

# 2A-SG8-MPC

## Model Predictive Control



CentraleSupélec



# 2A-SG8-MPC

## ORGANIZATION 2020-2021



CentraleSupélec

### Part 1 : Theoretical Approach of MPC

- Connection with Control Theory
- Connection with Optimization

### Part 2 : Practical Approach

- Implementation from Scratch *with help* ...
- Extension for Discrete Decision Systems
- Laboratory Work
  - Possibility to do it on a real model or on a virtual model

### Part 3 : Open Challenge

- How to use the concepts for Energy Management

### On Edunao :


- All the materials : slides, support, links

### On Teams :

- All the presentations, talks,
- Tentative to use WooClap

### What to have on your Computer

- Matlab/Simulink : version R2019b
- **Install Multi-Parametric Toolbox 3**  
- <https://www.mpt3.org/>



*To be be done for  
next course !*

# 2A-SG8-MPC

## WOOC LAP WILL BE WITH US



CentraleSupélec

2A-SG8-MPC 1 - RB 2021

Comment participer ?



**WEB**

- 1 Connectez-vous sur [www.wooclap.com/BZEXLN](http://www.wooclap.com/BZEXLN)
- 2 Vous pouvez participer



**SMS**

Cliquez sur l'écran projeté pour lancer la question

- 1 Pas encore connecté ? Envoyez **@BZEXLN** au [06 44 60 96 62](tel:0644609662)
- 2 Vous pouvez participer

**wooclap**

100 %

1

# 2A-SG8-MPC

## A FIRST QUESTION – FOR LABORATORY WORK SESSIONS



CentraleSupélec

2A-SG8-MPC 1 - RB 2021

www.wooclap.com/BZEXLN

For the laboratory work sessions, will you

1 be here, in CentraleSupélec, to do it on a real model 0% 0

2 stay home, to do it on a virtual model of the process 0% 0

Cliquez sur l'écran projeté pour lancer la question

wooclap

0 / 1



# 2A-SG8-MPC

## ORGANIZATION OF WORKING CLASS

On Teams:

- fill in the excel file « [TeamComposition](#) »

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
Teams composition														
Team 1	Student		Team 2	Student		Team 3	Student		Team 4	Student		Team 5	Student	



