

线性离散系统分析

Outline

Contents

1	离散系统基本概念	2
1.1	特点	2
1.2	采样控制系统	2
1.3	数字控制系统	3
1.4	离散系统研究方法	5
2	信号的采样与保持	6
2.1	信号的采样	6
2.2	采样函数 Laplacian 变换性质	8
2.3	信号的保持	8
3	Z 变换	10
3.1	Z 变换	10
3.2	Z 反变换	13
4	离散系统数学模型	14
4.1	差分方程	14
4.2	脉冲传递函数	15
4.3	开环系统的脉冲传递函数	16
4.4	闭环系统的脉冲传递函数	17
4.5	Z 变换局限性与修正 Z 变换	19
5	离散系统稳定性	20
5.1	稳定性	20
5.2	稳定性判据	21
5.3	离散系统稳定性影响因素	22
6	离散系统稳态误差	22
6.1	离散系统稳态误差	22
6.2	离散系统型别与静态误差系数	24

7 离散系统动态性能分析	25
7.1 离散系统时间响应	25
7.2 采样器, 保持器对系统动态性能的影响	26
7.3 闭环极点与动态响应的关系	26

1 离散系统基本概念

1.1 特点

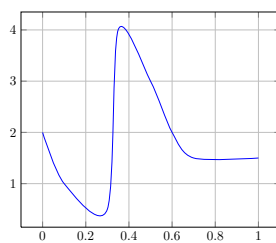
离散信号与离散系统

- 离散信号: 脉冲或数码 (数字信号)
- 离散系统: 控制系统中有一处或几处信号是一串脉冲或数码

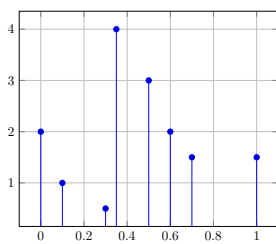
1.2 采样控制系统

采样控制系统

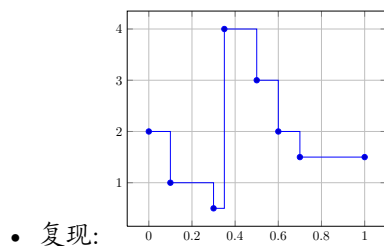
- 采样: 连续信号转变为离散脉冲序列的过程
 - 周期采样: 离散信号的获取是周期性的
 - 非周期采样: 离散信号的获取是非周期的
- 复现: 把脉冲序列转变为连续信号的过程



- 连续信号

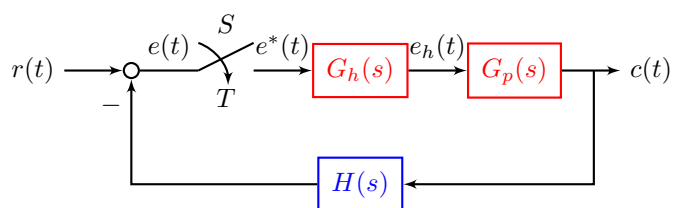


- 采样:



采样器与保持器

- 典型采样控制系统中既有连续的模拟信号, 又有离散的脉冲信号, 因此需要:
 - 采样器: 模拟信号转换为脉冲信号
 - 保持器: 脉冲信号转换为模拟信号



- $e^*(t)$: 采样信号
- $G_h(s)$: 保持器
- $e_h(t)$: 复现信号
- S : 理想采样开关
- T : 采样周期

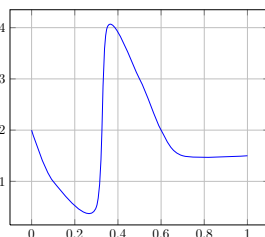
1.3 数字控制系统

数字控制系统

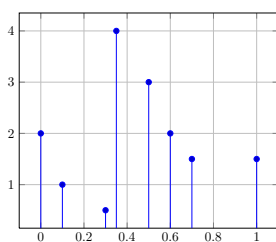
- 以数字计算机作为控制器控制连续对象
- 系统中既有连续信号, 又有数字信号, 实现两种信号之间的转换装置为 A/D, D/A.

模数转换器 (A/D)

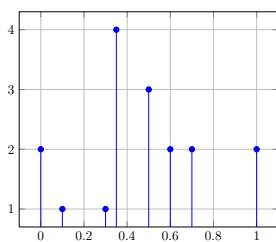
- 将连续信号转换为数字信号.
- 工作过程:
 - 采样过程: $e(t) \rightarrow e^*(t)$
 - 量化过程: $e^*(t) \rightarrow \bar{e}^*(t)$



- 连续信号



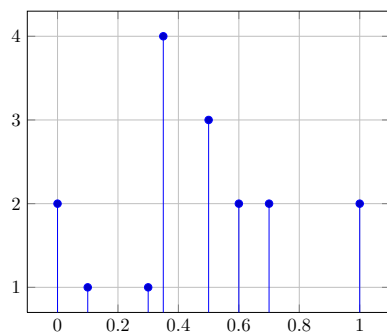
- 采样:



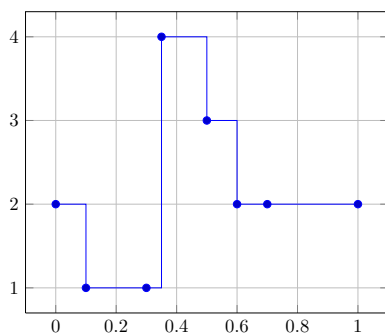
- 量化:

