中国科学

1991年8月 A 辑 第8期

量子力学的群论形式与经典量子对应

顾 雁

(兰州大学物理系,兰州 730000;中国科学院理论物理研究所,北京 100080)

摘 要

本文给出量子力学群论形式的数学构造,并讨论与 Lie 群连带的经典力学系统的几何量子化.我们利用 Lie 代数到 Lie 群上的指数映射,建立经典和量子间的对应关系,得出了量子可观察量对易式与对应的经典量 Poisson 括号间的关系.作为例子,本文讨论了由 Heisenberg-Weyl 群描述的正则系统.

关键词:几何量子化,Lie-Poisson 流形,量子力学群论形式

一、引 言

尽管现存的用来描述物理体系的量子和经典模型有着截然不同的数学构造,但人们普遍认为两者之间应该有明确的对应关系[1].首先系统地阐明这种对应关系的是 Wigner[2] 和 Moyal[3],他们引入了量子力学的相空间描述. Bayen 及其合作者[4,5]推广了 Wigner-Moyal 理论,将量子化看成 Poisson 流形上 C^∞ 函数组成的结合代数的一种形变.

我们在文献[6]中曾提出量子力学的群论形式.本文将进一步发展量子力学群论形式的数学构造,并阐明经典和量子力学两种群论形式的数学构造间的对应关系.事实上,在量子力学的群论形式下,可观察量用 Lie 群 G 上具有紧支集的广义函数表示.两个可观察量的乘积就是相应广义函数的卷积.当 G 非交换时,这个积一般说也是非交换的.藉助于 G 的酉表示,我们能用 G 的表示空间上的线性算子来表示 G 上的广义函数,从而使群论形式与常用的 Hilbert 空间算子形式相联系.另一方面,在经典力学的群论描述中,人们把 Lie 代数 $\mathscr{G}$ 的对偶向量空间 $\mathscr{G}^*$ (称做 Lie-Poisson 流形)作为相空间[7].此时,物理系统的状态与可观察量分别用 $\mathscr{G}^*$ 上的几率分布与 C^∞ 函数表示.通过 Fourier 变换,可以把 $\mathscr{G}^*$ 上的几率分布与 C^∞ 函数分别变换成 $\mathscr{G}$ 上的特征函数与广义函数.因此,无论是量子力学的群论形式,还是经典力学的群论形式,都有两种相互等价的表示方式.它们是:

1. 经典系统的数学表示

A. 常用方式:基本空间——相空间 $\mathscr{G}^*$ (或 $\mathscr{G}^*$ 中一根余伴随轨道);可观察量——$\mathscr{G}^*$ 上的函数,乘积是通常的函数乘积;状态——$\mathscr{G}^*$上的几率分布.

B. Fourier 对偶方式:基本空间——Lie 代数 $\mathscr{G}$;可观察量——$\mathscr{G}$ 上具有紧支集的广义函数,乘积是广义函数的卷积;状态——$\mathscr{G}$ 上的特征函数.

本文 1990 年 4 月 20 日收到,1991 年 1 月 15 日收到修改稿.

2. 量子系统的数学表示

A. 常用方式：基本空间——群 G 的表示空间 $\mathscr{H}$（或 $\mathscr{H}$ 的某个不可约子空间）；可观察量——$\mathscr{H}$ 上的线性算子，乘积是通常算子乘积；状态——$\mathscr{H}$ 上的 von Neumann 密度矩阵.

B. Fourier 对偶方式：基本空间——Lie 群 G；可观察量——G 上具有紧支集的广义函数，乘积是广义函数的卷积；状态——G 上的特征函数.

由此可见，经典和量子系统的数学描述在 Fourier 对偶表示下要比在通常表示下具有更明显的相似性.本文给出经典和量子力学在 Fourier 对偶表示下的数学构造，并利用 Lie 代数 $\mathscr{G}$ 到 Lie 群 G 上的指数映射导出量子可观察量对易式与对应经典量 Poisson 括号间关系.

