不到

2小时

过概率统计

★考点一 概率的性质（填空题、选择题）

1. 加法公式：对任意事件 A,B，有 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$；

若 A,B 两两不相容，则有 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$.

推广：对任意事件 A,B,C，

有 $P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(BC)-P(AC)+P(ABC)$.

若 A,B,C 互不相容，则 $P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)$.

2. 减法公式：对任意事件 A,B，有 $P(A-B)=P(A)-P(AB)$；若 $B\subset A$，

则有 $P(B)\le P(A)$，且 $P(A-B)=P(A)-P(B)$.

3. 对立事件的概率：$P(\overline{A})=1-P(A)$.

4. 分配律：$P\{(A\cup B)\cap C\}=P\{AC\cup BC\}$，$P\{(AB)\cup C\}=P\{(A\cup C)\cap(B\cup C)\}$.

5. 对偶律：$P\{\overline{A\cup B}\}=P\{\overline{A}\cap\overline{B}\}$，$P\{\overline{A\cap B}\}=P\{\overline{A}\cup\overline{B}\}$.

例 1 设 A,B 是两个事件，已知 $P(A)=0.5$，$P(B)=0.7$，$P(A\cup B)=0.8$，

则 $P(AB)=$______，$P(A\overline{B})=$______.

例 2 设 A,B,C 是三个事件，且 $P(A)=P(B)=P(C)=0.25$， $P(AB)=P(BC)=0$，

$P(AC)=0.125$，则 A,B,C 至少有一个发生的概率为_______.

例 3 设事件 A 与事件 B 互不相容，则（　）.

A. $P\left(\overline{A}\overline{B}\right)=0$　　　　B. $P(AB)=P(A)P(B)$

C. $P\left(\overline{A}\right)=1-P(B)$　　D. $P\left(\overline{A}\cup\overline{B}\right)=1$

★考点二 条件概率（填空题）

1. 条件概率：

事件 A 发生的条件下，B 发生的概率为 $P(B|A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}$.

2. 乘法公式：若 $P(A)>0$, 则 $P(AB)=P(B|A)P(A)$.

3. 性质：$P(\overline{B}|A)=1-P(B|A)=1-\dfrac{P(AB)}{P(A)}$,

$$P(B\cup C|A)=P(B|A)+P(C|A)-P(BC|A).$$

例 4 设 A、B 为两个随机事件，若 $P(AB)=0.25, P(B)=0.3, P(A\cup B)=0.6$，

则 $P(A\mid\overline{B})=$__________.

例 5 已知 $P\left(\overline{A}\right)=0.3$，$P\left(B\right)=0.4$，$P\left(A-B\right)=0.5$，则 $P\left(B\middle|A\cup\overline{B}\right)=$________.

★考点三 古典概型（填空题）

若随机试验的样本空间 Ω 只有有限个样本点，且每个基本事件发生的可能性相等，则事件 A 发生的概率为 $P(A)=\dfrac{A\text{中所含样本点数}k}{\Omega\text{中所有样本点数}n}=\dfrac{k}{n}.$

例 6 在一副扑克牌（52 张）中任取 4 张，则 4 张花色全不相同的概率为________.

例 7 一个盒子中装有 6 只杯子，其中有 2 只不合格品，现做不放回抽样，连续取 2 只，至少有 1 只是合格品的概率为____. [知识点：若 N 中有 M 件次品，则从 N 中不放回取 n 件，其中有 m 件次品的概率为 $\dfrac{C_M^m C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}$.]

例 8 袋中有 50 个乒乓球，其中 20 个黄球，30 个白球，今有三个人依次随机地从袋中各取一球，取后不放回，则第三个人取到黄球的概率是_________.

★考点四 全概率与贝叶斯公式（大题）

1.全概率公式：$P(A)=\sum\limits_{i=1}^{n}P(AB_i)=\sum\limits_{i=1}^{n}P(A|B_i)P(B_i).$

注:当所求事件 A 可以分成几种情况时，A 发生的概率就是这些情况对应的概率之和.

2.贝叶斯公式：$P(B_i|A)=\dfrac{P(B_iA)}{P(A)}=\dfrac{P(A|B_i)P(B_i)}{\sum\limits_{j=1}^{n}P(A|B_j)P(B_j)}.$

注：如果已知结果 A 发生了，判断是那种情况时，要用贝叶斯公式

例 9 设工厂甲和工厂乙的次品率分别是1%和2%．现从甲厂和乙厂的产品分别占60%和40%的一批产品中随机抽取一件，

求（1）这件产品是次品的概率；

（2）该次品是由甲厂生产的概率为．

知识点：全概率公式$P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(AB_i)=\sum_{i=1}^{n}P(A|B_i)P(B_i)$.

贝叶斯公式$P(B_i|A)=\dfrac{P(B_iA)}{P(A)}=\dfrac{P(A|B_i)P(B_i)}{P(A)}$.

例 10 两台车床加工同样的零件,第一台出现废品的概率为 0.03,第二台出现废品的概率为 0.02,加工出来的零件放在一起,现已知第一台加工的零件比第二台加工的零件多一倍.(1)求任意取出一个零件是合格品的概率是多少?

