

具有控制增量约束的无限时域模型预测控制算法的稳定性

于树友¹, 曲婷¹, 陈虹^{1,2}

1. 吉林大学控制科学与工程系, 长春 130025

2. 吉林大学汽车仿真与控制国家重点实验室, 长春 130025

E-mail: {shuyou, chenh}@jlu.edu.cn, quting11@mails.jlu.edu.cn

摘要: 在本文中我们讨论了具有控制增量约束的无限时域模型预测控制的值函数的性质以及系统的稳定性. 具有控制增量约束的无限时域模型预测控制的值函数沿着系统的轨迹渐近的递减, 并且在系统的平衡点处连续. 以系统的值函数作为一个候选的 Lyapunov 函数, 我们证明了系统的渐近稳定性. 需要强调指出的是这里我们不需要考虑最优值函数在平衡点之外的点连续性.

关键词: 模型预测控制, 控制增量约束, 无限时域, 代价函数, 稳定性

Stability of Infinite Horizon MPC with Incremental Input Constraints

YU Shuyou¹, QU Ting¹, CHEN Hong^{1,2}

1. Department of Control Science and Engineering, Jilin University (Campus NanLing), Changchun 130025, P. R. China

2. Key Laboratory of Automotive Simulation and Control, Jilin University, Changchun 130025, P. R. China

E-mail: {shuyou, chenh}@jlu.edu.cn, quting11@mails.jlu.edu.cn

Abstract: In this paper we discuss the asymptotic stability of infinite horizon model predictive control (MPC) with incremental constraints. First, we discuss the properties of optimal cost function of the optimization problem. It shows that the optimal cost function is positive definite, continuous at the equilibrium and monotonic decreasing along the prediction trajectory. We choose the optimal cost function as a candidate Lyapunov function and prove the asymptotic stability of nonlinear systems under control. We highlight that the optimal cost function is not necessarily continuous except for the equilibrium.

Key Words: Model predictive control, Incremental input constraint, Infinite horizon, Cost function, Stability

1 引言

模型预测控制 (model predictive control, MPC) 要求在每一采样时刻, 根据获得的当前测量信息, 在线求解一个开环优化问题, 并将得到的控制序列的第一个元素作用于受控对象. 在下一个采样时刻, 重复上述过程: 用新的测量值刷新优化问题并重新求解. 在线求解开环优化问题获得开环优化序列是模型预测控制和传统控制方法的主要区别, 因为后者通常是离线求解一个状态或者输出反馈控制律, 并将得到的反馈控制律一直作用于系统.

实际系统中存在各种各样的约束, 比如执行机构饱和是对控制输入的约束, 阀门开度等设备限制是对输入增量的约束, 安全生产和环境保护要求某些变量 (温度, 压力和浓度等) 不超过阈值是对系统状态或输出的约束. 另外, 根据质量守恒以及能量 (动能, 势能和热能) 守恒等定理建立机械系统或者化工系统的动力学模型时, 往往会有一些源于机械空间约束或者相平衡关系和其他唯象热力学关系的代数方程 [1, 2], 这些代数方程表示了对系统动力学的约束. 在系统控制设计时如果简单的忽略这些约束, 则可能导致实际系统的控制性能变差, 甚至不稳定 [3, 4]. 由于在线求解的优化问题中很容易包括各种等式和不等式约束, MPC 是处理约束系统控制问题的最有效方法之一.

已知的保证稳定性的 MPC 算法通常只考虑对系统状态、输入和输出的约束, 对输入的变化则没有限制 [5-7]. 一方面, 对于某些系统来说变量的变化率是有界的, 这主要是源于系统的物理限制或者是源于建模时的假设. 超出这个限制, 系统可能会被损坏或者模型将不再有效. 另一方面, 控制增量约束导致的相角滞后能够产生破坏系统的稳定性的作用 [8]. 因而控制增量约束是自动控制应用中需要认真考虑的问题 [9, 10]. 考虑链式的串联积分环节, 文 [11] 讨论了同时有输入约束和输入增量约束时系统的设计问题. 考虑可以采用任意小的控制将系统控制到平衡点的系统 (也被称为 ANCB 系统), 文 [12] 证明可以通过一个线性反馈控制使得具有控制约束和控制增量约束的系统是半全局渐近稳定的. 对于同时有输入约束和输入增量约束时系统, 文 [13] 讨论了输出反馈控制器的设计问题, 文 [14, 15] 讨论了对于任意的常值扰动的干扰抑制问题. 文 [16] 讨论了具有输入延迟和增量约束的系统的鲁棒预测控制器. 上述文献讨论的是线性系统的控制问题.

