



## 第六章 频率特性分析法

## CHAPTER 6 Frequency Response





## 第五章回顾

---



- ✓ 幅值条件、相位条件
- ✓ 根轨迹的定义
- ✓ 根轨迹的绘制规则
- ✓ 广义根轨迹
- ✓ 基于根轨迹的性能分析
- ✓ 基于根轨迹的补偿
- ✓ 一种图解方法



## 第六章关键词 (Key Words)

---



- ✓ 频率、频率响应、频率特性
- ✓ 幅频特性、相频特性
- ✓ 对数频率特性 (BODE图)
- ✓ 极坐标图 (奈魁斯特图)
- ✓ 奈魁斯特稳定判据
- ✓ 稳定裕度 (幅值裕度、相位裕度)
- ✓ 频域性能



## 第六章主要内容



- ✓ 概述
- ✓ Bode 图 (对数坐标图)
- ✓ 极坐标图
- ✓ Nyquist稳定性判据
- ✓ 基于频率响应的补偿器设计
- ✓ 系统的闭环频率特性





## 概述: Hendrik Wade Bode (1905-1982)



- an American engineer, researcher, inventor, author and scientist, of Dutch ancestry. As a pioneer of modern control theory and electronic telecommunications
- He received his B.A Degree in 1924, M.A, 1926, Ohio State University
- Sponsored by **Bell Lab.**, he successfully completed his Ph.D, in physics in 1935.
- In 1938, he developed his **asymptotic phase and magnitude plots.**
- [http://en.wikipedia.org/wiki/Hendrik\\_Wade\\_Bode](http://en.wikipedia.org/wiki/Hendrik_Wade_Bode)





## 概述: Harry Nyquist (1889-1976)



- He received a Ph.D. in physics at Yale University in 1917.
- He developed the **Nyquist stability criterion** for feedback systems in the 1930s.
- He worked at **AT&T's** Department of Development and Research from 1917 to 1934, and continued when it became **Bell Telephone Laboratories** in that year, until his retirement in 1954.
- [http://en.wikipedia.org/wiki/Harry\\_Nyquist](http://en.wikipedia.org/wiki/Harry_Nyquist)





基于图形的系统性能预测和调整有两个基本方法：

## ➤ 根轨迹法

优点：

- ✓ 当参数（增益）变化时，显示闭环系统特征根的位置
- ✓ 精确地给出系统瞬态响应的相关信息。由于特征根的精确位置已大概知道，通过拉氏反变换很容易获取系统的时域响应。

缺点：

- ✓ 不能提供稳态性能的信息
- ✓ 无法处理测量噪声和扰动抑制



## ➤ 频率响应法

- ✓ 可以从同一张图中推断出系统的稳定性和稳态性能
- ✓ 容易处理频率范围的约束
- ✓ 允许对噪声影响进行评价，通过设计一个滤波带来消除噪声，提高系统性能
- ✓ 当系统模型未知时，可以用测量数据建模（数据建模的一种，对系统辨识是有利的）
- ✓ 与根轨迹方法相比，可以处理纯滞后
- ✓ 用图示法分析和设计系统，使用方便





本章：

- 传递函数的两种图示方法：
  - ❖ 对数坐标图 (the logarithmic plots)
  - ❖ 极坐标图 (the polar plots)
- Nyquist稳定判据
- 频域性能



# 概述——频率特性

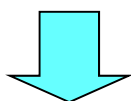


考虑系统

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = G(s)$$

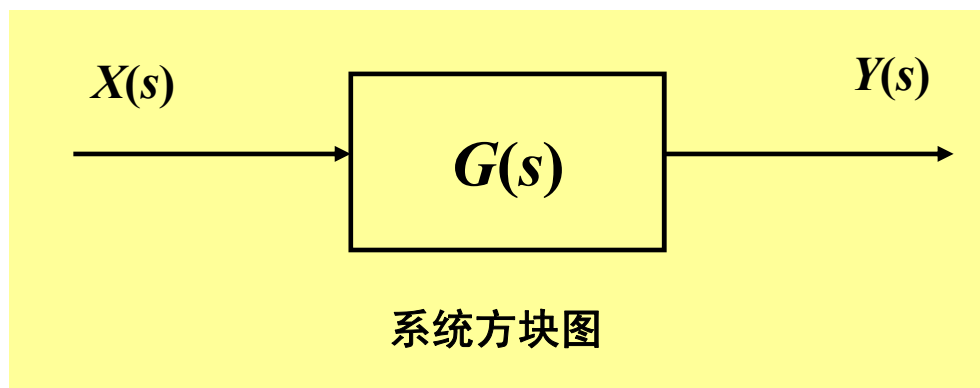
若输入为

$$x(t) = X \sin \omega t$$



LT

$$X(s) = \frac{X\omega}{s^2 + \omega^2} = \frac{X\omega}{(s + j\omega)(s - j\omega)}$$



$$G(s) = \frac{A(s)}{B(s)} = \frac{A(s)}{(s - s_1)(s - s_2) \cdots (s - s_n)}$$

$$\begin{aligned} Y(s) &= G(s)X(s) \\ &= \frac{A(s)}{(s - s_1)(s - s_2) \cdots (s - s_n)} \cdot \frac{X\omega}{(s + j\omega)(s - j\omega)} \\ &= \frac{b}{s + j\omega} + \frac{\bar{b}}{s - j\omega} + \frac{a_1}{s - s_1} + \frac{a_2}{s - s_2} + \cdots + \frac{a_n}{s - s_n} \end{aligned}$$



## 概述——频率特性

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = G(s)$$



$$Y(s) = G(s)X(s) = \frac{b}{s + j\omega} + \frac{\bar{b}}{s - j\omega} + \frac{a_1}{s - s_1} + \frac{a_2}{s - s_2} + \dots + \frac{a_n}{s - s_n}$$



$$y(t) = be^{-j\omega t} + \bar{b}e^{j\omega t} + a_1e^{s_1t} + a_2e^{s_2t} + \dots + a_ne^{s_nt}$$

对于稳定系统，当 $t$ 趋于无穷大时，所有瞬态项都趋于零，仅稳态响应保留。

$t \rightarrow \infty$

$$y_{\infty}(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = be^{-j\omega t} + \bar{b}e^{j\omega t}$$

其中  $b$  可以通过留数定理或其他方法获得。



## 概述——频率特性

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = G(s)$$



$$\left\{ \begin{aligned} b &= G(s) \frac{X\omega}{(s+j\omega)(s-j\omega)} \cdot (s+j\omega) \Big|_{s=-j\omega} = -\frac{G(-j\omega)X}{2j} \\ \bar{b} &= G(s) \frac{X\omega}{(s+j\omega)(s-j\omega)} \cdot (s-j\omega) \Big|_{s=j\omega} = \frac{G(j\omega)X}{2j} \end{aligned} \right.$$

其中  $G(j\omega)$  是复数，可以表示为

$$G(j\omega) = |G(j\omega)| \cdot e^{j\phi(\omega)}$$

$$\phi(\omega) = \angle G(j\omega) = \arctg \left[ \frac{\text{Im } G(j\omega)}{\text{Re } G(j\omega)} \right]$$

同样地,  $G(-j\omega)$ :  $G(-j\omega) = |G(-j\omega)| \cdot e^{-j\phi(\omega)} = |G(j\omega)| e^{-j\phi(\omega)}$

$$y_{\infty}(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = be^{-j\omega t} + \bar{b}e^{j\omega t} \rightarrow$$



## 概述——频率

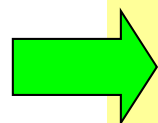
$$\bar{b} = \frac{G(j\omega)X}{2j}$$

$$b = -\frac{G(-j\omega)X}{2j}$$

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = G(s)$$

CSE

$$y_{\infty}(t) = be^{-j\omega t} + \bar{b}e^{j\omega t} = -|G(j\omega)|e^{-j\phi(\omega)} \cdot \frac{Xe^{-j\omega t}}{2j} + |G(j\omega)| \cdot e^{j\phi(\omega)} \cdot \frac{Xe^{j\omega t}}{2j}$$



$$= |G(j\omega)|X \cdot \frac{e^{j(\omega t + \phi)} - e^{-j(\omega t + \phi)}}{2j}$$

$$= \underline{|G(j\omega)|X} \cdot \sin(\omega t + \phi)$$

$$x(t) = X \sin \omega t$$



表示稳态响应的幅值

或

$$y_{\infty}(t) = \textcircled{Y} \sin(\omega t + \phi)$$

对于稳定的线性定常系统，由谐波输入产生的输出稳态分量仍然是与输入同频率的谐波函数，而幅值与相位的变化是频率 $\omega$ 的函数

其中  $G(j\omega) = |G(j\omega)|e^{j\angle G(j\omega)} = |G(j\omega)|e^{j\phi(\omega)}$  通常被称为**频率特性**

获得 $G(j\omega)$ 的两种方法：分析法和实验法。



## 定义:

当输入为所有频率的正弦波时，系统的频率响应即为系统的稳态响应；或谐波输入下输出响应中与输入同频率的谐波分量与谐波输入的幅值之比 $M(\omega)$ 为幅频特性，相位之差 $\varphi(\omega)$ 为相频特性

例如:

输入:  $u_i(t) = A \sin \omega t$

输出:  $u_o(t) = A \cdot M(\omega) \sin[\omega t + \varphi(\omega)]$

$M(\omega)$

频率响应的幅值比

$\varphi(\omega)$

频率响应的相位

当系统 $G(s)$ 的输入为一频率 $\omega$ 的正弦信号时，稳态输出为同频率的正弦信号，其幅值增大 $|G(j\omega)|$ ，相位滞后 $\angle G(j\omega)$ 。



# 概述——频率特性



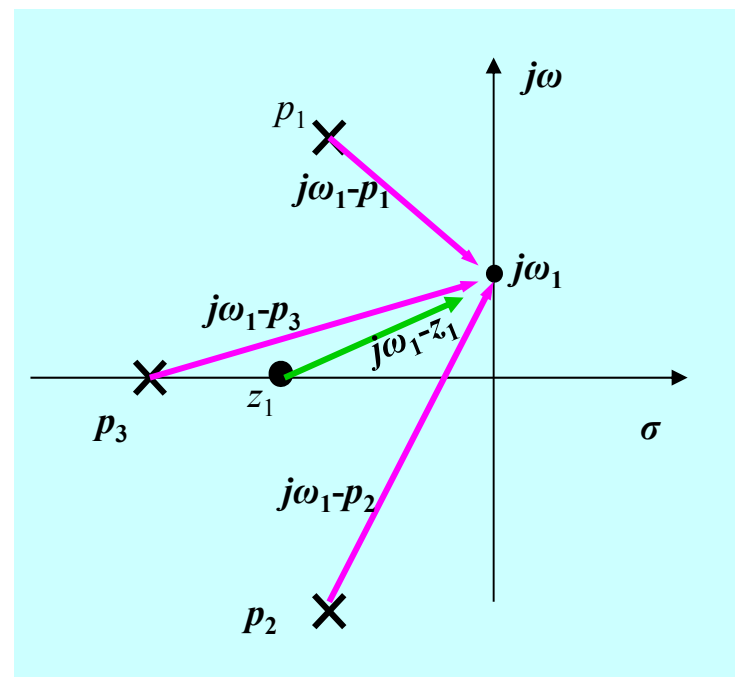
线性稳定系统传递函数:

$$G(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{K(s - z_1)(s - z_2) \cdots (s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2) \cdots (s - p_n)}$$

频率响应:

$$\begin{aligned} M(\omega) &= \left| \frac{B(j\omega)}{A(j\omega)} \right| = \left| \frac{K(j\omega - z_1) \cdots (j\omega - z_m)}{(j\omega - p_1) \cdots (j\omega - p_n)} \right| \\ &= |G(j\omega)| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi(\omega) &= \angle B(j\omega) - \angle A(j\omega) = \angle G(j\omega) \\ &= \angle K + \angle(j\omega - z_1) + \cdots \angle(j\omega - z_m) - \angle(j\omega - p_1) - \cdots - \angle(j\omega - p_n) \end{aligned}$$