数模转换器 (D/A)

- 将离散的数字信号转换为连续模拟信号
- 工作过程:
 - 解码过程: 将离散数字信号转换为离散模拟信号
 - 复现过程: 将离散的模拟信号转换为连续的模拟信号



- 数字信号



- 复现:

量化方法

- 只舍不入: 只取量化单位 q 的整数部分

$$E(e) = \frac{q}{2}$$

$$\sigma^2 = \frac{q^2}{3}$$

- 有舍有入: 类似四舍五入

$$E(e) = 0$$

$$\sigma^2 = \frac{q^2}{12}$$

减小量化误差方法

- 减小 q , 即增大字长 i :

$$q = \frac{x_{max} - x_{min}}{2^i}$$

1.4 离散系统研究方法

离散系统研究方法

- 连续系统: Laplacian 变换
- 离散系统: Z 变换
- 离散系统学习要点
 - 离散数学模型
 - 离散系统的稳定性, 稳态性能与动态性能分析

2 信号的采样与保持

香农 (Shannon) 定理, 零阶保持器, 一阶保持器

2.1 信号的采样

采样信号

- 若采样开关为理想采样开关, 则有:

$$e^*(t) = e(t)\delta_T(t)$$

其中 $\delta_T(t)$ 为理想单位脉冲序列:

$$\delta_T(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \delta(t - nT)$$

- 得:

$$\begin{aligned} e^*(t) &= e(t) \sum_{n=0}^{\infty} \delta(t - nT) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} e(t) \delta(t - nT) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} e(nT) \delta(t - nT) \end{aligned}$$

采样信号的 Laplacian 变换

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(e^*(t)) &= \mathcal{L}\left(\sum_{n=0}^{\infty} e(nT) \delta(t - nT)\right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} e(nT) \mathcal{L}(\delta(t - nT)) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} e(nT) e^{-nTs} \end{aligned}$$

- 离散信号的 Laplacian 变换为 s 的超越函数, 不易分析. 可利用 Z 变换分析.

采样信号的频谱分析

- 目的: 分析 $e^*(t)$ 与 $e(t)$ 的关系, 得到香农定理.
- 将 $\delta_T(t)$ 以 Fourier 级数表示, 得:

$$\begin{aligned}\delta_T(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{jn\omega_s t} \\ C_n &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \delta_T(t) e^{-jn\omega_s t} dt \\ &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \delta(t) dt \\ &= \frac{1}{T} \\ \omega_s &= \frac{2\pi}{T}\end{aligned}$$

采样信号的频谱分析 (续)

- 采样

$$\begin{aligned}\delta_T(t) &= \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jn\omega_s t} \\ e^*(t) &= \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e(t) e^{jn\omega_s t} \\ E^*(s) &= \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} E(s + jn\omega_s) \\ E^*(j\omega) &= \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} E(j(\omega + n\omega_s))\end{aligned}$$

- $e^*(t)$ 的频谱为以 ω_s 为周期的无穷多个频谱之和.
- 设 $e(t)$ 带宽有限, 最高角频率为 ω_h , 则当 $\omega_s > 2\omega_h$ 时, $e^*(t)$ 频谱的各部分不会相互重叠.

香农定理

- 若采样器的输入信号 $e(t)$ 只有有限带宽, 且其最高频率分量为 ω_h ,
- 当采样周期满足

$$T \leq \frac{2\pi}{2\omega_h}$$

则信号 $e(t)$ 可以完全从 $e^*(t)$ 中恢复出来.

工程中 T 的选取

- T 减小, 失真度小, 增加计算量
- T 增大, 动态性能差, 稳定性难保证
- 经验方法:
 - 在随动系统中, 若校正后系统截止频率为 ω_c , 则采样频率为 $\omega_s = 10\omega_c$, 即 $T = \frac{\pi}{5\omega_c}$
 - 按 t_r, t_s 选取, $T = \frac{T_r}{10}, T = \frac{t_s}{40}$

2.2 采样函数 Laplacian 变换性质

采样函数 Laplacian 变换性质: $G^*(s) = G^*(s + jk\omega_s)$

- 证明:

$$\begin{aligned}G^*(s) &= \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} G(s + jn\omega_s) \\G^*(s + jk\omega_s) &= \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} G(s + j(n+k)\omega_s) \\&= \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} G(s + jn\omega_s) \\&= G^*(s)\end{aligned}$$

采样函数 Laplacian 变换性质: $[G(s)E^*(s)]^* = G^*(s)E^*(s)$

- 证明

$$\begin{aligned}[G(s)E^*(s)]^* &= \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} [G(s + jn\omega_s)E^*(s + jn\omega_s)] \\&= \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} [G(s + jn\omega_s)E^*(s)] \\&= \left(\frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} G(s + jn\omega_s)\right)E^*(s) \\&= G^*(s)E^*(s)\end{aligned}$$

2.3 信号的保持

信号的保持

- 将数字信号及脉冲信号转换成连续的模拟信号, 采用保持器. 主要解决 nT 与 $(n+1)T$ 之间的插值问题.

