第五节 奈奎斯特稳定判据

自动控制原理B

面向专业：微电子系

授课教师：刘剑毅

一、预备知识：柯西幅角原理：

Notation:

考虑一个复变函数

$$F(s)=\frac{K(s+z_1)(s+z_2)\cdots(s+z_m)}{(s+p_1)(s+p_2)\cdots(s+p_n)}$$

自变量：s　　定义域：S 平面

函数：$F(s)$　　值域：$F(s)$ 平面

$F(s)$的值域构成的复平面称为$F(s)$平面，S平面上的每一点将映射到$F(s)$平面上的相应点。

将该函数表示成幅值相角形式：

考虑S平面上任一点s_1映射到$F(s)$平面上的点$F(s_1)$可以用一个向量来表示，即

$$F(s_1)=\frac{K\prod_{i=1}^{m}(s_1+z_i)}{\prod_{j=1}^{n}(s_1+p_j)}$$

$$F(s_1)=|F(s_1)|e^{j\angle F(s_1)}=\frac{K\prod_{i=1}^{m}|s_1+z_i|}{\prod_{j=1}^{n}|s_1+p_j|}e^{j\left[\sum_{i=1}^{m}\angle(s_1+z_i)-\sum_{j=1}^{n}\angle(s_1+p_j)\right]}$$

向量的幅值为

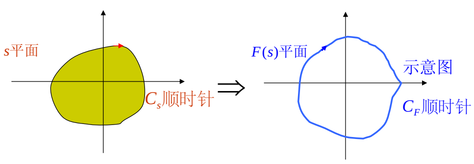
$$|F(s_1)|=\frac{K\prod_{i=1}^{m}|s_1+z_i|}{\prod_{j=1}^{n}|s_1+p_j|}$$

向量的相角为

$$\boxed{\angle F(s_1)=\sum_{i=1}^{m}\angle(s_1+z_i)-\sum_{j=1}^{n}\angle(s_1+p_j)}$$

Problem statement:

现考虑S平面上既不经过零点也不经过极点的一条封闭曲线C_S。当变点s沿C_S顺时针方向绕行一周，连续取值时，则在$F(s)$平面上也映射出一条封闭曲线C_F。



那么，C_S与C_F之间的关系如何？

Formulation:

考虑S平面上任一点 $s_1\in C_s$，其映射到$F(s)$平面上的复数的相角为：

$$\angle F(s_1)=\left[\sum_{i=1}^{m}\angle(s_1+z_i)-\sum_{j=1}^{n}\angle(s_1+p_j)\right]$$

当S平面上动点s从s_1经过曲线C_S到达s_2，映射到$F(s)$平面上的象也将是曲线C_F上的连续一段，其相角变化量为：

$$\Delta\angle F(s)=\angle F(s_2)-\angle F(s_1)$$

$$=\left[\sum_{i=1}^{m}\angle(s_2+z_i)-\sum_{j=1}^{n}\angle(s_2+p_j)\right]-\left[\sum_{i=1}^{m}\angle(s_1+z_i)-\sum_{j=1}^{n}\angle(s_1+p_j)\right]$$

为便于分析，不失一般性，假设 $F(s)$中极点和零点都仅有一个，则

$$\Delta\angle F(s)=\angle F(s_2)-\angle F(s_1)$$

$$=[\angle(s_2+z)-\angle(s_2+p)]-[\angle(s_1+z)-\angle(s_1+p)]$$

在整个曲线C_F 上将上述相角差累加起来：

$$\sum_{s\in C_s}\Delta\angle F(s)=\sum_{(s_1,s_2)\subset C_s}[\angle F(s_2)-\angle F(s_1)]$$

$$=\sum_{(s_1,s_2)\subset C_s}\{[\angle(s_2+z)-\angle(s_2+p)]-[\angle(s_1+z)-\angle(s_1+p)]\}$$

$$=\sum_{(s_1,s_2)\subset C_s}\{[\angle(s_2+z)-\angle(s_1+z)]-[\angle(s_2+p)-\angle(s_1+p)]\}$$

令：

$$\Omega_z=\sum_{(s_1,s_2)\subset C_s}[\angle(s_2+z)-\angle(s_1+z)]$$

$$\Omega_p=\sum_{(s_1,s_2)\subset C_s}[\angle(s_2+p)-\angle(s_1+p)]$$

最后得到：

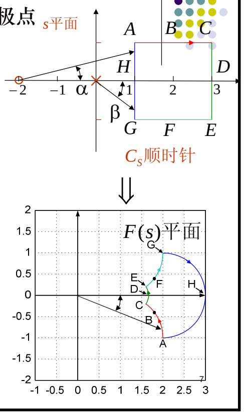
$$\boxed{\Theta\triangleq\sum_{s\in C_s}\Delta\angle F(s)=\Omega_z-\Omega_p}$$