二、与 Lie 群 G 连带的经典力学系统

1. Lie-Poisson 流形及其超选择区

设 G 为一连通 Lie 群，$\mathscr{G}$ 是其 Lie 代数. 我们把 $\mathscr{G}$ 的对偶空间 $\mathscr{G}^*$ 称作 Lie-Poisson 流形，是因为对 $\mathscr{G}^*$ 上任两光滑函数 f 与 k 可定义 Poisson 括号[8]:

$$\{f,k\}_\xi=\sum_{\alpha,\beta}(\xi,[a_\alpha,a_\beta])\frac{\partial f}{\partial\xi_\alpha}\frac{\partial k}{\partial\xi_\beta}=\sum_{\alpha,\beta,\gamma}C^\gamma_{\alpha\beta}\frac{\partial f}{\partial\xi_\alpha}\frac{\partial k}{\partial\xi_\beta}\xi_\gamma, \tag{2.1}$$

其中 $\{a_\alpha\},\alpha=1,\cdots,n$ 是 $\mathscr{G}$ 的一组基，$\xi\in\mathscr{G}^*$，$\xi_\alpha=(\xi,a_\alpha)$，$C^\gamma_{\alpha\beta}$ 是 $\mathscr{G}$ 的结构常数. 此外，我们把以 $\mathscr{G}^*$ 为相空间的经典力学系统称作与 G 连带的经典系统[7].

用 $\mathscr{E}(\mathscr{G}^*)$ 表示 $\mathscr{G}^*$ 上全体 C^∞ 复值函数的集合. 对任一 $f\in\mathscr{E}(\mathscr{G}^*)$，有 $\mathscr{G}^*$ 中的矢量场

$$X_f(\xi)=\sum_{\alpha,\beta}(\xi,[a_\alpha,a_\beta])\frac{\partial f}{\partial\xi_\alpha}\frac{\partial}{\partial\xi_\beta}. \tag{2.2}$$

特别是我们能把 $x\in\mathscr{G}$ 看作 $\mathscr{G}^*$ 上的线性函数，故可定义矢量场

$$X_x(\xi)=\sum_\beta(\xi,[x,a_\beta])\frac{\partial}{\partial\xi_\beta}.$$

设 $W(\xi_0)$ 是 $\mathscr{G}^*$ 中通过 ξ_0 点的由 G 的余伴随作用生成的轨道. 则 ξ 点处该轨道的切空间 $T_\xi W(\xi_0)$ 就是 $X_{a_\alpha}(\xi)$，$\alpha=1,\cdots,n$ 张成的线性空间. 在轨道 $W(\xi_0)$ 上定义二次形式

$$\omega_\xi(X_x,X_y)=(\xi,[x,y]),\quad x,y\in\mathscr{G}. \tag{2.3}$$

可证 ω 为非退化闭二次形式，故 $\mathscr{G}^*$ 中的每一根余伴随轨道都是一 G 不变辛子流形[9]. 容易看出，$\mathscr{G}^*$ 中的余伴随轨道实际上对由 Poisson 括号(2.1)式生成的任意正则变换均不变，因而与 G 连带的经典系统的运动必然被限制在一根余伴随轨道内. 换句话说，相空间 $\mathscr{G}^*$ 能分解成一族由余伴随轨道组成的超选择区.

为了实现与 G 连带的经典系统的量子化，可以应用关于辛流形的 Souriau-Kostant 几何量子化理论[10]于 $\mathscr{G}^*$ 中的任一根余伴随轨道. 然而，对 $\mathscr{G}^*$ 的各个辛子流形分别量子化的做法将不能保持由 Poisson 括号(2.1)反映的系统的 G 对称性. 在引言中已经提到，为了充分显示 G 对称性在经典量子对应中的作用，应考虑整个 Lie-Poisson 流形 $\mathscr{G}^*$ 的量子化，并且最好采用 Fourier 对偶表示.

2. 经典力学的 Fourier 对偶表示

我们用 $\mathscr{E}'(\mathscr{G}^*)$ 表示 $\mathscr{E}(\mathscr{G}^*)$ 的对偶空间，它由 $\mathscr{G}^*$ 上全体具有紧支集的广义函数组成.