- 保持器是具有外推功能的元件, 外推公式为:

$$e(nT + \Delta t) = a_0 + a_1 \Delta t + a_2 (\Delta t)^2 + \cdots + a_m (\Delta t)^m$$

式中 a_0, \cdots, a_m 由过去各采样时刻 $(m+1)$ 个离散的信号 $e^*((n-i)T), (i = 0, \cdots, m)$ 惟一确定.

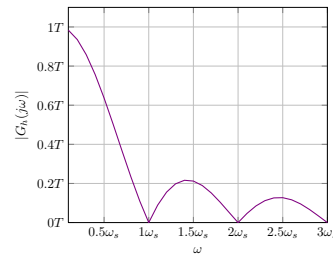
- $m = 0$ 时称为零阶保持器,
- $m = 1$ 时称为一阶保持器.

零阶保持器

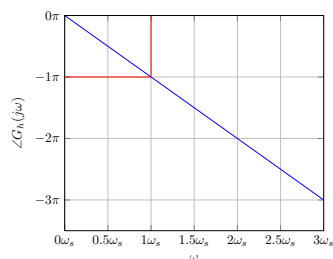
- $e(nT + \Delta t) = a_0$, 当 $\Delta t = 0$ 时, 有 $e(nT) = a_0$, 即按常值外推, $e(t) = e(nT), t \in [nT, (n+1)T)$
- 设零阶保持器输入为 $r^*(t) = \delta(t)$, 则输出为 $e(t) = 1, t \in [nT, (n+1)T)$ 因此

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(r^*) &= 1 \\ \mathcal{L}(e) &= \frac{1}{s} - \frac{e^{-Ts}}{s} \\ G_h(s) &= \frac{E(s)}{R^*(s)} = \frac{1 - e^{-Ts}}{s} \\ G_h(j\omega) &= \frac{1 - e^{-jT\omega}}{j\omega} = \frac{e^{-j\omega T/2}(e^{j\omega T/2} - e^{-j\omega T/2})}{j\omega} \\ &= \frac{2 \sin \frac{\omega T}{2}}{\omega} e^{-j\omega T/2} \\ &= \frac{2 \sin \frac{\pi \omega}{\omega_s}}{\omega} e^{-j\pi \omega / \omega_s} \end{aligned}$$

零阶保持器频率特性



- Bode 图



- 零阶保持器特性

- 低通
- 相角迟后
- 时间延迟

一阶保持器

$$e(nT + \Delta t) = a_0 + a_1 \Delta t, \quad (0 \leq \Delta t < T)$$

$$a_0 = e(nT)$$

$$a_1 = \frac{e(nT) - e((n-1)T)}{T}$$

$$G_h(s) = T(1+s) \left(\frac{1 - e^{-Ts}}{Ts} \right)^2$$

$$G_h(j\omega) = \sqrt{1 + (\omega T)^2} \left(\frac{2 \sin \frac{\omega T}{2}}{\omega} \right)^2 e^{-j(\omega T - \arctan \omega T)}$$

- 其相角迟后比零阶保持器大得多, 大大降低了系统相位裕度 γ ,
- 因此一般只用零阶保持器.

3 Z 变换

3.1 Z 变换

Z 变换定义

- 采样信号 $e^*(t)$ 的 Laplacian 变换

$$E^*(s) = \sum_{n=0}^{\infty} e(nT) e^{-nsT}$$

- 令 $Z = e^{sT}$, 则

$$e^{-nsT} = Z^{-n}$$

- 得:

$$E(Z) = \sum_{n=0}^{\infty} e(nT)Z^{-n}$$

- 记作

$$E(Z) = \mathcal{Z}[e^*(t)] = \mathcal{Z}[e(t)]$$

Z 变换方法

- 级数求合法

– 按照 Z 变换的定义求解

- 部分分式法:

– 先求出 $e(t)$ 的 Laplacian 变换 $E(s)$, 将其展开成部分分式之和, 使每部分对应的 Z 变换是已知的.

级数求和法示例: 单位阶跃信号 $1(t)$

- 解:

$$\begin{aligned} e(nT) &= 1, \\ E(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} e(nT)z^{-n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} \\ &= \frac{1}{1 - z^{-1}} \\ &= \frac{z}{z - 1} \end{aligned}$$

其中 $|z^{-1}| < 1$

级数求和法示例: $\delta_T(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \delta(t - nT)$

- 解:

$$\begin{aligned}
 e^*(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} e(nT)\delta(t-nT) \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \delta(t-nT) \\
 e(nT) &= 1 \\
 E(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} \\
 &= \frac{1}{1-z^{-1}} \\
 &= \frac{z}{z-1}
 \end{aligned}$$

其中 $|z^{-1}| < 1$

- $1(t)$ 与 $\delta_T(t)$ 对应的 Z 变换相同.

