CONTRÔLE 2019 - 1ère Session.

Exo 1-1

Exercice 1

1) $\mathbb{E}_\beta(X^n) = \int_{\mathbb{R}} x^n f_\beta(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\beta} x^n f_1\left(\frac{x}{\beta}\right) dx.$

car : $f_\beta(x) = \frac{1}{\beta} f_1\left(\frac{x}{\beta}\right)$

On pose $u = \frac{x}{\beta}$, et $\mathbb{E}_\beta(X^n) = \int_{\mathbb{R}} \beta^n u^n f_1(u)\,du$

D'où $\mathbb{E}_\beta(X^n) = \beta^n \mathbb{E}_1(X^n)$.

Donc : $\mathbb{E}_\beta(X) = \beta\, \mathbb{E}_1(X) = \beta \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

$\mathbb{V}_\beta(X) = \mathbb{E}_\beta(X^2) - \mathbb{E}_\beta(X)^2 = \beta^2\left(1 - \frac{\pi}{4}\right)$

$\mathbb{V}_\beta(X^2) = \mathbb{E}_\beta(X^4) - \mathbb{E}_\beta(X^2)^2 = 2\beta^4 - \beta^4 = \beta^4$

2) a) $\hat{\beta}_1 = \frac{2\bar{X}}{\sqrt{\pi}}$

b) $\mathbb{E}_{\beta^*}(\hat{\beta}_1) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \mathbb{E}_{\beta^*}(\bar{X}) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\sqrt{\pi}}{2} \beta^* = \beta^*$

$\mathbb{E}\left((\hat{\beta}_1 - \beta^*)^2\right) = V(\hat{\beta}_1)$ pour un estimateur sans biais.

$= \frac{4}{\pi} V(\bar{X}) = \frac{4}{\pi N} V(X)$

$= \frac{4\beta^2\left(1 - \frac{\pi}{4}\right)}{\pi N}$

c) Risque quadratique $\longrightarrow 0$

donc $\hat{\beta}_1 \xrightarrow{L^2} \beta^*$, donc $\hat{\beta}_1 \xrightarrow{\mathbb{P}} \beta^*$

Ou Loi forte des grands nombres :

$\bar{X} \xrightarrow{p.s.} \frac{\sqrt{\pi}}{2}\beta^*$ donc $\hat{\beta}_1 \xrightarrow{p.s.} \beta^*$

1) d) Théorème Central Limite :

$$\frac{\sqrt{N}\left(\bar{X} - \frac{\sqrt{\pi}}{2}\beta^*\right)}{\beta^* \sqrt{1-\frac{\pi}{4}}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0;1).$$

Soit
$$\frac{\sqrt{N}\left(\hat{\beta}_1 - \beta^*\right)}{\frac{2}{\sqrt{\pi}}\beta^* \sqrt{1-\frac{\pi}{4}}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)$$

Donc $\sqrt{N}\left(\hat{\beta}_1 - \beta^*\right) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0, \left(\frac{4}{\pi}-1\right)\beta^{*2}\right)$

e) On note $C = \frac{4}{\pi} - 1$.

$$\underbrace{\frac{\sqrt{N}}{\sqrt{C}}\left(\frac{\hat{\beta}_1}{\beta^*} - 1\right)}_{\text{Fonction asymptotiquement pivotale.}} \longrightarrow \mathcal{N}(0,1)$$

$$\underbrace{\mathbb{P}\left(-q_{0.99} \leq \frac{\sqrt{N}}{\sqrt{C}}\left(\frac{\hat{\beta}_1}{\beta^*} - 1\right) \leq q_{0.99}\right)}_{\text{est équivalent à :}} \longrightarrow 0{,}98$$

$$1 - q_{0.99}\frac{\sqrt{C}}{\sqrt{N}} \leq \frac{\hat{\beta}_1}{\beta^*} \leq 1 + q_{0.99} \times \frac{\sqrt{C}}{\sqrt{N}}$$

D'où

$$\frac{\hat{\beta}_1}{1 + q\frac{\sqrt{C}}{\sqrt{N}}} \leq \beta^* \leq \hat{\beta}_1 \frac{1}{1 - q\frac{\sqrt{C}}{\sqrt{N}}} \Rightarrow \text{IC asymptotique}$$