定义 Fourier 变换 F 与 F^*，它们分别将 $\mathscr{G}^*$ 和 $\mathscr{G}$ 上的广义函数变换成 $\mathscr{G}$ 和 $\mathscr{G}^*$ 上的函数：

$$F: \mu \in \mathscr{E}'(\mathscr{G}^*) \to F[\mu] \in \mathscr{E}(\mathscr{G}),$$

$$F[\mu](x) = \langle \mu(\xi), e^{(\xi,x)/i\hbar} \rangle, \quad x \in \mathscr{G}, \tag{2.4}$$

$$F^*: f \in \mathscr{E}'(\mathscr{G}) \to F[f] \in \mathscr{E}(\mathscr{G}^*),$$

$$F^*[f](\xi) = \langle f(x), e^{(\xi,x)/i\hbar} \rangle, \xi \in \mathscr{G}^*, \tag{2.5}$$

这里$\langle \cdot, \cdot \rangle$表示广义函数的泛函值，$\hbar = h/2\pi$，$h$ 是 Planck 常数. 设 $f, k \in \mathscr{E}'(\mathscr{G})$. 定义转置 $f \to f^T$，反演 $f \to f^\dagger$ 及卷积 $k \to f \circ k$ 如下：

$$\langle f^T, \varphi \rangle = \langle f(x), \varphi(-x) \rangle, \tag{2.6}$$

$$\langle f^\dagger, \varphi \rangle = \langle f(x), \overline{\varphi(-x)} \rangle, \tag{2.7}$$

$$\langle f \circ k, \varphi \rangle = \langle f(x), \langle k(y), \varphi(x+y) \rangle \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathscr{E}(\mathscr{G}). \tag{2.8}$$

令 X_α, $\alpha = 1, \cdots, n$ 是 $\mathscr{G}$ 上的一组广义函数，满足

$$\langle X_\alpha, \varphi \rangle = \left. \frac{\partial \varphi}{\partial x^\alpha} \right|_{x=0}, \quad \forall \varphi \in \mathscr{E}(\mathscr{G}),$$

这里 x^α 是 $x = \sum_\alpha x^\alpha a_\alpha \in \mathscr{G}$ 的坐标，则可以证明下列命题成立.

命题 2.1. 若对 $\mathscr{E}'(\mathscr{G})$ 中任两广义函数 f 与 k 定义 Poisson 括号

$$\{f, k\}_x = \frac{1}{i\hbar} \sum_{\alpha,\beta,\gamma} C^\gamma_{\alpha\beta} X_\gamma \circ (x^\alpha f) \circ (x^\beta k), \tag{2.9}$$

则有 (i) $\{f, k\}_x = -\{k, f\}_x$; (ii) $\{f, k \circ h\}_x = \{f, k\}_x \circ h + \{f, h\}_x \circ k$; (iii) $F^*[\{f, k\}_x] = \{F^*[f], F^*[k]\}_\xi$.

命题 2.2. 若　$f, k \in \mathscr{E}'(\mathscr{G})$, $\varphi \in \mathscr{E}(\mathscr{G})$, $\mu \in \mathscr{E}'(\mathscr{G}^*)$,

则有

(i) $F[\{\mu, F^*[f]\}_\xi] = -\{F[\mu], f^T\}_x$;

(ii) $\langle \{f, k\}_x, \varphi \rangle = \langle f, \{\varphi, k^T\}_x \rangle + \frac{1}{i\hbar} \sum_{\alpha,\beta} C^\alpha_{\alpha\beta} \langle f, (x^\beta k^T) \circ \varphi \rangle$.

若 $\mu \in \mathscr{E}'(\mathscr{G}^*)$ 是相空间上的几率分布，则 $\varphi = F[\mu]$ 是 $\mathscr{G}$ 上的特征函数(归一，正定 C^∞ 函数). 因此，在 Fourier 对偶表示下，经典力学的数学构造可表述如下：

(i) 可观察量用 $\mathscr{G}$ 上具有紧支集的广义函数表示；(ii) 系统状态用 $\mathscr{G}$ 上的特征函数表示；(iii) 可观察量 f 在状态 φ 下的观测期望值是 $\langle f, \varphi \rangle$；(iv) 可观察量 f 的时间演化方程为

$$df/dt = \{f, h\}_x, \tag{2.10}$$

其中 $h \in \mathscr{E}'(\mathscr{G})$, $H = F^*[h]$ 是系统的 Hamilton 函数.