Discussion:

Case 1. 围线C_S既不包围零点也不包围极点

在S平面上当变点s沿围线C_S按顺时针方向运动一周时，

$$\Omega_z=\Omega_p=0^o$$



于是，映射到F(S)平面上，当变点F(s)沿C_F绕行一周后，其幅角变化累加值为：

$$\Theta=\Omega_z-\Omega_p=0^o$$

这表明，围线C_F此时在F(S)平面上不包围原点，方向未知。

11/21/2013

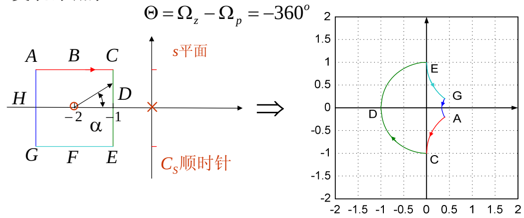
Case 2. 围线C_S只包围零点不包围极点

当变点s沿C_S顺时针绕行一周时，

$$\Omega_z=-360^o \qquad \Omega_p=0^o$$

那么，映射到F(S)平面上对应变点F(S)沿C_F绕行一周后的幅角变化累加值：

$$\Theta=\Omega_z-\Omega_p=-360^o$$



这表明，围线C_F此时在F(S)平面上顺时针包围原点一周。

11/21/2013 8

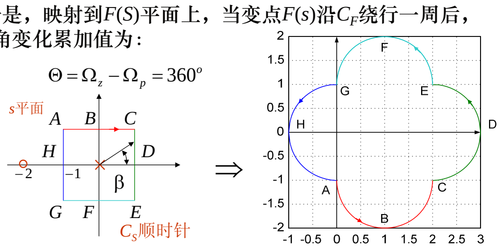
Case 3. 围线C_S只包围极点不包围零点。

当变点s沿C_S顺时针绕行一周时，

$$\Omega_z=0^o \qquad \Omega_p=-360^o$$

于是，映射到F(S)平面上，当变点F(s)沿C_F绕行一周后，其幅角变化累加值为：

$$\Theta=\Omega_z-\Omega_p=360^o$$



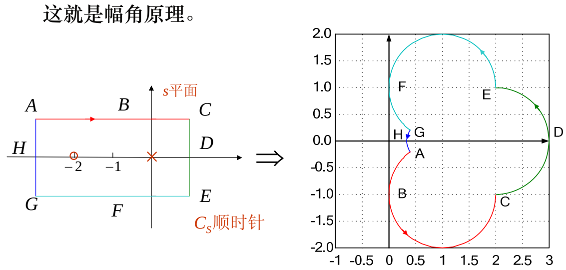
这表明，围线C_F此时在F(S)平面上逆时针包围原点一周。

11/21/2013 9

Case 4. 围线C_S包围Z个零点和P个极点。

由上述讨论可知，当变点s沿C_S顺时针绕行一周时，C_F应顺时针包围原点Z－P次。

这就是幅角原理。



11/21/2013 10

Formal description:

[柯西幅角原理]：S平面上的封闭曲线C_S包围S平面上F(s)的Z个零点和P个极点。当s以顺时针方向沿封闭曲线C_S移动一周时，在F(s)平面上相对应于封闭曲线C_F将以顺时针方向绕原点旋转N=Z－P 圈。

若N为正，表示C_F顺时针运动，包围原点；

若N为0，表示C_F顺(或逆)时针运动，不包围原点；

若N为负，表示C_F逆时针运动，包围原点。

Contribution：将复变函数的原象空间中封闭曲线包围其零极点的问题转化为象空间中封闭曲线包围原点的问题。

11/21/2013 11

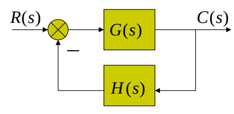
二、奈奎斯特稳定判据：

奈奎斯特当年就是巧妙地应用了幅角原理得到了奈奎斯特稳定判据。

首先建立系统模型：

$$G_k(s)=G(s)H(s)$$

$$\Phi(s)=\frac{G(s)}{1+G(s)H(s)}$$



令：$G(s)=\dfrac{M_1(s)}{N_1(s)}$，$H(s)=\dfrac{M_2(s)}{N_2(s)}$

则开环传递函数为：$G_k(s)=\dfrac{M_1(s)M_2(s)}{N_1(s)N_2(s)}$ …………… (a)

