四、单极子场

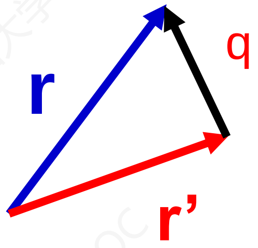
◆单极子的多极展开式——单极子场

任何电荷系统可以看成是一个单极子（如分子中的电场），它所形成的电场，在离电荷系统足够远的某点 $\vec{r}$ 处，可以看成是点多极子产生电场的迭加。

四、单极子场

距原点O为 $\vec{r}'$ 的点电荷q在场点 $\vec{r}$ 处产生的电势。

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}'|}$$



四、单极子场

$$|\vec{r}-\vec{r}'|=(r^2+r'^2-2rr'\cos\theta)^{1/2}=r\{1+[(\frac{r'}{r})^2-2\frac{r'}{r}\cos\theta]\}^{1/2}$$

当 $\frac{r'}{r}\le 0.414$ 有 $|(\frac{r'}{r})^2-\frac{2r'}{r}\cos\theta|\le 1$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}}=1-\frac{1}{2}x+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^2-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^3+\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}x^4+\ldots\ldots$$

四、单极子场

勒让德多项式 $P_n(\cos\vartheta)$：

对 $[(\frac{r'}{r})^2-\frac{2r'}{r}\cos\theta]$ 展开按 r′ 升幂排列

四、单极子场

$P_n(\cos\vartheta)$ 写成通式：

$$\varphi(\vec{r})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum\frac{qr'^n}{r^{n+1}}P_n(\cos\theta)$$

四、单极子场

n=0 $P_0 = 1$

n=1 $P_1 = \cos\vartheta$

n=2 $P_2 = \frac{3}{2}\cos^2\vartheta - \frac{1}{2}$

n=3 $P_3 = \frac{5}{2}\cos^3\vartheta - \frac{3}{2}\cos\vartheta$

四、单极子场

由 $\frac{1}{r}$ 幂级数表示:

$$\varphi(\vec{r})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}[\frac{K_0}{r}+\frac{K_1}{r^2}+\frac{K_2}{r^3}+\frac{K_3}{r^4}+\ldots\ldots]=\varphi_0+\varphi_1+\varphi_2+\varphi_3+\ldots\ldots$$

四、单极子场

第一项 $\varphi_0 = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q}{r}$　　　　$K_0 = q$

K_0表电量或单极矩，φ_0是位于原点O的单极子在 $\vec{r}$ 处的电势。

四、单极子场

第二项 $\varphi_1 = \dfrac{K_1}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$ $\qquad K_1 = qr'\cos\theta = \mu\cos\theta = \vec{\mu}\cdot\vec{r}_0$

K_1表偶极矩在 $\vec{r}$方向的分量，φ_1是位于原点O的点偶极子 $\vec{\mu}$ 在 $\vec{r}$处的电势。

四、单极子场

第三项 $\varphi_2 = \dfrac{K_2}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$ $K_2 = qr'^2(\dfrac{3}{2}\cos^2\vartheta - \dfrac{1}{2})$

K_2是与四极子的四极强度有关的量，φ_2是位于原点O的点四极子在 $\vec{r}$处形成的电势。

四、单极子场

第四项 $\phi_3 = \dfrac{K_3}{4\pi\varepsilon_0 r^4}$　　$K_3 = qr'^3\left(\dfrac{5}{2}\cos^3\theta - \dfrac{3}{2}\cos\vartheta\right)$

K_3是与八极子的八极强度有关的量，φ_3是一个位于原点O的点八极子在场点$\vec{r}$处形成的电势，随r^4变化。

四、单极子场

点多极子阶数越高，高阶点多极子产生的电势越弱。（试解释下原因）

四、单极子场

当场点 r 远离原点，r >> r′，$\frac{1}{r}$ 的高次项可以忽略时，才可以把该电荷所建立的电场近似看成一个位于原点的点电荷电场。

$$\phi(\vec{r}) \approx \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r}$$

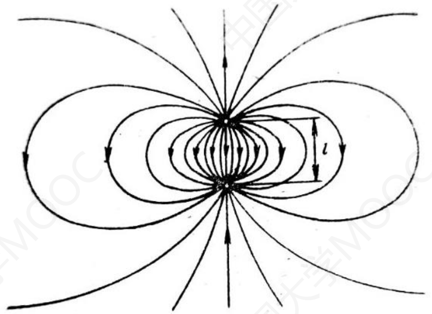
五、实际偶极子的电场

◆实际偶极子的多极展开式

——实际偶极子的电场

X J T U

五、实际偶极子的电场



一个在原点的实际偶极子是由两个单极子（+q）和（-q）构成，它在 $\vec{r}$ 处的电势由两个单极子电势的迭加。2r′ =l

五、实际偶极子的电场

$$\varphi_p = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum \frac{qr'^n}{r^{n+1}} P_n(\cos\theta)$$

$$\varphi_n = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum \frac{qr'^n}{r^{n+1}}[P_n \cos(\pi-\theta)] = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum \frac{qr'^n}{r^{n+1}} P_n(-\cos\theta)$$