Remarque : également OK avec la méthode plug-in :
$$\frac{\sqrt{N}}{\sqrt{C}}\left(\frac{\hat{\beta}_1 - \beta^*}{\hat{\beta}_1}\right) \longrightarrow \mathcal{N}(0,1)$$

2. e) (Suite)

Avec la méthode plug-in :

$$-q\frac{\sqrt{c}}{\sqrt{N}} \leq \frac{\beta^*}{\hat{\beta}_1} - 1 \leq q\frac{\sqrt{c}}{\sqrt{N}}$$

et $$\hat{\beta}_1\left(1 - q\frac{\sqrt{c}}{\sqrt{N}}\right) \leq \beta^* \leq \hat{\beta}_1\left(1 + q\frac{\sqrt{c}}{\sqrt{N}}\right)$$

3) a) $$\mathcal{L}(\beta; x_1, \dots, x_N) = 2^N \beta^{-2N} \prod_{i=1}^{N} x_i \exp\left(-\frac{x_i^2}{\beta^2}\right) \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(x_i)$$

Si tous les x_i sont positifs :

$$\mathcal{L}(\beta; x_1, \dots, x_N) = 2^N \beta^{-2N}\left(\prod_{i=1}^{N} x_i\right) \exp\left(-\frac{1}{\beta^2}\sum x_i^2\right)$$

$$\ln(\mathcal{L}(\beta; x_1 \dots x_N)) = \text{cste} - 2N\ln(\beta) + \sum \ln(x_i) - \frac{1}{\beta^2}\sum x_i^2$$

b) $\hat{\beta}_2$ s'obtient en maximisant :

$$J(\beta) = -2N\ln(\beta) - \frac{1}{\beta^2}\sum_{i=1}^{N} x_i^2$$

$$J'(\beta) = -\frac{2N}{\beta} + \frac{2}{\beta^3}\sum_{i=1}^{N} x_i^2$$

$$J'(\beta) = 0 \iff \beta^2 = \frac{1}{N}\sum x_i^2$$

$$\hat{\beta}_2 = \left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i^2\right)^{1/2}$$

β		$\hat{\beta}_2$	
$J'(\beta)$	+	0	−
$J(\beta)$	↗		↘

Donc J atteint bien son maximum en $\hat{\beta}_2$, l'EMV existe et est unique.

(Sauf si un des $x_i = 0$ …)

3.c) $\mathbb{E}(X^2)$ existe, donc d'après la loi forte des grands nombres :

$$\frac{1}{N}\sum x_i^2 \xrightarrow{p.s.} \mathbb{E}(X^2) = \beta^{*2}$$

En utilisant le théorème de continuité :

$$\left(\frac{1}{N}\sum x_i^2\right)^{1/2} = \hat{\beta}_2 \xrightarrow{p.s} \beta^*$$

3.d) On utilise le théorème central limite avec la moyenne empirique des x_i^2.

$$\frac{\sqrt{N}\left(\frac{1}{N}\sum x_i^2 - \beta^{*2}\right)}{\sqrt{V(X^2)}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)$$

Soit $$\frac{\sqrt{N}\left(\frac{1}{N}\sum x_i^2 - \beta^{*2}\right)}{\beta^{*2}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)$$

On utilise la méthode delta avec : $h : x \mapsto \sqrt{x}$, $h'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Donc $$\frac{\sqrt{N}\left(h\left(\frac{1}{N}\sum x_i^2\right) - h(\beta^{*2})\right)}{h'(\beta^{*2})\,\beta^{*2}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)$$

Soit : $$\frac{\sqrt{N}\left(\hat{\beta}_2 - \beta^*\right)}{\frac{\beta^*}{2}} \longrightarrow \mathcal{N}(0,1).$$

D'où

$$\mathbb{P}\left(\frac{\hat{\beta}_2}{1+\frac{9}{2\sqrt{N}}} \leq \beta^* \leq \frac{\hat{\beta}_2}{1-\frac{9}{2\sqrt{N}}}\right) \longrightarrow 0.98$$

Exercice 2

1.) a) La vraisemblance est le produit des densités gaussiennes en les x_i, comme les échantillons sont i.i.d.

$$\mathcal{L}(\mu; x_1, \dots, x_N) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^N} \prod_{i=1}^{N} e^{-\frac{1}{2}(x_i-\mu)^2} = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^N} e^{-\frac{1}{2}\sum(x_i-\mu)^2}$$

L'estimateur du max de vraisemblance s'obtient en minimisant la -log vraisemblance soit en minimisant $J(\mu) = \sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2$.

$$J(\mu) = N\mu^2 - 2\mu\sum_{i=1}^{N} x_i + \sum_{i=1}^{N} x_i^2$$

Le minimum est obtenu pour

$$\mu = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$$

Soit l'EMV : $\hat{\mu} = \overline{X}$.

