上讲回顾

- 引入了倒(动量)空间的一些概念
 - * 数学上,正、倒空间只是一个Fourier变化
 - * 倒格子
 - # 倒格子基矢、倒格矢
 - # Brillioun 🗵
 - †倒空间Wigner-Seitz原胞=第一Brillioun区

本讲目的:观测晶体结构的基础是什么?

- 1. 用衍射方法确定晶体结构的理论根据? →von Lauer条件
- 2. 能不能观察到衍射极大还有什么条件?→结构因子

第10讲、晶体结构衍射理论

- 1. 晶体衍射实验是一个重要的里程碑
- 2. Bragg定律
- 3. von Laue方程
- 4. 散射强度和结构因子

1、一个重要的里程碑

- 1912年von Laue把硫酸铜晶体作为光栅,试图测X射线波长,却得到了晶体结构衍射图象!
- 虽然现也有直接观察技术,但测量晶体结构, 还是用衍射技术,因为它对周期结构最灵敏
 - * 直接观察晶体结构技术,如TEM、STM、FIM,但 这些技术是观察点缺陷、位错、台阶、表面和界面 的理想方法,因为可以直接反映这类结构的特征;
 - * 而晶体内部周期性结构的观察, 还是靠衍射技术
- 晶体的衍射实验可以用X射线,以及粒子波长 合适的实物粒子如中子、电子等作入射束
 - # X射线和电子作入射束,主要是被晶体中的电子 散射,而中子则是被原子核散射

建立晶体衍射与结构的关系分衍射理论

- · ~1912年→解释X射线晶体衍射的理论是经典的
 - * 后来,这些理论被推广到研究实物粒子衍射也是有数的,仅需用到量子力学中的粒子波概念
 - * 适合于X射线和非破坏性的高能电子弹性散射
- 运动学近似散射理论,它假定
 - * 入射束仅被单次散射; 散射时原子位置保持刚性固定; 并且是弹性散射, 没有能量损耗
 - * 理论给出的衍射极大条件,但并不一定能观察到衍射极大,因为条件仅对格点有效,格点代表的是基本结构,因此,还要看具体结构。von Laue在1912年得到的是衍射极大的必要条件,不是充分条件
- · 动力学理论需要量子力学,30'由von Laue建立

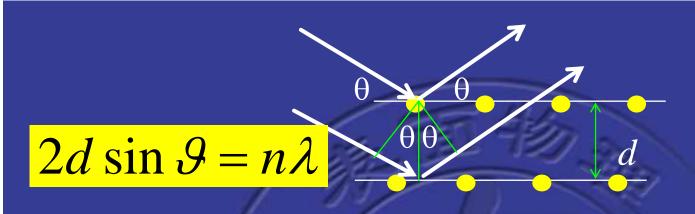
2、Bragg定律

- 根据光的反射定律
 - * 入射角等于反射角, 反射足够强
- Bragg因此假设
 - 1. 入射波从原子平面作镜面反射
 - 2. 对于可见光来说,可得足够强的反射光束;但对于X射线,透射率极大,而反射率极小,实际情况是只有入射的10-3~10-5部分被反射。所以Bragg又假定:每个平面只反射很小部分(另外部分穿透)
- 当反射波发生相长干涉时,就出现衍射极大
 - * 两个面间光程差: 光程差: $2d \sin \theta$
 - * 加强条件: 层与层之间的光程差为波长的n倍时,衍射极大→Bragg定律(Bragg 反射公式)