五、实际偶极子的电场

$$\varphi = \varphi_p + \varphi_n = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_n \frac{qr'^n}{r^{n+1}}[P_n(\cos\theta) - P_n(-\cos\theta)]$$

对于n=2n′　偶数项　$P_{2n'}(\cos\theta) = P_{2n'}(-\cos\theta)$

对于n=2n′+1　奇数项　$P_{2n'+1}(-\cos\theta) = -P_{2n'+1}(\cos\theta)$

五、实际偶极子的电场

所以偶数项等于零，保持奇数项。

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{qr'^{2n+1}}{r^{2n+2}}P_{2n+1}(\cos\theta)$$

五、实际偶极子的电场

$$\varphi_0 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2qr'\cos\theta}{r^2}$$

点偶极子

$$\varphi_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2qr'^3}{r^4}(\frac{5}{2}\cos^3\theta - \frac{3}{2}\cos\vartheta)$$

点八极子

$$\varphi_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2qr'^5}{r^6}\frac{1}{8}(63\cos^5\theta - 70\cos^3\vartheta + 15\cos\theta)$$

点三十二极子

XJTU

五、实际偶极子的电场

其中点四极子、点十六极子不存在，已经抵消。

实际偶极子的电场不等于点偶极子电场，
而是无数个点多极子电场的迭加。

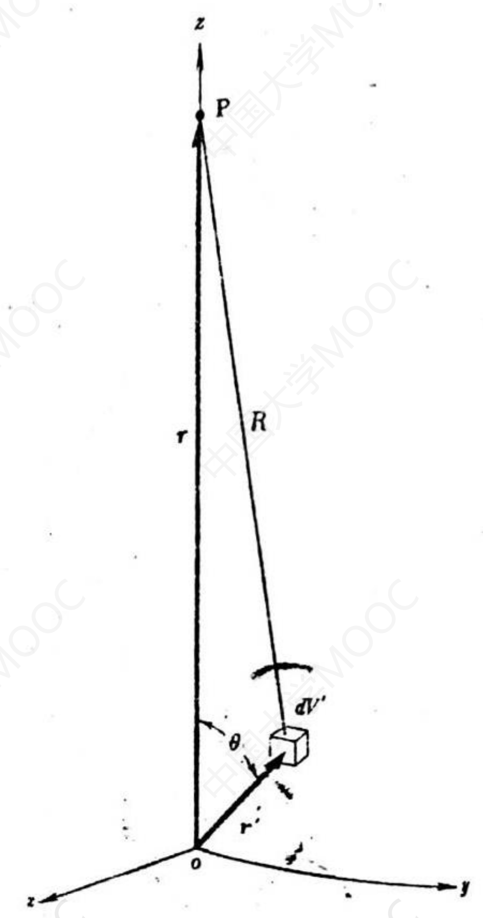
当 $r >> r'$ ，高次幂项可以忽略不计时，才是电偶极子场。

六、分子或离子中多极展开式

◆分子或离子中电荷系统多极展开式

把原子，分子或离子电荷系统作为场源，在自身以外很远的地方建立电场，电荷连续分布，其体密度 ρ 。

六、分子或离子中多极展开式



$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\rho dv'}{R}$$

$$R = (r^2 + r'^2 - 2rr'\cos\theta)^{1/2}$$

在场点很远处，（r >> r′ ）
作幂级数展开，r 在积分中是常数。

六、分子或离子中多极展开式

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{r}\int \rho dr' + \frac{1}{r^2}\int r'\cos\theta\rho dv' + \frac{1}{r^3}\int r'^2\left(\frac{3}{2}\cos^2\theta\right.\right.$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{K_0}{r} + \frac{K_1}{r^2} + \frac{K_2}{r^3} + ...\right)$$

$K_0 = \int \rho dv'$ 电荷系统的总电量或单极矩

六、分子或离子中多极展开式

对于分子，原子 $K_0 = 0$

对于离子 $K_0 \neq 0$

$$K_1 = \int r' \cos\theta \rho dv' = \int \cos\theta du \qquad du = \rho(r')r'dv'$$

六、分子或离子中多极展开式

相对于原点的偶极子电矩元，K_1是电荷系统的偶电矩在$\vec{r}$方向的分量。

$$K_2 = \frac{1}{r^3}\int r'^2\left(\frac{3}{2}\cos^2\theta - \frac{1}{2}\cos\theta\right)\rho(\vec{r}')dv'$$