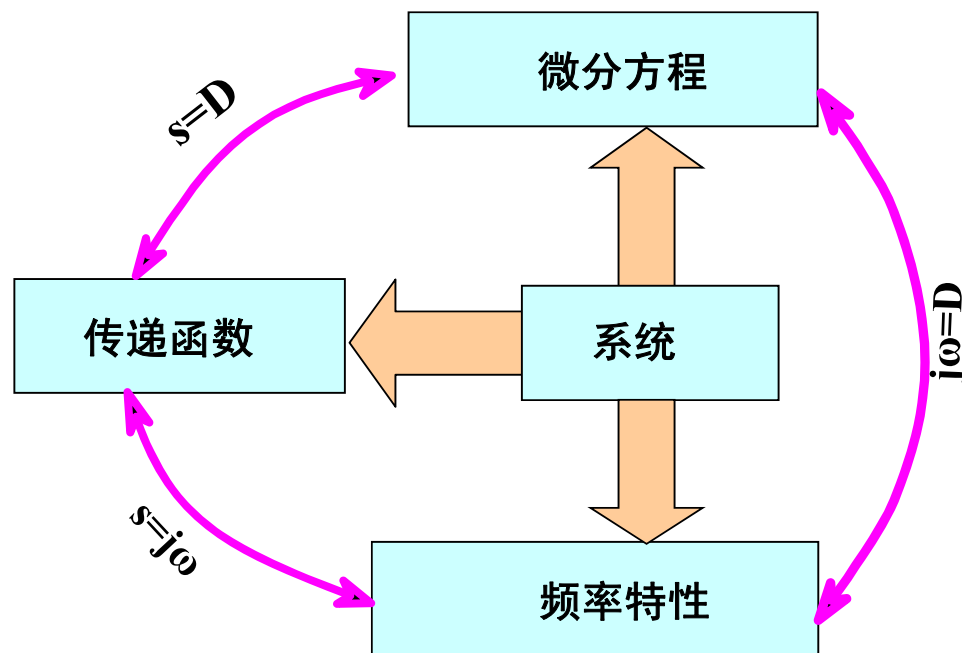


一旦系统的频率响应确定，则通过傅立叶反变换可以求出系统的时域响应。

$$R(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} r(t)e^{-j\omega t} dt$$

$$\begin{aligned} Y(j\omega) &= \Phi(j\omega)R(j\omega) \\ &= \frac{G(j\omega)}{1 + G(j\omega)H(j\omega)} R(j\omega) \end{aligned}$$

$$y(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Y(j\omega)e^{j\omega t} d\omega$$







# 概述——频率特性



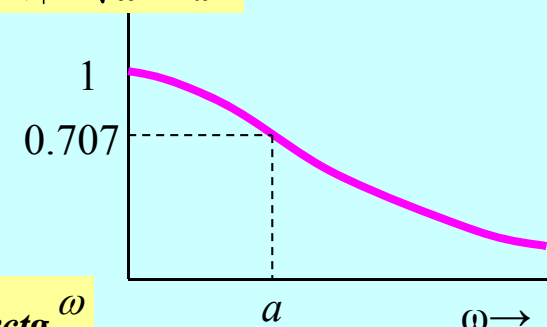
频域图示方法可以分为两类：

- 1) 在直角坐标系中，频率与输出输入比的幅值之间的关系图，以及相应的相角与频率之间的关系图，例如

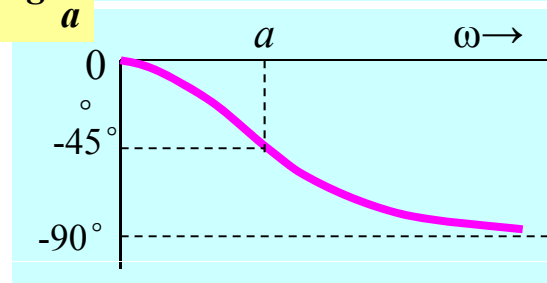
输入： $X(j\omega)$       输出： $Y(j\omega)$

$$G(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = \frac{a}{s+a} = \frac{a}{j\omega+a}$$

$$M(\omega) = \left| \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} \right| = \frac{a}{\sqrt{\omega^2 + a^2}}$$



$$\varphi(\omega) = \angle \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = -\arctg \frac{\omega}{a}$$



在对数坐标系中被称为**bode图**或**对数频率特性曲线**（由对数幅频曲线和对数相频曲线组成）



# 概述——频率特性



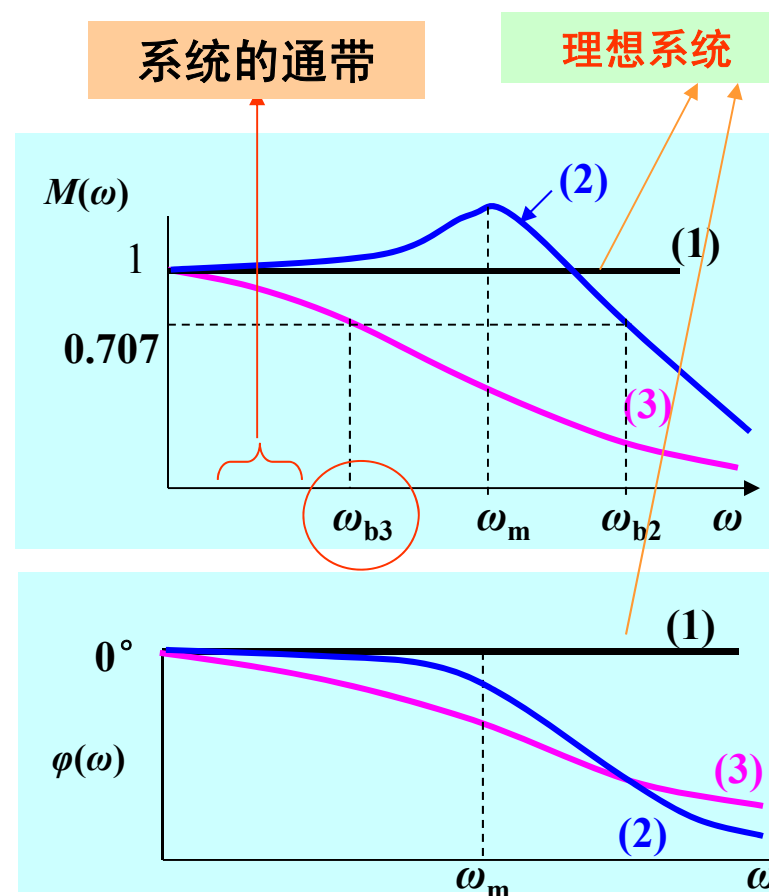
对一给定的正弦输入，输入与稳态输出具有以下形式：

$$x(t) = X \sin \omega t \quad y(t) = Y \sin(\omega t + \varphi)$$

闭环系统频率响应

$$\frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = \frac{G(j\omega)}{1 + G(j\omega)H(j\omega)} = M(\omega) \angle \varphi(\omega)$$

$Y(j\omega)/R(j\omega)$  的频率响应特性（直角坐标）如图所示





## 概述——频率特性



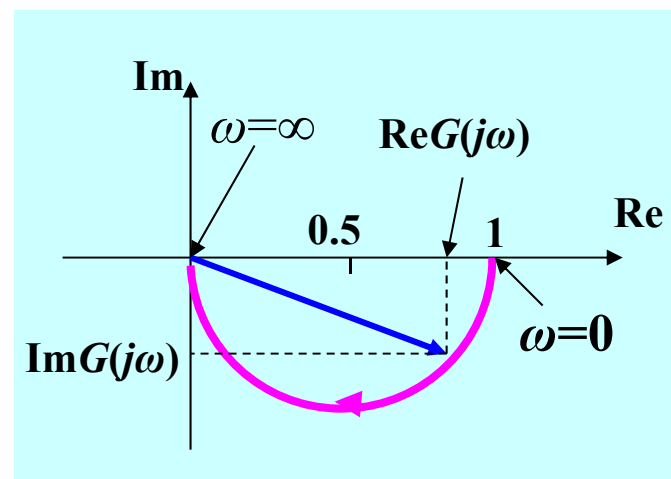
- 2) 在极坐标系中以频率为参数绘制输出输入比被称为 **Nyquist 图**  
(或幅相频率特性曲线) ——通常在开环系统响应中应用

### 例 6-1: 传递函数 $G(s)$

$$G(s) = \frac{1}{1+Ts} \longrightarrow G(j\omega) = \frac{1}{1+j\omega T} = \frac{1-j\omega T}{1+(T\omega)^2}$$

$$\left[ \operatorname{Re} G(j\omega) - \frac{1}{2} \right]^2 + \operatorname{Im}^2 G(j\omega) = \left( \frac{1}{2} \right)^2$$

Nyquist 图是以  $(0.5, j0)$  为圆心, 以 0.5 为半径的圆





## 概述——频率特性

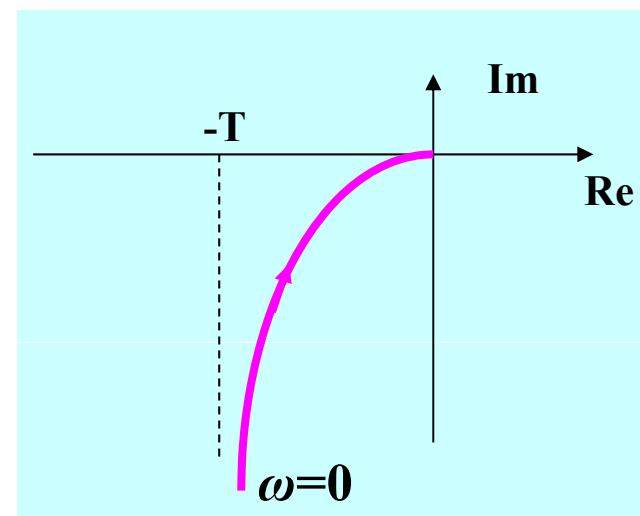


### 例 6-2: 传递函数 $G(s)$

$$G(s) = \frac{1}{s(Ts + 1)} \quad \longrightarrow \quad G(j\omega) = \frac{1}{j\omega(j\omega T + 1)} = \frac{-T}{1 + \omega^2 T^2} - j \frac{1}{\omega(1 + \omega^2 T^2)}$$

$$\longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} G(j\omega)|_{\omega \rightarrow 0} = -T - j\infty = \infty \angle (-90^\circ) \\ G(j\omega)|_{\omega \rightarrow \infty} = -0 - j0 = 0 \angle (-180^\circ) \end{array} \right.$$

以频率为参数，纵坐标为对数幅值横坐标为相角（对数幅值 vs 相角），被称为 *Nichols* 图或者对数幅相曲线——第三种频域表现形式。





## 第六章主要内容



- ✓ 概述
- ✓ Bode 图 (对数坐标图)-1
- ✓ Bode 图 (对数坐标图)-2
- ✓ 极坐标图
- ✓ Nyquist稳定性判据
- ✓ 基于频率响应的补偿器设计
- ✓ 系统的闭环频率特性



Wintersweet



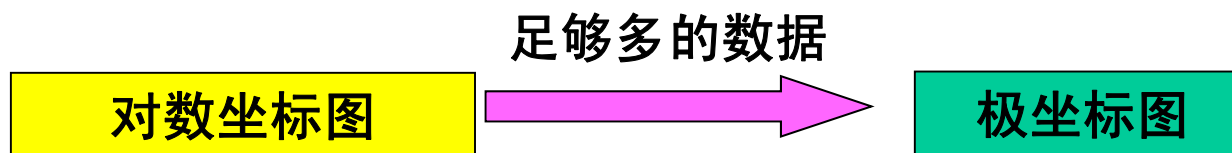
# Bode图（对数坐标图）



## 对数坐标图的优点

- 1) 将乘积和除法的数学操作转化为加法和减法；
- 2) 传递函数的获取大多采用图解法，而不是分析法；
- 3) 半对数坐标扩展了低频段

首先运用直线近似的方法来获得系统的近似特性，然后修正直线，提高精度。





# Bode图（对数坐标图）



对数坐标图的定义：

**对数：**复数的对数仍然是复数，缩写“log”表示以10为底的对数

$$\begin{aligned}\log|G(j\omega)|e^{j\phi(\omega)} &= \log|G(j\omega)| + \log e^{j\phi(\omega)} \\ &= \log|G(j\omega)| + j0.434\phi(\omega)\end{aligned}$$