(2)如果任取的零件是废品,求它是由第二台车床加工的概率.

★考点五 事件的独立性（填空题、选择题）

完整课程扫码观看

1. A和B独立$\Leftrightarrow P\left(AB\right)=P\left(A\right)P\left(B\right)$

$$\Leftrightarrow P(B)=P(B|A) \qquad (P(A)>0)$$

$$\Leftrightarrow P(B|A)=P(B|\overline{A}) \quad (0<P(A)<1).$$

2. A和B相互独立，则A和$\overline{B}$，$\overline{A}$和B，$\overline{A}$和$\overline{B}$也相互独立.

3.若三个事件A,B,C相互独立，则
$$\begin{aligned}&P(AB)=P(A)P(B),\\&P(AC)=P(A)P(C),\\&P(BC)=P(B)P(C),\\&P(ABC)=P(A)P(B)P(C).\end{aligned}$$

例 11 设事件A和B独立，$P\left(B\right)=0.5$，$P\left(A-B\right)=0.3$，则$P\left(B-A\right)=$______.

例 12 某人向同一目标重复射击，且每次射击相互独立，设每次命中目标的概率为p $\left(0<p<1\right)$，则此人第三次射击时恰好是第二次命中的概率为_____ ___.

考虑：第五次射击时恰好是第三次命中的概率是多少？

★考点六 离散型随机变量分布律与分布函数互求（填空题、选择题）

名称	定义	性质
分布律	$P(X=x_k)=p_k$ $(k=1,2,\cdots)$	① $p_k \geq 0$，$k=1,2,\cdots$ ② $\sum p_k = 1$
分布函数	$F(x)=P(X\leq x)$ $=\sum\limits_{x_k\leq x} p_k$	① $0\leq F(x)\leq 1$ ② $F(x)$单调不减 ③ $F(x)$右连续
概率	$P(X\leq a)=F(a)$	① $P(X>a)=1-F(a)$ ② $P(a<X\leq b)=F(b)-F(a)$

例 13 已知随机变量X的分布律为

X	3	4	5
P	0.1	p	0.6

则$p=$________，X的分布函数为________________.

例 14 设随机变量 X 的分布函数 $F(x)=\begin{cases}0, & x<-1, \\ 0.2, & -1\le x<1, \\ 0.8, & 1\le x<3, \\ 1, & 3\le x<+\infty\end{cases}$

则 $P\left(X=1\right)=$ （ ） A.0.2 B.0.4 C.0.6 D.0.8

★考点七 二项分布和泊松分布（填空题、选择题）

名称	符号	分布律	含义
二项分布	$B(n,p)$	$P\{X=k\}=C_n^k p^k q^{n-k}$, $(q=1-p,k=0,1,2,\cdots)$	n 重伯努利试验中 A 发生的次数 $X\sim B\left(n,p\right)$，其中 p 表示每次试验中 A 发生的概率。
泊松分布	$P(\lambda)$	$P\{X=k\}=\dfrac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$, $(\lambda>0,k=0,1,2,\cdots)$	若 $X\sim B\left(n,p\right)$，当 n 较大，p 较小时，X 近似服从 $P(np)$.

例 15 从学校乘汽车到火车站的途中有 5 个十字路口，假设在各个十字路口遇到红灯的事件是相互独立的，并且概率都是 0.4，那么途中遇到 2 次红灯的概率是________.

例 16 设在 3 次相互独立试验中，事件 A 出现的概率相等，若已知 A 至少出现 1 次的概率是 $\dfrac{19}{27}$，则 A 在一次试验中出现的概率为________.

例 17 设随机变量 X 服从泊松分布，且 $P(X=0)=e^{-2}$，

则 $P(X \le 2)=$__________.

★考点八 关于连续型随机变量概率的计算（填空题、大题）

名称	定义	性质
分布函数	$F(x)=P(X\le x)$ $=\int_{-\infty}^{x}f(t)dt$	①$0\le F(x)\le 1$ ②$F(x)$单调不减 ③$F(x)$右连续
概率密度	$f(x),-\infty<x<+\infty$	①$f(x)\ge 0$ ②$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=1$ ③若$f(x)$连续，则$F'(x)=f(x)$
概率	$P(X\le a)=F(a)$	①$P(X=a)=0$ ②$P(X<a)=P(X\le a)=1-F(a)$ ③$P(a<X\le b)=P(a\le X\le b)$ $=P(a<X<b)=F(b)-F(a)$

例 18 设随机变量X的密度函数为$f(x)=\begin{cases}cx^3, & 0<x<1,\\ 0 & \text{其他}.\end{cases}$

求（1）常数c，（2）分布函数$F(x)$，（3）$P\left(-1<X<\frac{1}{2}\right)$.

例 19 设某种晶体管的寿命（单位：小时）是一个随机变量，它的密度函数为

$f(x)=\begin{cases}100x^{-2}, & x>100, \\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$，求（1）该种晶体管不能工作 150 小时的概率；

（2）设一台仪器中装有 4 只此种晶体管（彼此独立），则该仪器工作 150 小时后至少有 1 只失效的概率.