CentraleSupélec

# CHAPTER 1

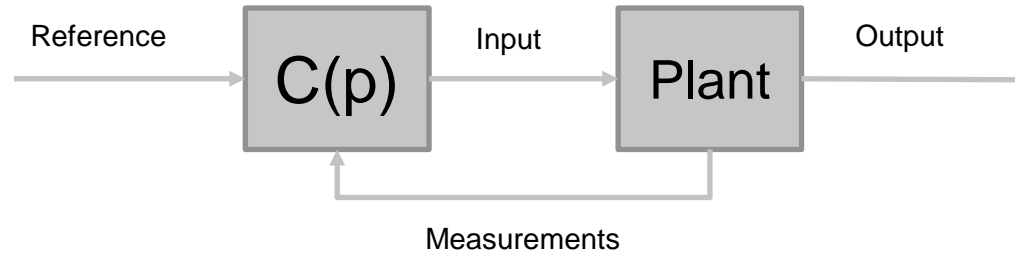
# INTRODUCTION

# RULE 1 : PREDICTION IN THE CONTROLLER

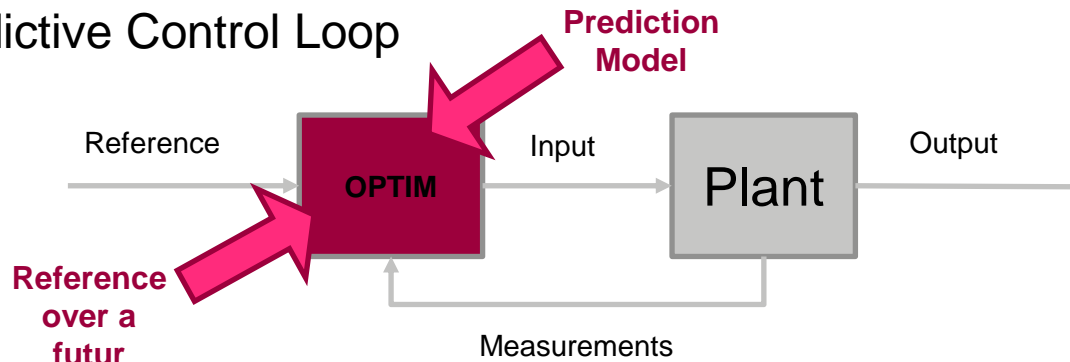


CentraleSupélec

## Classic Control Loop



## Model Predictive Control Loop



The MPC will use a model of the plant to predict its future evolution

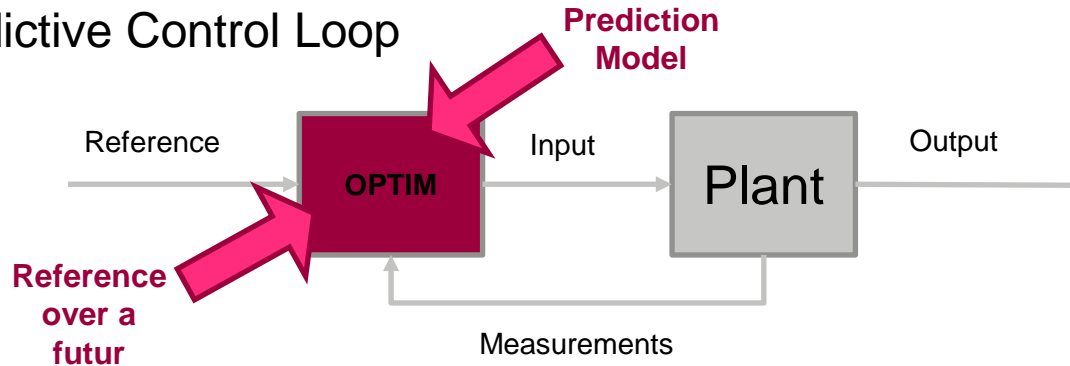


# RULE 2 : OPTIMIZATION IN THE LOOP



CentraleSupélec

## Model Predictive Control Loop



$$\min_U \sum_{i=k}^{k+N_p-1} l_i(x_i, u_i)$$

subject to :

$$U = \{u_0, u_1, \dots, u_{N_p-1}\}$$

$$x_{i+1} = f(x_i, u_i, i)$$

$$x_i \in X_i, \quad u_i \in U_i$$

$$x_0 = x(k)$$

Input Sequence

Prediction Model

State and Input Constraints

Measurement = Initialization

The MPC will try to find the best control sequence over the prediction horizon  $N_p$

# RULE 3 : RECEDING HORIZON PRINCIPLE



CentraleSupélec

At each time step :

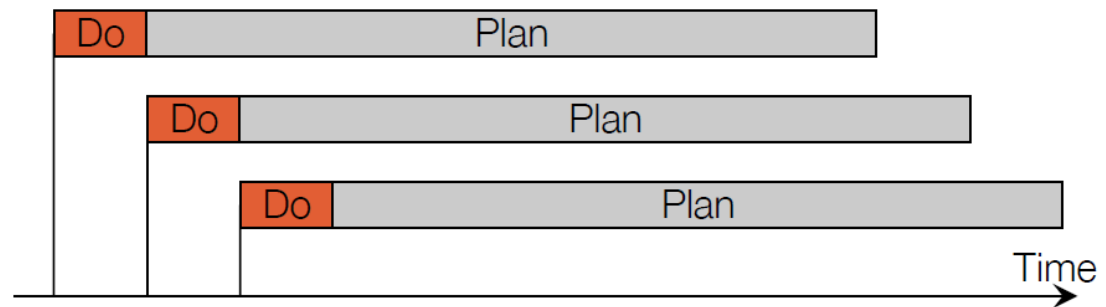
1. Getting current state  $x(k)$
2. Solving the optimization problem will give

$$U^* = \{u_0^*, u_1^*, \dots, u_{N_p-1}^*\}$$

3. Only the first element will be applied

$$u(k) = u_0^*$$

$$\begin{aligned} \min_U \quad & \sum_{i=k}^{k+N_p-1} l_i(x_i, u_i) \\ \text{subject to :} \quad & U = \{u_0, u_1, \dots, u_{N_p-1}\} \\ & x_{i+1} = f(x_i, u_i, i) \\ & x_i \in X_i, \quad u_i \in U_i \\ & x_0 = x(k) \end{aligned}$$