本文我们讨论具有状态、输入和输入增量约束的非线性系统的稳定性问题, 这里我们采用无限时域的非线性模型预测控制算法. 首先我们讨论无限时域模型预测控制的最优值函数的特性. 无限时域模型预测控制的值函数在平衡点连续, 半正定, 沿着预测轨迹单

此项工作得到教育部“长江学者和创新团队发展计划”创新团队项目 (IRT1017), 973 项目 (2012CB821202) 和吉林大学引进人才科研启动资金的资助.

调递减. 利用最优值函数作为候选的 Lyapunov 函数, 我们证明了算法的渐近稳定性.

这里需要指出, 本文研究的目的是通过对简单算法的梳理获对问题的比较深入的理解.

符号说明: \mathbb{R}^n 表示 n 维的实数集合, \mathbb{Z} 表示非负整数的集合 (包括 0 点), $k+i|k$ 表示在 k 时刻对 $k+i$ 时刻的预测值. 记 A 和 B 为已知的集合, 则 $A \setminus B$ 代表集合 A 和集合 B 的 Pontryagin 差. 假设 $Q \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ 为正定对称矩阵, 向量 $x \in \mathbb{R}^n$ 的范数 $\|x\|_Q^2 := x^T Q x$, $\lambda_{\min}(Q)$ 是指矩阵 Q 的最小特征值. 连续函数 $\alpha: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ 是一个 \mathcal{K} 类函数, 如果 $\alpha(0) = 0$, 对于所有的 $s > 0$, $\alpha(s) > 0$, 并且它是单调递增的. 函数 α 是一个 \mathcal{K}_∞ 函数, 如果它是一个 \mathcal{K} 类函数, 并且当 $s \rightarrow \infty$, $\alpha(s) \rightarrow \infty$.

2 无限时域非线性模型预测控制

2.1 问题描述

考虑如下非线性离散时间系统:

$$x_{k+1} = f(x_k, u_k), \quad (1)$$

其中 $x_k \in \mathbb{R}^{n_x}$, $u_k \in \mathbb{R}^{n_u}$ 分别表示 k 时刻系统的状态和输入. 记系统的输入增量为 Δu , $\Delta u_k = u_k - u_{k-1}$. 系统的状态、输入和输入增量约束分别为

$$x_k \in \mathcal{X}, \quad k \geq 0, \quad (2a)$$

$$\Delta u_k \in \Delta \mathcal{U}, \quad k \geq 0, \quad (2b)$$

$$u_k \in \mathcal{U}, \quad k \geq 0, \quad (2c)$$

其中 \mathcal{X} 是系统状态的允许集合, \mathcal{U} 和 $\Delta \mathcal{U}$ 是控制输入和控制增量的允许集合. 本节中我们假设系统的状态完全可测, 系统的模型是精确已知的, 并且不考虑外部扰动对系统的影响.

假设系统 (1) 满足下面的条件:

假设 1 $f: \mathbb{R}^{n_x} \times \mathbb{R}^{n_u} \rightarrow \mathbb{R}^{n_x}$ 是连续的, $f(0, 0) = 0$, 即 $(0, 0) \in \mathbb{R}^{n_x} \times \mathbb{R}^{n_u}$ 是系统的平衡点:

假设 2 $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^{n_u}$ 和 $\Delta \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^{n_u}$ 是紧的, $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^{n_x}$ 是连通的, 点 $(0, 0)$ 包含于集合 $\mathcal{X} \times \mathcal{U}$ 的内部.