是电荷系统四极子强度有关的量。

六、分子或离子中多极展开式

K_0、 K_1 、 K_2 只决定于电荷分布，于 $\vec{r}$ 无关。

结论：电荷分布的原子、分子或离子场源，在远离场源地方建立的电势主要取决于幂级数展开式中第一个系数不为零的项。

六、分子或离子中多极展开式

对于原子、分子来说，$K_0 = 0$ ，其电势主要取决于在原点的一个点偶极子建立的场 $\dfrac{K_1}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$ 项。

六、分子或离子中多极展开式

对于离子来说，$K_0 \neq 0$ ，不论K_1和K_2多大，在离原点足够远的地方，电势主要取决于原点的一个点电荷K_1，其电势 $\dfrac{K_0}{4\pi\varepsilon_0 r}$

六、分子或离子中多极展开式

对电介质来说，单极强度和偶极强度起主要作用，而其他电矩可以忽略。

如果分子是中性的，则只考虑偶极矩。

六、分子或离子中多极展开式

电四极矩与更高极矩，只出现于原子核有关的问题上，用来描述核内正电荷分布与球对称之间的偏离状况。

六、分子或离子中多极展开式

◆多极展开式在电介质极化理论中有重要意义

电介质极化理论中的一个重要问题是**计算自由电荷和极化产生的感应偶极子在空间共同建立的电场**才能估算作用在每一个极化粒子上的局域电场。

六、分子或离子中多极展开式

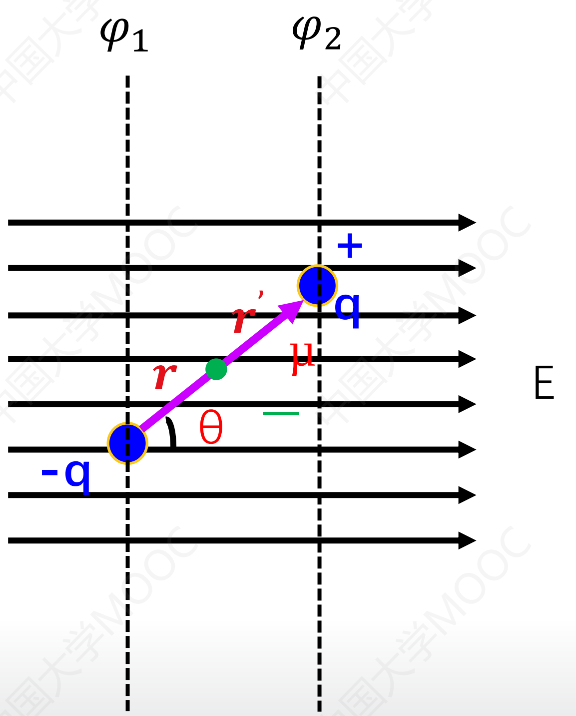
对于一个复杂电荷分布系统，不在原点的场源转换为一个统一在坐标原点处的多极子，某一点电场（即局域场）就是多极子电场的迭加。

六、分子或离子中多极展开式

偶极子放在外电场 $\vec{E}$ 中，$\vec{E}$ 平均，$\vec{\mu}=q\vec{l}$ ，受到的合力为零，

其力矩不为零，$\vec{M}=\vec{\mu}\times\vec{E}$

$$\varphi_2-\varphi_1=-\vec{E}\cdot\vec{l}$$



六、分子或离子中多极展开式

偶极子在电场中的势能

$$w_\mu = -q\varphi_1 + q\varphi_2 = q(\varphi_2 - \varphi_1) = -\vec{\mu}\cdot\vec{E}$$

力矩作用将偶极矩 $\vec{\mu}$ 转到与电场 $\vec{E}$ 一致的方向，使势能 w_μ 最低。

六、分子或离子中多极展开式

$\theta = 0$， $\vec{M} = 0$， $w_\mu = -\mu q$ 势能最低，稳定平衡

$\theta = \pi$， $\vec{M} = 0$， $w_\mu = \mu q$ 势能最高，不稳定平衡

一旦角 θ 有所偏离，偶极子受力矩作用离开该位置向势能低的方向转动。

六、分子或离子中多极展开式

当把偶极子从 $\theta = 0$ 转到任意 θ 时，需施外力矩，外力矩必须克服外电场转矩 M 而做功，外力矩作功为：

$$A = \int_0^\theta M d\theta = \int_0^\theta \mu E \sin\theta d\theta = \mu E(1 - \cos\theta)$$

外力矩作功转变为偶极子在电场中的势能。

六、分子或离子中多极展开式

同理当偶极子从 θ_1 转到 θ_2 时，
外力矩作功：

$$A = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \mu E \sin\theta d\theta = \mu E(\cos\theta_1 - \cos\theta_2)$$