Receding horizon strategy introduces feedback

## Theory behind MPC [\[ edit \]](#)

MPC is based on iterative, finite-horizon optimization of a plant model. At time  $t$  the current plant state is sampled and a cost minimizing control strategy is computed (via a numerical minimization algorithm) for a relatively short time horizon in the future:  $[t, t + T]$ . Specifically, an online or on-the-fly calculation is used to explore state trajectories that emanate from the current state and find (via the solution of [Euler–Lagrange equations](#)) a cost-minimizing control strategy until time  $t + T$ . Only the first step of the control strategy is implemented, then the plant state is sampled again and the calculations are repeated starting from the new current state, yielding a new control and new predicted state path. The prediction horizon keeps being shifted forward and for this reason MPC is also called **receding horizon control**. Although this approach is not optimal, in practice it has given very good results. Much academic research has been done to find fast methods of solution of Euler–Lagrange type equations, to understand the global stability properties of MPC's local optimization, and in general to improve the MPC method.<sup>[6]</sup>

# FIRST POLL: WHERE COULD BE THE MAIN DIFFICULTY ?



CentraleSupélec

2A-SG8-MPC 1 - RB 2021

11

www.wooclap.com/BZEXLN

What is the main difficulty in implementing the MPC ?

- 1 Obtaining a good prediction model 6 pts
- 2 Defining the optimization criterion 11 pts
- 3 Solving the optimization criterion 39 pts
- 4 Other 44 pts

Cliquez sur l'écran projeté pour lancer la question

wooclap 2A-SG8-MPC 1 - RB 2021 1 / 1

# SECOND POLL: WHAT PROBLEMS COULD ARISE?



CentraleSupélec

2A-SG8-MPC 1 - RB 2021

12

www.wooclap.com/BZEXLN

What problems could arise?

À vos smartphones !

Cliquez sur l'écran projeté pour lancer la question

réponses reçues

wooclap 2A-SG8-MPC 1 - RB 2021

0 100 %

# DAILY-LIFE EXAMPLES OF MPC

(SLIDE FROM @BEMPORAD 2020, « MPC »)

- MPC is like playing Chess!



- On-line (event-based) re-planning used in GPS navigation



- Driving is based on MPC, no ?
  - *But do we know the model of the car?*
  - *But do we define an optimization criterion?*