Pour un échantillon Gaussien, i.i.d $\sim \mathcal{N}(\mu; 1)$:

$$\overline{X} \sim \mathcal{N}\left(\mu; \frac{1}{N}\right)$$

Donc $\boxed{\hat{\mu} \sim \mathcal{N}\left(\mu; \frac{1}{N}\right)}$

b)

$$\lambda(x) = \frac{\sup_{\Theta} \mathcal{L}(\mu; x_1, \dots, x_N)}{\sup_{\Theta_0} \mathcal{L}(\mu; x_1, \dots, x_N)} = \frac{\mathcal{L}(\hat{\mu}; x_1, \dots, x_N)}{\mathcal{L}(\mu_0; x_1, \dots, x_N)}$$

$$= \exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}(x_i-\hat{\mu})^2 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}(x_i-\mu_0)^2\right)$$

$$= \exp\left((\hat{\mu}-\mu_0)\sum x_i - \frac{N}{2}(\hat{\mu}^2-\mu_0^2)\right)$$

$$= \exp\left(\frac{N}{2}(\hat{\mu}-\mu_0)^2\right) \quad (\text{comme } \sum x_i = N\hat{\mu})$$

Exo 2 — Exo 2 - 2

1°) b) Donc $\lambda(x) = \exp\left(\frac{N}{2}(\hat{\mu}-\mu_0)^2\right)$

La zone de rejet :

$$R_\alpha = \{(x_1, .., x_N) \text{ tels que } \lambda(x_1, .., x_N) > c_\alpha\}$$

Soit $R_\alpha = \{(x_1, .., x_N) \text{ tels que } |\hat{\mu}-\mu_0| > k_\alpha\}$

$$\exp\left(\frac{N}{2}(\hat{\mu}-\mu_0)^2\right) > c_\alpha$$

équivaut à : $(\hat{\mu}-\mu_0)^2 > \frac{2}{N}\ln(c_\alpha)$

soit $|\hat{\mu}-\mu_0| > \sqrt{\frac{2}{N}\ln(c_\alpha)}$

Sous H_0 : $\hat{\mu} \sim \mathcal{N}(\mu_0 ; \frac{1}{N})$, $\sqrt{N}(\hat{\mu}-\mu_0) \sim \mathcal{N}(0;1)$

On cherche k_α / $\mathbb{P}(|\hat{\mu}-\mu_0| > k_\alpha) = \alpha$

$\mathbb{P}(\sqrt{N}|\hat{\mu}-\mu_0| > \sqrt{N} k_\alpha) = \alpha$

Donc

$$\sqrt{N}\, k_\alpha = q_{1-\frac{\alpha}{2}}$$

avec $q_{1-\alpha/2}$, le quantile d'ordre $1-\frac{\alpha}{2}$ pour $\mathcal{N}(0;1)$

Donc $$\frac{q_{1-\alpha/2}}{\sqrt{N}} = \sqrt{\frac{2}{N}\ln(c_\alpha)}$$

et finalement : $c_\alpha = \exp\left[\frac{(q_{1-\alpha/2})^2}{2}\right]$

Exo 2 - 2 a)

Densité de l'échantillon :

$$f(x_1, \dots, x_N ; \theta) = \prod_{i=1}^{N} e^{-(x_i - \theta)} \mathbb{1}_{(x_i \geq \theta)} .$$

Si $\theta > \min(x_i) = X_{(1)}$, $f(x_1, \dots, x_N ; \theta) = 0$.