 $2d \sin \theta = n\lambda$

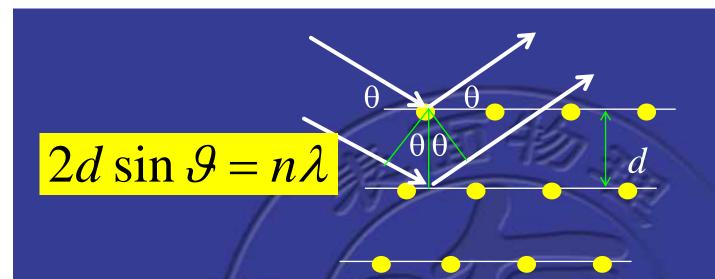
分析 $2d \sin \theta = n\lambda$

- θ θ d
- 定律确定的是波长与面间距关系
 - * 即满足什么条件才发生Bragg反射?
- 不能用可见光!
 - *因为只有 1<2d才能发生Bragg反射
 - * 对同一簇反射面,要求 θ 和 λ 相匹配,因此,反射 受严格限制,只有 θ 和 λ 的特殊耦合才会有同相位 相加效应,产生衍射斑点
 - * 对于X射线,大部穿透,有足够多的原子平面参与



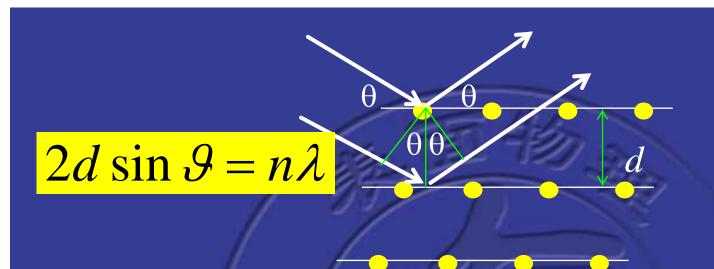
质疑 Pragg假定X射线被原子平面镜面反射,不同原子面反射波相长干涉,产生衍射极大。如是原子平面,那它们的面间距都相等,都等于d吗?

显然不是!



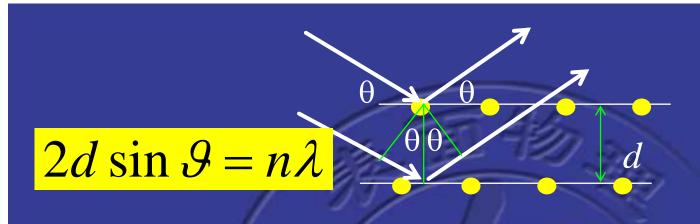
质疑→原子面在什么情况下才能被看作镜面反射? 这时波长与原子间距应该取什么关系?

波长应大于大于原子间距!但这与入射 束波长 \(\lambda < 2d)的限制显然矛盾!



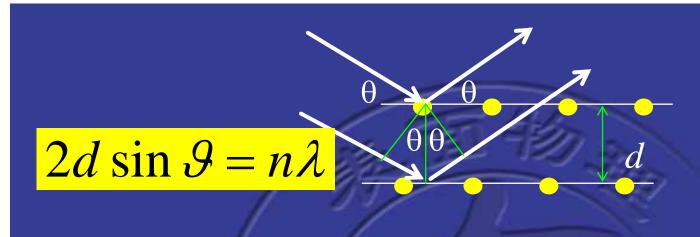
质疑→为绕过原子镜面反射的困难, Bragg假设不是全反射→那全反射还有 没有衍射图象?

有!但不是X射线作入射束。比如高能电子衍射就利用全反射。全反射并不是入射波长>>原子间距所引起,而是采用掠入射。主要用于探测表面周期结构



思考:如果假定Bragg定律中的反射面不是原子平面而是晶面,前面几个困难就迎刃而解了吗?

但晶面只是数学抽象,不是真实存在的实物平面!

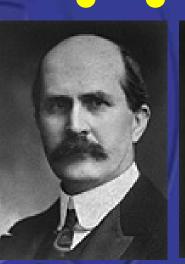


思考: Bragg定律的问题究竟出在什么地方?