部分分式法示例: $E(s) = \frac{a}{s(s+a)}$

- 解:

$$\begin{aligned}
 E(s) &= \frac{1}{s} - \frac{1}{s+a} \\
 e(t) &= 1 - e^{-at} \\
 E(z) &= \frac{1}{1-z^{-1}} - \frac{1}{1-z^{-1}e^{-aT}}
 \end{aligned}$$

- Z 变换表:

$\delta(t)$	1	1
$1(t)$	$\frac{1}{s}$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$
t	$\frac{1}{s^2}$	$\frac{Tz^{-1}}{(1-z^{-1})^2}$
e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$	$\frac{1}{1-e^{-aT}z^{-1}}$

Z 变换性质

- 线性定理: $\mathcal{Z}[\alpha e_1(t) + \beta e_2(t)] = \alpha E_1(z) + \beta E_2(z)$
- 实数位移定理: $\mathcal{Z}[e(t+kT)] = z^k[E(z) - \sum_{n=0}^{k-1} e(nT)z^{-n}]$
- 复数位移定理: $\mathcal{Z}[e^{\pm at}e(t)] = E(ze^{\mp aT})$
- 终值定理: $\lim_{n \rightarrow \infty} e(nT) = \lim_{z \rightarrow 1} (1-z^{-1})E(z)$
- 卷积定理: 若 $g(nT) = x(nT) * y(nT)$ 则 $G(z) = X(z)Y(z)$. $(x(nT) * y(nT) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)y((n-k)T))$

3.2 Z 反变换

Z 反变换

$$e(nT) = \mathcal{Z}^{-1}[E(z)]$$

- 幂级数展开法
- 部分分式法
 - 展开成部分分式后查表
- 反演积分法

幂级数展开法

$$\begin{aligned} E(z) &= \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \cdots + b_m z^{-m}}{1 + a_1 z^{-1} + \cdots + a_n z^{-n}} \\ &= c_0 + c_1 z^{-1} + \cdots + c_n z^{-n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^{-n} \\ e^*(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n \delta(t - nT) \\ e(nT) &= c_n \end{aligned}$$

反演积分法

$$\begin{aligned} E(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} e(nT) z^{-n} \\ &= e(0) + e(T) z^{-1} + \cdots + e(nT) z^{-n} + \cdots \\ E(z) z^{n-1} &= e(0) z^{n-1} + e(T) z^{n-2} + \cdots + e(nT) z^{-1} + \cdots \\ e(nT) &= \text{Res}(E(z) z^{n-1}) \end{aligned}$$

反演积分法示例: $E(z) = \frac{z^2}{(z-1)(z-0.5)}$ 求 $e(nT)$

- 解:

$$\begin{aligned}
 E(z)z^{n-1} &= \frac{z^{n+1}}{(z-1)(z-0.5)} \\
 Res_1 &= \lim_{z \rightarrow 1} \frac{(z-1)z^{n+1}}{(z-1)(z-0.5)} \\
 &= 2 \\
 Res_2 &= \lim_{z \rightarrow 0.5} \frac{(z-0.5)z^{n+1}}{(z-1)(z-0.5)} \\
 &= -0.5^n \\
 e(nT) &= Res_1 + Res_2 \\
 &= 2 - 0.5^n
 \end{aligned}$$

4 离散系统数学模型

4.1 差分方程

差分方程模型

- n 阶后向差分方程

$$\begin{aligned}
 &c(k) + a_1c(k-1) + \cdots + a_nc(k-n) \\
 &= b_0r(k) + b_1r(k-1) + \cdots + b_mr(k-m)
 \end{aligned}$$

即 k 时刻的输出 $c(k)$ 与 k 时刻前 n 个时刻输出及前 m 个输入, 当前时刻输入有关.

- n 阶前向差分方程

$$\begin{aligned}
 &c(k+n) + a_1c(k+n-1) + \cdots + a_nc(k) \\
 &= b_0r(k+m) + b_1r(k+m-1) + \cdots + b_mr(k)
 \end{aligned}$$

差分方程解法: 迭代法

- 利用差分方程的递推关系, 逐步计算 $c(k)$ 的值
- 例: $c(k) = r(k) + 5c(k-1) - 6c(k-2)$ 输入 $r(k) = 1$, 初始条件: $c(0) = 0, c(1) = 1$
- 解:

$$\begin{aligned}
 c(2) &= 6 \\
 c(3) &= 25 \\
 c(4) &= 90
 \end{aligned}$$

z 变换法

- 将差分方程与输入进行 Z 变换, 得到输出的 Z 变换, 再进行 Z 反变换.
- 例: 差分方程 $c(t+2T)+3c(t+T)+2c(t)=0$ 初始条件 $c(0)=0, c(1)=1$
- 解:

$$\begin{aligned} z^2(c(z)-c(0)-c(1)z^{-1})+3z(c(z)-c(0))+2c(z) &= 0 \\ (z^2+3z+2)c(z) &= z \\ c(z) &= \frac{z}{z^2+3z+2} = \frac{z}{z+1} - \frac{z}{z+2} = \frac{1}{1+z^{-1}} - \frac{1}{1+2z^{-1}} \\ c(k) &= (-1)^k - (-2)^k \end{aligned}$$

其中 $k=0, 1, 2, \dots$

4.2 脉冲传递函数

脉冲传递函数定义

- 连续系统: 传递函数 (s 域)
- 离散系统: 脉冲传递函数 (z 域)
- 定义: 输出 $c^*(t)$ 的 Z 变换与输入 $r^*(t)$ 的 Z 变换之比 (零初始条件下) 叫做系统的脉冲传递函数. 记为

$$G(z) = \frac{C(z)}{R(z)}$$

脉冲传递函数意义

- 加权序列: 输入 $r^*(t) = \delta(t)$ 的输出序列称为加权序列, 记为 $k^*(t)$
- 脉冲传递函数:

$$\begin{aligned} G(z) &= \frac{\mathcal{Z}[k^*(t)]}{\mathcal{Z}[r^*(t)]} \\ &= \mathcal{Z}[k^*(t)] \\ &= k(z) \end{aligned}$$

- 脉冲传递函数为加权序列 $k^*(t)$ 的 Z 变换

两种模型之间的变换关系:

$$\begin{aligned} c(nT) + \sum_{k=1}^n a_k c((n-k)T) &= \sum_{k=0}^m b_k r((n-k)T) \\ G(z) &= \frac{\sum_{k=0}^m b_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^n a_k z^{-k}} \end{aligned}$$

- 差分方程在零初始条件下进行 Z 变换, 得脉冲传递函数.