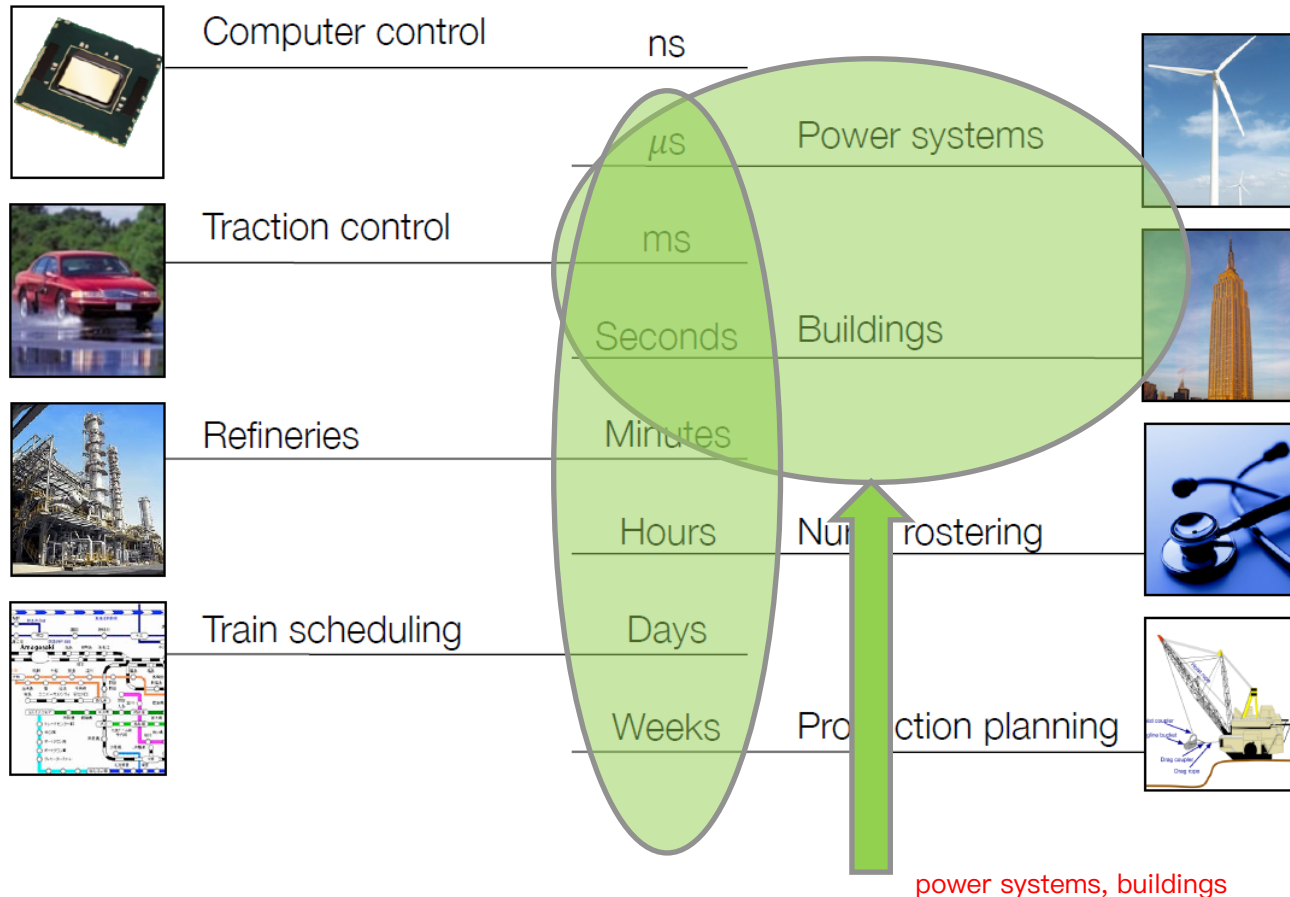


# SUCCESSFUL INDUSTRIAL APPLICATIONS

(SLIDE FROM @ZEILINGER 2021, « MPC »)



CentraleSupélec



**Main Domains of Control Team in Rennes**

# MPC IN INDUSTRY

(SLIDE FROM @BEMPORAD 2020, « MPC »)

**Table 1: Results of a survey by the Industry Committee on the current and future impact of PID and advanced control technologies \***

Control Technology	Current Impact		Future Impact	
	% High	Low/No	High	Low/No
PID control	91%	0%	78%	6%
System Identification	65%	5%	72%	5%
Estimation & filtering	64%	11%	63%	3%
<b>Model-predictive control</b>	<b>62%</b>	<b>11%</b>	<b>85%</b>	<b>2%</b>
Process data analytics	51%	15%	70%	8%
Fault detection & identification	48%	17%	8%	8%
Decentralized and/or coordinated control	29%	33%	54%	11%
Robust control	26%	35%	42%	23%
Intelligent control	24%	38%	59%	11%
Nonlinear control	21%	44%	42%	15%
Discrete-event systems	24%	45%	39%	27%
Adaptive control	18%	38%	44%	17%
Repetitive control	12%	74%	17%	51%
Other advanced control technology	11%	64%	25%	39%
Hybrid dynamical systems	11%	68%	33%	33%
Game theory	5%	76%	17%	52%