闭环传递函数为：$\Phi(s)=\dfrac{M_1N_2}{M_1M_2+N_1N_2}$ …………… (b)

11/21/2013 12

奈氏稳定判据的idea:

逆向应用柯西幅角原理，从象空间中闭合曲线包围原点的观察，来推知原象空间中闭合曲线对零极点的包围情况。

为此，构造映射函数 $F(s)$，它由系统开闭环特征多项式之比构成：

$$F(s)=\frac{M_1M_2+N_1N_2}{N_1N_2}=1+\frac{M_1M_2}{N_1N_2}=1+GH=1+G_k$$

所以：$F(s)$的极点为开环传递函数的极点；

$F(s)$的零点为闭环传递函数的极点；

与幅角原理统一对复变函数 $F(s)$的表达：

$$F(s)=\frac{K\prod_{i=1}^{m}(s+z_i)}{\prod_{j=1}^{n}(s+p_j)}。$$ 式中，$-z_i,-p_j$ 为$F(s)$的零、极点。

思路:

对于一个控制系统，若其闭环特征根处于s右半平面，则系统是不稳定的。上面定义的复变函数 $F(s)$，其零点恰好是闭环系统的极点，因此，只要搞清$F(s)$的零点在s右半平面的个数，就可以给出稳定性结论。如果$F(s)$的右半零点个数为零，则闭环系统是稳定的。

奈奎斯特为了应用柯西幅角原理研究闭环系统的稳定性，因此设想：

如果有一个s平面的封闭曲线能包围整个s右半平面，则根据柯西幅角原理知：该封闭曲线在$F(s)$平面上的映射包围原点的次数应为：

N = $F(s)$的右半零点数－$F(s)$的右半极点数

= 闭环系统右半极点数－开环系统右半极点数

当已知开环右半极点数时，便可由N判断闭环右极点数。

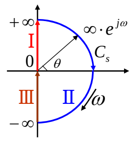
这里需要解决两个问题:

1、原象空间中，如何构造一个能够包围整个s右半平面的封闭曲线?

2、象空间中，如何确定映射$F(s)$对原点的包围次数N?

原象空间中那些事儿:

按顺时针方向做一条曲线C_S包围整个s右半平面，这条封闭曲线称为奈奎斯特路径。如下图所示。它可分为三部分：



① 正虚轴：　$s=j\omega$　　$\omega=0\to+\infty$

② 右半平面上半径为无穷大的半圆：

$s=R\cdot e^{j\theta}$，$R\to\infty$，θ从$\frac{\pi}{2}\to-\frac{\pi}{2}$

③ 负虚轴：　$s=j\omega$　　$\omega=-\infty\to 0$

C_s 曲线包围的零极点指函数$F(s)$的零极点，在公式 $N=Z-P$ 中，若已知P，并能确定N，可求出Z = N + P 。当Z = 0时，系统稳定；否则不稳定。

象空间中那些事儿:

因为$F(s)$＝1＋$G_k(s)$，$G_k(s)$为开环传递函数。因此：

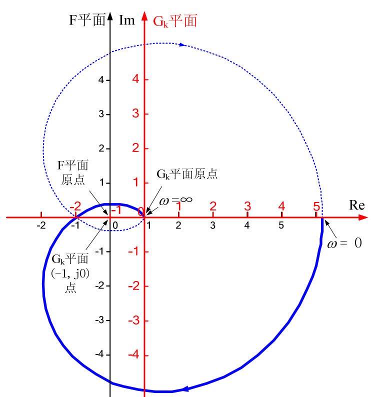
① $G_k(s)$平面可以通过F(s)平面的空间平移得到：向右平移1个单位；

②$F(s)$平面上，围线 C_F 对原点的包围，相当于$G_k(s)$平面上，对应围线 C_G 对(-1,j0)的包围；

③ $G_k(s)$平面上，围线 C_G 称为奈奎斯特曲线，它是参数 ω 由 $-\infty\to\infty$ 时，向量 $G_k(j\omega)$ 的端点移动形成的轨迹。

———系统开环频率特性$G_k(j\omega)$的极坐标图定义！

Problem solved!