脉冲传递函数计算

- 差分方程 Z 变换: $G(z) = \frac{C(z)}{R(z)}$
- 从传递函数 $G(s)$ 求解 (部分分式法)
- 例: $c(nT) = r[(n-k)T]$
- 解:

$$\begin{aligned} C(z) &= z^{-k} R(z) \\ G(z) &= \frac{C(z)}{R(z)} \\ &= z^{-k} \end{aligned}$$

4.3 开环系统的脉冲传递函数

开环系统脉冲传递函数

按定义求, 即: $G(z) = \frac{\mathcal{Z}[c^*(t)]}{\mathcal{Z}[r^*(t)]}$

- 结构图
-
- 推导

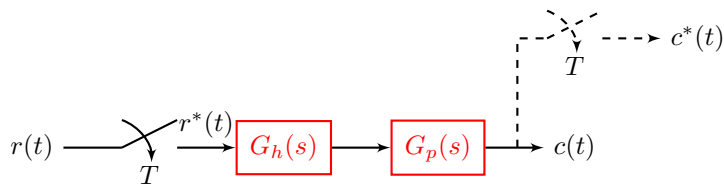
$$\begin{aligned} D(z) &= R(z)G_1(z) \\ C(z) &= D(z)G_2(z) = G_1(z)G_2(z)R(z) \\ G(z) &= G_1(z)G_2(z) \end{aligned}$$

开环系统脉冲传递函数 (续)

- 结构图
-
- 推导

$$\begin{aligned} C^*(s) &= [R^*(s)G_1(s)G_2(s)]^* = R^*(s)[G_1(s)G_2(s)]^* \\ C(z) &= R(z)G_1G_2(z) \\ G(z) &= G_1G_2(z) \end{aligned}$$

开环系统脉冲传递函数 (续): 有零阶保持器时:



• 结构图

• 推导

$$\begin{aligned}
 - C^*(s) &= [R^*(s) \cdot \frac{1-e^{-Ts}}{s} \cdot G_p(s)]^* \\
 - C^*(s) &= R^*(s) [(1-e^{-Ts}) \cdot \frac{G_p(s)}{s}]^* \\
 - C^*(s) &= R^*(s) [\frac{G_p(s)}{s} - e^{-Ts} \cdot \frac{G_p(s)}{s}]^* \\
 - C(z) &= R(z) \{ \mathcal{Z}[\frac{G_p(z)}{s}] - z^{-1} \mathcal{Z}[\frac{G_p(z)}{s}] \} \\
 - G(z) &= (1-z^{-1}) \mathcal{Z}[\frac{G_p(z)}{s}]
 \end{aligned}$$

开环系统脉冲传递函数示例: $G_p(s) = \frac{a}{s(s+a)}$

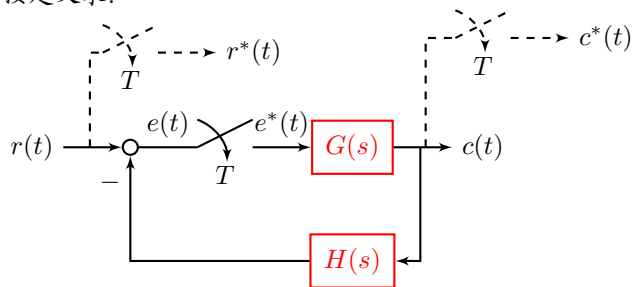
• 解:

$$\begin{aligned}
 G(z) &= (1-z^{-1}) \mathcal{Z}[\frac{a}{s^2(s+a)}] \\
 &= (1-z^{-1}) \mathcal{Z}[\frac{1}{s^2} - \frac{1}{a}(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+a})] \\
 &= (1-z^{-1}) \left[\frac{Tz^{-1}}{(1-z^{-1})^2} - \frac{1}{a}(\frac{1}{1-z^{-1}} - \frac{1}{1-z^{-1}e^{-aT}}) \right]
 \end{aligned}$$

4.4 闭环系统的脉冲传递函数

闭环系统的脉冲传递函数

按定义求:



• 脉冲传递函数

$$\begin{aligned}
 \Phi(z) &= \frac{C(z)}{R(z)} = \frac{\mathcal{Z}[c^*(t)]}{\mathcal{Z}[r^*(t)]} \\
 \Phi_e(z) &= \frac{E(z)}{R(z)} = \frac{\mathcal{Z}[e^*(t)]}{\mathcal{Z}[r^*(t)]}
 \end{aligned}$$