另外，应用命题 2.2 的结论，从(2.10)式可得到状态 φ 的演化方程

$$d\varphi/dt = \{\varphi, h^T\}_x + \frac{1}{i\hbar} \sum_{\alpha,\beta} C^\alpha_{\alpha\beta} (x^\beta h^T) \circ \varphi, \tag{2.11}$$

它是相空间上 Liouville 方程的 Fourier 对偶方程.

三、与 Lie 群 G 连带的量子力学系统

1. 量子力学的群论形式

设 G 是一幺模 Lie 群，dg 是 G 上的不变测度. 用 $\mathscr{E}(G)$ 和 $\mathscr{E}'(G)$ 分别表示 G 上 C^∞ 函数和具有紧支集的广义函数的集合，并定义群上广义函数的转置，反演与卷积如下:

$$f^T(g) = f(g^{-1}), \tag{3.1}$$

$$f^\dagger(g) = \overline{f(g^{-1})}, \tag{3.2}$$

$$f * k(g) = \int_G f(gh^{-1})k(h)dh,\ f, k \in \mathscr{E}'(G). \tag{3.3}$$

$\mathscr{E}'(G)$ 按卷积乘法构成一 $*$ 代数[11]，它是与 G 连带的量子系统的可观察量代数. 当 G 为非 Abel 群时，$\mathscr{E}'(G)$ 非交换，对任两可观察量有量子括号

$$[f, k] = f * k - k * f,\ f, k \in \mathscr{E}'(G). \tag{3.4}$$

另一方面，文献[6]中的讨论表明，量子系统的状态可用群上特征函数(群上归一，正定 C^∞ 函数)来描述. 因此，可将量子力学在群论形式下的数学构造表述如下:

(i) 可观察量用 G 上具有紧支集的广义函数表示; (ii) 系统状态用 G 上的特征函数表示; (iii) 可观察量 f 在状态 φ 下的观测期望值为 $\int f(g)\varphi(g)dg$; (iv) 可观察量 f 的时间演化方程为

$$df/dt = \frac{1}{i\hbar}[f, h], \tag{3.5}$$

状态 φ 的时间演化方程为1)

$$d\varphi/dt = \frac{1}{i\hbar}[\varphi, h^T], \tag{3.6}$$

这里 $h = h^\dagger \in \mathscr{E}'(G)$ 是系统的 Hamilton 量.

2. 经典量子对应

由于 Lie 代数 $\mathscr{G}$ 是由它生成的 Lie 群 G 在单位元处的切空间，故以 $\mathscr{G}$ 为基本空间的经典力学数学描述可以看成以 G 为基本空间的量子力学数学描述的几何投影. 在单位元附近，这个投影可用指数映射 $\exp: \mathscr{G} \to G$ 来描述.

设 V 是 G 的单位元的一个邻域，使得 $\exp^{-1}: V \to \mathscr{G}$ 是微分映射，且 $\exp\left(\sum_\alpha x^\alpha a_\alpha\right) \to \{x^\alpha\}$ 给出 V 中的一个正则坐标. 用 $\mathscr{E}(G, V)(\mathscr{E}'(G, V))$ 表示全体支集在 V 内的 C^∞ 函数(广义函数). 当采用正则坐标后，$\mathscr{E}(G,V)(\mathscr{E}'(G,V))$ 中的每个成员可自然地看成 Lie 代数 $\mathscr{G}$ 上的 C^∞ 函数(具有紧支集的广义函数). 因此，任两量子可观察量 $f, k \in \mathscr{E}'(G, V)$ 有一交换卷积 $f \circ k$，其定义如下:

$$\int f \circ k(g)\varphi(g)dg = \iint \tilde{f}(x)\tilde{k}(y)\tilde{\varphi}(x + y)$$
$$\nu(dx)\nu(dy),\ \forall \varphi \in \mathscr{E}(G, V), \tag{3.7}$$

1) 当 G 不是幺模群时，它的左、右 Haar 测度不相等，(3.6)式右边会出现类似于(2.11)式右边那样的附加项.