- · 恰恰是在究竟被什么东西反射这一关键问题上, Bragg是模糊的, 不清楚的!
- · 被基元中的原子及电子,其代表是格点! 这是von Laue早于Bragg得到的。Bragg画 蛇添足,试图简化解释,不止把问题弄复 杂,连物理都错了

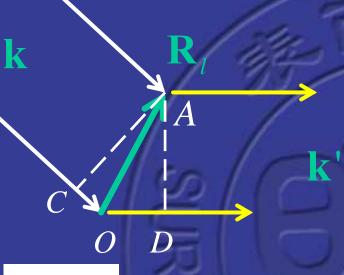
但结论正确 $2d \sin \theta = n\lambda$

- 虽然物理图象模糊不清,但 Bragg的结论正确,因为恰 巧是von Laue公式的特例
- · Bragg定律借鉴了光的反射 定律和薄膜干涉,或受启发
 - * 初衷是解释von Laue衍射条 件,简化实验测量
 - * 但物理上是有问题的,所以用一些假定来绕过这些问题
- · Bragg父子在1915年因Bragg 定律而得诺贝尔物理学奖





3、von Laue方程



$$\hat{\mathbf{k}} = \frac{\mathbf{k}}{k}$$

$$\hat{\mathbf{k}} = \frac{\mathbf{k}}{k}$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

- 本质:晶体衍射是入射的X射线与原子核外电子作用的结果;设电子的弹性散射* R,是格矢
- 光程差: CO + OD

$$CO = -\mathbf{R}_l \cdot \hat{\mathbf{k}}$$

$$OD = \mathbf{R}_l \cdot \hat{\mathbf{k}}'$$

由此得加强条件:

$$\mathbf{R}_l \cdot (\hat{\mathbf{k}}' - \hat{\mathbf{k}}) = \mu \lambda$$

$$\mathbf{R}_l \cdot (\mathbf{k'} - \mathbf{k}) = 2\pi\mu$$

von Laue条件

• 光程差满足加强条件

$$\mathbf{R}_l = l_1 \mathbf{a}_1 + l_2 \mathbf{a}_2 + l_3 \mathbf{a}_3$$

$$\mathbf{K}_h = h_1 \mathbf{b}_1 + h_2 \mathbf{b}_2 + h_3 \mathbf{b}_3$$

$$\mathbf{R}_{I} \cdot (\mathbf{k}' - \mathbf{k}) = 2\pi\mu$$



$$|\mathbf{K}_h \cdot \mathbf{R}_l| = 2\pi \ n$$

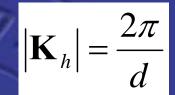


$$\mathbf{k'} - \mathbf{k} = \mathbf{K}_h$$

von Laue 条件: 波矢改变等于倒 格矢时,满足衍 射加强的条件

讨论: Bragg和von Laue条件的等价关系

$$d = \frac{\mathbf{a}_1}{h_1} \cdot \frac{\mathbf{K}_h}{|\mathbf{K}_h|} = \frac{2\pi}{|\mathbf{K}_h|}$$

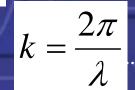


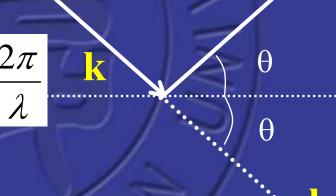
· 从von Laue条件即可得Bragg反射公式

$$\left|\mathbf{K}_{h}\right| = \left|\mathbf{k}' - \mathbf{k}\right| = 2k \sin \theta$$

$$2\pi/d = 2(2\pi/\lambda)\sin\theta$$

$$2d \sin \theta = n\lambda$$





- ·这为K_h与晶面方向的关系作了注解
 - $* nK_h$ 也满足

 \mathbf{K}_{b}

(hkl)