**Decibel (dB)：**对数幅值的单位（分贝）

常常省略

**对数幅频：**传递函数  $G(j\omega)$  幅值的对数 (幅频特性)，以分贝来表示

$$20\log|G(j\omega)| \quad \text{dB}$$

称为**对数幅频**，缩写**Lm**。因此

$$LmG(j\omega) = 20\log|G(j\omega)| \quad \text{dB}$$

$$L(\omega) = 20\log|G(j\omega)| \quad \text{dB}$$

由于传递函数是频率的函数，因此 Lm 也是频率的函数。

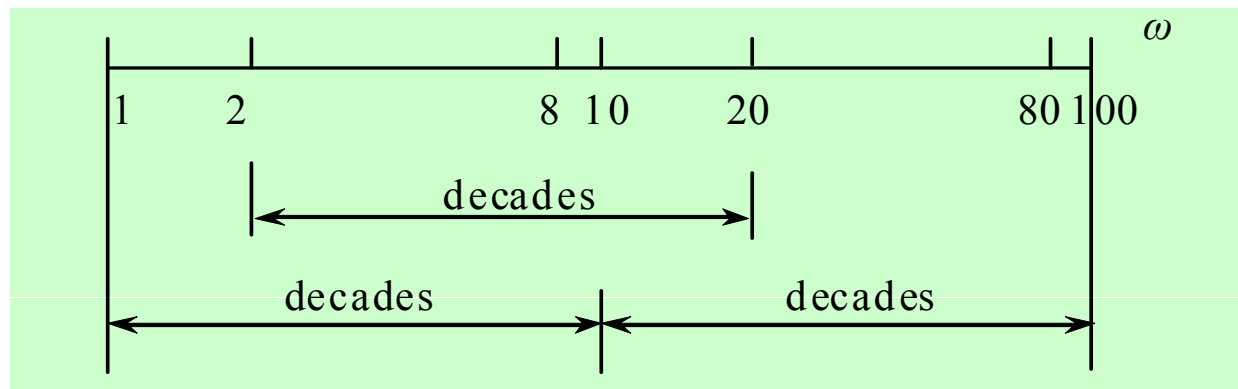


## Bode图（对数坐标图）



**Octave (倍频):** 倍频是 $f_1$ 到 $f_2$ 的频带, 其中  $f_2/f_1=2$ 。例如: 频带 1 到 2 Hz 是 1个倍频宽度, 频带17.4 到 34.8 Hz 也是一个倍频宽度。

**Decade(十倍频):** 当 $f_2/f_1=10$ 时, 则频带 $f_1$ 到 $f_2$ 称为一个十倍频。频带1到10 Hz或者 2.5到25 Hz 称为一个十倍频宽度。







# Bode图（对数坐标图）



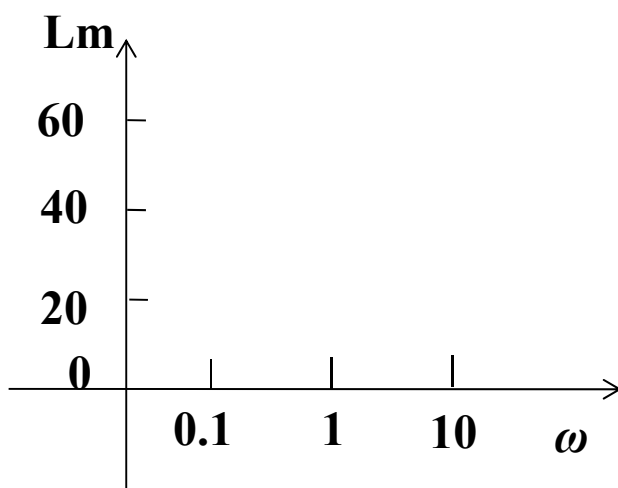
Bode图（对数频率特性曲线）：

对数频率特性曲线由对数幅频曲线和对数相频曲线组成

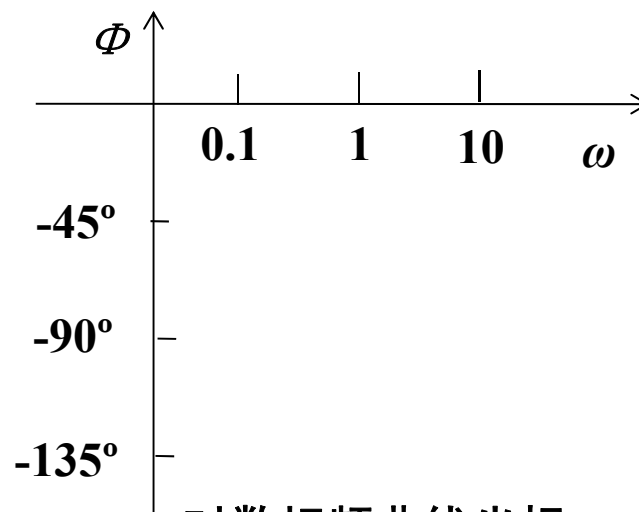
对数频率特性曲线的**横坐标**：按 $\log \omega$ 分度，单位为弧度/秒（rad/s）

对数幅频曲线的**纵坐标**：按 $LmG(j\omega)=20\log|G(j\omega)|$ 线性分度，单位是分贝

对数相频曲线的**纵坐标**：按 $\Phi(\omega)$ 线性分度，单位为度



对数幅频曲线坐标



对数相频曲线坐标



# Bode图（对数坐标图）

$$\text{Lm}G(j\omega) = 20 \log |G(j\omega)| \quad \text{dB}$$



频域响应:

$$G(j\omega) = \frac{K_m (1 + j\omega T_1)(1 + j\omega T_2)^r \cdots}{(j\omega)^m (1 + j\omega T_a) [1 + (2\zeta / \omega_n) j\omega + (1 / \omega_n^2)(j\omega)^2] \cdots}$$

对数幅值:

$$\begin{aligned} \text{Lm}G(j\omega) = & \text{Lm}K_m + \text{Lm}(1 + j\omega T_1) + r\text{Lm}(1 + j\omega T_2) + \cdots - m\text{Lm}(j\omega) \\ & - \text{Lm}(1 + j\omega T_a) - \text{Lm}\left[1 + \frac{2\zeta}{\omega_n} j\omega + \frac{1}{\omega_n^2} (j\omega)^2\right] - \cdots \end{aligned}$$

相角方程:

$$\begin{aligned} \angle G(j\omega) = & \angle K_m + \underbrace{\angle(1 + j\omega T_1)}_{\tan^{-1} \omega T_1} + r\angle(1 + j\omega T_2) + \cdots - \underbrace{m\angle(j\omega)}_{m 90^\circ} \\ & - \angle(1 + j\omega T_a) - \underbrace{\angle\left[1 + \frac{2\zeta}{\omega_n} j\omega + \frac{1}{\omega_n^2} (j\omega)^2\right]}_{\tan^{-1} \frac{2\zeta \omega / \omega_n}{1 - \omega^2 / \omega_n^2}} - \cdots \end{aligned}$$

$0^\circ / 180^\circ$




## 绘制Bode图



一般形式的传递函数

$$G(j\omega) = \frac{K_m (1 + j\omega T_1)(1 + j\omega T_2)^r \cdots}{(j\omega)^m (1 + j\omega T_a)[1 + (2\zeta / \omega_n)j\omega + (1 / \omega_n^2)(j\omega)^2] \cdots}$$

典型环节:


$$\begin{array}{l} K_m \quad (j\omega)^{\pm m} \quad (1 + j\omega T)^{\pm r} \quad \left[ 1 + \frac{2\zeta}{\omega_n} j\omega + \frac{1}{\omega_n^2} (j\omega)^2 \right]^{\pm p} \\ K_m \quad (j\omega)^{\pm 1} \quad (1 + j\omega T)^{\pm 1} \quad \left[ 1 + \frac{2\zeta}{\omega_n} j\omega + \frac{1}{\omega_n^2} (j\omega)^2 \right]^{\pm 1} \end{array}$$

典型环节的Bode图叠加在一起就可以得到整个频率特性的Bode图，特别是采用对数幅频渐近特性曲线的时候。



## 绘制Bode图——比例环节

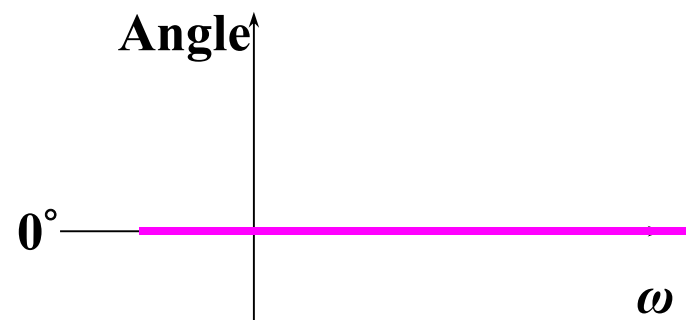
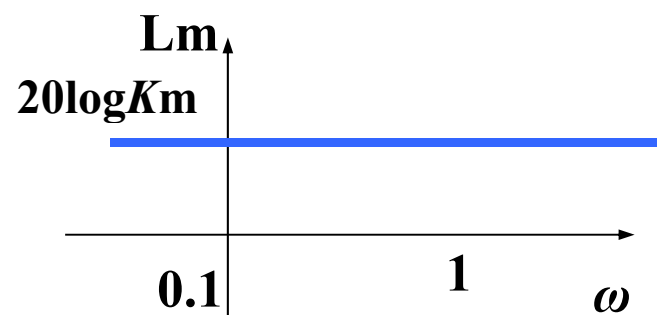


比例环节:  $K_m$

$$LmK_m = 20 \log K_m \text{ dB}$$

- 对数幅频曲线是一条水平线。
- 当 $K_m$ 为正时，相角为零。

➤ 比例增大或减小，传递函数的 $Lm$ 曲线上下移动。





## 绘制Bode图——微分/积分环节



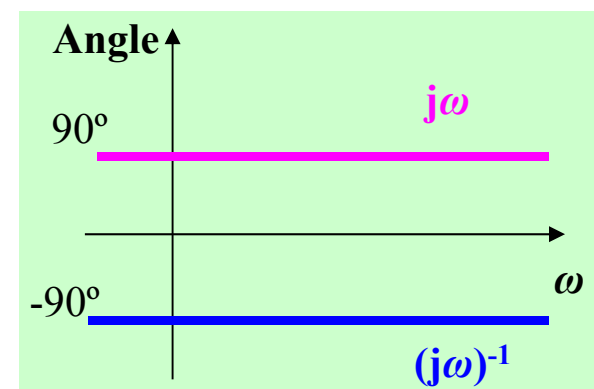
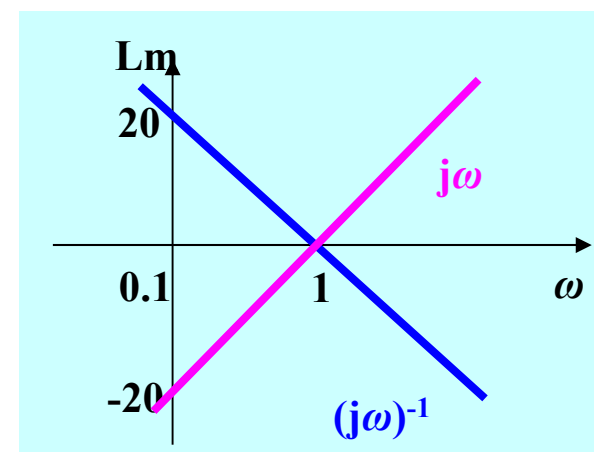
**$j\omega$  环节：有两种形式： $(j\omega)^{\pm 1}$**

$$Lm(j\omega)^{-1} = 20\log|(j\omega)^{-1}| = -20\log\omega \quad \text{dB}$$

- 对数幅频曲线为一条斜线，其斜率为 -6dB/octave 或者 -20dB/decade。
- 相角恒等于  $-90^\circ$ 。

$$Lm(j\omega) = 20\log|(j\omega)| = 20\log\omega \quad \text{dB}$$

- 对数幅频曲线为一条斜线，其斜率为 6dB/octave 或者 20dB/decade。
- 相角恒等于  $+90^\circ$ 。





## 绘制Bode图——一阶微分/惯性环节



**$1+j\omega T$  环节：有两种形式 $(1+j\omega T)^{\pm 1}$ 。**

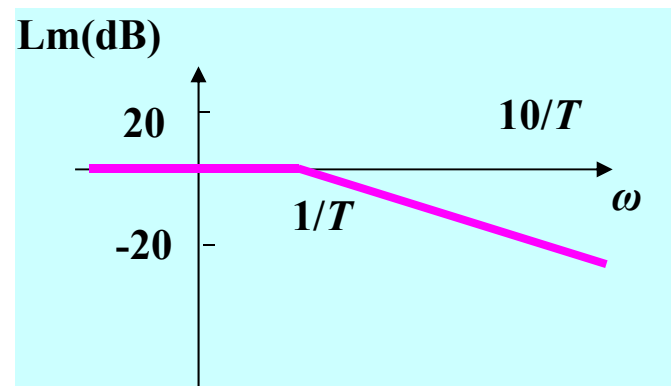
$$Lm(1+j\omega T)^{-1} = 20\log|1+j\omega T|^{-1} = -20\log\sqrt{1+\omega^2 T^2} \quad \text{dB}$$

可以计算出  $\omega$  对应的  $Lm$ ，然后绘制出频率响应。但是绘制对数幅频渐近特性曲线会更容易，也更常用。

当  $\omega$  很小时，也就是说  $\omega T \ll 1$

$$Lm(1+j\omega T)^{-1} \approx 20\log 1 = 0 \quad \text{dB}$$

对数幅频渐近特性曲线  $Lm$  在低频段为 0 dB 线



当  $\omega$  很大时，即  $\omega T \gg 1$

$$Lm(1+j\omega T)^{-1} \approx 20\log|j\omega T|^{-1} = -20\log\omega T \quad \text{dB}$$