Formal description:

[奈奎斯特稳定判据]：若系统的开环传递函数在右半平面上有P个极点，且开环频率特性极坐标曲线对(−1，j0)点包围的次数为N，（$N>0$顺时针，$N<0$逆时针），则闭环系统在右半平面的极点数为：$Z=N+P$。若$Z=0$，则闭环系统稳定，否则不稳定。

[奈奎斯特稳定判据的另一种描述]：

设开环系统传递函数$G_k(s)$在右半s平面上的极点数为P，则闭环系统稳定的充分必要条件为：在$G_k(s)$平面上的开环频率特性极坐标曲线当ω从$-\infty$变化到$+\infty$时：

对于开环不稳定系统，以逆时针方向围绕(−1，j0)点P圈；

对于开环稳定系统，极坐标曲线不包围(−1，j0)点。

如判断出闭环系统不稳定，则其在s右半平面的极点数可通过公式：$Z=N+P$来算出。

Contribution:

[奈奎斯特稳定判据的作用]：

提供了一种简便易行的判断系统稳定性的工程化方法：通过已绘出的系统开环极坐标图，以及很容易观察到的开环极点数目，来间接判断系统在s右半平面的闭环极点数目，从而获知系统稳定性结论。

[例1]开环传递函数为：$G_k(s)=\dfrac{K}{(T_1s+1)(T_2s+1)}$，试用奈氏判据判断闭环系统的稳定性。

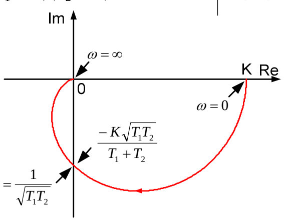
[解]：

$$A(\omega)=\frac{K}{\sqrt{1+T_1^2\omega^2}\sqrt{1+T_2^2\omega^2}}$$

$$\varphi(\omega)=-tg^{-1}T_1\omega-tg^{-1}T_2\omega$$

$$P(\omega)=\frac{K(1-T_1T_2\omega^2)}{(1+T_1^2\omega^2)(1+T_2^2\omega^2)}$$

$$Q(\omega)=\frac{-K\omega(T_1+T_2)}{(1+T_1^2\omega^2)(1+T_2^2\omega^2)}$$



当$\omega=0$时，$A(\omega)=K$，$\varphi(\omega)=0$，$P(\omega)=K$，$Q(\omega)=0$

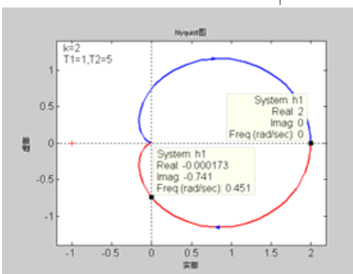
当$\omega=\infty$时，$A(\omega)=0$，$\varphi(\omega)=-\pi$，$P(\omega)=0$，$Q(\omega)=0$

令$P(\omega)=0$，解得$\omega=\dfrac{1}{\sqrt{T_1T_2}}$，此时$Q(\omega)=\dfrac{-K\sqrt{T_1T_2}}{T_1+T_2}$

$$G_k(s)=\frac{K}{(T_1s+1)(T_2s+1)}$$

当参数K，T_1和T_2为任何正值时，$P=0$。

开环系统的奈氏图如右。在s右半平面的极点数为0，绕(−1，j0)点的圈数$N=0$，则闭环系统在s右半平面的个数：$Z=N+P=0$。故闭环系统是稳定的。



[例2]设开环系统传递函数为：$G_k(s)=\dfrac{K}{(s+2)(s^2+2s+5)}$，试用奈氏判据判断闭环系统的稳定性。

[解]：

$$A(\omega)=\frac{K}{\sqrt{4+\omega^2}\sqrt{(5-\omega^2)^2+4\omega^2}}\qquad \varphi(\omega)=-tg^{-1}\frac{\omega}{2}-tg^{-1}\frac{2\omega}{5-\omega^2}$$

$$P(\omega)=\frac{K(10-4\omega^2)}{(10-4\omega^2)^2+\omega^2(9-\omega^2)^2}\qquad Q(\omega)=\frac{-K\omega(9-\omega^2)}{(10-4\omega^2)^2+\omega^2(9-\omega^2)^2}$$

当$\omega=0$时，$A(\omega)=\dfrac{K}{10}$，$\varphi(\omega)=0°$，$P(\omega)=\dfrac{K}{10}$，$Q(\omega)=0$

当$\omega=\infty$时，$A(\omega)=0$，$\varphi(\omega)=-270°$，$P(\omega)=0$，$Q(\omega)=0$

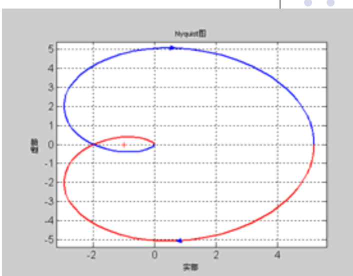
令$P(\omega)=0$，解得$\omega=\sqrt{2.5}$，此时$Q(\sqrt{2.5})=\dfrac{-K}{\sqrt{2.5}\times6.5}$