讨论: von Laue方程与Bragg定律的图象

- Bragg定律的所有疑问在von Laue方程中全无疑问,或在此基础上全都可以解决
 - * 而Bragg定律实际上只是von Laue方程中满足衍射 极大的条件特例
- · 注意: 当时量子力学还未完全建立,但是von Laue方程物理图象就是在今天看来也是正确的
 - * X射线被电子在各个方向散射
 - * 由于原子核的周期性排列的,围绕着原子核的电子也可以被认为是周期性分布的
 - # 所以在某些方向上,散射波相消干涉; 在某些方向上,散射波相长干涉, 产生衍射极大

幸运总是眷顾有准备的脑袋

- von Laue的初衷并非晶体结构衍射
 - * 初衷是测量X射线的波长——因为用普通光栅衍射来测X射线波长波长不行,X射线波长太短
- 得益于一个向他请教问题的博士生
 - * Sommerfeld的博士生Ewald因研究晶体双折射图象,向von Laue请教晶体中偶极子与电磁波作用问题。von Laue这才得知,晶体中的原子间距是1A数量级。他意识到这是X射线的天然光栅!结果所得比初衷还要丰厚。von Laue随后得到了硫酸铜晶体的衍射斑点,并给出了正确的理论解释
 - * 从此揭开了晶体分析的序幕,也为固体物理学奠定了基础,这个事件是固体物理学发展史上的重要里程碑。1914年得到了诺贝尔物理学奖

这件事说明

- 1. 研究要干净,分析要透彻;
- 2. 不要轻易放过任何不明白的现象;
- 3. 学生也是老师的老师

→视野拓展→由von Lauer条件看B区边界

- 由von Laue条件, k'-k=K_h
 - * 可以得到

$$\mathbf{k} - \mathbf{K}_h = \mathbf{k}' \implies (\mathbf{k} + \mathbf{K}_h)^2 = \mathbf{k}'^2$$

* 因弹性散射|k|=|k'|

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{K}_h = \frac{1}{2} \mathbf{K}_h^2$$

* 因此,von Lauer条件可写成

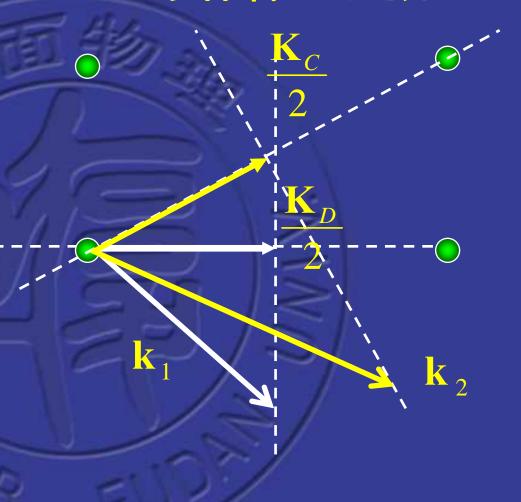
$$\mathbf{k} \cdot \frac{\mathbf{K}_h}{2} = \left(\frac{\mathbf{K}_h}{2}\right)^2$$

→视野拓展→由von Lauer条件看B区边界

• 由改写的von Laue条件

$$\mathbf{k} \cdot \left(\frac{\mathbf{K}}{2}\right) = \left(\frac{\mathbf{K}}{2}\right)^2$$

· 从原点出发到 Brillioun区边界面 上的任何矢量都 满足衍射条件!



→视野拓展→由von Lauer条件看B区边界

Brillioun区边界面上的任何矢量都满足衍射极大这个条件→重要性质

→能隙:该能量区域内无电子!

- * 在电子不受原子作用(比如自由电子,因而无晶格也因而无Brillioun区边界)时,电子能量E(k)是连续的
- * 在电子受原子作用时(因而有晶格也因而存在 Brillioun区边界), 电子受Brillioun边界的散射, 连续能级会形成一个与k有关的能隙 > 在某些能量区域内, 电子不允许存在!
- * 能隙将原来连续分布的能量分割 > 即所谓能带
- * →能带理论

设问: Bragg条件和von Laue方程仅 给出衍射极大的条件,满足衍射条件 是不是一定看得见衍射光斑?