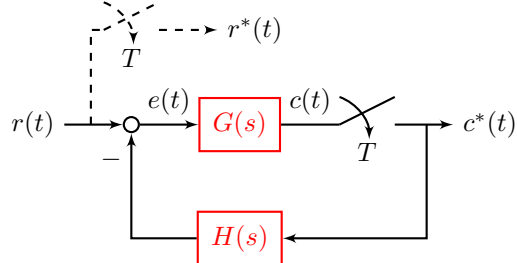
• 解:

$$\begin{aligned} C(s) &= G(s)E^*(s) \\ E(s) &= R(s) - H(s)C(s) \\ &= R(s) - H(s)G(s)E^*(s) \end{aligned}$$

闭环系统的脉冲传递函数 (续)

$$\begin{aligned} C(s) &= G(s)E^*(s) \\ E(s) &= R(s) - H(s)C(s) \\ &= R(s) - H(s)G(s)E^*(s) \\ E^*(s) &= R^*(s) - HG^*(s)E^*(s) \\ &= \frac{R^*(s)}{1 + HG^*(s)} \\ \Phi_e(z) &= \frac{1}{1 + HG(z)} \\ C^*(s) &= G^*(s)E^*(s) \\ &= \frac{G^*(s)R^*(s)}{1 + HG^*(s)} \\ \Phi(z) &= \frac{G(z)}{1 + HG(z)} \end{aligned}$$

闭环系统的脉冲传递函数示例:



• 解:

$$\begin{aligned} E(s) &= R(s) - H(s)C^*(s) \\ C(s) &= G(s)E(s) = G(s)R(s) - G(s)H(s)C^*(s) \\ C^*(s) &= GR^*(s) - GH^*(s)C^*(s) = \frac{GR^*(s)}{1 + GH^*(s)} \end{aligned}$$

• 没有闭环脉冲传递函数

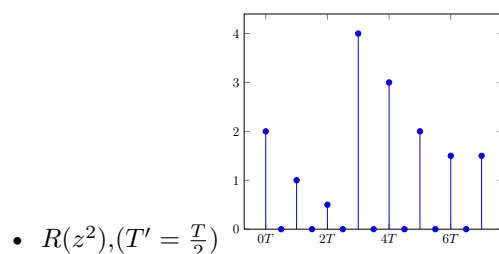
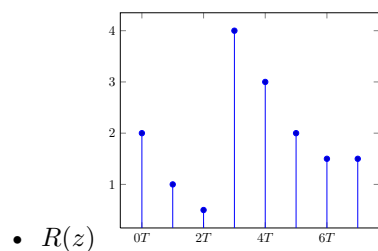
4.5 Z 变换局限性与修正 Z 变换

Z 变换局限性

- 采样间隔 τ 要远小于系统最小时间常数
- $c(nT)$ 不能反映采样间隔中的信息
- $G(s)$ 要满足: $n \geq m + 2$, 否则 $c^*(t)$ 与 $c(t)$ 差别较大.

修正 Z 变换

- 目的: 求取采样间隔中的输出值
- 原理:
 - 将周期为 T 的原输入采样信号序列 $r^*(t)$ 再次以周期 $\frac{T}{n}$ 采样, 即得:
 $R'(z) = R(z^n)$
 - 计算在采样周期 $\frac{T}{n}$ 下的响应, 即得到原采样间隔中的值.
- 方法:
 - 原输入信号 Z 变换为 $R(z)$, 将 z 替换为: z^n .
 - 以 $\frac{T}{n}$ 重新计算系统脉冲传递函数.



修正 Z 变换示例:

$$G(z) = \frac{z}{z - e^{-T}}$$

$T = 1$, $r(t) = 1(t)$, 要求每采样周期中间插入两点.

- 解:

$$\begin{aligned}
 G(z) &= \frac{z}{z - e^{-1/3}} \\
 r(z) &= \frac{1}{1 - z^{-1}} \\
 r'(z) &= r(z^3) \\
 &= \frac{1}{1 - z^{-3}} \\
 c'(z) &= \frac{1}{1 - z^{-1}e^{-1/3}} \cdot \frac{1}{1 - z^{-3}}
 \end{aligned}$$

5 离散系统稳定性

5.1 稳定性

S 域到 Z 域的映射

- $S \leftrightarrow Z$

$$\begin{aligned}
 z &= e^{sT} \\
 s &= \sigma + j\omega \\
 z &= e^{\sigma T} e^{j\omega T} \\
 |z| &= e^{\sigma T} \\
 \angle z &= \omega T
 \end{aligned}$$

- 当 $\sigma = 0$ 时, 对应到 z 平面的单位圆, 此时, ω 从 $-\infty \rightarrow \infty$ 时, z 平面上的点已绕单位圆运动了无数圈, 称 $[-\frac{\omega_s}{2}, \frac{\omega_s}{2}]$ 为主要带.