假设 3 存在一个正的常数 r , 使得集合 $\Delta \mathcal{U} \subseteq \mathcal{P}_r \subset \mathbb{R}^{n_u}$, 其中 $\mathcal{P}_r := \{\Delta u \in \mathbb{R}^{n_u} \mid \max_i |\Delta u^{(i)}| \leq r\}$, $\Delta u^{(i)}$ 是向量 Δu 的第 i 个分量.

假设 $f(0, 0) = 0$ 并非很强的限制. 如果 $f(x_s, u_s) = 0$, 我们可以通过变量变换 $x' = x - x_s$, $u' = u - u_s$ 将系统的平衡点转换到 $(0, 0)$. 集合 \mathcal{P}_r 是一个凸多面体. 假设 3 保证控制增量 $\Delta u \in \mathbb{R}^{n_u}$ 可以被凸多面体 \mathcal{P}_r 完全覆盖.

定义 k 时刻的无限时域控制输入序列

$$U_k := \{u_{k|k}, u_{k+1|k}, u_{k+2|k}, \dots\}. \quad (3)$$

无限时域模型预测控制要求在每一采样时刻 k 求解如下最小化问题:

问题 1

$$\underset{U_k}{\text{minimize}} \quad J(x_k, U_k) \quad (4a)$$

满足:

$$x_{k+i+1|k} = f(x_{k+i|k}, u_{k+i|k}), \quad x_{k|k} = x_k, \quad (4b)$$

$$x_{k+i|k} \in \mathcal{X}, \quad i \in \mathbb{Z}_{[1, \infty)}, \quad (4c)$$

$$u_{k+i|k} \in \mathcal{U}, \quad i \in \mathbb{Z}_{[0, \infty)}, \quad (4d)$$

$$\Delta u_{k+i|k} \in \Delta \mathcal{U}, \quad i \in \mathbb{Z}_{[0, \infty)}, \quad (4e)$$

其中

$$J(x_k, U_k) = \sum_{i=0}^{\infty} \|x_{k+i|k}\|_Q^2 + \|u_{k+i|k}\|_R^2, \quad (5)$$

矩阵 Q 和 R 为正定对称矩阵. 当 $i > 0$ 时, 控制增量 $\Delta u_{k+i+1|k} := u_{k+i+1|k} - u_{k+i|k}$; 当 $i = 0$ 时,

$$\Delta u_{k|k} = \begin{cases} u_{k|k} - u_{k-1|k-1}, & \text{当 } k > 0 \text{ 时,} \\ 0, & \text{当 } k = 0 \text{ 时.} \end{cases}$$

无限时域模型预测控制算法的设计目标是求取控制序列使得系统 (1) 名义稳定, 并且使得系统动态满足约束 (2) 并且期望的性能指标 (5) 最小.

无限时域 MPC 要求在每一采样时刻求解优化问题, 并且将求得的控制序列的第一个元素作用于系统, 在下一采样时刻根据新的测量值重复求解优化问题. 为了讨论的方便, 我们首先给出优化问题可行的定义:

定义 1 如果存在控制序列 U_k 使得

- 对于任意的 $i \in \mathbb{Z}_{[1, \infty)}$, 约束条件 (2) 满足;
- 目标函数 (5) 是有界的, 即

$$\sum_{i=0}^{\infty} \|x_{k+i|k}\|_Q^2 + \|u_{k+i|k}\|_R^2 < \infty,$$

则称控制序列 U_k 是优化问题 1 的可行解,

假设在 k 时刻优化问题 1 有最优解 U_k^* ,

$$U_k^* := \{u_{k|k}^*, u_{k+1|k}^*, u_{k+2|k}^*, \dots\};$$

最优控制序列 U_k^* 对应的最优轨迹记为 X_k^* ,

$$X_k^* := \{x_{k+1|k}^*, x_{k+2|k}^*, x_{k+3|k}^*, \dots\};$$

则 k 时刻的控制为

$$u_k := u_{k|k}^*.$$

引理 1 如果优化问题有可行解, 则

$$\lim_{i \rightarrow \infty} (\|x_{k+i|k}\|_Q^2 + \|u_{k+i|k}\|_R^2) = 0.$$

证明: 我们用反证法来证明. 记 U_k 是系统在 k 时刻的可行解. 假如 $\lim_{i \rightarrow \infty} (\|x_{k+i|k}\|_Q^2 + \|u_{k+i|k}\|_R^2) \neq 0$, 不失一般性可以假设对于任意的 $i > 0$, 存在一个正的实