令$Q(\omega)=0$，解得$\omega=0$和$\omega=3$，此时$P(3)=\dfrac{-K}{26}$

任取一个K值来分析：

如K=52；

1. 开环极点为−2，−1±j2，都在s左半平面，所以$P=0$。
2. 奈氏图中，顺时针围绕(−1，j0)点2圈。
3. 所以闭环系统在s右半极点数为：$Z=N+P=2$，闭环系统是不稳定的。

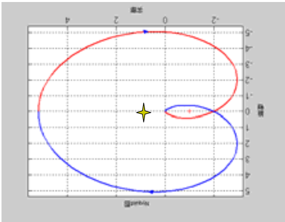


若要系统稳定，则要求奈氏图与实轴交点：

$$P(3)=\frac{-K}{26}>-1$$

即$K<26$时，奈氏图不围绕（－1，j0)点。

- 当$K<0$时，幅值不变，相角增加180°，所以原极坐标图要围绕原点旋转180°；
- 由图可见K=-52时顺时针包围(-1,0)点1圈，即N=1;
- 此时与负实轴的交点为$K/10$，若要满足$K/10$ >－1，则要求K >－10。



综上所述，系统稳定的条件为$-10<K<26$。

上述结论同样可由劳思判据得到。

$$s^3+4s^2+9s+10+K=0$$

劳斯阵：

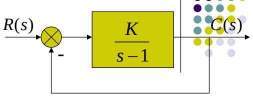
$$\begin{array}{c|cc} s^3 & 1 & 9 \\ s^2 & 4 & 10+K \\ s^1 & \frac{26-K}{4} & 0 \\ s^0 & 10+K & \end{array}$$

要使系统稳定，则第一列都大于0

于是得： $-10<K<26$。

实际上，劳思判据与奈氏判据是定价的。

[例3]系统结构图如右：试判断闭环系统的稳定性并讨论稳定性和K的关系。



[解]:

$$G_k(\omega)=\frac{K}{j\omega-1}=\frac{K(j\omega+1)}{(j\omega-1)(j\omega+1)}=\frac{-K(j\omega+1)}{(\omega^2+1)}$$

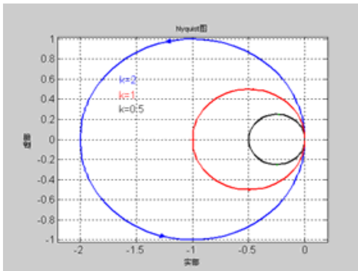
$$P(\omega)=\frac{-K}{1+\omega^2} \qquad Q(\omega)=\frac{-K\omega}{1+\omega^2}$$

$$A(\omega)=\frac{K}{\sqrt{1+\omega^2}} \qquad \varphi(\omega)=-180°+tg^{-1}\omega$$

当$\omega=0$时，$A(\omega)=K$，$\varphi(\omega)=-180°$，$P(\omega)=-K$，$Q(\omega)=0$

当$\omega=\infty$时，$A(\omega)=0$，$\varphi(\omega)=-90°$，$P(\omega)=0$，$Q(\omega)=0$

令$Q(\omega)=0$，解得$\omega=0$和$\omega=\infty$，对应$P(0)=-K$和$P(\infty)=0$



开环系统奈氏图是一个半径为$\frac{K}{2}$，圆心在$(-\frac{K}{2},0)$ 的圆。

- 由图中看出：当$K>1$时,奈氏曲线逆时针包围（－1，j0)点一圈，N=－1，而$P=1$，则$Z=N+P=0$闭环系统是稳定的。
- 当K<1时，奈氏曲线不包围(－1，j0)点，N=0，$P=1$，所以$Z=N+P=1$，闭环系统不稳定。
- 当K=1时，奈氏曲线通过(－1，j0)点，属临界稳定状态。

Further work:

上面讨论的内容，都是假设虚轴上没有开环极点，如开环系统是0型的，这是为了满足柯西幅角定理的条件。但是对于Ⅰ、Ⅱ型的开环系统，由于在虚轴上（原点）有极点，因此不能使用柯西幅角定理来判定闭环系统的稳定性。为了解决这一问题，需要重构奈奎斯特路径。

三、奈奎斯特稳定判据在Ⅰ、Ⅱ型系统中的应用：

具有极点为原点的开环系统，其开环传递函数为：

$$G_k(s)=\frac{K\prod_{i=1}^{m}(\tau_i s+1)}{s^v\prod_{j=1}^{n}(T_j s+1)}$$

可见，在原点有v重极点。也就是在s=0点，$G_k(s)$不解析，原始奈氏路径不满足柯西幅角定理（要求全路径$F(s)$解析）。为此重构奈氏路径如下：以原点为圆心，半径为无穷小做右半圆。这时的奈氏路径由以下四部分组成：