这是一个与散射强度有关的问题。散射强度如果由于某些原因而等于零当然也看不到光斑。那么,散射强度与什么有关?

4、散射强度和结构因子

- 衍射束(光斑)的强度由什么来决定?
- · von Laue方程也给出了物理原因: 受电子散射
 - * 衍射强度由此得到
 - * X射线与晶体的相互作用,实际上是晶体中每个原子中电子分布对X射线的散射
 - * Bravais格子的结构决定了衍射极大的条件
- 一个原子中所有电子对X射线的散射总和可以 归结为以这个原子为中心的散射

散射强度与哪些因素有关?

- 晶胞内原子具体位置决定了散射的位相(热振动对此有影响)
 - →几何结构因子
- 每个原子中电子的数目和分布决定了该原子的散射能力
 - →原子形成因子

散射强度

 $e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\cdot\mathbf{r}}$

 $\rho(\mathbf{r})d\mathbf{r}$

- 散射東位相差 • 散射東位相差←点电荷
 - * 考虑分布,则散射振幅为

$$F = \int \rho(\mathbf{r})e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\cdot\mathbf{r}}d\mathbf{r}$$

e^{ik}·r

ik'·r

· 与快速运动的电子相比,对原子核微小的无规 热振动作平均后,电子分布仍可视为有周期性

$$\rho(\mathbf{r}) = \rho(\mathbf{r} + \mathbf{R})$$

$$\rho(\mathbf{r}) = \sum \rho(\mathbf{K})e^{i\mathbf{K}\cdot\mathbf{r}}$$

- 散射振幅于是可写为 $F = \sum \rho(\mathbf{K}) \int e^{i[\mathbf{K} (\mathbf{k'} \mathbf{k})] \cdot \mathbf{r}} d\mathbf{r}$
- - * 这才是衍射极大的von Laue条件严格推导,前面导出von Laue方程时只考虑了光程差位相条件

电荷分布的Fourier展开

· 前面直接给出了因为电荷分布具有平移周期性, 所以可作Fourier展开

$$\rho(\mathbf{r}) = \sum \rho(\mathbf{K})e^{i\mathbf{K}\cdot\mathbf{r}}$$

• 展开系数是

$$\rho(\mathbf{K}) = V^{-1} \int \rho(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{K} \cdot \mathbf{r}} d\mathbf{r}$$

• 因为周期性,可把积分局限在原胞内,即

$$\rho(\mathbf{K}) = \Omega^{-1} \int_{\Omega} \rho(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{K} \cdot \mathbf{r}} d\mathbf{r} = \Omega^{-1} S_{\mathbf{K}}$$

• 于是

$$S_{\mathbf{K}} = \int_{\Omega} \rho(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{K} \cdot \mathbf{r}} d\mathbf{r}$$

* 这就是几何结构因子

几何结构因子

$$S_{\mathbf{K}} = \int_{\Omega} \rho(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{K}\cdot\mathbf{r}} d\mathbf{r}$$

$$\rho(\mathbf{r}) = \sum_{j=1}^{s} \rho_{j}(\mathbf{r} - \boldsymbol{\tau}_{j})$$

$$S_{\mathbf{K}} = \sum_{j} \int_{\Omega} \rho_{j} (\mathbf{r} - \mathbf{\tau}_{j}) e^{-i\mathbf{K} \cdot \mathbf{r}} d\mathbf{r} = \sum_{j} e^{-i\mathbf{K} \cdot \mathbf{\tau}_{j}} \int_{\Omega} \rho_{j} (\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{K} \cdot \mathbf{r}} d\mathbf{r} = \sum_{j} f_{j} e^{-i\mathbf{K} \cdot \mathbf{\tau}_{j}} \int_{\Omega} \rho_{j} (\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{K} \cdot \mathbf{r}} d\mathbf{r}$$

$$S_{\mathbf{K}} = \sum_{j} f_{j} e^{-i\mathbf{K}\cdot\boldsymbol{\tau}_{j}}$$

$$f_{j} = \int_{\Omega} \rho_{j}(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{K}\cdot\mathbf{r}} d\mathbf{r}$$