- 主要映射关系:

- 等 σ 线: 单位圆: $|z| = e^{\sigma T}$
- 等 ω 线: 过原点射线: $\angle z = \omega T$
- 等 ξ 线 (S 平面过原点射线): 对数螺线

离散系统的稳定性

- 稳定性定义: 离散系统在有界输入序列下, 输出序列也有界.
- 连续系统中: 闭环系统的特征根实部 σ 小于 0.
- 离散系统中: $|z| < 1$, ($|z| = e^{\sigma}$)
 - 差分方程: 特征根的模均小于 1
 - 闭环脉冲传递函数: 离散系统闭环特征根在 Z 平面的单位圆内 ($|z_i| < 1$)

5.2 稳定性判据

解特征方程, 根据 $|z_i| < 1$ 判断

W 域的劳斯判据

- Z 域变换到 W 域:

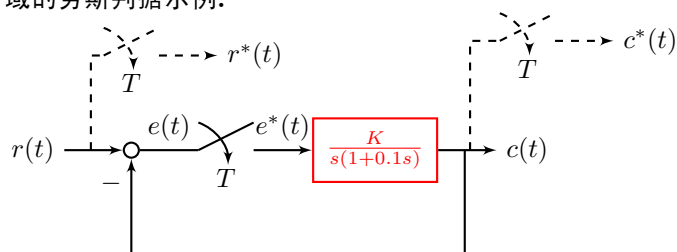
$$\begin{aligned} z &= x + jy \\ w &= u + jv \\ z &= \frac{w+1}{w-1} \\ w &= \frac{z+1}{z-1} \end{aligned}$$

- 等价关系:

$$\begin{aligned} u + jv &= \frac{x^2 + y^2 - 1 - 2yj}{(x-1)^2 + y^2} \\ |z| < 1 &\Leftrightarrow u < 0 \end{aligned}$$

- 可在 W 域中使用 Routh 判据.

W 域的劳斯判据示例:



分有无采样开关两种情况讨论为使系统稳定, K 需要满足的条件.

- 解: 无采样开关时:

$$D(s) = 0.1s^2 + s + k$$

得: $k > 0$

W 域的劳斯判据示例 (续): 有采样开关时:

$$\begin{aligned} G(z) &= \mathcal{Z}\left[\frac{K}{s(1+0.1s)}\right] = \frac{0.632kz}{z^2 - 1.368z + 0.368} \\ \Phi(z) &= \frac{G(z)}{1 + G(z)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 D(z) &= z^2 + (0.632k - 1.368)z + 0.368 \\
 z &= \frac{w+1}{w-1} \\
 D(w) &= 0.632Kw^2 + 1.264w + (2.736 - 0.632k)
 \end{aligned}$$

W 域的劳斯判据示例 (续): 有采样开关时:

- Routh 表:

$$\begin{array}{ccc}
 w^2 & 0.632k & 2.7360 - 0.632k \\
 w^1 & 1.264 & 0 \\
 w^0 & 2.736 - 0.632k &
 \end{array}$$

- 得:

$$\begin{aligned}
 0.632k &> 0 \\
 2.736 - 0.632k &> 0
 \end{aligned}$$

- 得:

$$0 < k < 4.33$$

- 采样开关对稳定性有很大影响.

5.3 离散系统稳定性影响因素

离散系统稳定性影响因素

- 系统开环增益

- $k \uparrow$ 则离散系统稳定性下降
- $k \downarrow$ 则离散系统稳定性提高

- 采样周期

- $T \uparrow$ 则离散系统稳定性下降
- $T \downarrow$ 则离散系统稳定性提高

6 离散系统稳态误差

6.1 离散系统稳态误差

离散系统稳态误差

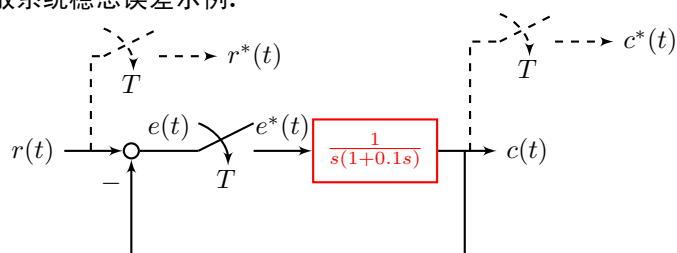
- 连续系统稳定误差:

- Laplacian 变换的终值定理

- 静态误差系数
- 动态误差系数
- 离散系统稳态误差
 - Z 变换终值定理

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow \infty} e^*(t) &= \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)E(z) \\ &= \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)\Phi_e(z)R(z)\end{aligned}$$

离散系统稳态误差示例:



其中 $T = 0.1, r_1(t) = 1(t), r_2(t) = t$ 求离散系统相应的稳态误差

其中 $T = 0.1, r_1(t) =$

- 解:

$$\begin{aligned}G(z) &= \frac{z(1-0.368)}{(z-1)(z-0.368)} \\ \Phi_e(z) &= \frac{1}{1+G(z)} = \frac{(z-1)(z-0.368)}{z^2-0.736z+0.368}\end{aligned}$$

离散系统稳态误差示例 (续)

- $r_1(t) = 1(t)$ 时

$$\begin{aligned}R_1(z) &= \frac{1}{1-z^{-1}} \\ \lim_{z \rightarrow 1} (1-z^{-1})\Phi_e(z)R(z) &= 0\end{aligned}$$

- $r_2(t) = t(t)$ 时

$$\begin{aligned}R_1(z) &= \frac{Tz^{-1}}{(1-z^{-1})^2} \\ \lim_{z \rightarrow 1} (1-z^{-1})\Phi_e(z)R(z) &= \lim_{z \rightarrow 1} \frac{T(z-0.368)}{z^2-0.736z+0.368} \\ &= T \\ &= 0.1\end{aligned}$$

6.2 离散系统型别与静态误差系数

离散系统型别

- 连续系统型别:

$$G_o(s) = \frac{M(s)}{s^\nu N(s)}$$

若 $\nu = 0, 1, 2$ 则分别称为 0 型, I 型, II 型系统.

