电介质的谐振式极化

- 电介质在红外、可见、紫外频段（$10^{12} \sim 10^{16} HZ$）内的介电行为是与原子、分子体系中电子的谐振和晶格中离子的谐振密切相关的，
- 这些带电粒子都处在周期性的振动中，其固有振动频率约为 $10^{12} \sim 10^{16} HZ$，
- 因此，在光波的作用下将产生谐振。

电介质的谐振式极化

- 如果体系是无阻尼的，那么，只有当激发的频率严格地和体系固有振动频率相同时，谐振才会发生。

电介质的谐振式极化

- 如果存在阻尼，则在外场频率附近一个很窄的频率范围内，有一个稳态振动，其振幅是有限的，
- 在相反方向上振动着正、负电荷使体系极化，比较极化强度和电场强度的振幅和相位，就能求出复介电常数和复折射率的频率关系。
- 这就是**谐振式极化**。

电介质的谐振式极化

- 在外电场作用下，原子核与核外电子发生相对位移，其中最外层电子的振幅最大。
- 设电子的质量为m_1，原子核质量为m_2，
- 这样一个二体问题可以利用约化质量m把一个二体问题转化为单体问题来处理。

XJTU

电介质的谐振式极化

◆约化质量可表示为：

$$m=\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}=m_1\left(\frac{1}{\frac{m_1}{m_2}+1}\right)\approx m_1\left(1-\frac{m_1}{m_2}\right)=m_1\left(1-\frac{1}{1830}\right)\approx m_1$$

由上式可见，约化质量m略小于电子质量m_1，两者近似相等。

电介质的谐振式极化

- 原子、分子或离子的电子谐振极化，可以用受阻尼振动模型来描述。
- 用一个约化质量m_1，电量e，恢复力常数k的谐振子描述电子极化相应。在频率为ω的光电场$E = E_0 e^{i\omega t}$作用下，其运动方程为：

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = eE_e$$

- 其中eE_e为电场力，E_e为有效电场。

电介质的谐振式极化

上述方程的形式解为： $x = x_0 e^{i\omega t}$

代入方程可得： $x = \frac{e}{m}\frac{E_e}{\omega_0^2 - \omega^2}$

其中 $\omega_0^2 = k/m$ 相当于振子的固有振动频率，这时谐振子的极化率为： $\alpha_e = \frac{\chi_e}{E_e} = \frac{e^2}{m}\frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2}$

当 $\omega \to \omega_0$， $\alpha_e \to \infty$， 即极化趋于无穷大。

显然，这是由于没有考虑谐振子振动阻尼的缘故。

电介质的谐振式极化

◆如果谐振子运动有阻尼存在，且阻尼与振子的质量和运动速度成正比，则运动方程可表示为：

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+m\gamma\frac{dx}{dt}+kx=eE_e$$

◆其中r和mγ(dx/dt)分别为阻尼系数和阻尼力。

◆阻尼力主要是电子在振动时因碰撞和辐射造成的。

XJTU

电介质的谐振式极化

◆对上面的微分方程求解可得：

$$x=\frac{e}{m}\frac{E_e}{\omega_0^2-\omega^2+i\omega\gamma}$$

◆极化强度可表示为：

$$P=n_0ex=n_0\alpha_e^*E_e$$

◆谐振子的复极化率为：

$$\alpha_e^*=\frac{e^2}{m}\frac{1}{\omega_0^2-\omega^2+i\gamma\omega}$$

电介质的谐振式极化

◆ 如果有效场E_e为洛伦兹有效场

$$E_e = E + \frac{P}{3\varepsilon_0} = \frac{\varepsilon_r + 2}{3} E$$

则 $$m\frac{d^2P}{dt^2} + m\gamma\frac{dP}{dt} + (k - \frac{n_0 e^2}{3\varepsilon_0})P = n_0 e^2 E_e$$

在稳态情况下，极化强度P按外场E的同一频率振动，但P与E之间存在一相位差ø，

电介质的谐振式极化

因此： $$P = P_0 e^{i(\omega t+\varphi)}$$

则 $$(\omega_0^2 - \omega^2 - \frac{n_0 e^2}{3m\varepsilon_0} + i\gamma\omega)P = \frac{n_0 e^2}{m}E$$

由此复介电常为： $$\varepsilon_r^* = 1 + \frac{P}{\varepsilon_0 E} = 1 + \frac{n_0 e^2}{(\omega_0'^2 - \omega^2 + i\gamma\omega)\varepsilon_0 m}$$