$\omega > 1/T$  时， $Lm$  是斜率为  $-20\text{dB/decade}$  的直线

- 转折频率  $\omega_{cf}$  (交接频率)：对数幅频渐近特性曲线发生转折 (intersect) 的频率。本例的转折频率为  $\omega_{cf} = 1/T$



## 绘制Bode图——一阶微分/惯性环节



**$1+j\omega T$  环节：有两种形式 $(1+j\omega T)^{\pm 1}$ 。**

$$Lm(1+j\omega T)^{-1} = 20 \log|1+j\omega T|^{-1} = -20 \log \sqrt{1+\omega^2 T^2} \quad \text{dB}$$

$$\angle(1+j\omega T)^{-1} = -\tan^{-1} \omega T$$

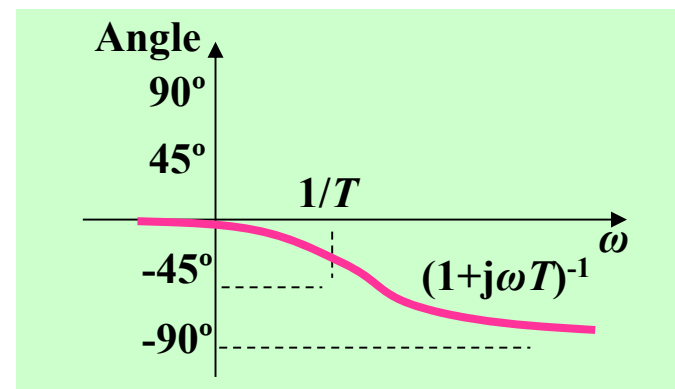
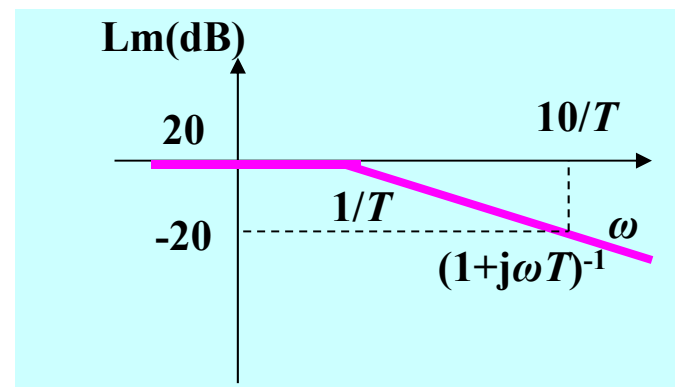
对数相频曲线特点：

频率为0时，相角为  $0^\circ$ ；

转折频率处  $\omega = \omega_{cf}$ ，相角为  $-45^\circ$ ；

频率为 $\infty$ 时，相角为  $-90^\circ$ 。

$Lm(1+j\omega T)^{-1}$  的渐近特性曲线为两条直线，一条是 $\omega < 1/T$ 时的斜率为0的直线，另一条是 $\omega > 1/T$ 时的斜率为 $-6\text{dB/octave}$  或  $-20\text{dB/decade}$  的直线。





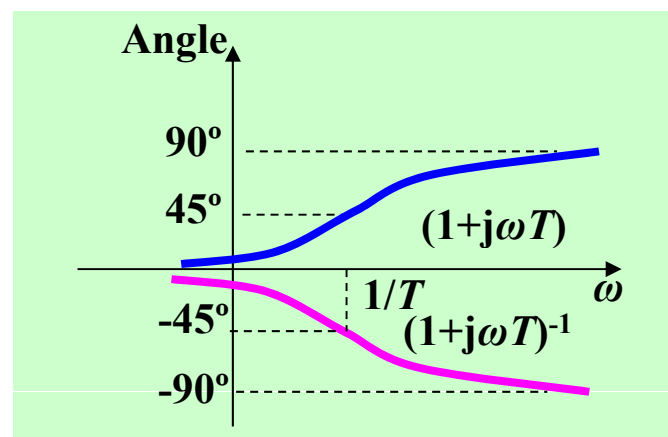
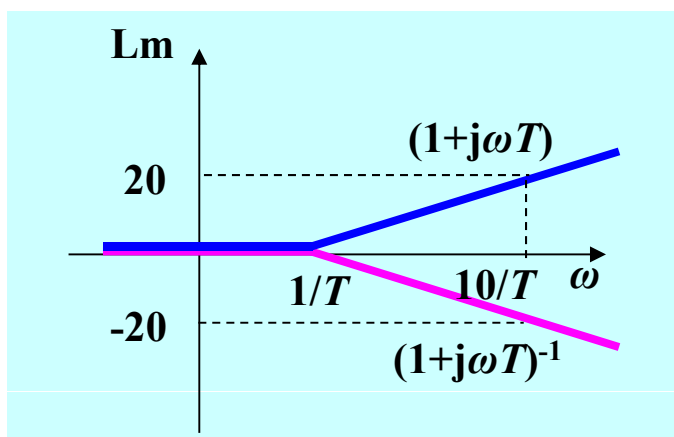
## 绘制Bode图——一阶微分/惯性环节



$1+j\omega T$  环节：有两种形式 $(1+j\omega T)^{\pm 1}$ 。

同样地，环节 $1+j\omega T$ ：

$$Lm(1+j\omega T) = 20 \log \sqrt{1 + \omega^2 T^2} \quad \text{dB}$$



转折频率相同，当频率从0到 $\infty$ 变化时，相角变化为0到 $90^\circ$

环节 $(1+j\omega T)$ 和 $(1+j\omega T)^{-1}$ 的对数幅频渐近特性曲线和对数相频曲线关于横坐标对称





# 绘制Bode图——一阶微分/惯性环节



**$1+j\omega T$  环节：有两种形式 $(1+j\omega T)^{\pm 1}$ 。**

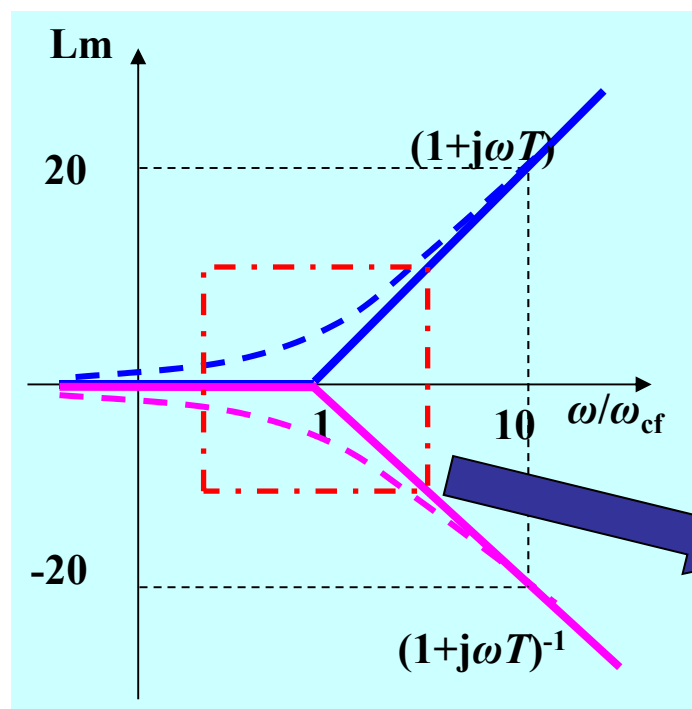
精确曲线与渐近特性曲线的偏差如下

✓ 在转折频率处：3dB

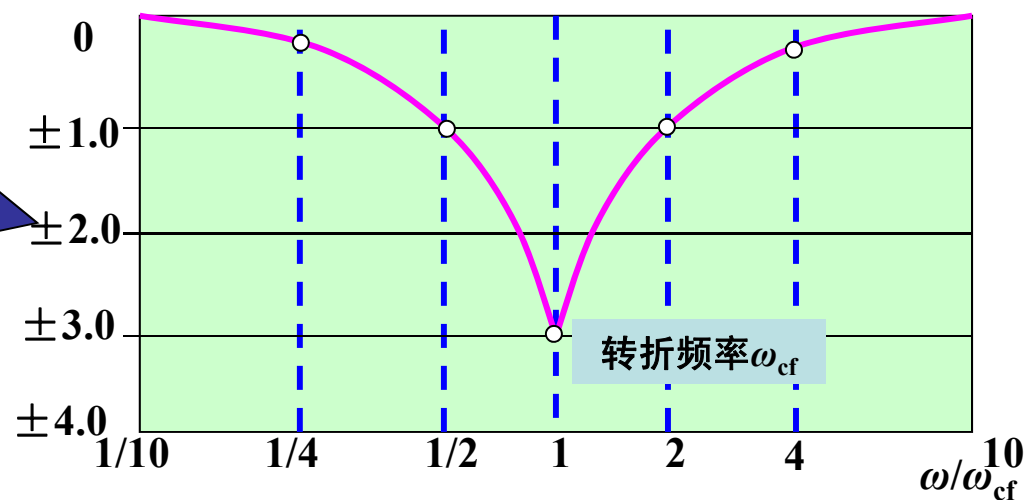
$$Lm(1+j\omega T)\Big|_{\omega=\frac{1}{T}} = 20\log\sqrt{2} = 3 \text{ dB}$$

✓ 距转折频率1倍频octave处：1dB

✓ 距转折频率2倍频octave处：0.26dB



精确曲线与渐近特性曲线





# 绘制Bode图——一阶微分/惯性环节

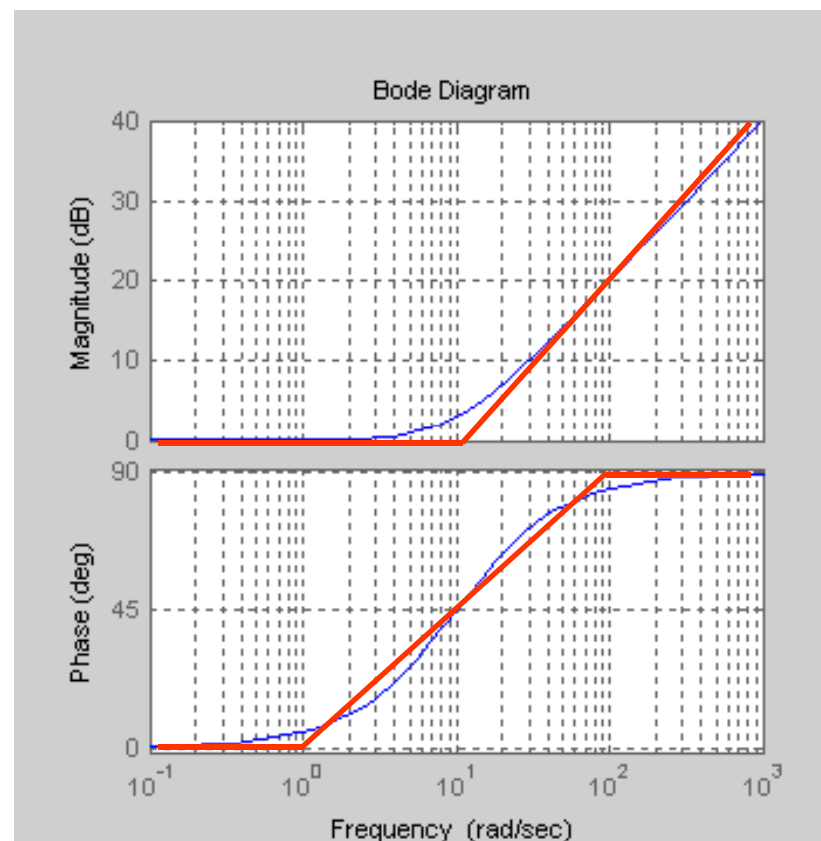
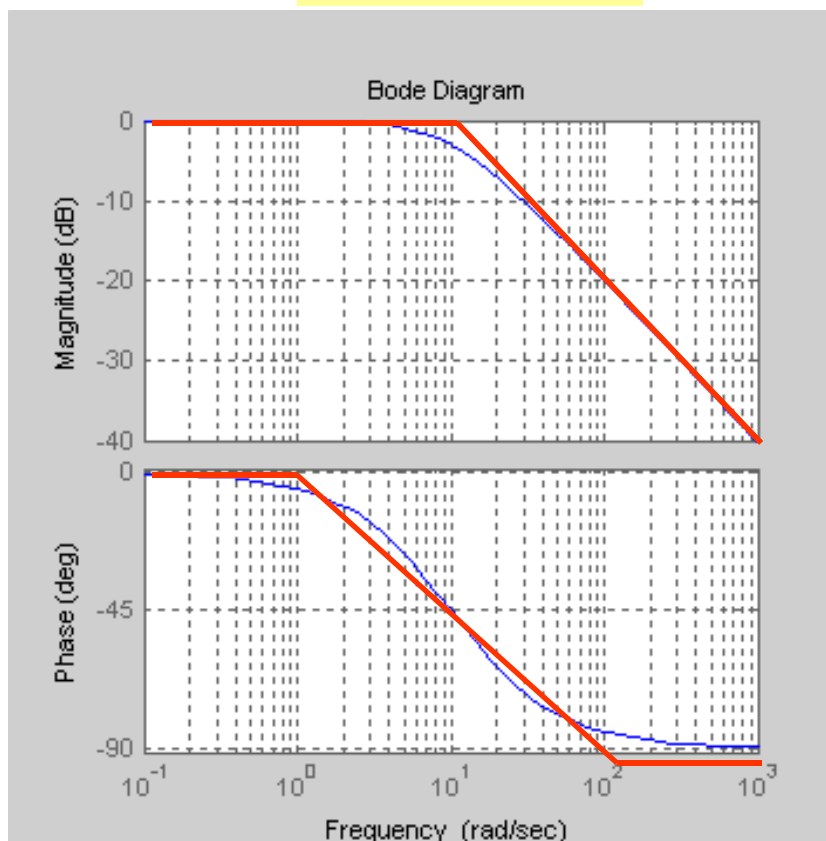


