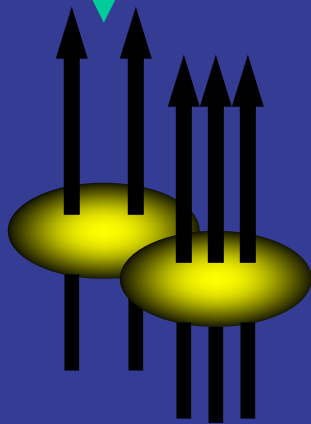


图中的带箭头球都是准粒子，量子超流体内其他正常粒子形成起伏的势

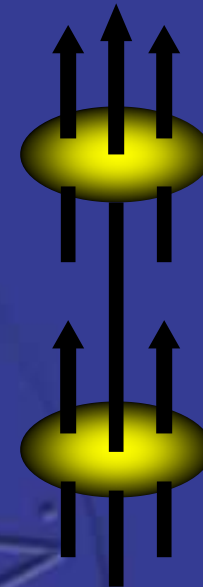


$$j = \frac{1}{3}$$

当磁场持续减少，小于 $j=1/3$ 很多时，就产生很多准粒子，准粒子是两个磁通量子穿一个电子



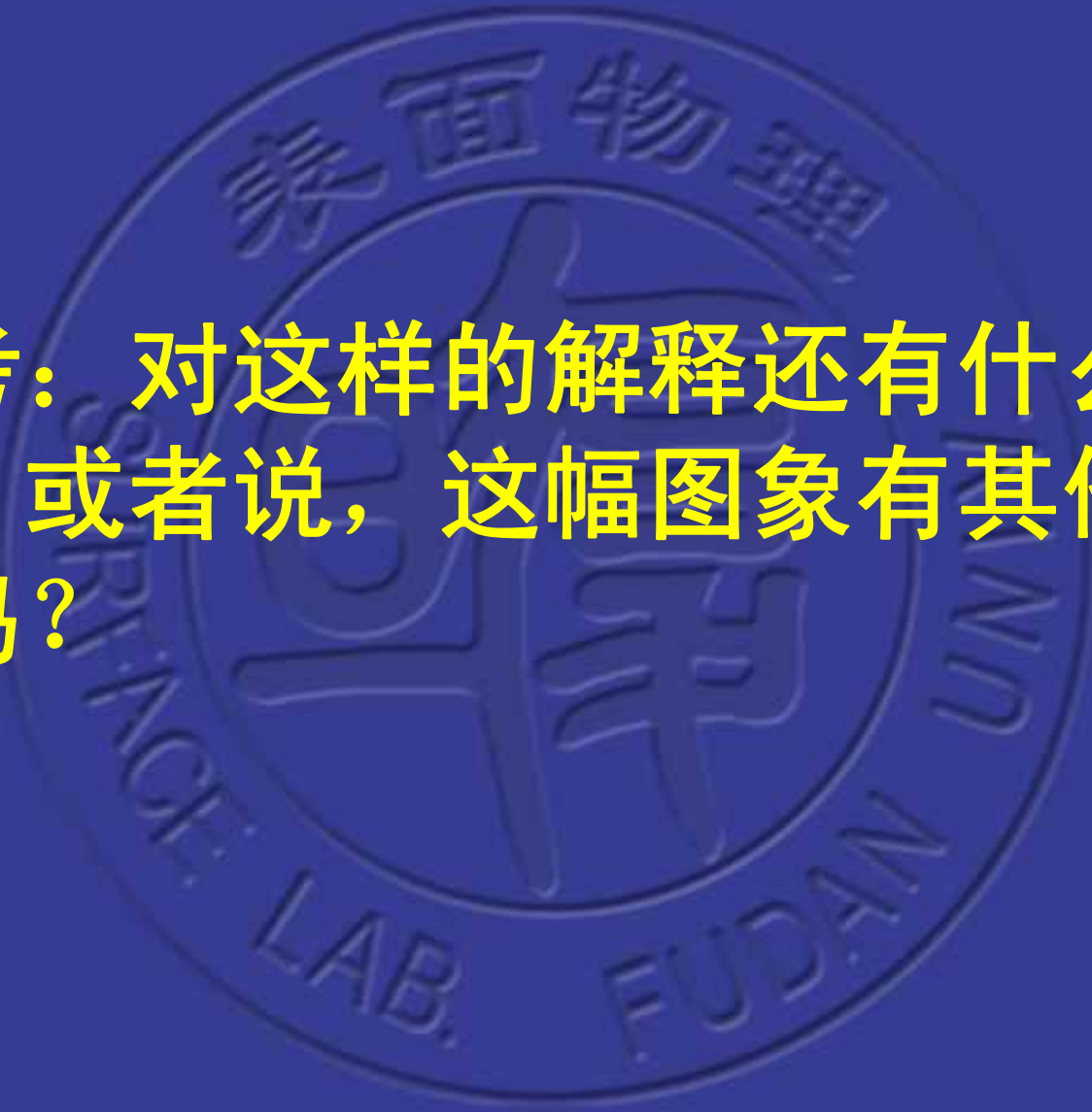
如果这样的准粒子多到正好每两个电子就有一个准粒子，即一个准粒子配一个正常粒子，两个电子就有五个磁通量子，这就形成新的 $j=2/5$ 态



