

一、电介质极化的频域响应

◆电介质极化的频域响应

频域响应就是以频率作参变量，极化响应是频率的函数，可以通过时间函数 $g(t)$ 作付立叶变换获得

$$F[g(t)] = g(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-i\omega t} dt$$

逆变换：

$$g(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(\omega)e^{i\omega t} d\omega$$

在时域响应中：

$$p_r(t) = \varepsilon_0(\varepsilon_s - \varepsilon_\infty) \int_0^\infty f(y)E(t-y)dy$$

一、电介质极化的频域响应

◆ 对上式极化时域响应的卷积进行傅立叶变换：

$$\begin{aligned} F[f(y)] &= f(\omega) & F[E(x)] &= E(\omega) \\ F\left[\int_0^\infty f(y)E(t-y)dy\right] &= \int_0^\infty e^{-i\omega t} \left\{ \int_0^\infty f(y)E(t-y)dy \right\} dt \\ &= \int_0^\infty f(y) \left\{ \int_0^\infty e^{-i\omega t} E(t-y)dt \right\} dy = \int_0^\infty f(y) e^{-i\omega y} \left\{ \int_0^\infty e^{-i\omega(t-y)} E(t-y)dt \right\} dy \\ &= \int_0^\infty f(y) e^{-i\omega y} dy \int_0^\infty e^{-i\omega x} E(x)dx = f(\omega)E(\omega) \end{aligned}$$

一、电介质极化的频域响应

- ◆ 由上面的推导可见，卷积的傅立叶变换等于积分号内二个函数傅立叶变换的卷积，故极化的频域响应如下：

$$P_r(\omega) = \varepsilon_0(\varepsilon_s - \varepsilon_\infty)f(\omega)E(\omega)$$

$$P(\omega) = \varepsilon_0(\varepsilon_\infty - 1)E(\omega) + P_r(\omega)$$

$$= \varepsilon_0[(\varepsilon_\infty - 1) + (\varepsilon_s - \varepsilon_\infty)f(\omega)]E(\omega) = \varepsilon_0\chi_r^*(\omega)E(\omega)$$

$$D(\omega) = \varepsilon_0\varepsilon_r^*(\omega)E(\omega)$$

一、电介质极化的频域响应

- ◆ 由上面的推导可见，卷积的傅立叶变换等于积分号内二个函数傅立叶变换的卷积，故极化的频域响应如下：

其中：

$$\chi_r^*(\omega) = (\varepsilon_\infty - 1) + (\varepsilon_s - \varepsilon_\infty)f(\omega)$$

$$\varepsilon_r^*(\omega) = \varepsilon_\infty + (\varepsilon_s - \varepsilon_\infty)f(\omega)$$

$$\varepsilon_r^*(\omega) = \chi_r^*(\omega) + 1$$

一、电介质极化的频域响应

弛豫函数 $f(y)$ 的傅立叶变换为:

$$f(\omega) = \int_0^{\infty} f(y)e^{-i\omega y} dy$$

则:

$$\chi_r^*(\omega) = (\varepsilon_{\infty} - 1) + (\varepsilon_s - \varepsilon_{\infty}) \int_0^{\infty} f(y)e^{-i\omega y} dy$$

$$\varepsilon_r^*(\omega) = \varepsilon_{\infty} + (\varepsilon_s - \varepsilon_{\infty}) \int_0^{\infty} f(y)e^{-i\omega y} dy$$

注意到 $e^{-i\omega y} = \cos(\omega y) - i \sin(\omega y)$

一、电介质极化的频域响应

于是：

$$\varepsilon_r'(\omega) = \varepsilon_\infty + (\varepsilon_s - \varepsilon_\infty) \int_0^\infty f(y) \cos(\omega y) dy$$

$$\varepsilon_r''(\omega) = \chi_r''(\omega) = (\varepsilon_s - \varepsilon_\infty) \int_0^\infty f(y) \sin(\omega y) dy$$

当 $\omega = 0$,

$$\varepsilon_r'(0) = \varepsilon_\infty + (\varepsilon_s - \varepsilon_\infty) \int_0^\infty f(y) dy = \varepsilon_s$$

$$\varepsilon_r''(0) = \chi_r''(0) = 0$$

表明：

$$\int_0^\infty f(y) dy = 1$$

一、电介质极化的频域响应

- ◆ $F(y)$ 是衰减因子 (decay factor)，它描述突然除去外电场后，介质极化衰减的规律以及迅速加上恒定外电场时前后极化趋向于平衡态的规律。
- ◆ 由于介质中电矩的运动需要时间，极化响应显得落后于迅速变化的外电场而似乎具有一点惯性，

一、电介质极化的频域响应

- ◆ 同时，弛豫过程中微观粒子间的能量交换在宏观方面将表现为一种损耗，用复介电常数的虚部 ϵ_r'' 从宏观方面描述介电损耗，衰减因子使 $\epsilon_r^*(\omega)$ 分为实部 ϵ_r' 和虚部 ϵ_r'' 。

二、Kremers—Kroning关系

◆ Kremers—Kroning 关系

介电常数的实部 ϵ_r' 和虚部 ϵ_r'' 都依赖于同一弛豫函数 $f(y)$ 因此介电常数的实部 ϵ_r' 和虚部 ϵ_r'' 是彼此相关而非独立，可以建立起 ϵ_r' 和 ϵ_r'' 的关系。

二、Kremers—Kroning关系

克拉莫-科略尼克关系式:

$$\begin{aligned}\varepsilon_r'(\omega) &= \varepsilon_\infty + \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \frac{u}{u^2 - \omega^2} \varepsilon_r''(u) du \\ \varepsilon_r''(\omega) &= \frac{\omega}{2\pi} \int_0^\infty \frac{\varepsilon_r'(u) - \varepsilon_\infty}{u^2 - \omega^2} du\end{aligned}$$

- ◆ 上式就是著名的K-K关系，这个关系对任何类型的弛豫极化都成立，在全频范围内，只要测量出其中一个频谱，可由K-K关系得到另一个频谱。
- ◆ K-K关系的物理图像十分清楚，复介电常数实部的增长是由于电矩转到与外电场平行的方向。

二、Kremers—Kroning关系

- ◆ 但在转向过程中就要与周围粒子发生碰撞而损耗能量，从而出现弛豫，这由复介电常数的虚部来表示。
- ◆ 在实验上亦很有用，如果在某一波段中 $\varepsilon_r''(\omega)$ 中某一分量测量困难时，例如低频时某些材料，电导引起的电流湮没了损耗的测量，可用K-K关系来决定实验的介电常数。

二、Kremers—Kroning关系

当 $\omega \rightarrow 0$ ，可求出静态相对介电常数

$$\epsilon_s - \epsilon_\infty = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\epsilon_r''(u) du}{u}$$

或

$$\int_0^\infty \epsilon_r''(\omega) \frac{d\omega}{\omega} = \frac{\pi}{2} (\epsilon_s - \epsilon_\infty)$$

在 $\epsilon_r'' \sim \ln \omega$ 的关系曲线中，曲线下包括的总面积只简单地与弛豫极化介电常数的极值有关，而与色散机理无关，即与 $f(\omega)$ 的具体形式无关。