数 v , 使得 $\|x_{k+i|k}\|_Q^2 + \|u_{k+i|k}\|_R^2 > v$. 在这种情况下, 显然有 $J(x_k, U_k) \rightarrow \infty$. 这与 U_k 是可行解的条件矛盾. \square

无限时域 MPC 的具体算法如下:

算法 1

- 步骤 1: 在 k 时刻测量系统状态 x_k ,
- 步骤 2: 求解优化问题 1, 得到最优控制序列 U_k^* 和 k 时刻的最优控制 u_k^* ,
- 步骤 3: 将控制 u_k^* 作用于系统, 在下一采样时刻, 记 $k := k + 1$, 返回步骤 1.

考虑非线性系统 (1) 在平衡点 $(0, 0)$ 的线性化系统为:

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k, \quad (6)$$

其中 $A := \frac{\partial f}{\partial x}|_{(0,0)}$ 和 $B := \frac{\partial f}{\partial u}|_{(0,0)}$.

假设 4 假设系统 (6) 是可稳定的.

则显然存在线性状态反馈控制 $u = Kx$, 使得系统 $A_k = A + BK$ 渐近稳定.

2.2 值函数的性质

记系统的状态为 x . 假设优化问题存在可行解, 定义最优值函数为

$$V(x) := \min_{U_k} J(x, U_k).$$

最优值函数具有下面的性质.

定理 1 离散时间系统无限时域 MPC 的最优值函数 $V(x)$ 具有下面的性质:

- (a) $V(0) = 0$ 和对于任意的 $x \neq 0$, $V(x) > 0$
- (b) $V(x)$ 在 $x = 0$ 点连续.
- (c) $V(x)$ 沿着系统的轨迹单调递减.

证明: (a) 由于 $Q > 0$ 和 $R > 0$, 所以当 $x \neq 0$ 时, $V(x) > 0$. 当 $x = 0$ 时, 优化问题的最优解是 $u_{k+i|k}^* \equiv 0$, 并且最优解对应的最优轨迹是 $x_{k+i+1|k}^* \equiv 0$, 对于任意的 $i \in [0, \infty)$. 因而我们可以得到当 $x = 0$ 时, $V(x) = 0$.

另一方面, 如果 $V(x_k) = 0$, 也即

$$V(x_k) = \sum_{i=0}^{\infty} \|x_{k+i|k}^*\|_Q^2 + \|u_{k+i|k}^*\|_R^2 = 0.$$

这里 $u_{k+i|k}^*$ 是求解优化问题得到的最优控制, $x_{k+i|k}^*$ 是最优控制对应的最优预测轨迹. 由于 $R > 0$, 我们有下面的不等式

$$V(x_k) \geq \sum_{i=0}^{\infty} \|x_{k+i|k}^*\|_Q^2.$$

显然只有沿着预测轨迹 $x_{k+i|k}^* \equiv 0$ 时, 对于任意的 $i \in [0, \infty)$, 才有 $V(x_k) = 0$. 因此对于任意的 $x_k \neq 0$, $V(x_k) > 0$.

(b) 因为 (A, B) 可稳, 则存在一个反馈控制律 Kx

和一个不变椭圆域

$$\Omega := \{x \in \mathbb{R}^{n_x} \mid x^T P x \leq \alpha\},$$

其中 P 是一个已知的正定对称矩阵, $\alpha > 0$ 是常数, 使得系统及其轨迹满足状态约束 (2a) 和控制约束 (2c), 同时系统在椭圆域中是正不变的 [6, 7].