$$j = \frac{2}{5}$$

- 如果外场继续减少，这样的准粒子越聚越多，直到所有的电子和磁通再次达成新的配对，就会发育成新的不可压缩量子超流体状态—— $j=2/5$ 态，又开始建立新的霍尔电阻平台，纵向电阻又为零
  - \*  $j=2/5$ 的态称为 $j=1/3$ 的子态； $j=1/3$ 的态称为 $j=2/5$ 的母态
- 如果外场继续小下去， $j=2/5$ 还会生出新的准粒子，电阻增加，电流变化。积累到一定程度，再形成子态的子态的超流体，再建立霍尔电阻平台。但平台会越来越模糊，一代不如一代。直到磁通量子数和电子数之比为整数，建立整数平台，然后循环——这样就解释了FQHE



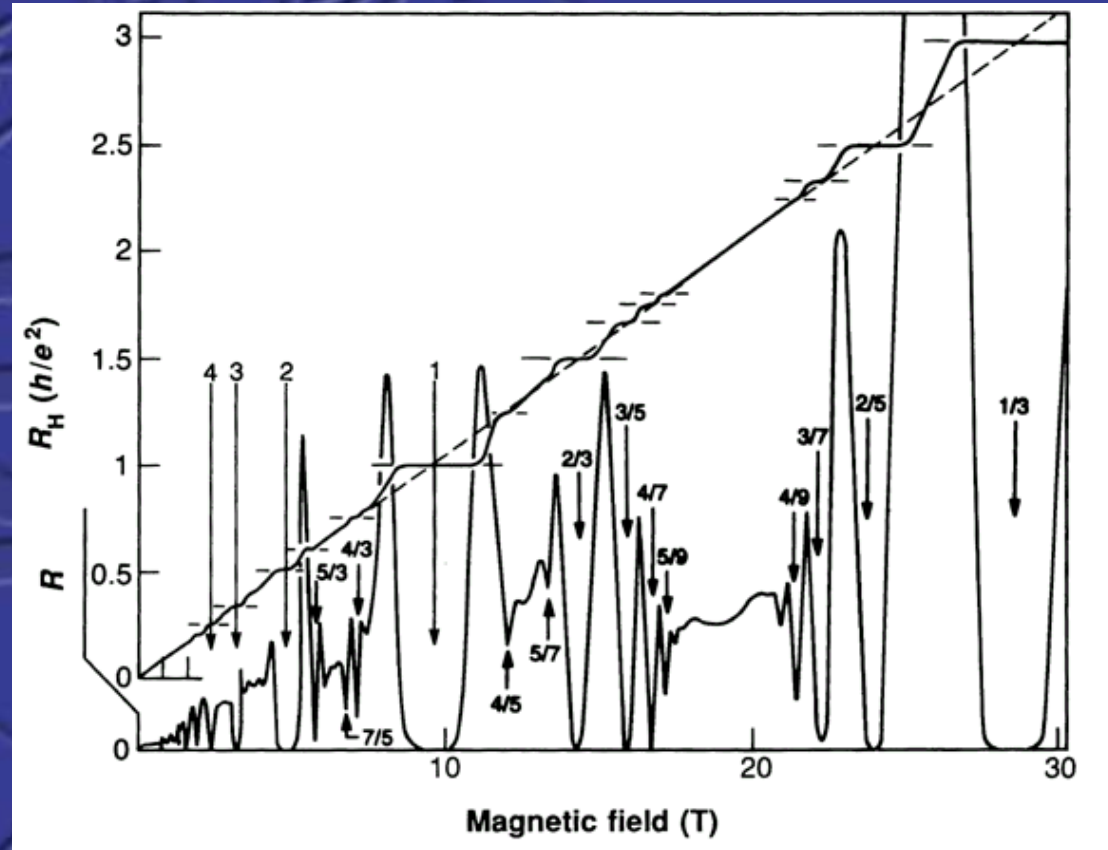
The background of the slide features a large, faint, circular logo of the Fudan University Physics Laboratory. The logo contains the Chinese characters '物理' (Physics) in the center, with '表面物理' (Surface Physics) at the top and 'FUDAN UNIVERSITY PHYSICS LABORATORY' around the bottom edge.