① 正虚轴：$\omega = 0^{+} \to +\infty$

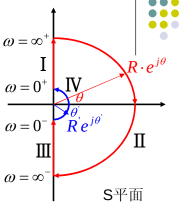
② 右半平面上半径为无穷大的半圆：

$s = R \cdot e^{j\theta}$，$R \to \infty$，θ从$\frac{\pi}{2} \to -\frac{\pi}{2}$

③ 负虚轴：$\omega = -\infty \to 0^{-}$

④ 半径为无穷小的右半圆，

$s = R' \cdot e^{j\theta'}, R' \to 0, \theta' = -\frac{\pi}{2} \sim \frac{\pi}{2}$



下面讨论对于这种奈奎斯特路径的映射$G_k(j\omega)$：

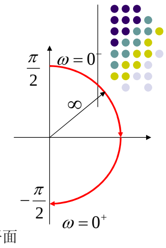
1、第Ⅰ、Ⅱ和第Ⅲ部分：其映射 $G_k(j\omega)$ 即为常规的奈氏图，前面已经得到；

3、第Ⅳ部分：

(a)对于Ⅰ型系统：将 $s = R' \cdot e^{j\theta'}$代入 $G_k(j\omega)$中，当 $R' \to 0$，可得：

$$\lim_{s\to 0} G_k(s) = \lim_{R'\to 0} \frac{K}{R' e^{j\theta'}} = \infty \cdot e^{-j\theta'}$$

所以这一段的映射为：半径为∞，角度从$\frac{\pi}{2}$变到$-\frac{\pi}{2}$的右半圆（顺时针）。

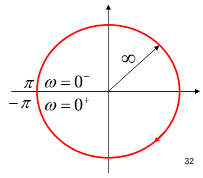


Gk(s)平面

(b)对于Ⅱ型系统：则：

$$\lim_{s\to 0} G_k(s) = \lim_{R'\to 0} \frac{K}{(R' e^{j\theta'})^2} = \infty \cdot e^{-j2\theta'}$$

所以这一段的映射为：半径为∞，角度从 π变到$-\pi$的整个圆（顺时针）。



[结论]用上述形式的奈氏路径,奈氏判据就可推广至Ⅰ、Ⅱ型系统。

例 $G(s) = \dfrac{K}{s(T_1 s+1)(T_2 s+1)}$，$T_1>0$、$T_2>0$

$$A(\omega) = \frac{K}{\omega\sqrt{1+T_1^2\omega^2}\sqrt{1+T_2^2\omega^2}}$$

$$\varphi(\omega) = -90° - tg^{-1}T_1\omega - tg^{-1}T_2\omega$$

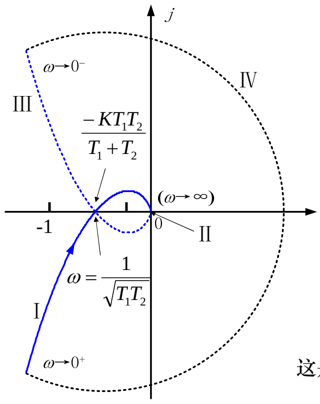
$$P(\omega) = \frac{-K(T_1+T_2)}{(1+T_1^2\omega^2)(1+T_2^2\omega^2)}$$

$$Q(\omega) = \frac{-K(1-T_1T_2\omega^2)}{\omega(1+T_1^2\omega^2)(1+T_2^2\omega^2)}$$

当$\omega = 0$时，$A(\omega) = \infty$，$\varphi(\omega) = -90°$，$P(\omega) = -K(T_1+T_2)$，$Q(\omega) = -\infty$

当$\omega = \infty$时，$A(\omega) = 0$，$\varphi(\omega) = -270°$，$P(\omega) = 0$，$Q(\omega) = 0$

令$Q(\omega) = 0$，解得与实轴交点$\omega = \dfrac{1}{\sqrt{T_1T_2}}$，交点$P(\omega) = \dfrac{-KT_1T_2}{T_1+T_2}$



因P=0，若要稳定则奈奎斯特图不包围(－1，j0)

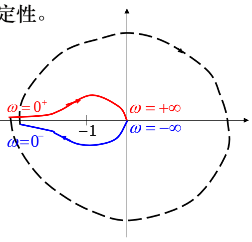
$$-1 < \frac{-KT_1T_2}{T_1+T_2} < 0$$

$$0 < K < \frac{T_1+T_2}{T_1T_2} = \frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2}$$