Source : Samad, IFAC Newsletter, 2019





# APPLICATION TO AUTOMATIVE

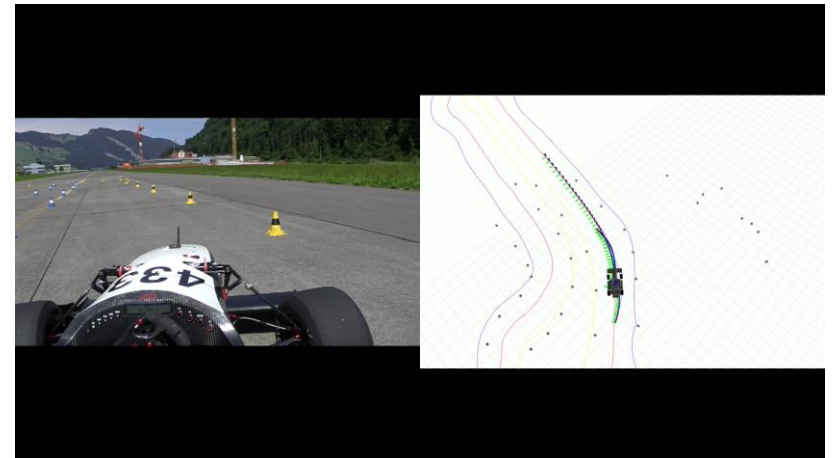
(SLIDE FROM @ZEILINGER 2021, « MPC »)



CentraleSupélec



Autonomous racing and obstacle avoidance  
ORCA Racer @ IfA, ETH Zurich  
<https://www.youtube.com/watch?v=JoHfJ6LEKVo>



Automated Driving, @Embotech 2021  
[https://www.embotech.com/wp-content/uploads/AMZ\\_trimmed.mp4](https://www.embotech.com/wp-content/uploads/AMZ_trimmed.mp4)

# MPC RESEARCH IS DRIVEN BY APPLICATIONS

(SLIDE FROM @BEMPORAD 2020, « MPC »)

## First scope of this course

- Process control → **linear** MPC (some **nonlinear** too) 过程控制：线性，非线性 1970-2000
- Automotive control → **explicit, hybrid** MPC 自动控制：混合，显性 2001-2010
- Aerospace systems and UAVs → **linear time-varying** MPC 太空系统 >2005
- Information and Communication Technologies (ICT) (wireless nets, cloud) → **distributed/decentralized** MPC 分布式/去中心式 >2005
- Energy, finance, automotive, water → **stochastic** MPC 随机式 >2010
- Industrial production → **embedded optimization** solvers for MPC >2010
- Machine learning → **data-driven** MPC today

Main Domains of  
Control Team in Rennes

This is the key point to understand almost all the extensions

## Objectives of this course :

- To master the fundamentals
- To implement on a real/virtual process
- To be creative on an open challenge !

# 2A-SG8-MPC

## ORGANIZATION 2020-2021



CentraleSupélec

### Part 1 : Theoretical Approach of MPC

- Connection with Control Theory
- Connection with Optimization

*Evaluation 1  
(exercices)*

### Part 2 : Practical Approach

- Implementation from Scratch *with help* ...
- Extension for Discrete Decision Systems
- Laboratory Work
  - Possibility to do it on a real model or on a virtual model