这里 $\tilde{f}(x)=f(\exp(x))$，$\nu(dx)=d(\exp(x))$ 是G上的不变测度．应用 BCH 公式[12]可得如下命题．

命题 3.1. 设 $f, k\in\mathscr{E}'(G, V)$，$\{f, k\}_x$ 是由(3.7)和(2.9)式定义的 Poisson 括号，其中 X_α，$\alpha=1,\cdots,n$ 是G上一组广义函数，满足

$$\int X_\alpha(g)\varphi(g)dg=\left.\frac{\partial\varphi}{\partial x^\alpha}\right|_{g=e},\ \forall\varphi\in\mathscr{E}(G),$$

e 是G的单位元，则有

$$[f,k]=i\hbar\{f,k\}_x+\frac{1}{12}\sum_{\alpha,\cdots,\omega}C^{\gamma}_{\alpha\omega}C^{\omega}_{\kappa\rho}C^{\rho}_{\lambda\beta}\cdot X_\gamma\circ(x^\alpha x^\beta f)\circ(x^\kappa x^\lambda k)+\frac{1}{12}\sum_{\alpha,\cdots,\nu}C^{\alpha}_{\kappa\lambda}C^{\beta}_{\rho\omega}C^{\omega}_{\mu\nu}$$

$$\cdot X_\alpha\circ X_\beta\circ[(x^\kappa x^\rho x^\mu f)\circ(x^\lambda x^\nu k)+(x^\kappa x^\nu f)\circ(x^\lambda x^\rho x^\mu k)]+x^\alpha\text{ 的高级项}. \tag{3.8}$$

注意到 $x^\alpha X_\beta=\delta_{\alpha\beta}\delta(x)$ 以及当 $p(x)$ 是阶数高于 1 的单项式时有 $p(x)X_\alpha=0$，由命题 3.1 可得下面推论：

推论 I. 对任一 $f\in\mathscr{E}'(G,V)$，有

$$[f,X_\alpha]=i\hbar\{f,X_\alpha\}_x,\ \alpha=1,\cdots,n. \tag{3.9}$$

推论 II. $[X_\alpha,X_\beta]=i\hbar\{X_\alpha, X_\beta\}_x=\sum_\gamma C^\gamma_{\alpha\beta}X_\gamma,\ \alpha,\beta=1,\cdots,n. \quad (3.10)$

应当说明，虽然(3.9)式给出了量子化要求的量子括号与经典 Poisson 括号间的对应，但除个别情形外(例如四中将讨论的正则系统)，一般说指数映射并不给出所讨论系统的量子化．这是因为 Lie-Poisson 流形 $\mathscr{G}^*$ 的量子化除了要求建立可观察量及其括号的经典量子对应外还要求各超选择区在量子化后仍构成超选择区．关于该问题的详细讨论将另文发表．这里我们强调，在G的单位元附近，指数映射 $\exp:\mathscr{G}\to G$ 给出了正确的经典量子对应关系．

3. $\mathscr{E}'(G)$ 的 Hilbert 空间算子表示

用 $P(G)$ 记G上全体 C^∞ 正定函数的集合．设 $\varphi\in P(G)$，且φ不能分解成 $P(G)$ 中两个线性独立函数之和，则φ称作纯态．任给一 $\varphi\in P(G)$，应用 GNS 构造法[13]，可构造出＊代数 $\mathscr{E}'(G)$ 的一个算子表示．这个表示当且仅当φ为纯态时不可约．若两个纯态给出的 $\mathscr{E}'(G)$ 的两个算子表示互不等价，则它们所描述的量子系统将属于不同的超选择区．因此有必要首先给出 $P(G)$ 的超选择区分解．

任给 $f\in\mathscr{E}'(G)$，在函数空间 $\mathscr{E}(G)$ 上定义两个线性算子 R_f 和 L_f：

$$\begin{cases} R_f\varphi(g)=\int f(h)\varphi(gh)dh, \\ L_f\varphi(g)=\int f(h)\varphi(hg)dh, \end{cases}\quad\forall\varphi\in\mathscr{E}(G). \tag{3.11}$$