这是一个条件稳定系统。

[例]某Ⅱ型系统的开环频率特性 如下图所示，且s右半平面无极点，试用奈氏判据判断闭环系统稳定性。

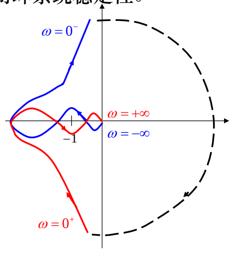
[解]：首先画出完整的奈氏曲线的映射曲线。如右图：



从图上可以看出：映射曲线顺时针包围(-1,j0)两圈。因 $P = 0$ ，所以 $Z = N + P = 2$ ，闭环系统是不稳定的。

[例]设Ⅰ型系统的开环频率特性如下图所示。开环系统在s右半平面没有极点，试用奈氏判据判断闭环系统稳定性。

[解]：先根据奈氏路径画出完整的映射曲线。



从图上可以看出：映射曲线顺时针包围(－1，j0)一圈，逆时针包围(－1，j0)一圈，所以N=1－1=0，而P=0，故Z=N+P=0，闭环系统是稳定的。

Summary：奈奎斯特稳定判据的应用步骤

1. 画出开环系统频率特性极坐标图，即奈奎斯特图（包括正负频率及s平面中特定路径在$G_k(s)$平面的映射）；
2. 确定开环右极点数P；
3. 数清楚N；
4. 计算$Z=N+P$，当$Z=0$时闭环系统稳定，当$Z>0$时闭环系统不稳定，当$Z<0$时计算有误。

Extension: 奈奎斯特稳定判据的其他等效表述

——正负穿越表述;