我们下面用构造法证明一定存在一个常数 $\alpha_1 \in (0, \alpha)$, 使得椭圆域

$$\Omega_1 := \{x \in \mathbb{R}^{n_x} \mid x^T P x \leq \alpha_1\}, \quad (7)$$

满足控制增量约束 (2b). 记 x_1 和 x_2 是 Ω 中任意选取的两点, 则 [17]

$$\|x_1 - x_2\| \leq 2\sqrt{\lambda_{\min}(P^{-1})}\alpha_1^{\frac{1}{2}}.$$

同时

$$\|K(x_1 - x_2)\| \leq \|K\| \cdot \|x_1 - x_2\| \quad (8a)$$

$$\leq 2\alpha_1^{\frac{1}{2}} \|K\| \sqrt{\lambda_{\min}(P_1^{-1})}. \quad (8b)$$

考虑到假设 3, 我们有 $\|\Delta u_{\max}^{(i)}\| \leq r$, $i = 1, 2, \dots, n_u$. 因此我们只需要取

$$\alpha_1 = \min \left\{ \alpha, \frac{n_u r^2}{4\|K\|^2 \lambda_{\min}(P^{-1})} \right\}.$$

即可保证在椭圆域 Ω_1 中系统的轨迹同时满足控制增量约束.

为了证明 $V(x)$ 在 $x = 0$ 点的连续性, 我们考虑 x 在平衡点附近的情况. 取 $x_k \in \Omega_1$ 并且 $x_k \neq 0$. 此时最优优化问题的一个可行解 \bar{U}_k 可以选为

$$\bar{U}_k = \{Kx_{k|k}, Kx_{k+1|k}, Kx_{k+2|k}, \dots\}. \quad (9)$$

对应于可行解 \bar{U}_k 的值函数记为 $\bar{V}(x)$. 因为函数 $f(x, u)$ 分别关于自变量 x 和 u 连续, 根据复合函数连续性可知在平衡点附近 $\bar{V}(x)$ 关于 x 是连续的.

由于 $\bar{V}(x)$ 关于 x 是连续的, 因此 $\bar{V}(x)$ 在 $x = 0$ 处连续. 即对任意的 $\epsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$ 使得当 $\|x - 0\| \leq \delta$ 时, $\bar{V}(x) - \bar{V}(0) \leq \epsilon$. 由于 $\bar{V}(0) = 0$, 并且对任意的 $x \in \Omega_1$, $V(x) \leq \bar{V}(x)$, 则对上述的 ϵ 和 δ 来说, 我们有当 $\|x - 0\| \leq \delta$ 来说, 则有 $V(x) \leq \epsilon$ 成立. 因此, 最优值函数 $V(x)$ 在 $x = 0$ 是连续的.

(c) 假设在 k 时刻无限时域约束优化问题有解, 记为

$$U_k^* = \{u_{k|k}^*, u_{k+1|k}^*, u_{k+2|k}^*, \dots\}, \quad (10)$$

其满足控制增量约束 (2b) 和控制约束 (2c); 对应的状态输出序列为

$$X_k^* := \{x_{k+1|k}^*, x_{k+2|k}^*, x_{k+3|k}^*, \dots\},$$

其满足状态约束 (2a). 控制输入序列 (10) 使得值函数

$$V(x_k) = \sum_{i=0}^{\infty} \|x_{k+i|k}^*\|_Q^2 + \|u_{k+i|k}^*\|_R^2$$

是有界的. 将闭环控制 $u_k = u_{k|k}^*$ 代入系统 (1). 对无干扰无模型误差的闭环系统, $k+1$ 时刻的系统状态测量值为

$$x_{k+1} = f(x_k, u_{k|k}^*),$$

其与预测的 $k+1$ 时刻状态是一致的. 因此, 在 $k+1$ 时刻, 我们可以选择如下的一个控制序列

$$U_{k+1} = [u_{k+1|k+1}, u_{k+2|k+1}, u_{k+3|k+1}, \dots] \triangleq [u_{k+1|k}^*, u_{k+2|k}^*, u_{k+3|k}^*, \dots] \quad (11)$$