*Evaluation 2  
(Lab Report)*

### Part 3 : Open Challenge

- How to use the concepts for Energy Management

*Evaluation 3  
(Team  
Presentation)*



# QUESTIONS?

# 2A-SG8-MPC-CHAPTER 1

## QUESTIONS ?



CentraleSupélec

www.wooclap.com/BZEXLN

Chapter1: Any questions or remarks

1 Practical questions

2 Technical questions

3 Other



Cliquez sur l'écran projeté pour lancer la question



# 模型預測控制

维基百科，自由的百科全书

**模型预测控制**（Model predictive control、MPC）是过程控制中，在滿足特定限制條件時，控制過程的進階控制方式，自1980年代起已用在化學工廠及煉油廠的工業過程中。近年來也用在電力系統的平衡模型<sup>[1]</sup>以及电力电子学中<sup>[2]</sup>。模型預測控制是以過程的動態模型為基礎，多半是透過系統識別得到的線性經驗模型。模型預測控制的特點是每一次針對目前的時間區塊內作最佳化，然後下一個時間再針對時間區塊內作最佳化，這和LQR控制器不同。模型預測控制可以預測未來事件並且進行對應的處理。PID控制器沒有這樣的預測功能。模型預測控制幾乎都是用數位控制來實現，不過也有研究指出若使用特殊設計的類比電路，其反應時間可以更快<sup>[3]</sup>。

广义预测控制（Generalized predictive control，簡稱GPC）以及动态矩阵控制（dynamic matrix control，簡稱DMC）都是典型模型預測控制的例子<sup>[4]</sup>。

## 目录

### 簡介

模型預測控制背後的理論

模型預測控制的原則

### 非線性模型預測控制

### 顯式模型預測控制

### 強健模型預測控制

### 商品化的模型預測控制軟體

### 和LQR控制器的差異

### 相關條目

### 參考資料

### 延伸閱讀

### 外部連結

## 簡介

會用到模型預測控制的模型一般都是用來呈現複雜动力系统的特性。若是針對簡單系統的精準控制，多半不需要用到複雜的模型預測控制演算法，可能用泛用的PID控制器即可處理，若是系統有很長的時間延遲或是高階系統，其控制特性才會複雜到超過PID控制器可控制的程度。

模型預測控制會預測建模的系統在自变量變化時，對應的因变量變化。在化學製程中，控制器可以調整的自变量可能是PID控制器的目標值（壓力、流量、溫度等），或是最終控制單元（閥、加濕器等）的輸出。若是不能被控制器調整的自变量，會視為干擾來處理。製程中的因變量一般是對於控制目標的量測，或是一些製程限制條件的量測。

模型預測控制會用目前受控體的量測數值、目前製程的動態狀態、模型預測控制的模型，以及製程變數目標以及限制來計算因变量未來的變化。計算變化的目的是讓因变量儘量接近目標，並且讓因变量及自變量都在限制條件範圍內。模型預測控制一般會針對自變量先送出一個控制需要的變化，重複計算，一直到需要下一個變化時再送出下一個指令。

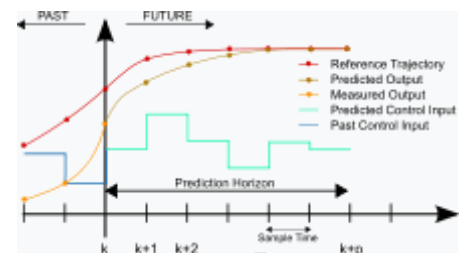
許多實際的製程不是線性的，不過在小的操作範圍內可以視為是線性的。大部份的應用可以使用線性模型預測控制，模型預測控制的回授機制會補償因為模型及實際製程之間的結構不一定所產生的估測誤差。假如預測控制器中的模型都是線性模型，根據线性代数中的疊加原理可以讓幾個獨立變數變化的效果加成，並且可以預測到應變量的變加。因此可以將控制問題簡化成一連串直接的矩陣代數計數，速度快，而且有強健性。

假如線性模型已經無法描述實際系統的非線性特性，有許多不同的作法。有些情形下，制程變數可以在模型預測控制器前後進行轉換，以減少其非線性的特性。也可以直接用非線性的模型預測控制來控制，直接用非線性的模型來符合實際的應用。非線性模型可以是由實際資料所合成（例如用人工智慧的類神經網路），或是以質量平衡及能量平衡為基礎的高保真動態模型。非線性模型可以線性化以得到卡尔曼滤波，或是其他可以用在線性模型預測控制的模型。

El-Gherwi、Budman及El Kamel的演算法研究指出，利用雙模式的方法，可以讓即時計算量顯著下降，而其性能和調整前相當。此演算法會以各控制器之間交換資訊為基礎，平行求解N個凸優化問題<sup>[5]</sup>