D'où la vraisemblance :

$$\mathcal{L}(\theta ; x_1, \dots, x_N) = \begin{cases} e^{-\sum x_i + n\theta} & \text{si } \theta \leq \min(x_i) \\ 0 & \text{si } \theta > \min(x_i) \end{cases}$$

Donc $\mathcal{L}(\theta ; x_1, \dots, x_N)$ est croissante pour $\theta \leq X_{(1)}$ et nulle sinon, le maximum est atteint en $X_{(1)}$.

Donc $\boxed{\hat{\theta} = X_{(1)}}$

b) $$\lambda(x_1, \dots, x_N) = \frac{\sup_{\theta} \mathcal{L}(\theta ; x_1, \dots, x_N)}{\sup_{\theta \leq \theta_0} \mathcal{L}(\theta ; x_1, \dots, x_N)}$$

Si $X_{(1)} \leq \theta_0$, $\sup_{\theta} \mathcal{L}(\theta ; x_1, \dots, x_N) = \sup_{\theta \leq \theta_0} \mathcal{L}(\theta ; x_1, \dots, x_N)$

donc $\lambda(x_1, \dots, x_N) = 1$

Si $X_{(1)} > \theta_0$: $$\lambda(x_1, \dots, x_N) = \frac{\mathcal{L}(X_{(1)} ; x_1, \dots, x_N)}{\mathcal{L}(\theta_0 ; x_1, \dots, x_N)}$$

comme $\mathcal{L}$ est croissante, sup obtenu en θ_0.

Soit : $R_\alpha = \left\{ (x_1, \dots, x_N) \,/\, e^{+N(X_{(1)} - \theta_0)} > c_\alpha \right\}$

$$R_\alpha = \left\{ (x_1, \dots, x_N) \,/\, X_{(1)} > \theta_0 + \frac{\ln(c_\alpha)}{N} \right\}$$

Exo 2 2 b).

On cherche donc k_α tel que $\mathbb{P}_{\theta_0}(X_{(1)} > k_\alpha) = \alpha$

On $\mathbb{P}_{\theta_0}(X_{(1)} > k_\alpha) = \prod_{i=1}^{N} \mathbb{P}_{\theta_0}(X_i > k_\alpha) = \left[1 - \int_{\theta_0}^{k_\alpha} e^{-(x-\theta_0)} dx\right]^N$

$= e^{-N(k_\alpha - \theta_0)}$

Soit $k_\alpha = \theta_0 - \frac{\ln(\alpha)}{N}$ et $c_\alpha = \frac{1}{\alpha}$

Exo 3 - 1

Exercice 3

1.) $p(x_1, \dots, x_k)$ est une densité de proba.

Donc $$\int_{\mathcal{S}} \prod_{i=1}^{k} x_i^{a_i - 1} \, dx_1 \dots dx_i = \beta(a)$$

2.) Par la formule de Bayes :

$$p(\theta | y) \propto P(y|\theta)\,\pi(\theta)$$
$$\propto \prod_{i=1}^{k} \theta_i^{y_i} \, \theta_i^{a_i - 1}$$ — en me gardant que les termes dépendant de θ
$$\propto \prod_{i=1}^{k} \theta_i^{(y_i + a_i - 1)}$$

Donc $\theta | Y = y \sim Dir(a + y)$

3.) On réalise un changement de variable :

$$\varphi : x_1, \dots, x_{k-1}, x_k \longrightarrow x_1, \dots, x_{k-2}, \underbrace{x_{k-1} + x_k}_{= z}, x_k.$$

De $\mathcal{S}$ dans $\left\{ x_1, \dots, x_{k-2}, z \,/\, \sum_{i=1}^{k-2} x_i + z = 1 \right\} \times [0;1]$

$$|J\varphi| = 1$$

et $f(x_1, \dots, x_{k-2}, z, x_k) = f(x_1, \dots, x_{k-2}, z - x_k, x_k)$
$$\propto x_1^{a_1 - 1} \cdots x_{k-2}^{a_{k-2} - 1} (z - x_k)^{a_{k-1} - 1} x_k^{a_k - 1}$$

$$f(x_1, \dots, x_{k-2}, z) = \int_0^1 f(x_1, \dots, x_{k-2}, z, x_k) \, dx_k$$
$$\propto x_1^{a_1 - 1} \cdots x_{k-2}^{a_{k-2} - 1} \underbrace{\int_0^1 (z - x_k)^{a_{k-1} - 1} x_k^{a_k - 1} \, dx_k}_{I(z).}$$

$$I(z) = z^{(a_{k-1} - 1)} \times z^{(a_k - 1)} \int_0^1 \left(1 - \frac{x_k}{z}\right)^{a_{k-1} - 1} \left(\frac{x_k}{z}\right)^{a_k - 1} dx_k \quad : \quad u = \frac{x_k}{z}$$

$$\dots z^{(a_{k-1} + a_k - 1)} \int_0^1 (1 - u)^{a_{k-1} - 1} (u)^{a_k - 1} \, du$$