这个选择的控制增量序列就是 k 时刻的优化解从 $k+1$ 时刻开始的无限区间 $[k+1, \infty)$ 对应的向量. 显然, 这样选择的控制序列满足控制量和增量约束. 在不考虑干扰的情况下, 对应的状态序列

$$x_{k+1+i|k+1} = x_{k+1+i|k}^*, \quad i = 1, 2, \dots$$

也是满足状态约束的. 在 $k+1$ 时刻, 计算对应的目标函数值为

$$\begin{aligned} J_{k+1} &= \sum_{i=0}^{\infty} \|x_{k+1+i|k+1}\|_Q^2 + \|u_{k+1+i|k+1}\|_R^2 \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \|x_{k+i|k}^*\|_Q^2 + \|u_{k+i|k}^*\|_R^2 \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \|x_{k+i|k}^*\|_Q^2 + \|u_{k+i|k}^*\|_R^2 \\ &\quad - \|x_{k|k}^*\|_Q^2 - \|u_{k|k}\|_R^2 \\ &= V(x_k) - \|x_k\|_Q^2 - \|u_k\|_R^2. \end{aligned}$$

显然, J_{k+1} 是有界的. 因此, 选定的 $k+1$ 时刻的控制序列 (11) 是无限时域约束优化问题 1 的一个可行解. 显然优化问题存的优化解不会差于可行解, 则有

$$V(x_{k+1}) \leq J_{k+1} \leq V(x_k) - \|x_k\|_Q^2. \quad (12)$$

得到上式还用到了 $R > 0$. 因此, $V(x)$ 沿着系统的轨迹单调递减. \square

从定理 1 的证明中我们知道, 如果优化问题在 k 时刻具有最优解 U_k , 则控制序列 U_{k+1} 是优化问题在 $k+1$ 时刻的可行解. 因而我们很容易的得到下面的推论:

推论 1 如果在 $k=0$ 时刻优化问题 1 存在可行解, 则在每个采样时刻 $k > 0$, 优化问题 1 都存在可行解.

证明: 略. \square

2.3 系统的稳定性

在讨论受控系统的稳定性之前, 我们介绍一个稳定性引理, 该引理并不要求 $V: \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$ 是连续可微的.

引理 2 [18] 考虑系统

$$x_{k+1} = f(x_k), \quad k \geq 0, \quad x_0 = x(0), \quad (13)$$

其中 f 关于 x 连续, 且 $f(0) = 0$. 对于系统 (13), 如果存在正定有界函数 $V(x)$ 满足

- (a) $V(0) = 0$ 且对任意的 $x \neq 0$ 有 $V(x) > 0$,
- (b) 在平衡点 $x = 0$ 附近, $V(x)$ 是连续的,
- (c) 沿着系统的轨迹, 有

$$V(x_{k+1}) - V(x_k) \leq -\beta(\|x_k\|), \quad (14)$$

其中 $\beta(\cdot)$ 是一个 \mathcal{K} 类函数, 则系统是渐近稳定的.

下面我们给出无限时域 MPC 稳定性的充分条件:

定理 2 假设

- (a) 假设 1-4 成立;
- (b) 在 $k=0$ 时刻, 优化控制问题 1 存在可行解, 则闭环系统是名义渐近稳定的¹.

证明: 由推论 1 知, 如果优化问题 1 在 $k=0$ 时刻存在可行解, 则对任意的 $k > 0$, 优化问题存在可行解.

选取离散时间系统无限时域 MPC 的最优值函数 $V(x)$ 作为候选的 Lyapunov 函数, 则由引理 1 知, $V(x)$ 满足

- $V(0) = 0$ 和对于任意的 $x \neq 0$, $V(x) > 0$,
- $V(x)$ 在 $x = 0$ 点连续.