- 几何结构因子:原胞内所有原子的散射波,在 所考虑的方向上的振幅与一个电子作为点电荷 的散射振幅之比
 - * 几何结构因子反映原胞内原子的具体分布对散射的影响

原子形成因子

$$f_j = \int \rho_j(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{K}\cdot\mathbf{r}} d\mathbf{r}$$

$$\mathbf{K} \to 0$$

$$f_j = \int \rho_j(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = Z_j$$

· 原子形成因子: 原子j的电荷分布对散射的影响

散射强度——消光条件

• 几何结构因子

$$S_{\mathbf{K}_h} = \sum_{j} f_j e^{-i\mathbf{K}_h \mathbf{\tau}_j}$$

$$\mathbf{K}_{h} = h\mathbf{u} + k\mathbf{v} + l\mathbf{w}$$

$$\mathbf{\tau}_{j} = x_{j}\mathbf{a} + y_{j}\mathbf{b} + z_{j}\mathbf{c}$$

$$\mathbf{K}_{h} \cdot \mathbf{\tau}_{j} = 2\pi(hx_{j} + ky_{j} + lz_{j})$$

(hkl): Miller指数,用晶胞 x_j, y_j, z_j: 分数

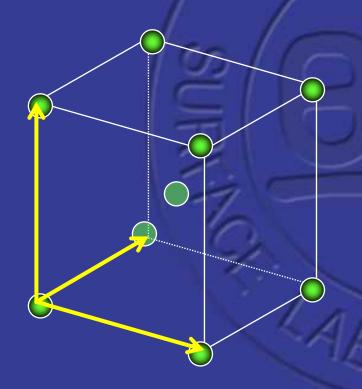
散射强度

$$I_{hkl} \propto |S_{hkl}|^2 = S_{hkl} S_{hkl}^*$$

结构因子有可能使von Laue条件允许的某些 衍射斑点消失!

如何确定几何结构因子举例

• bcc结构因子



$$\tau_{j}$$
: (0.0,0.0,0.0); (0.5,0.5,0.5)

$$\mathbf{\tau}_j = x_j \mathbf{a} + y_j \mathbf{b} + z_j \mathbf{c}$$

$$S_{\mathbf{K}_h} = \sum_{j} f_j e^{-i\mathbf{K}_h \mathbf{\tau}_j}$$

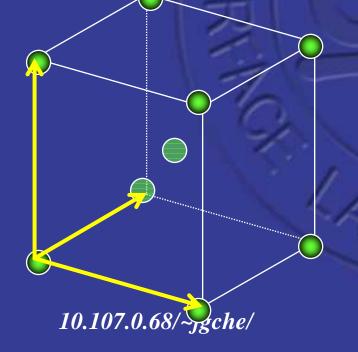
$$\mathbf{K}_h \cdot \mathbf{\tau}_j = 2\pi (hx_j + ky_j + lz_j)$$

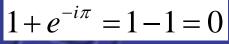
$$S_{\mathbf{K}_h} = f(1+e^{-i\pi(h+k+l)})$$

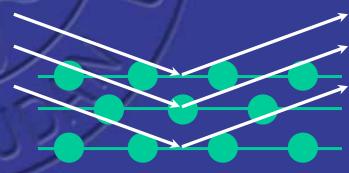
$$= \begin{cases} 0 & h+k+l = 奇数 \\ 2f & h+k+l = 偶数 \end{cases}$$

思考: h+l+k=奇数, $S_K=0$,衍射光斑消失! 比如(001)面,bcc结构(001)这个晶面(不是这个晶面方向的晶面族) 衍射斑点消失? 为什么?物理图象?