**$1+j\omega T$  环节：有两种形式 $(1+j\omega T)^{\pm 1}$ 。**

例6-3

$$G_1(s) = \frac{1}{1+0.1s}$$

$$G_2(s) = 1+0.1s$$





# 绘制Bode图——二阶环节/微分环节



## 二阶环节: $\zeta > 1$

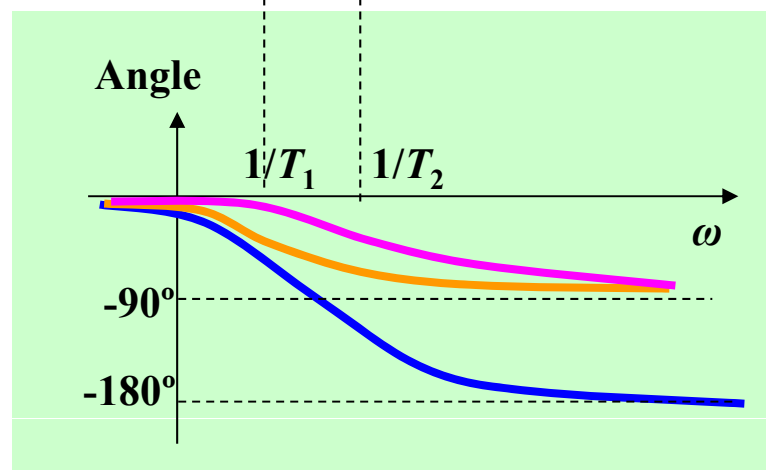
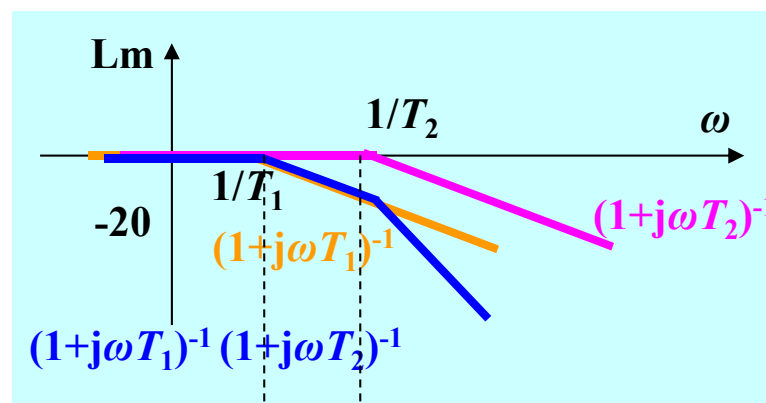
$$\left[ 1 + \frac{2\zeta}{\omega_n} j\omega + \frac{1}{\omega_n^2} (j\omega)^2 \right]^{-1}$$

当  $\zeta > 1$  时，二阶环节可以分解为两个具有实数零点的一阶环节，然后用前面介绍过的方法绘图

$$\left[ 1 + \frac{2\zeta}{\omega_n} j\omega + \frac{1}{\omega_n^2} (j\omega)^2 \right]^{-1} = \frac{1}{1 + j\omega T_1} \cdot \frac{1}{1 + j\omega T_2}$$

$$Lm \left[ 1 + \frac{2\zeta}{\omega_n} j\omega + \frac{1}{\omega_n^2} (j\omega)^2 \right]^{-1} = Lm \frac{1}{1 + j\omega T_1} + Lm \frac{1}{1 + j\omega T_2}$$

$$Angle \left[ 1 + \frac{2\zeta}{\omega_n} j\omega + \frac{1}{\omega_n^2} (j\omega)^2 \right]^{-1} = Angle \frac{1}{1 + j\omega T_1} + Angle \frac{1}{1 + j\omega T_2}$$





## 绘制Bode图——二阶微分/振荡

### 二阶环节: $\zeta < 1$

当  $\zeta < 1$ ，二阶环节包含一对共轭复根。对数幅频曲线  $L_m$  和相频曲线可以表示为：

$$L_m \left[ 1 + \frac{2\zeta}{\omega_n} j\omega + \frac{1}{\omega_n^2} (j\omega)^2 \right]^{-1} = -20 \log \left[ \left( 1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} \right)^2 + \left( \frac{2\zeta\omega}{\omega_n} \right)^2 \right]^{1/2}$$

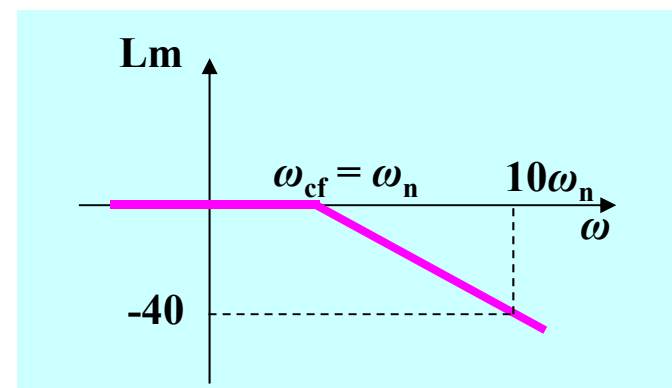
$$\text{Angle} \left[ 1 + \frac{2\zeta}{\omega_n} j\omega + \frac{1}{\omega_n^2} (j\omega)^2 \right]^{-1} = -\tan^{-1} \frac{2\zeta\omega / \omega_n}{1 - \omega^2 / \omega_n^2}$$

➤ 当  $\omega$  很小时，低频段渐近线可以用  $L_m = 0\text{dB}$  来表示。

➤ 高频段，对数幅频曲线  $L_m$  可以近似为

$$L_m \left[ 1 + \frac{2\zeta}{\omega_n} j\omega + \frac{1}{\omega_n^2} (j\omega)^2 \right]^{-1} = -20 \log \sqrt{\left( 1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} \right)^2 + 4\zeta^2 \frac{\omega^2}{\omega_n^2}}$$

$$\approx -20 \log \frac{\omega^2}{\omega_n^2} = -40 \log \frac{\omega}{\omega_n}$$



高频段的渐近线是一条经过转折频率  $\omega_{cf} = \omega_n$ ，斜率为  $-40\text{dB/dec}$  的直线



# 绘制Bode图——二阶微分/振

$$\left[ 1 + \frac{2\zeta}{\omega_n} j\omega + \frac{1}{\omega_n^2} (j\omega)^2 \right]^{-1}$$

二阶环节:  $\zeta < 1$

相频曲线:

$$\text{Angle} \left[ 1 + \frac{2\zeta}{\omega_n} j\omega + \frac{1}{\omega_n^2} (j\omega)^2 \right]^{-1} = -\tan^{-1} \frac{2\zeta\omega / \omega_n}{1 - \omega^2 / \omega_n^2} = \begin{cases} -\tan^{-1} \frac{2\zeta\omega / \omega_n}{1 - \omega^2 / \omega_n^2} & \omega \leq \omega_n \\ -\left[ 180^\circ - \tan^{-1} \frac{2\zeta\omega / \omega_n}{\omega^2 / \omega_n^2 - 1} \right] & \omega \geq \omega_n \end{cases}$$

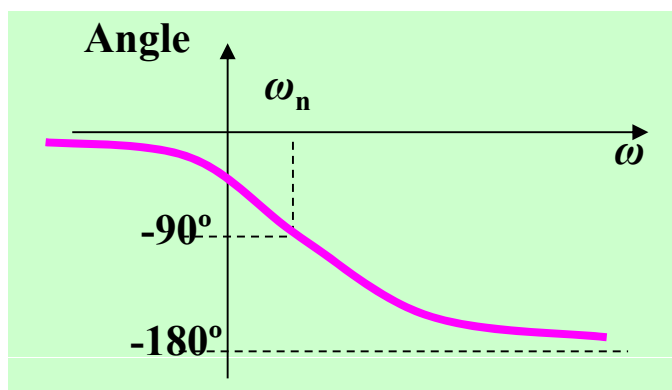
➤ 频率为0时, 相角为  $0^\circ$

$$\text{Angle}[1]^{-1} = 0$$

➤ 转折频率  $\omega_n$  处, 相角为  $-90^\circ$

$$\text{Angle}[j2\zeta]^{-1} = -90^\circ$$

➤ 频率为  $\infty$  时, 相角为  $-180^\circ$



$$|G(j\omega)| = \frac{1}{2\zeta}$$



# 绘制Bode图——二阶微分/振

$$\left[ 1 + \frac{2\zeta}{\omega_n} j\omega + \frac{1}{\omega_n^2} (j\omega)^2 \right]^{-1}$$

二阶环节:  $\zeta < 1$

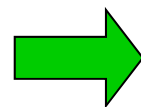
由方程

$$Lm \left[ 1 + \frac{2\zeta}{\omega_n} j\omega + \frac{1}{\omega_n^2} (j\omega)^2 \right]^{-1} = -20 \log \left[ \left( 1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} \right)^2 + \left( \frac{2\zeta\omega}{\omega_n} \right)^2 \right]^{1/2}$$

$$|G(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{\left( 1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} \right)^2 + 4\zeta^2 \frac{\omega^2}{\omega_n^2}}}$$

在  $\omega = \omega_n$  的附近存在共振的条件是  $Lm$  的峰值大于 0 dB。

$$\frac{d}{d\omega} |G(j\omega)| = \frac{- \left[ -\frac{2\omega}{\omega_n^2} \left( 1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} \right) + 4\zeta^2 \frac{\omega}{\omega_n^2} \right]}{\left[ \left( 1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} \right)^2 + 4\zeta^2 \frac{\omega^2}{\omega_n^2} \right]^{3/2}} = 0$$



$$\omega_m = \omega_n \sqrt{1 - 2\zeta^2}$$

$$0 < \zeta < \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$M_m = |G(j\omega_m)| = \frac{1}{2\zeta \sqrt{1 - \zeta^2}}$$



## 绘制Bode图——二阶微分/振

$$\left[ 1 + \frac{2\zeta}{\omega_n} j\omega + \frac{1}{\omega_n^2} (j\omega)^2 \right]^{-1}$$

二阶环节:  $\zeta < 1$

$$\omega_r = \omega_n \sqrt{1 - 2\zeta^2}$$

$$0 < \zeta < \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$M_r = |G(j\omega_r)| = \frac{1}{2\zeta \sqrt{1 - \zeta^2}}$$

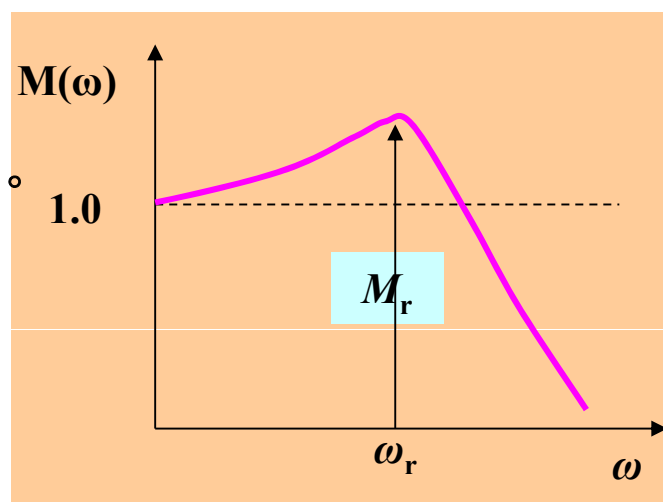
当  $\zeta < 0.707$ ,  $\text{Lm}[1 + j2\zeta\omega/\omega_n + (j\omega/\omega_n)^2]^{-1}$  将会出现峰值。峰值的幅度和该点处的频率为:

$$M_r = \frac{1}{2\zeta \sqrt{1 - \zeta^2}} \quad \omega_r = \omega_n \sqrt{1 - 2\zeta^2}$$