由式 (2.3) 知,

$$V(x_{k+1}) - V(x_k) \leq -\lambda_{\min}(Q)\|x_k\|^2.$$

考虑引理 2, 最优值函数 $V(x)$ 是系统的一个 Lyapunov 函数, 系统 (1) 名义渐近稳定. \square

3 车辆转向控制

下面通过一个有关车辆转向系统的例子说明本文所提出方法的有效性, 考虑二自由度车辆动力学模型:

$$\begin{bmatrix} \dot{v}_y(t) \\ \dot{\omega}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{(C_f + C_r)}{mv_x} & -\frac{(aC_f - bC_r)}{mv_x} - v_x \\ -\frac{(aC_f - bC_r)}{I_z v_x} & -\frac{(a^2 C_f + b^2 C_r)}{I_z v_x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_y(t) \\ \omega(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{C_f}{mG} \\ \frac{aC_f}{I_z G} \end{bmatrix} \delta(t)$$

这里 v_y 为车辆侧向速度, ω 为横摆角速度, C_f 和 C_r 分别为前、后轮胎侧偏刚度, v_x 为纵向速度, m 为车身质量, I_z 为转动惯量, a, b 分别为车辆质心与前、后轴的距离, $\delta(t)$ 为方向盘转角, G 为方向盘转角与前轮转角的比值. 令

$$x(t) = \begin{pmatrix} v_y(t) \\ \omega(t) \end{pmatrix}, \quad u(t) = \delta(t)$$

¹ 名义渐近稳定是指在外无外部扰动和模型摄动的条件下, 系统是 Lyapunov 渐近稳定的 [19].

写成向量形式为

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

其中

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{(C_f+C_r)}{mv_x} & -\frac{(aC_f-bC_r)}{mv_x}v_x \\ -\frac{(aC_f-bC_r)}{I_z v_x} & -\frac{(a^2C_f+b^2C_r)}{I_z v_x} \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} \frac{C_f}{I_z G} \\ \frac{aC_f}{I_z G} \end{pmatrix}.$$

将上式离散化可得离散型的状态空间方程

$$x_{k+1} = \tilde{A}x_k + \tilde{B}u_k$$

考虑系统的状态约束为:

$$\begin{pmatrix} -10 \\ -1 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} x_{k+i|k}^{(1)} \\ x_{k+i|k}^{(2)} \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 10 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad i \in Z_{[0,\infty)}$$

这里, 控制量约束为:

$$-5\pi \leq u_{k+i|k} \leq 5\pi, \quad i \in Z_{[0,\infty)}$$

为保证车辆的操纵稳定性, 控制量不能变化太大, 故给出控制增量约束为:

$$-1 \leq \Delta u_{k+i|k} \leq 1, \quad i \in Z_{[0,\infty)}$$

应用本文的方法, 针对具有控制增量约束和无控制增量约束的情况, 分别设计了 MPC 镇定控制器, 选取预测时域为 100, 控制时域为 5, $Q = I_{100 \times 100}$, $R = 0.1 \times I_{5 \times 5}$. 仿真结果如下图所示.

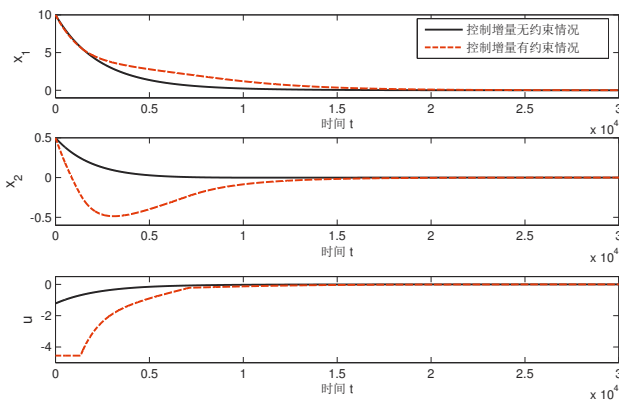


图 1: 控制增量有无约束情况下的比较图.

从仿真图可以看出, 相对于无控制增量约束的情况, 在有控制增量约束的情况下, 系统的状态收敛速度变慢. 同时, 由于控制增量受限, 控制量的变化相对平缓.

4 总结

控制增量约束反映了控制量允许变化的快慢, 是实际系统中普遍存在的一种时域硬约束. 本文我们研

究了具有控制增量约束的无限时域模型预测控制算法的渐近稳定性. 我们首先讨论了最优值函数的特性. 最优值函数是半正定的, 并且只在平衡点等于零; 最优值函数在平衡点是连续的; 最优值函数沿着预测轨迹单调递减, 并且相邻两点的最优值函数之差小于某一个给定的 κ 类函数. 我们选取最优值函数作为候选的 Lyapunov 函数, 证明了受控系统的名义渐近稳定性.