记 $\mathscr{E}'(G)$ 的中心为 $Z(G)$，即

$$Z(G)=\{f\in\mathscr{E}'(G);[f,k]=0,\ \forall k\in\mathscr{E}'(G)\},$$

并在 $P(G)$ 中构造 $Z(G)$ 的联合本征函数集：

$$P_\chi(G)=\{\varphi\in P(G);\ R_f\varphi=L_f\varphi=\chi(f)\varphi,\ \forall f\in Z(G)\}, \tag{3.12}$$

其中 $\chi:Z(G)\to\mathbb{C}$ 是一个同态．容易证明，集合 $P_\chi(G)$ 对由方程(3.6)描述的任意动力学变换均不变．下面我们把 $P_\chi(G)$ 称作 $P(G)$ 中对应于同态χ的超选择区． 从一般的＊代数表示定理[14]可得

命题 3.2. 给定 $P_\chi(G)$ 中任一纯态，存在 G 的一个确定到酉等价的不可约酉表示 $g \to \hat{U}(g)$。通过公式

$$\hat{f} = \int f(g)\hat{U}(g)dg, \quad f \in \mathscr{E}'(G), \tag{3.13}$$

我们可得到 $\mathscr{E}'(G)$ 的一个算子表示，它有如下性质：

(i) 在表示空间 $\mathscr{H}$ 中存在一稠线性子空间 $\mathscr{D}$，使得 $\mathscr{D}$ 包含在由 (3.13) 式给出的所有算子 $\hat{f}$ 的定义域内；(ii) 对任一 $\xi \in \mathscr{D}$，有 $\hat{f}\xi \in \mathscr{D}$，$\hat{f}\hat{k}\xi = \widehat{f * k}\xi$，$\forall f, k \in \mathscr{E}'(G)$；(iii) $\widehat{f^+} \subset \hat{f}^+$，$\forall f \in \mathscr{E}'(G)$，这里 $\widehat{f^+}$ 表示算子 $\hat{f}$ 的 Hermitian 共轭；(iv) $f \in Z(G) \Rightarrow \hat{f} = \chi(f)\hat{I}$，$\hat{I}$ 表示单位算子.

推论. $P(G)$ 中不同超选择区中的纯态按 GNS 构造法得出的 G 的不可约酉表示互不等价.

公式(3.13)是第二节 **2.** 中(2.5)式的量子类似. 下面的命题表明，(2.4) 式的量子类似为

$$\varphi(g) = \mathrm{Tr}[\hat{\rho}\hat{U}(g)], \tag{3.14}$$

这里 $\hat{\rho}$ 是 Hilbent 空间 $\mathscr{H}$ 中的密度矩阵.

命题 3.3. 设 $\hat{U}(g)$ 是 $P_\chi(G)$ 中某一纯态按 GNS 构造法得出的 G 的不可约酉表示，$\hat{\rho}$ 是表示空间 $\mathscr{H}$ 上的正算子使得 $\mathrm{Tr}[\hat{\rho}\hat{U}(g)] = \varphi(g)$ 是 G 上的 C^∞ 函数. 则 $\varphi \in P_\chi(G)$ 且有

$$\mathrm{Tr}[\hat{\rho}\,\hat{f}] = \int f(g)\varphi(g)dg, \quad \forall f \in \mathscr{E}'(G). \tag{3.15}$$

四、与 Heisenberg-Weyl 群连带的系统

我们把相空间是平直辛空间的力学系统称作正则系统，这类系统可用 Heisenberg-Weyl 群来描述.

最简单的 Heisenberg-Weyl 群有 3 个独立的生成元，满足对易关系

$$[a_1, a_2] = a_3, \quad [a_1, a_3] = [a_2, a_3] = 0.$$

用 W 表示这个群，$\mathscr{W}$ 表示其 Lie 代数. W 中的每个元素能写成 $\exp(\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{a})$，$\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^3$，有乘法规则

$$\exp(\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{a})\exp(\boldsymbol{y} \cdot \boldsymbol{a}) = \exp(\boldsymbol{z} \cdot \boldsymbol{a}),$$

$$\boldsymbol{z} = \left(x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3 + \frac{1}{2}(x_1y_2 - x_2y_1)\right).$$

W 上的不变测度就是 $\mathbf{R}^3$ 上的 Lebesgue 测度.