Exo 3. 3°)

D'où finalement :

$$f(x_1, \dots, x_{k-2}, z) \propto x_1^{a_1-1} \dots x_{k-2}^{a_{k-2}-1} z^{(a_{k-1}+a_k-1)}$$

et $\sum_{i=1}^{k-2} x_i + z = 1$.

$$(X_1, \dots, X_{k-2}, X_{k-1}+X_k) \sim \mathcal{D}ir(a_1, \dots, a_{k-2}, a_{k-1}+a_k)$$

b°) Par récurrence descendante on en déduit

$$(X_1, X_2, X_3+X_4+\dots+X_k) \sim \mathcal{D}ir(a_1, a_2, a_r)$$

Soit ~~$\pi(\theta_1, \theta_2) = \theta_1^{a_1-1} \theta_2^{a_2-1} (1-\theta_1-\theta_2)^{a_r-1}$~~

De la deuxième question :

$$\Theta \mid Y = y \sim \mathcal{D}ir(a_1+y_1, \dots, a_k+y_k)$$

Donc $p(\theta_1, \theta_2 \mid y) \propto \theta_1^{a_1+y_1-1} \theta_2^{a_2+y_2-1} (1-\theta_1-\theta_2)^{a_r+y_r-1}$ en marginalisant la loi de Dirichlet.

4°)

a) $\varphi : (\theta_1, \theta_2) \longrightarrow \left(\frac{\theta_1}{\theta_1+\theta_2}, \theta_1+\theta_2\right)$.

$$\partial\varphi = \begin{pmatrix} \frac{\theta_2}{(\theta_1+\theta_2)^2} & -\frac{\theta_1}{(\theta_1+\theta_2)^2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|\partial\varphi| = \frac{\theta_2+\theta_1}{(\theta_1+\theta_2)^2} = \frac{1}{(\theta_1+\theta_2)} = \frac{1}{\alpha_2} \neq 0 \text{ pour } (\theta_1, \theta_2) \in]0, +\infty[^2$$

Donc φ est bien injective.

et $\varphi(]0,+\infty[^2) =]0,1[\times]0,+\infty[$ donc φ est un C^1-difféomorphisme de $(]0,+\infty[)^2$ dans $]0;1[\times]0,+\infty[$

Exo 3 - 4) b)

En utilisant la formule du changement de variable pour les densités :

$$\alpha_1, \alpha_2 = \varphi(\theta_1, \theta_2) = \left(\frac{\theta_1}{\theta_1+\theta_2}, \theta_1+\theta_2 \right)$$

Donc $\varphi^{-1}(\alpha_1, \alpha_2) = \left(\alpha_1 \alpha_2 , (1-\alpha_1)\alpha_2 \right)$

$$p(\alpha_1, \alpha_2 \mid y) \propto (\alpha_1 \alpha_2)^{y_1+a_1-1} \left((1-\alpha_1)\alpha_2\right)^{y_2+a_2-1} (1-\alpha_2)^{y_2+a_2-1} \times \frac{1}{\frac{1}{\alpha_2}}$$

$$\propto (\alpha_1 \alpha_2)^{y_1+a_1-1} \left((1-\alpha_1)\alpha_2\right)^{y_2+a_2-1} (1-\alpha_1)^{y_1+a_1-1} \alpha_2$$

$$\propto p(\alpha_1 \mid y) \quad p(\alpha_2 \mid y)$$

α_1 et α_2 sont indépendantes conditionnellement à y.

c) Soit finalement :

$$p(\alpha_1 \mid y) \propto \alpha_1^{y_1+a_1-1} (1-\alpha_1)^{y_2+a_2-1}$$

$$\alpha_1 \mid Y=y \sim \beta(y_1+a_1, y_2+a_2)$$