我们的下一步工作将着眼于具有控制增量约束的有限时域模型预测控制的稳定性. 本文研究的目的是通过对简单算法的梳理获所研究问题的深入理解.

参考文献

- [1] A. Kröner, P. Holl, W. Marquardt, and E. D. Gilles, "DIVA - An open architecture for dynamic simulation," in *Computer Application in the Chemical Industry*, R. Eckermann, Ed. VCH, Weinheim, 1989, pp. 485–492.
- [2] J. Wittenburg, *Dynamics of Multibody Systems*. Springer London, 2008.
- [3] D. Q. Mayne, "Optimization in model based control," in *Proc. IFAC Symposium Dynamics and Control of Chemical Reactors, Distillation Columns and Batch Processes*, Helsingor, 1995, pp. 229–242.
- [4] H. Chen, "Stability and robustness considerations in nonlinear model predictive control," Ph.D. Thesis, University of Stuttgart, Germany, 1997.
- [5] J. Rawlings and K. Muske, "Stability of constrained receding horizon control," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. AC-38, no. 10, pp. 1512–1516, 1993.
- [6] H. Chen and F. Allgöwer, "A quasi-infinite horizon nonlinear model predictive control scheme with guaranteed stability," *Automatica*, vol. 34, no. 10, pp. 1205–1217, 1998.
- [7] D. Q. Mayne, J. B. Rawlings, C. V. Rao, and P. O. M. Scokaert, "Constrained model predictive control: stability and optimality," *Automatica*, vol. 36, no. 6, pp. 789–814, 2000.
- [8] J. M. Berg, K. D. Hammet, C. A. Schwartz, and S. S. Banda, "An analysis of the destabilizing effect of daisy chained rate-limited actuators," *IEEE Trans. Contr. Syst. Technology*, vol. 4, no. 2, 1996.
- [9] M. A. Dornheim, "Report pinpoint factors leading to YF-22 crash," *Aviation Week Space Technology*, vol. 9, pp. 53–54, 1992.
- [10] J. M. Lenorovitz, "Gripen control problems resolved through in-flight, ground simulations," *Aviation Week Space Technology*, pp. 74–75, 1990.
- [11] L. Trygve, R. Murray, and T. Y. Fossen, "Stabilization of integrator chains in the presence of magnitude and rate saturations; a gain scheduling approach," in *Proc. IEEE Conf. Decision Contr.*, 1997.
- [12] Z. Lin, "Semi-global stabilization of linear systems with position and rate-limited actuators," *Syst. Contr. Lett.*, vol. 30, pp. 1–11, 1997.
- [13] F. Tyan and D. S. Bernstein, "Dynamic output feedback compensation for linear systems with independent am-

- plitude and rate,” *Int. J. Contr.*, vol. 67, no. 1, pp. 89–116, 1997.
- [14] D. Angeli, A. Casavola, and E. Mosca, “Predictive PI-Control of linear plant under positional and incremental input saturations,” *Automatica*, vol. 36, no. 10, pp. 1505–1516, July 2000.
- [15] F. Mesquine, F. Tadeo, and A. Benzaouia, “Constrained control and rate or increment for linear systems with additive disturbances,” *Mathematical Problems in Engineering*, pp. 1–16, 2006.
- [16] 李婧靓, 席玉庚, 李德伟, “具有输入延迟和增量约束的鲁棒预测控制器,” *控制工程*, 17 卷 (增), pp. 32–35, 2012.
- [17] S.-Y. Yu, “Robust Model Predictive Control of Constrained Systems,” Ph.D. Thesis, University of Stuttgart, Germany, 2011.
- [18] S.-Y. Yu, H. Chen, and F. Xu, “Stability analysis of dynamical systems using not necessarily continuous lyapunov function,” Submitted, 2013.
- [19] K. Zhou, J. C. Doyle, and K. Glover, *Robust and Optimal Control*. Upper Saddle River, New Jersey: Prentice Hall, 1996.