1. 与 W 连带的经典系统

设 $\mathscr{W}^*$ 为 $\mathscr{W}$ 的对偶空间，$\boldsymbol{\xi} \in \mathscr{W}^*$，$g = \exp(\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{a}) \in W$. 则 g 对 ξ 的余伴随作用为

$$Ad_g^*\boldsymbol{\xi} = (\xi_1 - x_2\xi_3, \xi_2 + x_1\xi_3, \xi_3).$$

由此推出 $\mathscr{W}^*$ 有两类余伴随轨道：一类是 $\xi_3 \neq 0$ 的与 ξ_3 轴正交的平面；另一类是 $\xi_3 = 0$ 平面内所有的点. 在二维余伴随轨道上，Poisson 括号与辛形式分别为

$$\{f, k\}_\xi = \left(\frac{\partial f}{\partial \xi_1}\frac{\partial k}{\partial \xi_2} - \frac{\partial f}{\partial \xi_2}\frac{\partial k}{\partial \xi_1}\right)\xi_3, \quad f, k \in \mathscr{E}(\mathscr{W}^*) \tag{4.1}$$

和

$$\omega = \frac{1}{\xi_3} d\xi_1 \wedge d\xi_2. \tag{4.2}$$

如果选择 $\xi_3 = 1$ 的轨道，并把 ξ_1, ξ_2 换成 q, p，就可得到经典 Hamilton 力学中熟悉的式子．这表明 Lie 群W描述的是单个自由度的正则系统．

支集在 $\xi_3 = \lambda \neq 0$ 平面上的任何几率分布，其 Fourier 变式总能写成 $\varphi(x_1, x_2) e^{\lambda x_3/i\hbar}$．当只考虑该超选择区时，可观察量 $X_3 = -\frac{\partial}{\partial x_3}\delta(\boldsymbol{x})$ 取常数值 $\lambda/i\hbar$．由(2.9)式可得任两可观察量 $f, k \in \mathscr{E}'(\mathscr{W})$ 间的 Poisson 括号为

$$\{f, k\}_x = -\frac{\lambda}{\hbar^2}[(x_1 f)\circ(x_2 k) - (x_2 f)\circ(x_1 k)], \tag{4.3}$$

它是 Poisson 括号(4.1)式的 Fourier 对偶表示式．

2. 与W连带的量子系统

指数映射 $\exp: x = \boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{\alpha} \in \mathscr{W} \to \exp(x) \in W$ 诱导出下面两个一对一映射：

$$\pi: \varphi(g) \in \mathscr{E}(W) \to \tilde{\varphi}(x) = \varphi(\exp(x)) \in \mathscr{E}(\mathscr{W}), \tag{4.4}$$

$$\pi^*: \tilde{f}(x) = f(\exp(x)) \in \mathscr{E}'(\mathscr{W}) \to f(g) \in \mathscr{E}'(W), \tag{4.5}$$

其中 π^* 给出了经典和量子可观察量之间的一一对应．映射 π 并不将W上的正定函数全部映成$\mathscr{W}$上的正定函数，但它给出了超选择区的量子经典对应．事实上 $\mathscr{E}(W)$ 的中心 $Z(W)$ 由 X_3 的函数组成，故同态 $\chi: Z(W) \to \mathbb{C}$ 由 $\chi(X_3)$ 唯一确定．从定义(3.11)算得

$$R_{X_3}\varphi = L_{X_3}\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x_3}, \quad \forall \varphi \in \mathscr{E}(W).$$

设 $\chi(X_3) = \lambda/i\hbar$．则超选择区 $P_\chi(W)$ 中的函数均能写成 $\varphi(x_1, x_2)e^{\lambda x_3/i\hbar}$．该超选择区显然与 $\mathscr{W}^*$ 中 $\xi_3 = \lambda$ 的余伴随轨道对应．