——仅根据正频率进行判断的表述；

——基于对数坐标图（Bode图）的表述；

——等……

Extension: 奈奎斯特稳定判据的扩展应用

1. 纯时延系统的奈氏判据

当系统中带有纯时延环节后，劳斯判据不再适用了，但是奈奎斯特判据仍然适用，这又是其一优点。

设带有纯时间延迟环节 $e^{-T_d s}$ 的反馈控制系统的开环传递函数为

$$G_k(s)=G(s)H(s)=G_1(s)H_1(s)e^{-T_d s}$$

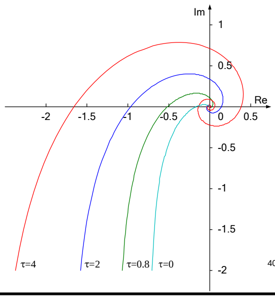
$$|G_k(s)|=|G_1(s)H_1(s)|$$

$$\angle G_k(s)=\angle G_1(s)H_1(s)-T_d\omega\times 57.3°$$

可见延迟环节不影响幅频特性而只影响相频特性。

例：$G_k(s)=G_1(s)H_1(s)e^{-T_d s}=\dfrac{e^{-\tau s}}{s(s+1)(s+2)}$

画出图中τ分别为0，0.8，2，4时的奈奎斯特图如下：



可见，随着ω趋于无穷，$G_k(s)$的奈氏图幅值趋于零，且总是以螺旋状趋于原点，与$G_k(s)$平面的负实轴有无限多交点。

若要使闭环系统稳定，$G_k(j\omega)$图与实轴的所有交点必须位于(-1,j0)点的右侧。

2. 奈氏判据下的稳定裕度

奈奎斯特判据可以判断系统的绝对稳定性。

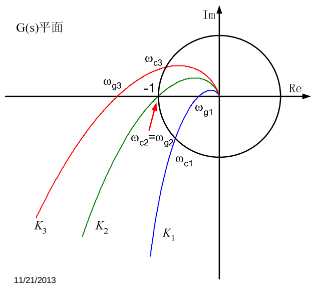
而对于一个稳定的系统，其稳定的程度，就是所谓的相对稳定性，也称为稳定裕度。

之前介绍过关于相对稳定性的两个度量：阻尼角反映超调量；距离虚轴远近反映调节时间。

本节将学习利用奈氏判据判断最小相位系统的相对稳定性。

对于最小相位系统，因开环无右零极点，故P=0，要使其闭环稳定（Z=0），则须N=0。

而相对稳定性则是通过开环极坐标图与(－1，j0)点的接近程度来衡量的。



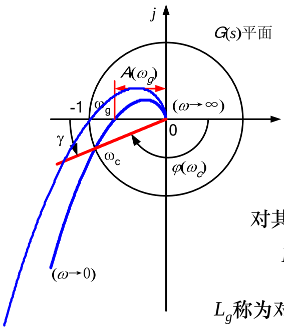
例：如图最小相位系统，

当$K=K_3$时，顺时针包围(－1，j0)点，闭环不稳定。

当$K=K_2$时，通过(－1，j0)点，临界稳定。

当$K=K_1$时，系统变成稳定系统，且随着负实轴上截距的减小，相对稳定性越来越高。

接近程度的两种度量（metric）：



定义1-1：极坐标图穿过负实轴(此时$\varphi(\omega)$=－180°)对应的频率为**相角穿越频率**,用ω_g表示；

定义1-2：相角穿越频率时的幅频特性的倒数为**幅值稳定裕量**，即

$$K_g = \frac{1}{A(\omega_g)}$$

对其取对数，

$$L_g = 20\lg K_g = -20\lg A(\omega_g)$$

L_g称为对数幅值稳定裕量或增益稳定裕量。

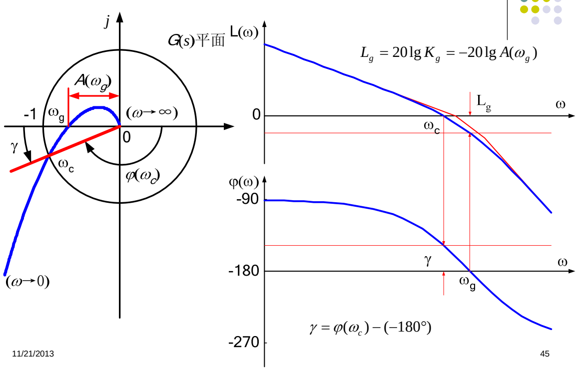
定义2-1：幅值$A(\omega)$=1对应的频率为**幅值穿越频率**，用ω_c表示。

定义2-2：幅值穿越频率时的相频特性与－180°之差为**相角稳定裕量**。即

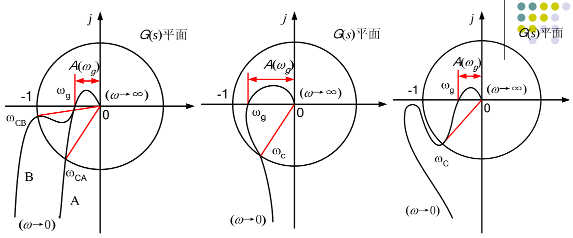
$$\gamma = \varphi(\omega_c) - (-180°) = 180° + \varphi(\omega_c)$$

这两个度量反映了频率特性曲线**接近(－1,j0)点的程度**，称为稳定裕量。稳定裕量越大，相对稳定性越好。

在Bode图上求幅值稳定裕度和相位稳定裕度（重要！）：



Failure cases:



这两个度量并不冗余，只使用其中一个来判断有时会出现失效的情况(a)(b)，因此一般需联合使用。

有时即使联合使用也会失效，如图(c)。

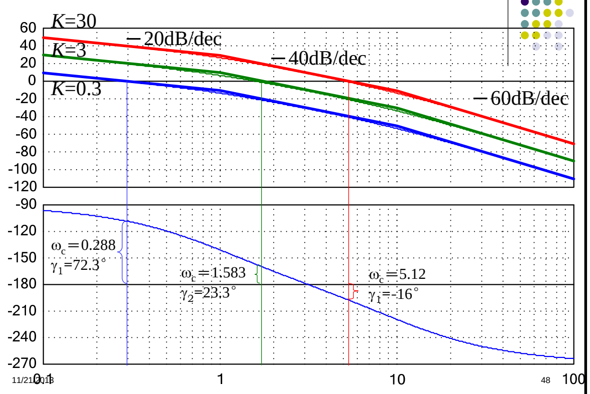
[例]单位反馈系统的开环传递函数为 $G(s) = \dfrac{K_g}{s(s+1)(s+10)}$ 试分别确定K_g=3、K_g=30和K_g=300时的相角裕量。

解：本题传递函数以零极点的形式给出，为画Bode图，故先将其化成时间常数形式：

$$G(s) = \frac{K_g/10}{s(s+1)(0.1s+1)} = \frac{K}{s(s+1)(0.1s+1)}$$

式中，$K=K_g/10$，下面分别绘出K=0.3、K=3和K=30时的Bode图：

因为相位稳定裕度对应于幅值穿越频率，故



读幅频图的横坐标及相频图的纵坐标，可得：

当K=0.3，ω_c=0.288，γ=72.3°（近似值ω_c=0.3，γ=71.6°）

当K=3，ω_c=1.583，γ=23.3°（近似值ω_c=1.73，γ=20.2°）

当K=30，ω_c=5.12，γ=−16°（近似值ω_c=5.48，γ=−18.4°）