其中 $$\omega_0'^2 = \omega_0^2 - \frac{n_0 e^2}{3m\varepsilon_0}$$

电介质的谐振式极化

在光频范围内，通常用复折射率 n^* 描述电介质的行为

$$n^* = n - ik$$

式中 n 为折射率，k 为吸收系数，表示辐射阻尼的大小。且 $n^{*2} = \varepsilon_r^*$

更具以上关系有 $\varepsilon_r' = n^2 - k^2$ $\varepsilon_r'' = 2nk$

解得：

$$n = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{\varepsilon_r'^2 + \varepsilon_r''^2} + \varepsilon_r'\right)^{1/2}$$

$$k = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{\varepsilon_r'^2 + \varepsilon_r''^2} - \varepsilon_r'\right)^{1/2}$$

电介质的谐振式极化

复折射率 n^* 与微观粒子复极化率复折射率 α^* 的关系为：

$$\frac{\varepsilon_r^* - 1}{\varepsilon_r^* + 2} = \frac{n^{*2} - 1}{n^{*2} + 2} = \frac{n_0}{3\varepsilon_0}\alpha_e^*$$

对于密度不高，分子间相互作用很小的气体来说，其折射率 $n \to 1$，吸收系数 $k \to 0$，对洛伦兹-洛伦茨公式简化为：

$$\frac{n^{*2} - 1}{n^{*2} + 2} = \frac{(n^* - 1)(n^* + 1)}{n^{*2} + 2} \approx \frac{2}{3}(n^* - 1) = \frac{n_0}{3\varepsilon_0}\alpha^*$$

电介质的谐振式极化

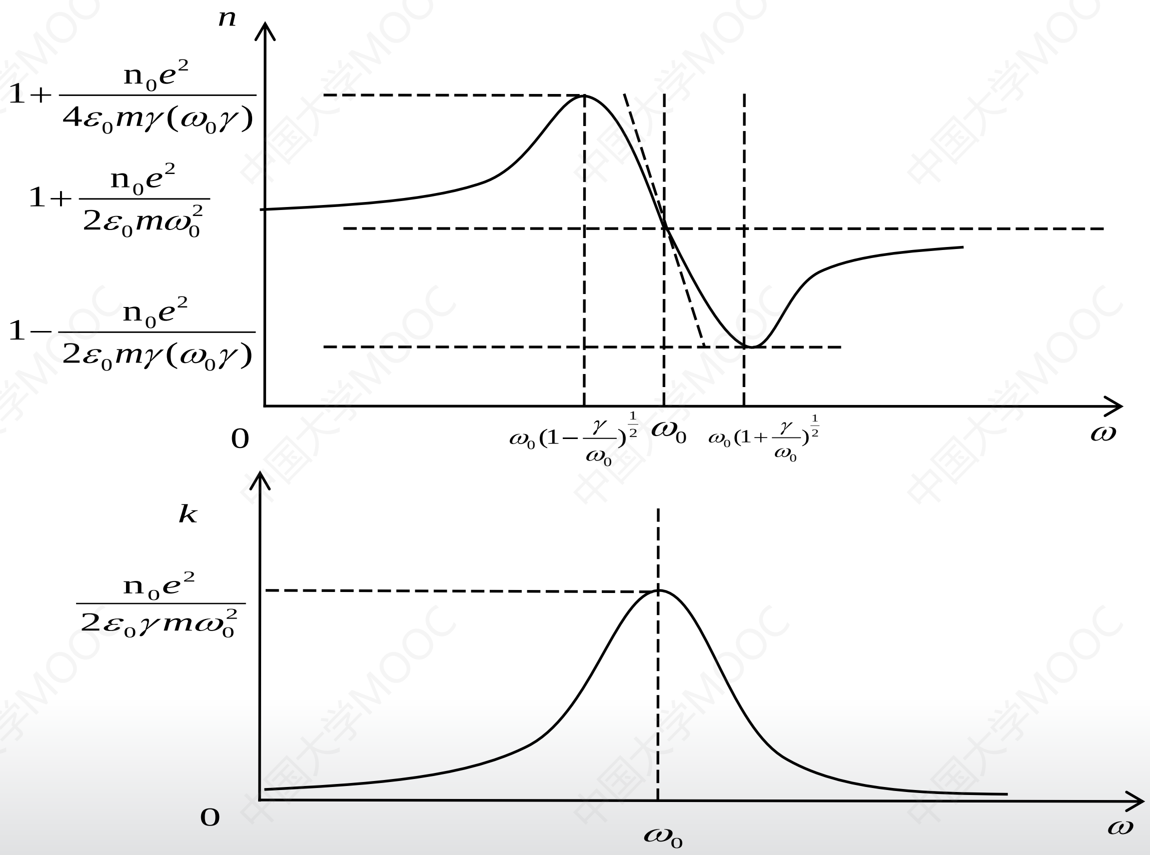
近似取 $n^{*}+1\approx 2$　　$n^{*2}+2\approx 3$

可　得: $$n^{*}(\omega)=1+\frac{n_0e^2}{2\varepsilon_0 m}\frac{1}{\omega_0^2-\omega^2+i\gamma\omega}$$