相邻晶面产生相位差都是π,所以产生的反射振幅之和为零,不产生衍射光斑







例: fcc结构因子

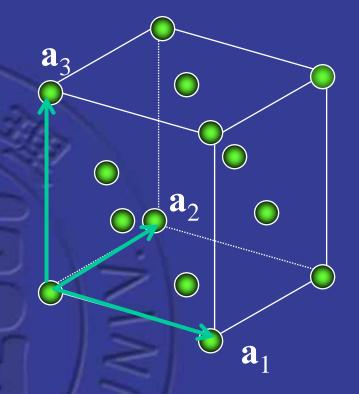
 $\tau_{i}:(0.0,0.0,0.0);(0.0,0.5,0.5);$

(0.5,0.5,0.0); (0.5,0.0,0.5)

$$\mathbf{\tau}_{j} = x_{j}\mathbf{a} + y_{j}\mathbf{b} + z_{j}\mathbf{c}$$

$$S_{\mathbf{K}_h} = \sum_{j} f_j e^{-i\mathbf{K}_h \mathbf{\tau}_j}$$

$$\mathbf{K}_h \cdot \mathbf{\tau}_j = 2\pi (hx_j + ky_j + lz_j)$$



$$S_{\mathbf{K}_{h}} = f(1 + e^{-i\pi(k+l)} + e^{-i\pi(h+l)} + e^{-i\pi(h+l)})$$
 $S_{\mathbf{K}_{h}} \neq 0$ h, k, l 全为奇数或偶数

也许要问:这里的消光的例子都是晶胞!如不用密勒指数,而用晶面指数,还会有消光吗?消光在这里的真实含义是什么?

晶胞可以包含一个以上的格点。如果把晶胞看作基本结构,也可用一个点来代表,我们把它叫做结点,以区分格点。那么,结点也满足平移对称性。在正空间,结点数等于或小于格点数;但是点数!倒格点代表晶面,密勒指数对应倒结点。这两个例子的消光,就是消除所有不是格点的结点

也许再问:不用密勒指数,而用晶面指数,就不存在消光现象了?

如果原胞内只有一个原子,是的!但是原胞内可能并不止一个原子。所以,有 两类消光,一类是指密勒指数对应的消 光现象,我们前面说了,对应的是结 点,另一类请看下面金刚石结构的例子

例: 金刚石结构的几何结构因子

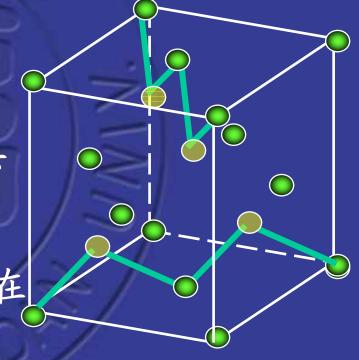
- 基矢: **a**=a**i**, **b**=a**j**, **c**=a**k**
- 晶胞含8个原子: (用基矢表示)
- 8个顶角由8个晶胞共享,各 1/8,只计1个 (0,0,0)
- 3对面心,每个面由2个晶胞共享,各1/2,计3个

(0,0.5,0.5); (0.5,0,0.5); (0.5,0.5,0)

• 另外有4个在完全在晶胞内,在 4条对角线上(四面体中心)

(0.25,0.25,0.25); (0.75,0.75,0.25);

(0.75, 0.25, 0.75); (0.25, 0.75, 0.75)



• 立方晶系,基矢: a=ai, b=aj, c=ak, 所以

$$\mathbf{K} = \frac{2\pi}{a} \left(h\hat{\mathbf{i}} + l\hat{\mathbf{j}} + k\hat{\mathbf{k}} \right)$$

• 结构因子为
$$S_{\mathbf{K}} = \sum_{i} f_{i} e^{-i\mathbf{K} \cdot \mathbf{\tau}_{i}}$$