峰值  $M_r$  只与阻尼比  $\zeta$  有关, 是  $\zeta$  的减函数。

仅当  $\zeta < 0.707$  时,  $M$  vs.  $\omega$  会出现大于1的峰值。

峰值处的频率  $\omega_r$  与阻尼比  $\zeta$  和无阻尼振荡频率  $\omega_n$  有关, 是  $\zeta$  的减函数。





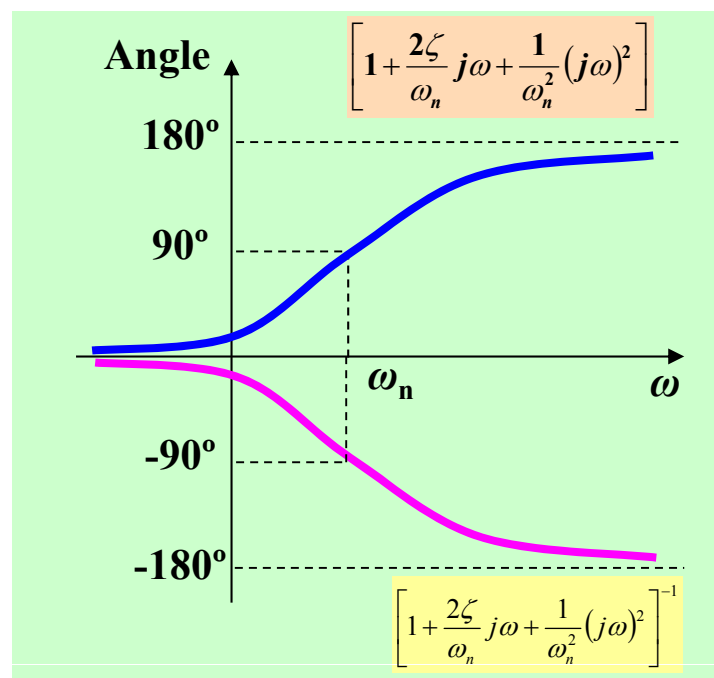
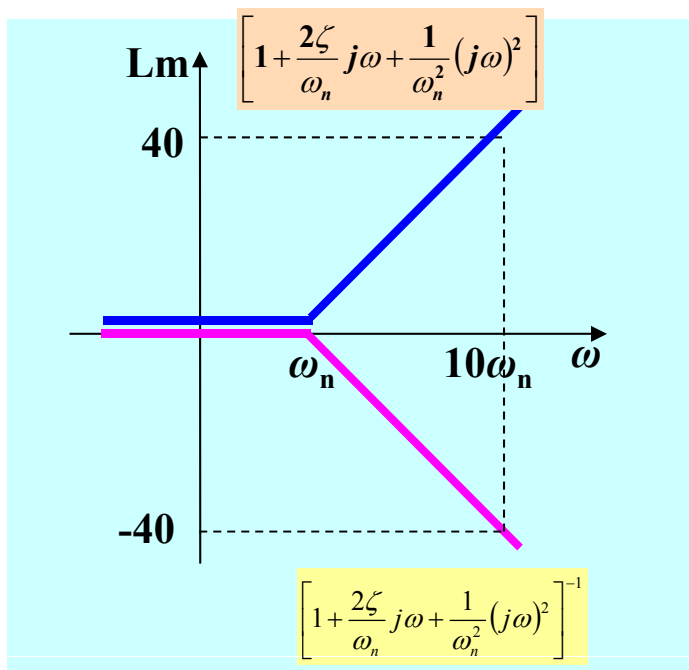
## 绘制Bode图——二阶微分/振荡

$$\left[ 1 + \frac{2\zeta}{\omega_n} j\omega + \frac{1}{\omega_n^2} (j\omega)^2 \right]$$

二阶微分环节

$$\left[ 1 + \frac{2\zeta}{\omega_n} j\omega + \frac{1}{\omega_n^2} (j\omega)^2 \right]$$

$(1 + j2\zeta\omega/\omega_n + (j\omega/\omega_n)^2)$  和  $(1 + j2\zeta\omega/\omega_n + (j\omega/\omega_n)^2)^{-1}$  的对数幅频曲线和相频曲线关于横坐标对称







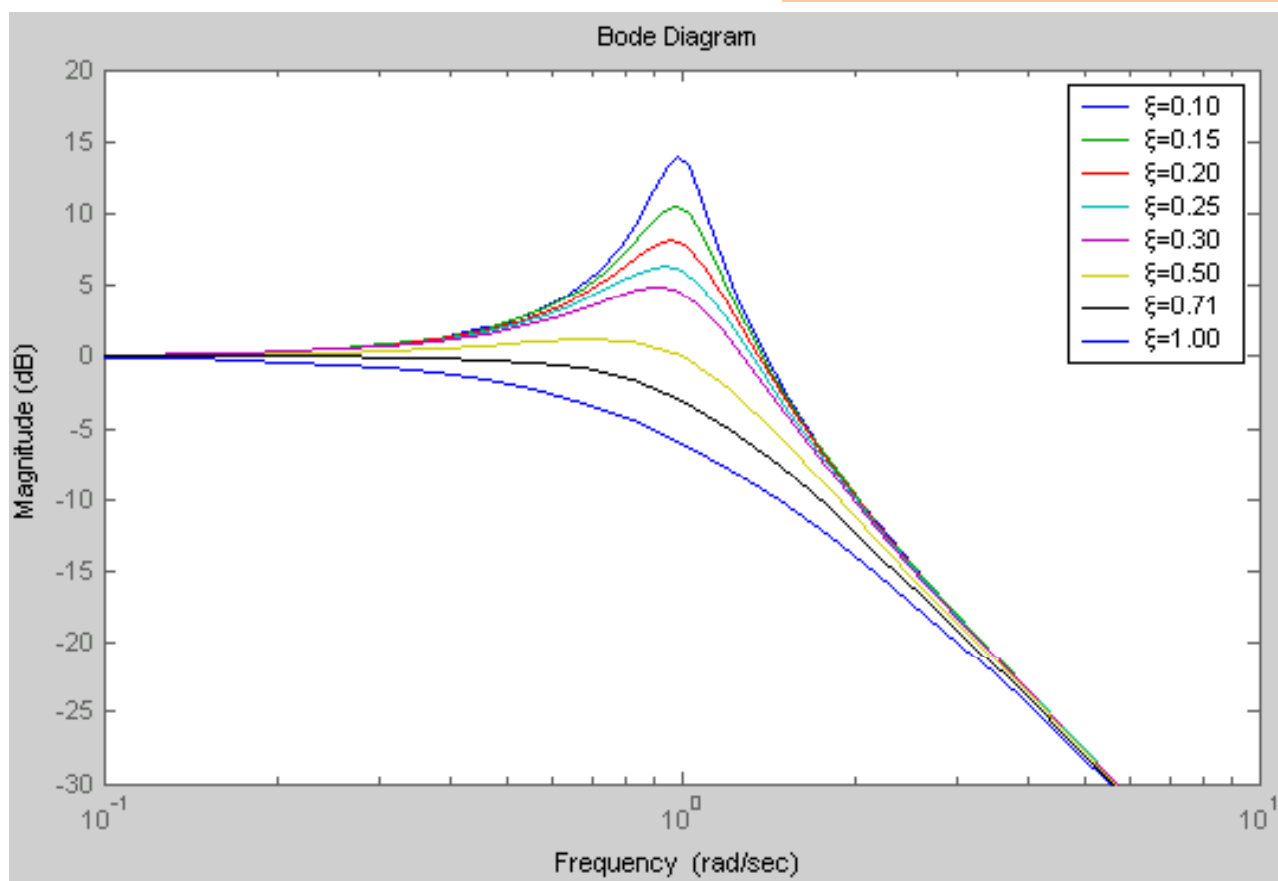
## 绘制Bode图——二阶微分/振荡环节



一组 $\zeta \leq 1$  的振荡环节曲线:

$$\left[ 1 + \frac{2\zeta}{\omega_n} j\omega + \frac{1}{\omega_n^2} (j\omega)^2 \right]^{-1}$$

对数幅频曲线





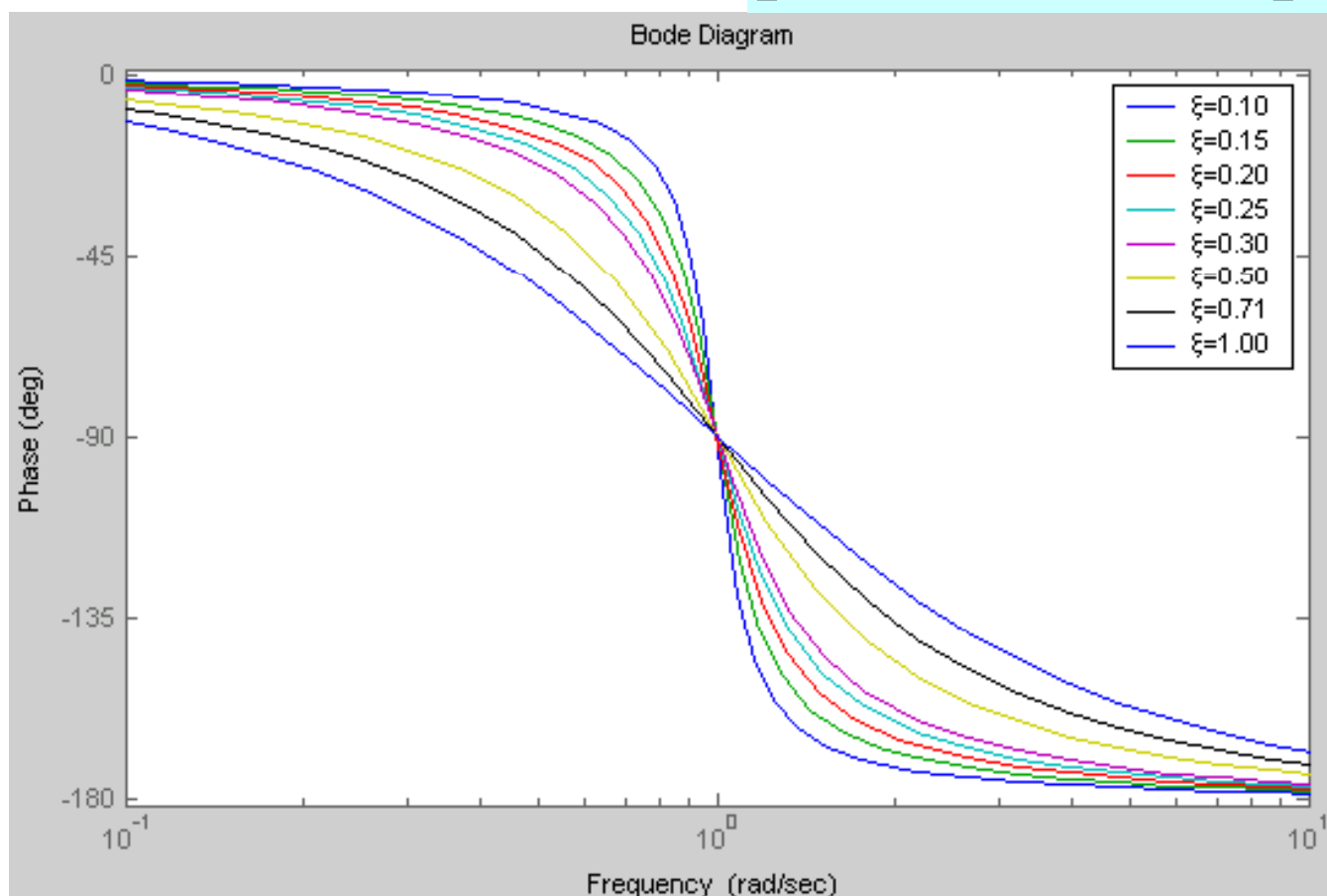
# 绘制Bode图——二阶微分/振荡环节



一组 $\zeta \leq 1$  的振荡环节曲线:

$$\left[ 1 + \frac{2\zeta}{\omega_n} j\omega + \frac{1}{\omega_n^2} (j\omega)^2 \right]^{-1}$$