- 离散系统型别:

$$G_o(z) = \frac{M(z)}{(z-1)^\nu N(z)}$$

若 $\nu = 0, 1, 2$ 则分别称为 0 型, I 型, II 型系统. ($G_o(z)$ 为单位负反馈开环脉冲传递函数)

静态误差系数: 0 型系统:

- 连续系统

$$\begin{aligned} K_p &= \lim_{s \rightarrow 0} G_o(s) \\ r(t) &= 1 \\ e_{ss} &= \frac{1}{1 + K_p} \end{aligned}$$

- 离散系统

$$\begin{aligned} K_p &= \lim_{z \rightarrow 1} (1 + G_o(z)) \\ r(t) &= 1(t) \\ e_{ss} &= \frac{1}{K_p} \end{aligned}$$

静态误差系数: I 型系统:

- 连续系统

$$\begin{aligned} K_p &= \lim_{s \rightarrow 0} s G_o(s) \\ r(t) &= t \\ e_{ss} &= \frac{1}{K_v} \end{aligned}$$

- 离散系统

$$\begin{aligned} K_p &= \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) G_o(z) \\ r(t) &= t \\ e_{ss} &= \frac{T}{K_v} \end{aligned}$$

静态误差系数:II 型系统:

- 连续系统

$$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 G_o(s)$$

$$r(t) = \frac{t^2}{2}$$

$$e_{ss} = \frac{1}{K_a}$$

- 离散系统

$$K_p = \lim_{z \rightarrow 0} (z-1)^2 G_o(s)$$

$$r(t) = \frac{t^2}{2}$$

$$e_{ss} = \frac{T^2}{K_a}$$

7 离散系统动态性能分析

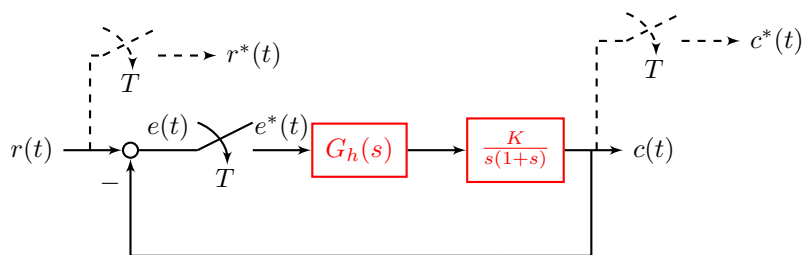
连续系统: 时域分析, 根轨迹法, 频域法, 离散系统也有类似方法, 这里只讨论时域响应

7.1 离散系统时间响应

离散系统时间响应计算

- 求 $\Phi(z)$ 计算 $C(z) = \Phi(z)R(z)$, Z 反变换求出 $C^*(t)$
- 不存在 $\Phi(z)$ 时, 直接计算 $C(z)$, Z 反变换求出 $C^*(t)$

离散系统时间响应计算示例:



- 结构图

其中 $r(t) = 1(t)$, $T = 1s$ 求系统动态性能指标.

- 解:

$$G_o(z) = (1 - z^{-1})\mathcal{Z}\left[\frac{1}{s^2 + 1}\right] = \frac{0.368z + 0.264}{(z - 1)(z - 0.368)}$$

$$\Phi(z) = \frac{G_o(z)}{1 + G_o(z)} = \frac{0.368z + 0.264}{z^2 - z + 0.632}$$

$$C(z) = \Phi(z)R(z) = \frac{0.368z^{-1} + 0.264z^{-2}}{1 - 2z^{-1} + 1.632z^{-2} - 0.632z^{-3}}$$

$$C(z) = 0.368z^{-1} + z^{-2} + 1.4z^{-3} + 1.4z^{-4} + 1.147z^{-5} + 0.895z^{-6} + 0.802z^{-7} + 0.868z^{-8} + \dots$$

$$t_r = 2s, t_p = 4s, t_s = 12s, \sigma\% = 40\%$$

7.2 采样器, 保持器对系统动态性能的影响

采样器, 保持器对系统动态性能的影响

- 定性说明:
 - 采样器: 使系统稳定性下降, 使 $\sigma\% \uparrow, t_r \downarrow, t_s \downarrow$
 - 保持器: 使系统稳定性下降, 使 $\sigma\% \uparrow, t_r \uparrow, t_s \uparrow$
- 对大迟延系统, 无上述定性结论

7.3 闭环极点与动态响应的关系

闭环极点与动态响应的关系

$$\begin{aligned} z &= e^{sT} \\ &= e^{\sigma T} e^{j\omega T} \end{aligned}$$

- 若闭环极点 $|z| > 1$, 则有 $\sigma > 0$, 系统不稳定.
- 若闭环极点 $|z| = 1$, 则有 $\sigma = 0$, 等幅振荡.
- 若闭环极点 $|z| < 1$, 则有 $\sigma < 0$, 系统稳定.
 - 闭环极点为正实数: 单调收敛
 - 闭环极点为负实数: 振荡收敛
 - 闭环极点为具有正实部的复数: 低频振荡收敛
 - 闭环极点为具有负实部的复数: 高频振荡收敛
 - 若 $|z| \rightarrow 0, \sigma \rightarrow -\infty$, 收敛极快
 - 系统期望的闭环极点在 Z 平面单位圆的右半圆内