• 晶胞内位矢为

• 几何结构因子

$$S_{\mathbf{K}} = f \left(1 + e^{-i\pi(h+k)} + e^{-i\pi(h+l)} + e^{-i\pi(k+l)} + e^{-i\pi(h+l+k)/2} + e^{-i\pi(3h+l+3k)/2} + e^{-i\pi(h+3l+3k)/2} + e^{-i\pi(3h+3l+k)/2} \right)$$

• 金刚石的结构因子也可以写成两项的乘积,一项是面心立方的相因子

$$(1+e^{-i\pi(h+l)}+e^{-i\pi(k+l)}+e^{-i\pi(h+k)})$$

• 另一项可由面心立方结构沿对角线移动1/4的对角线长度得到,这个因子是由这样两个原子,即一个在原点,一个在对角线1/4长度距离的相位差,相当于(0,0,0)和(0.25,0.25,0.25)的相因子

$$(1+e^{-i\pi(h+l+k)/2})$$

• 这两个相因子的乘积就是金刚石结构的几何结构因子,消光条件就容易判断

$$S_{\mathbf{K}} = f(1 + e^{-i\pi(h+l+k)/2})(1 + e^{-i\pi(h+l)} + e^{-i\pi(k+l)} + e^{-i\pi(h+k)})$$

金刚石结构的属面心立方格子。它的 结构因子可以分成两个因子的乘积: 其中面心立方格子相因子给出的消光 条件,消除的是立方晶胞对应的倒结 点,相对于面心立方格子的倒格子所 多余的倒结点;而沿对角线移动1/4对 角线长度所得的相因子就导致另一类 消光: 是原胞内原子分布结构引起的 相干散射而产生的消光

本讲小结:兼答本讲目的所提问题

- 晶体结构衍射理论
 - * 衍射极大条件
 - # Bragg定律
 - #von Laue方程→布里渊区边界
 - * 散射强度
 - #几何结构因子

$$S_{\mathbf{K}} = \sum_{j} f_{j} e^{-i\mathbf{K}\cdot\mathbf{\tau}_{j}}$$

#原子形状因子 $f_j = \int \rho_j(\mathbf{r})e^{-i\mathbf{K}\cdot\mathbf{r}}d\mathbf{r}$

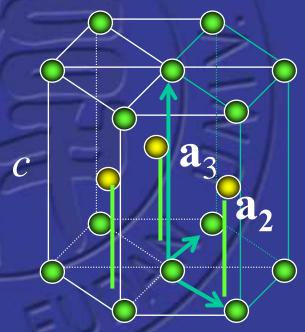
- 两种不同类型的消光
 - 1. 与晶胞所导致的多余的倒结点有关的消光
 - 2. 与原胞内原子分布引起的相干散射有关的消光

新引入概念

- 衍射极大条件
 - * Bragg反射面
 - * von Laue条件
- 散射振幅
 - * 几何结构因子
 - * 原子形成因子

习题:

- 10. 六角密堆积结构, 试确定
 - ① 晶胞、基矢、晶胞内原子位矢;
 - ② 倒格子基矢;
 - ③ 几何结构因子;
 - ④ 讨论其消光条件。



要能够独立完成, 熟记所有细节

a

课堂讨论题

- 行射理论依赖于晶格的平移周期性,但衍射理 论假定之一是假定原子刚性固定。如果温度升 高,原子作热振动,即使是微小的振动,也偏 离了平衡位置,平移周期性必被破坏。设问: 这时,衍射极大条件还满足吗?
 - * 实验指出,微小的热振动只影响散射强度,而不影响衍射束宽度!
- 这是为什么?

偏离平衡位置的是原子核,而X射线主要是受电子散射!与快速运动的电子相比,对原子核微小的无规偏移作热平均后即可得这个结论。散射是受电子的散射。