相频曲线



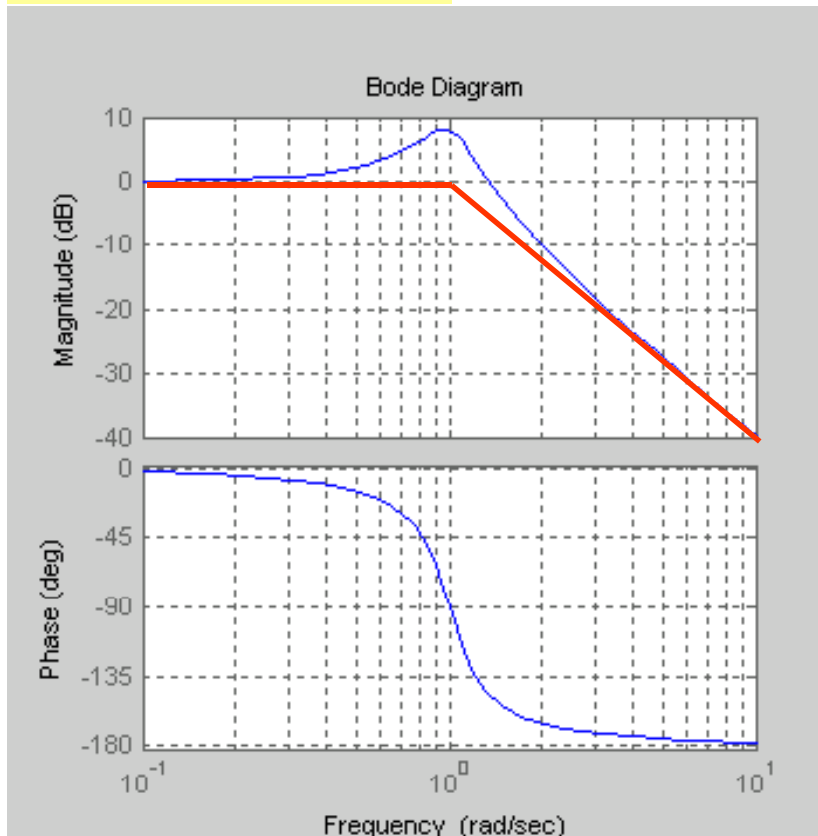


# 绘制Bode图——二阶微分/振荡环

$$\left[1 + \frac{2\zeta}{\omega_n} j\omega + \frac{1}{\omega_n^2} (j\omega)^2\right]^{-1}$$

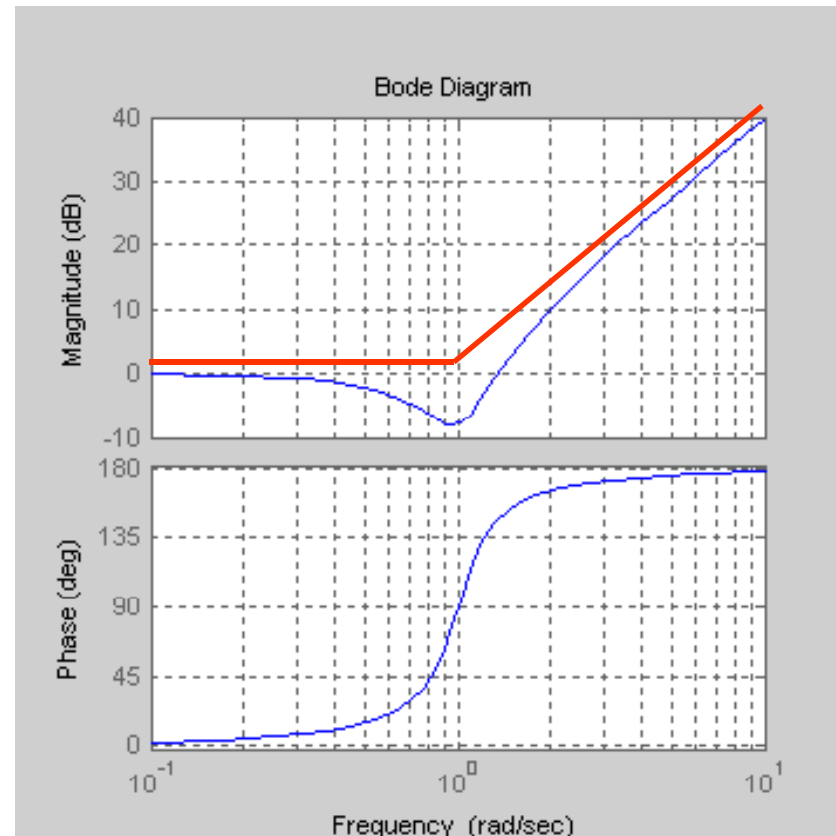
## 例6-4

$$G_1(s) = \frac{1}{1 + 0.4s + s^2} \quad \zeta=0.2, \omega_n=1$$



$$\omega_r = \omega_n \sqrt{1 - 2\zeta^2}$$

$$G_2(s) = 1 + 0.4s + s^2 \quad \zeta=0.2, \omega_n=1$$





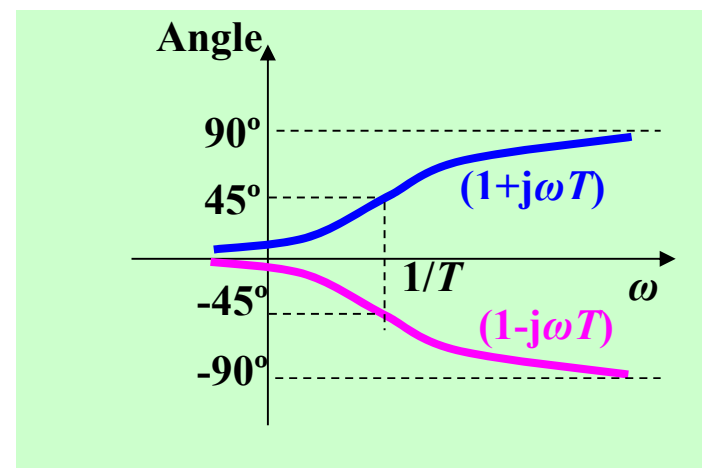
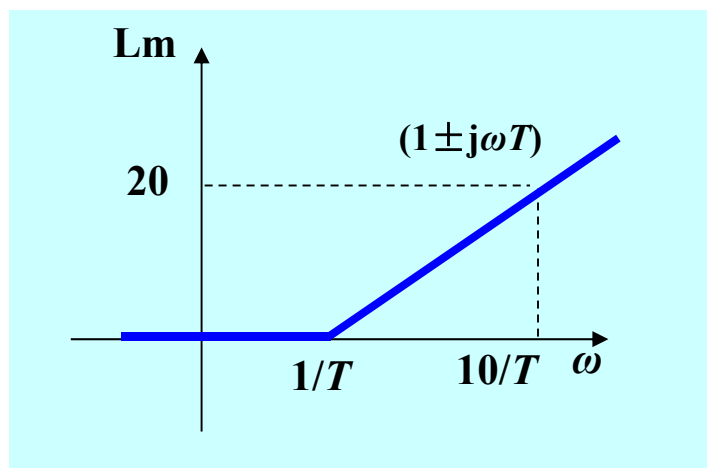
## 绘制 Bode 图



零极点在S右半平面系统与零极点在S左半平面系统的对数幅频曲线相同

例如：环节  $(1-j\omega T)$

➤ 当 $\omega$ 由0到 $\infty$ 变化时，相角从0 到  $-90^\circ$ 变化





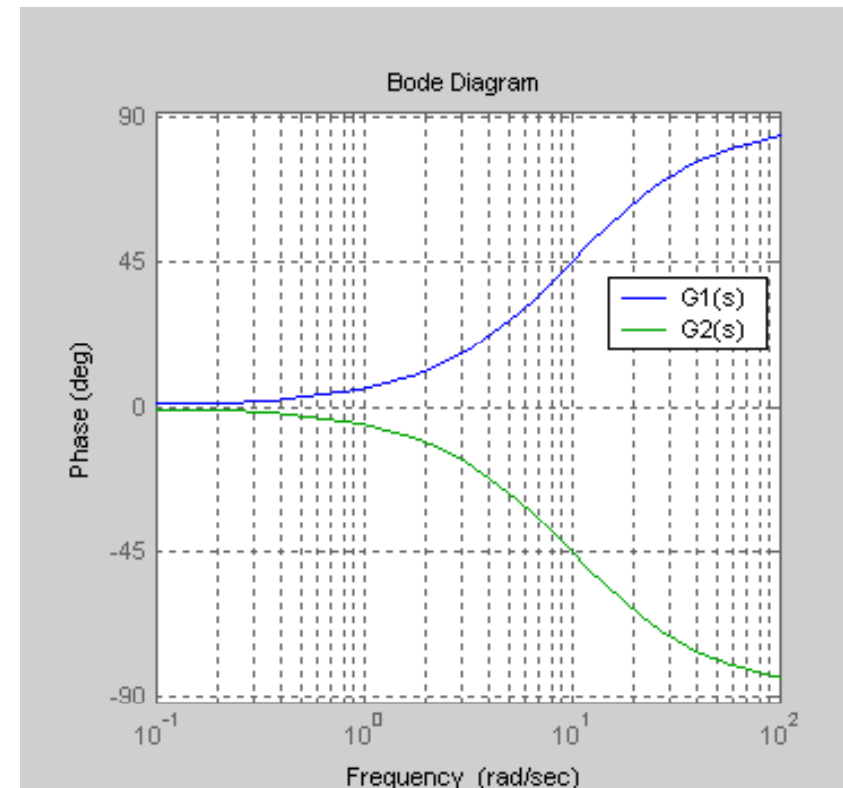
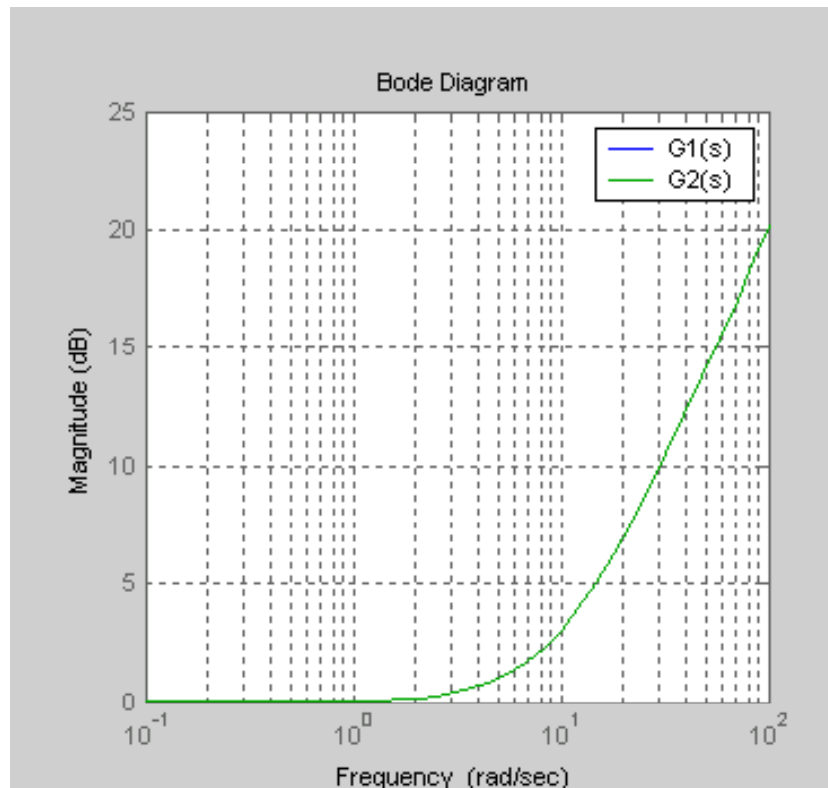
## 绘制Bode图