实　部 $$n(\omega)=1+\frac{n_0e^2}{2\varepsilon_0 m}\frac{(\omega_0^2-\omega^2)}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\gamma^2\omega^2}$$

虚　部 $$k(\omega)=\frac{n_0e^2}{2\varepsilon_0 m}\frac{(\omega_0^2-\omega^2)}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\gamma^2\omega^2}$$

电介质的谐振式极化



阻尼谐振子的n和k与频率的关系曲线

XJTU

电介质的谐振式极化

◆ **讨论：**

1 . $\omega << \omega_0$ 时 $n \approx 1 + \dfrac{n_0 e^2}{2\varepsilon_0 m \omega_0^2}$ $k \approx 0$

折射率 n 与频率无关，并与阻尼系数 γ 无关，吸收系数趋于 0。

2 . $\omega >> \omega_0$ $n \approx 1$ $k \approx 0$

外电场频率 ω 变化如此之快，以致谐振子来不及随电场发生振动就好象电介质不存在一样，而相当于真空的情况。

电介质的谐振式极化

3．$\omega \approx \omega_0$情况比较复杂，折射率与频率的关系中出现两个极值

$$\omega_{m+} = \omega_0 (1 - \frac{\gamma}{\omega_0})^{1/2} \qquad \omega_{m-} = \omega_0 (1 + \frac{\gamma}{\omega_0})^{1/2}$$

且 $$\omega_{m+} < \omega_0 < \omega_{m-}$$

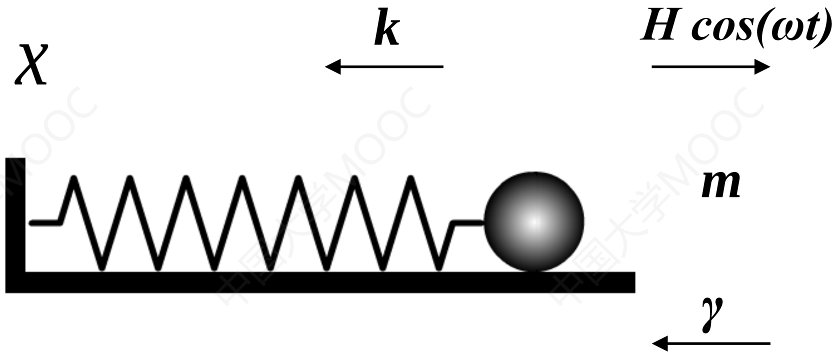
极值折射率 $$n_{m+} = 1 + \frac{n_0 e^2}{4\varepsilon_0 m\gamma\omega_0}$$

$$n_{m-} = 1 - \frac{n_0 e^2}{4\varepsilon_0 m\gamma\omega_0}$$

在$\omega = \omega_0$共振点上，$n = 1$，吸收系数k达极大值$k_m = \dfrac{n_0 e^2}{2\varepsilon_0 m\omega_0}$。这表明在共振点附近发生很大的辐射阻尼。

机械模型

如图所示，质量为m的滑块在弹性系数为k的弹簧约束下在平面上做受迫振动。

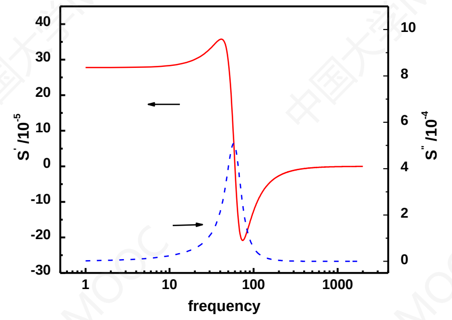


$$m\frac{d^2x}{dt^2}+\gamma\frac{dx}{dt}+kx=H_0e^{i\omega t}$$

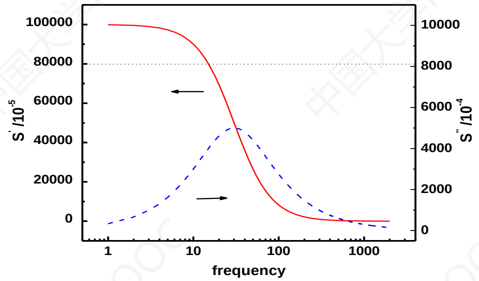
$$x=\frac{H_0e^{i\omega t}}{(k-m\omega^2)+i\gamma\omega}$$

机械模型

1、谐振过程（m>0，k>0）$x=\dfrac{H_0e^{i\omega t}}{(k-m\omega^2)+i\gamma\omega}$



2 、弛豫过程（m=0） $x=\dfrac{H_0e^{i\omega t}}{k+i\gamma\omega}$



3 、漂移过程（m>0, k=0） $x=\dfrac{H_0e^{i\omega t}}{-m\omega^2+i\gamma\omega}$