当只考虑 $\chi(x_3) = \frac{\lambda}{i\hbar}$ 的超选择区时，对任两量子可观察量 $f, k \in \mathscr{E}'(W)$，有

$$f * k = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\left(\frac{\lambda}{2i\hbar}\right)^n \frac{(-1)^m}{m!(n-m)!}(x_1^m x_2^{n-m} f)\circ(x_1^{n-m} x_2^m k), \tag{4.6}$$

$$[f, k] = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{2n+1}\left(\frac{\lambda}{2i\hbar}\right)^{2n+1} \frac{2(-1)^m}{m!(2n+1-m)!}(x_1^m x_2^{2n+1-m} f)\circ(x_1^{2n+1-m} x_2^m k). \tag{4.7}$$

公式(4.7)是 Moyal 量子括号[3]的 Fourier 对偶式．

现在讨论 $\mathscr{E}'(W)$ 的算子表示．W 的全部不等价不可约酉表示能分成两类：第一类是由两个实参数 q 和 p 标志的一维表示：

$$\{\hat{U}_{q,p}(\exp(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{\alpha})) = e^{(x_1 q + x_2 p)/i\hbar};\ (q, p) \in \mathbb{R}^2\},$$

它们全对应于超选择区 $\chi(X_3) = 0$；另一类是对应于超选择区 $\chi(X_3) = \lambda/i\hbar \neq 0$ 的无穷维表示：

$$\{\hat{U}_\lambda(\exp(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{\alpha})) = e^{(x_1\hat{q} + x_2\hat{p} + x_3\lambda)/i\hbar};\ \lambda \in \mathbb{R}\backslash\{0\}\},$$

其中 $\hat{q}, \hat{p}$ 是可分 Hilbert 空间 $\mathscr{H}_\lambda$ 上的两个自伴算子，满足对易式 $[\hat{q}, \hat{p}] = i\hbar\lambda$．

由(3.13)式可得 $\mathscr{E}'(W)$ 在 $\mathscr{H}_\lambda$ 上的算子表示

$$f \in \mathscr{E}'(W) \to \hat{f}_\lambda = \int f(\exp(x)) e^{(x_1\hat{q}+x_2\hat{p}+\lambda x_3)/i\hbar} dx.$$

另一方面，通过 Fourier 变换，可将 f 变换成 $\mathscr{W}^*$ 中 $\xi_3 = \lambda$ 平面上的函数

$$f_\lambda(\xi_1, \xi_2) = \int f(\exp(x)) e^{(x_1\xi_1+x_2\xi_2+x_3\lambda)/i\hbar} dx.$$

映射 $f_\lambda(\xi_1,\xi_2) \to \hat{f}_\lambda$ 将 $\xi_3 = \lambda$ 平面上的 C^∞ 函数一对一地映成 $\mathscr{H}_\lambda$ 上的线性算子，它就是人们熟知的 Weyl 量子化映射[5]。

作者对北京大学钱敏教授给予本工作的指导与关心和中国科学院理论物理研究所为客座人员提供的方便表示衷心的感谢。

参 考 文 献

[1] Dirac, P. A. M., *Proc. Roy. Soc. (London)*, **A**109(1925), 642—653.
[2] Wigner, E., *Phys. Rev.*, 40(1932), 749—759.
[3] Moyal, J., *Proc. Cambr. Phil. Soc.*, 45(1949), 99—124.
[4] Bayen, F. et al., *Ann. Phys.*, **111**(1978), 61—151.
[5] Fronsdal, C., *Rep. Math. Phys.*, **15**(1978), 111—145.
[6] Gu, Y., *Phys. Rev.*, **32A**(1985), 1310—1321.
[7] Souriau, J. M., *Structures des Systemes Dynamiques*, Paris, Dunod, 1970.
[8] Marsden, J. & Weinstein A., *Physica*, **7D**(1983), 305—323.
[9] Kirillav, A. A., *Elements of the Theory of Representations*, Berlin, Springer, 1970.
[10] Sniatycki, J., *Geomotric Quantization and Quantum Mechanics*, New York, Springer, 1980.
[11] Helgason, S., *Groups and Geometric Analysis*, London, Academic Press, 1984, 289.
[12] Naimark, M. A. & Stern, A. I., *Theory of Group Representations*, New York, Springer, 1982, 497.
[13] Pedersen, G. K., *C*-Algebras and Their Automorphism Groups*, London, Academic Press, 1984, 46.
[14] Powers, R. T., *Commun. Math. Phys.*, **21**(1971), 85—124.