例6-5

$$G_1(s) = 1 + 0.1s$$

$$G_2(s) = 1 - 0.1s$$

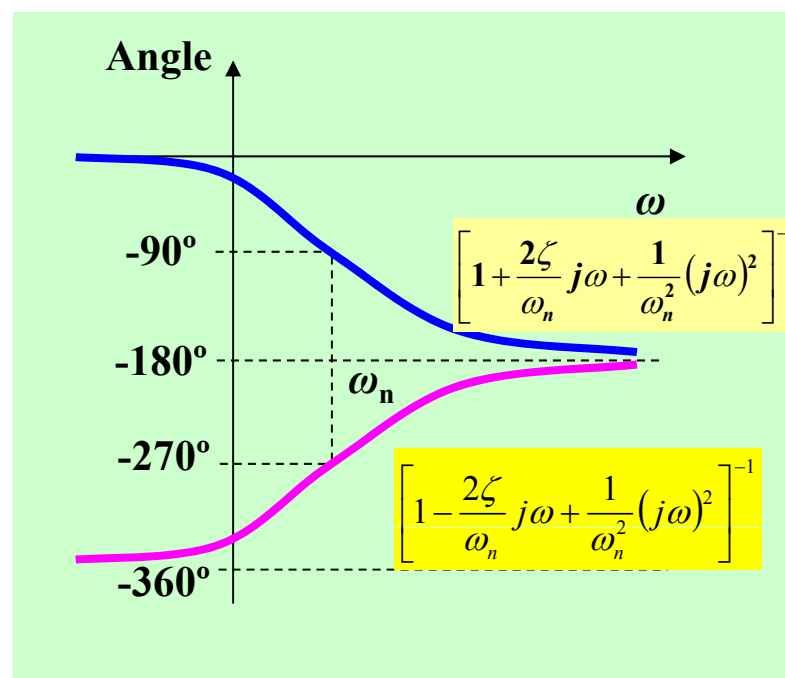
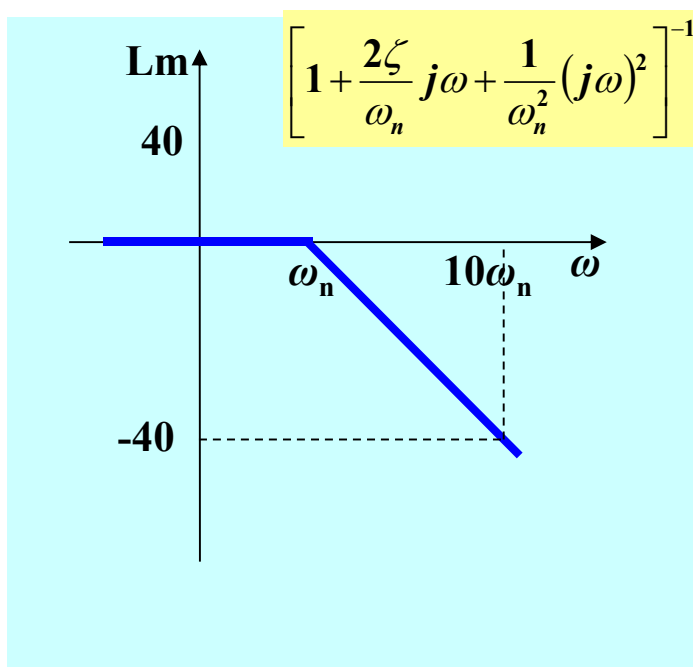




## 绘制Bode图



➤二阶环节  $[1 - j2\zeta\omega/\omega_n + (j\omega/\omega_n)^2]^{-1}$  包含S右半平面的极点。相角变化从  $\omega=0$  时的  $-360^\circ$  变化到  $\omega=\infty$  时的  $-180^\circ$





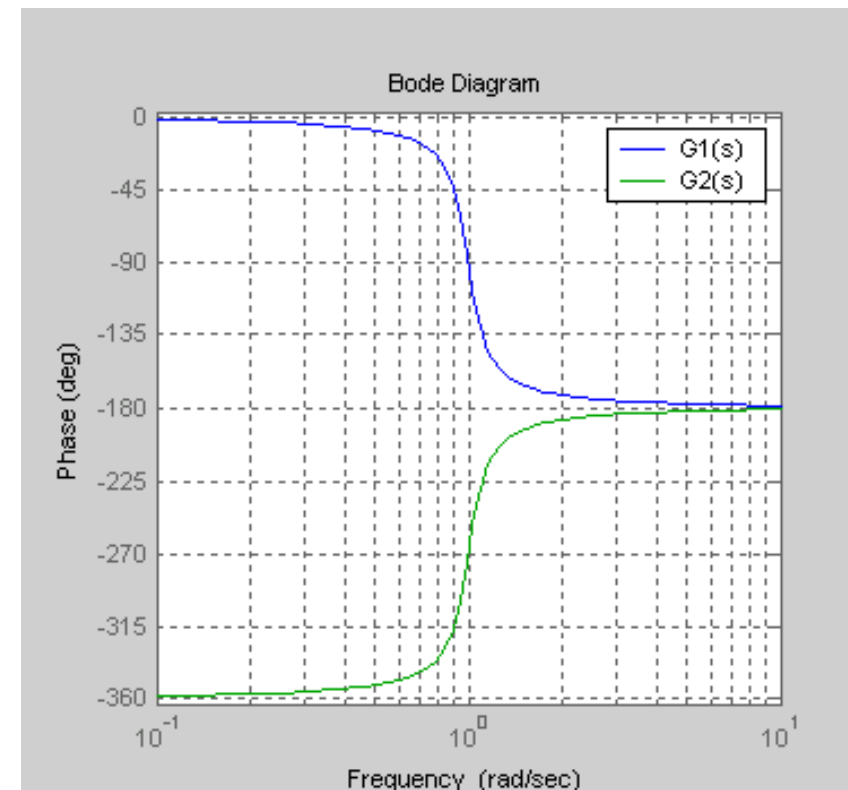
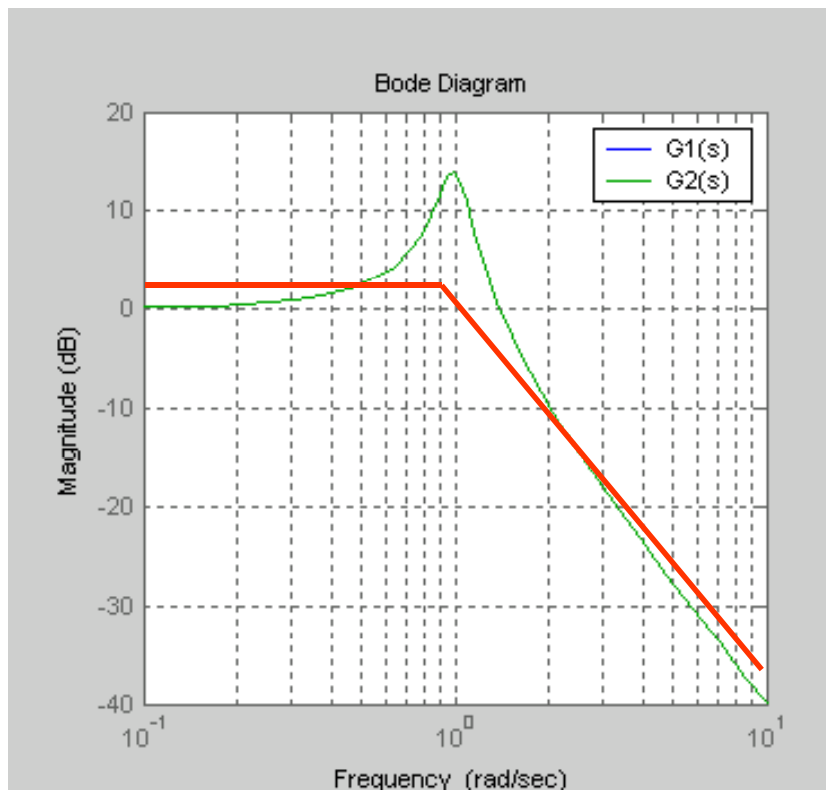
## 绘制Bode图



例 6-6

$$G_1(s) = \frac{1}{s^2 + s + 1} \quad \zeta=0.5, \omega_n=1$$

$$G_2(s) = \frac{1}{s^2 - s + 1} \quad \zeta=-0.5$$





## 绘制Bode图——非最小相位环节



定义:

非最小相位系统——在S右半平面有开环零点的系统。

最小相位系统——在S右半平面没有开环零点的系统。



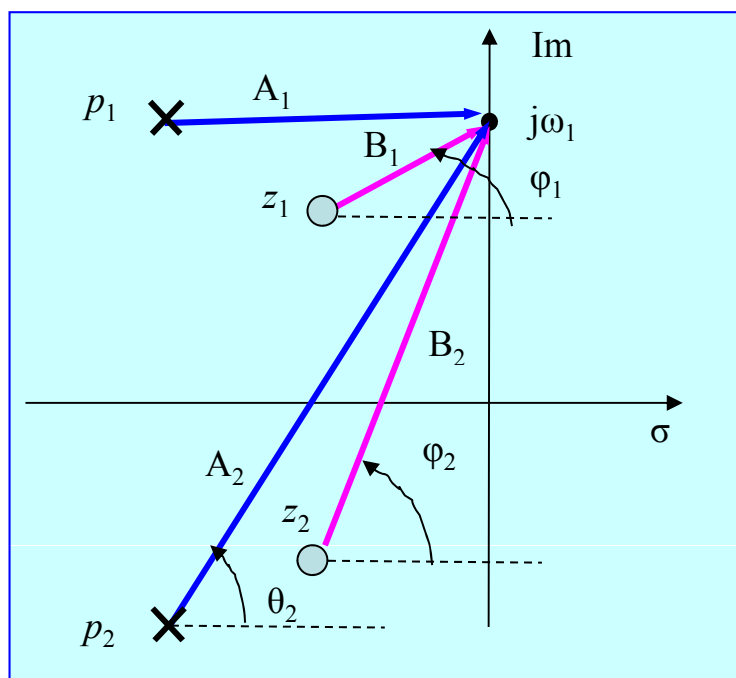


# 绘制Bode图——非最小相位环节

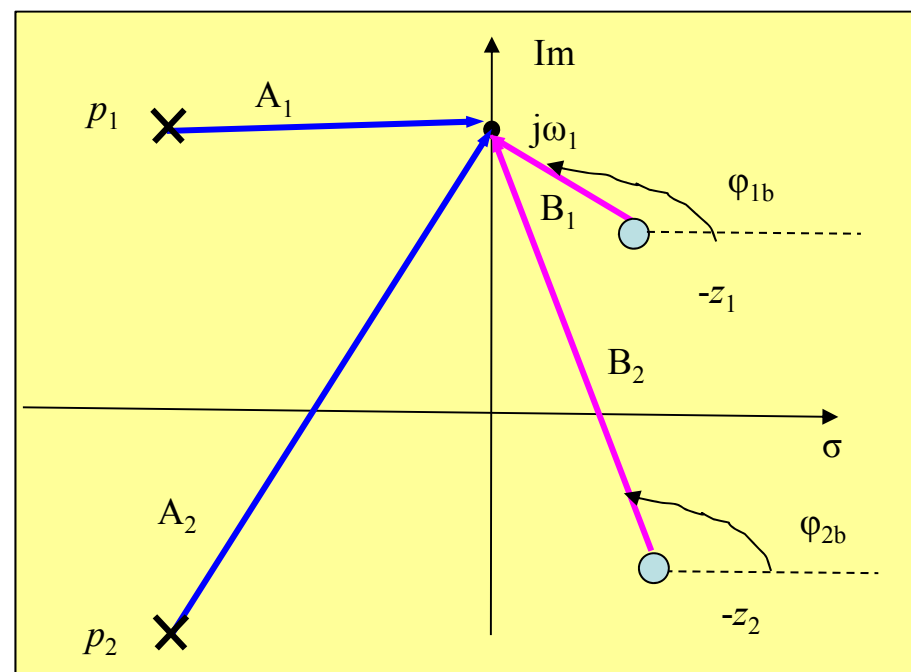


比较：最小相位系统&非最小相位系统

$$\text{Sys.1: } G_1(s) = \frac{(s - z_1)(s - z_2)}{(s - p_1)(s - p_2)}$$



$$\text{Sys.2: } G_2(s) = \frac{(s + z_1)(s + z_2)}{(s - p_1)(s - p_2)}$$



两个系统的区别仅在于第二个系统的零点在右半平面，镜像对称于第一个系统



## 绘制Bode图——非最小相位环节



$$\text{Sys.1: } G_1(s) = \frac{(s - z_1)(s - z_2)}{(s - p_1)(s - p_2)}$$

$$\text{Sys.2: } G_2(s) = \frac{(s + z_1)(s + z_2)}{(s - p_1)(s - p_2)}$$

易知，两个系统的幅频率特性相同，区别在于相频特性。

两个系统的相频特性分别为

$$\varphi_{1b} = \pi - \varphi_1$$

$$\varphi_{2b} = \pi - \varphi_2$$

$$\Psi_1(\omega) = (\varphi_1 + \varphi_2) - (\theta_1 + \theta_2)$$

$$\Psi_2(\omega) = (\pi - \varphi_1 + \pi - \varphi_2) - (\theta_1 + \theta_2)$$

两个系统的相位差为

$$\Psi_2(\omega) - \Psi_1(\omega) = 2\pi - 2(\varphi_1 + \varphi_2)$$

当 $\omega$ 由0增加到 $\infty$ 时，上式中的 $(\varphi_1 + \varphi_2)$ 从0增加到 $\pi$ ，满足关系 $(\varphi_1 + \varphi_2) \leq \pi$ ，所以对于任意频率 $\omega$ ，有

$$\Psi_2(\omega) \geq \Psi_1(\omega)$$

**因此有结论：**对于相同频率的系统，零点全部位于左半开平面的传递函数，其相频特性 $\psi(\omega)$ 最小，故称其为最小相位系统。



浙江大学



美丽校园之无名小花

控制科学与工程学系