思考：对这样的解释还有什么疑问？或者说，这幅图象有其他证据吗？



# 是一种量子超流体的凝聚现象

- 看实验，从中能发现什么？
- 整数1平台以前的分数平台出现在：  
 $1/3$ ,  $2/5$ ,  $3/7$ ,  
 $4/9$ ,  $5/9$ ,  $4/7$ ,  
 $3/5$ ,  $2/3$ ,  $5/7$ ,  
 $4/5$ , ...,
- 为什么没有 $1/2$ ？
- 这预示什么？能不能有所启发，从这里找证据？



# 统计特性的转换证明图象的合理性！

- 看电子-磁通量子作为一整体的统计性质转换
  - \* 磁通和电子串在一起是费米子或玻色子？
- 看 $j=1$ 的两个电子-磁通量子，将它们交换位置
  - \* 相当于一个电子-磁通量子绕另一个固定的走半圈  
% 一个电子绕一个磁通量子走半圈有  $\pi$  相位差， $-1$  的相因子。加上电子交换本身一个 $-1$ ，这两个电子-磁通量子交换不变号，是玻色子！
- 同样，看 $j=1/2$ 的两个电子-磁通量子，
  - \* 等于在 $j=1$ 上再加了一个磁通，即再增加一个 $-1$ ，这样三个 $-1$ 的相因子相乘，可知 $j=1/2$ 还是费米子！
- 这样 $j=1/2$ 的霍尔电阻平台不出现是很正常的
  - \* 因为费米子不能占据同一状态——辅助的证据！

# 量子约束导致另类统计性质

- $j=1/3$  又是玻色子, ...
- 这样, 这种约束产生了一个很有趣的现象
  - \* 处于强磁场约束下的电子, 结合磁通产生的电子-磁通量子, 可以改变电子的统计特性?!
  - \* 电子-磁通量子可以变成玻色子, 也可再变回费米子
- 问: 两带分数电荷的准粒子交换位置会怎样?
- 结果是相因子改变既不是1, 也不是-1, 而是一个复数  $=e^{i\theta}$ !
  - \* 因此它既不是玻色子, 也不是费米子, 而被称为任意子(**anyon**), 它的统计可以称为分数统计
- PRL63, 199 (1989), 证明电子-磁通量子存在

# 本讲小结：兼答本讲目的所提问题

- 量子霍尔效应明显地显示电子关联相互作用
- FQHE是电子的强关联现象的反映(IQHE的严格解释也需将它视作强关联)
  - \* 什么是关联？→每个磁通量子平均分配到分数个电子——即当电子间存在关联时，几个电子关联着一起分配到一个或几个磁通量子
- 电子-磁通量子形成不可压缩量子超流体
  - \* 显示霍尔电阻平台，粒子间无散射，纵向电阻为零
- 电子密度或磁通密度改变时，形成准粒子——超流体的缺陷
  - \* 准粒子积累直至完全破坏超流态，导致了整数和分数量子霍尔效应
  - \* 磁场下二维电子气体：超流(分数) $\leftrightarrow$ 电子(整数)



# 本讲引入新概念

- 电子关联
- 扩展态，局域态
- 填充因子
- 磁通量子
- 电子-磁通量子串
- 量子超流体
- 准粒子
- 准空穴



## 习题

5. 计算 $j=3/7$ 电子-磁通量子的交换性质，是费米子还是玻色子？试画出 $j=3/7$ 的电子-磁通量子的箭头圆饼串图，再作 $j=4/9$ 。

# 课堂讨论题

- 对理想气体，越稀薄越符合理想气体条件；但是对电子气，极限条件却要 $10^{11}/\text{cm}^2$ ，载流子密度高了后，反而观察不到？就是密度高了以后，反而变成经典Hall效应，满足自由电子气的独立电子近似？