## 模型預測控制背後的理論

模型預測控制是以針對受控體模型的迭代式、有限時域滾動（finite-horizon）最佳化為基礎。在時間 $t$ 時針對受控體的狀態取樣，並且針對未來一段很短的滾動時域 $[t, t + T]$ ，計算使費用最小化的控制策略（數值最小化演算法）。特別會使用在線或是on the fly的計算來探索由目前狀態演進的狀態軌跡，並且（透過歐拉-拉格朗日方程）計算在時間 $t + T$ 之前的費用最小化策略。控制策略只會實現其中的第一步，之後會再取樣系統的狀態，再由新的狀態去計算新的控制策略，並且預測新的狀態路徑。預測的時間域會漸漸前進，因此模型預測控制也稱為滾動域控制（receding horizon control）。雖然此方法不一定是最佳化的，但在實務上有不錯的效果。有計多的學術研究致力於找到歐拉-拉格朗日形式方程的快速求解方式、找到MPC局部最佳解的全域穩定性，以提昇模型預測控制的效果。有些情形下，理論學家在模型預測控制上的成果已差不多要趕上控制工程師的水準了<sup>[6]</sup>。



離散的模型預測控制

## 模型預測控制的原則

模型預測控制（MPC）是多變數的控制演算法，利用：

- 程序的內在動態模型
- 過去的控制訊號
- 針對滾動預測域的最佳化費用函數J

來計算最佳化的控制訊號

以下是一個最佳化非線性費用函數的例子：

$$J = \sum_{i=1}^N w_{x_i} (r_i - x_i)^2 + \sum_{i=1}^N w_{u_i} \Delta u_i^2$$

沒有限制條件（上下限），而一些變數定義如下

- $x_i$ : 第*i*個受控變數（例如量測溫度）
- $r_i$ : 第*i*個參考變數（例如目標溫度）
- $u_i$ : 第*i*個輸出控制變數（例如控制閥）
- $w_{x_i}$ : 反映 $x_i$ 相對重要性的加權係數
- $w_{u_i}$ : 懲罰 $u_i$ 相對大幅變化的加權係數

## 非線性模型預測控制

非線性模型預測控制（NMPC）是模型預測控制的一種變形，在預測時使用非線性的系統模型。非線性模型預測控制也需要在一個有限的預測時間區間內反覆計算最佳解。這些問題可能在線性模型預測控制中有convex的性質，而在非線性模型預測控制中就沒有convex性質。因此在非線性模型預測控制的穩定性理論以及數值解上都具有挑戰性<sup>[7]</sup>。

非線性模型預測控制的數值解一般是用直接式的最佳控制方式，利用牛頓式的最佳化架構，多半是利用以下方式的變體：打靶法、直接多重打靶法或是選點法<sup>[8]</sup>。非線性模型預測控制演算法一般會用連續最佳控制的解會彼此相似的特性，因為可以用牛頓式的方式有效的求解，作法是用以下計算過的最佳解經適當調整，作為猜測值，因此可以節省許多的運算時間。這類問題的相似性更進一步的被路徑跟踪算法（或是實時迭代法）所使用，路徑跟踪算法中，不會針對某一個最佳化問題計算到收斂，而是在開始新的一步之前，針對最新的非線性模型預測問題進行幾次的迭代<sup>[9]</sup>。

非線性模型預測控制以往主要應用在化工等取樣速度較慢的產業，不過隨著控制器硬體以及計算演算法的進步（例如預處理）<sup>[10]</sup>，非線性模型預測控制也用在一些高取樣速度的應用中，例如車輛產生，或是狀態是分散在空間中不同位置的系統（分佈式參數系統）<sup>[11]</sup>。在航天產業上，非線性模型預測控制也已用在最佳地形跟踪/回避軌迹的實時跟踪<sup>[12]</sup>。

## 顯式模型預測控制

顯式模型預測控制（eMPC）允許對某些系統快速的評估其控制律，這一點和在線MPC有明顯的不同。顯式模型預測控制是以參數規劃技術為基礎，其中MPC控制問題的解（最佳化問題的目標）已在離線時先行計算<sup>[13]</sup>。離線計算的解（控制律）會以分段線性函數（PWA）的形式表示，因此eMPC控制器會儲存在狀態空間中每一個子集（控制區間）內PWA的係數，並令在同一子集內的係數為定值，而所有的區間中的係數可以用某種參數化的方式來表示。若是線性模型預測控制。每個控制區間在幾何上會變成凸多胞形，一般會用其各個面的係數來參數化，因此需要量化精度分析<sup>[14]</sup>。因此求得最佳控制解的作法會簡化為先決定包括目前狀態的區間，再來是用所有區間內的PWA係數來計算PWA。若區間數量不多，eMPC的實現（相較於線上MPC）不會需要很大的計算量，也特別適合有快速動態特性的控制系統<sup>[15]</sup>。不過eMPC有一個嚴重的缺點，其運算量會隨區間總數以及控制系統的一些重要參數（例如狀態數量）呈指數增長，此時需要的記憶體會大幅增加，也讓PWA評估的第一部份（尋找目前的控制區間）需要很大的計算量。

## 強健模型預測控制

模型預測控制（MPC）的強健版本可以在存在有界擾動的情形下，仍確保符合狀態的限制條件。有三種主要的強健模型預測控制作法：



- Min-max模型預測控制。在此作法下，會考慮擾動的所有可能演變來進行最佳化<sup>[16]</sup>。這是線性強健控制問題的最佳解，不過其計算成本很高。
- 约束集紧缩模型預測控制（Constraint Tightening）。此處的狀態限制加大到一定範圍，以確保在任何擾動的演變下，都可以找到解的軌跡<sup>[17]</sup>
- Tube模型預測控制。此作法會用一個獨立的系統主要模型，再利用回授控制器來確保實際狀態會收斂到主要狀態<sup>[18]</sup>。狀態限制需要區分的數量會由強健正不變（RPI）集來決定，是回授控制器的擾動帶來所有可能狀態偏差的集合。
- 多階段模型預測控制。使用场景树公式，用一組取樣數據來近似不確定空間，此作法是non-conservative的，因為在預測時，會考慮每一時間下可能有的量測資訊，每個階段的決策可能是不同的，可以作為抵制不確定性影響的手段。此作法的缺點是問題的大小會隨不確定性的數量以及預測范围呈指數成長<sup>[19]</sup>

## 商品化的模型預測控制軟體

---

目前已可購得商品化的模型預測控制軟體，一般也會包括模型識別及分析、控制器設計及調適的工具，也會有控制器性能評估的工具。

S.J. Qin and T.A. Badgwell在Control Engineering Practice期刊中（2003年，733–764）有針對商品化軟體的調查<sup>[20]</sup>。

## 和LQR控制器的差異

---

模型預測控制器和LQR控制器的主要差異是LQR控制器針對固定的時間區間進行最佳化，而模型預測控制器針對不同的時間區間分別進行最佳化<sup>[4]</sup>，因此在不同時間區間內，模型預測控制器可能會產生新的解，而LQR控制器會使用針對所有時間區間下的最佳解。因此模型預測控制器可以在存在硬约束的情形下進行實時的最佳化<sup>[4]</sup>，不過多半是在較小的時間區域中求解最佳化問題，而不是在整個時間區域內求解，因此有時只能得到次佳的解。

## 相關條目

---

- [控制工程](#)
- [控制理论](#)
- [前馈控制](#)
- [系統識別](#)

## 參考資料

---

1. Michèle Arnold, Göran Andersson. "Model Predictive Control for energy storage including uncertain forecasts" [存档副本](#) (PDF). [2013年5月17日]. （[原始内容](#) (PDF)存档于2013年10月14日）.
2. Tobias Geyer: Model predictive control of high power converters and industrial drives, Wiley, London, [ISBN 978-1-119-01090-6](#), Nov. 2016.