★考点九 均匀分布（填空题）

均匀分布$U(a,b)$的概率密度函数为：见视频记笔记

例 20 设随机变量 X 在区间（1，6）上服从均匀分布，则方程$t^2+Xt+1=0$有实根的概率为________.

完整课程扫码观看

★考点十 正态分布（填空题、选择题）

1、正态分布$N\left(\mu,\sigma^2\right)$的概率密度函数为：见视频记笔记

2、当$\mu=1$，$\sigma=1$时，称作标准正态分布，记作$N(0,1)$，其分布函数为

$\Phi(x)=P(X\le x)$．显然，$\Phi(x)+\Phi(-x)=1$.见视频记笔记

3、若$X\sim N\left(\mu,\sigma^2\right)$，则$\dfrac{X-\mu}{\sigma}\sim N(0,1)$.其分布函数可表示为：

$$F(x)=P(X\le x)=P\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\le\frac{x-\mu}{\sigma}\right)=\Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right).$$

例 21 设随机变量$X\sim N\left(0,\sigma^2\right)$，则对任意实数$a$，下列命题正确的是（　）

A. $P\{X<a\}=P\{X>a\}$　　　B. $P\{X<a\}=1-P\{X<-a\}$

C. $P\{X<a\}=1-P\{X>-a\}$　　　D. $\dfrac{X}{\sigma^2}\sim N\left(0,1^2\right)$

★考点十一 离散型随机变量函数的分布（填空题）

设 X 为一维离散型随机变量，其分布律为

X	x_1	x_2	$\cdots$
P	p_1	p_2	$\cdots$

那么函数 $Y=g(X)$ 的分布律就是

$g(X)$	$g(x_1)$	$g(x_2)$	$\cdots$
P	p_1	p_2	$\cdots$

例 22 设随机变量 X 的分布律如表

X	-1	0	1	2
P	0.2	0.3	0.4	0.1

则 $Z=X^2+1$ 的分布律为__________.

★考点十二 连续型随机变量函数的分布（填空题、与考点八结合的大题）

已知连续型随机变量 X 的概率密度函数为 $f_X(x)$，则 $Y=g(X)$ 的概率密度的求解步骤为：（分布函数法）

①求出 Y 的分布函数，并利用关系 $Y=g(X)$，将 Y 的范围转化为 X 的范围，最终利用 X 的分布得到 Y 的分布：$F_Y(y)=P(Y\le y)=P(g(X)\le y)=P(X\in G_y)=\int_{G_y} f_X(x)dx$

②求导得到 $f_Y(y)=F_Y'(y)$.

例 23 设随机变量 X 的概率密度函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{3}{2}x^2,-1<x<1,\\ 0, \quad \text{其他}.\end{cases}$，求 $Y=X^2$ 的概率密度函数.

完整课程扫码观看

例 24 设连续型随机变量X的分布函数为$F(x)=\begin{cases} A+Be^{-2x}, & x>0 \\ 0, & x\le 0 \end{cases}$

（1）确定A,B的值；（2）求$P(-1<x<1)$；

（3）求概率密度函数$f_X\left(x\right)$ ；

（4）若$Y=3X+1$，求概率密度函数$f_Y\left(y\right)$。

★考点十三 二维离散型随机变量的分布（填空题、大题）

1、概念：联合分布律、边缘分布律

$X \backslash Y$	y_1	y_2	$\cdots$	$P(X=x_i)$
x_1	p_{11}	p_{12}	$\cdots$	$p_{1\cdot}$
x_2	p_{21}	p_{22}	$\cdots$	$p_{2\cdot}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
$P(Y=y_j)$	$p_{\cdot 1}$	$p_{\cdot 2}$	$\cdots$	1

2、X 和 Y 相互独立 $\Leftrightarrow P\left(X=x_i, Y=y_j\right)=P\left(X=x_i\right)\bullet P\left(Y=y_j\right),(i, j=1,2,\cdots)$.

例 25 已知二维随机变量 (X,Y) 的联合分布律及边缘分布律满足下表

$X \backslash Y$	-1	0	1	$P(X=x_i)$
0				0.5
1	0		0	0.5
$P(Y=y_j)$	0.25	0.5	0.25	

（1）将上表空白处填写完整，（2）$P\left(X+Y=1\right)$，

（3）$P\left(X=0 \mid Y=0\right)$，（4）判断 X 和 Y 是否相互独立.

完整课程扫码观看

★考点十四 二维连续型随机变量的分布（大题）

1、联合分布函数：$F(x,y)=P\{X\le x,Y\le y\}=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}f(u,v)dudv$

2、联合概率密度满足：$f(x,y)\ge 0$； $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dxdy=1$

3、边缘概率密度：$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy$； $f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx$

4、条件概率密度：$f_{Y|X}(y\,|\,x)=\dfrac{f(x,y)}{f_X(x)}$；$f_{X|Y}(x\,|\,y)=\dfrac{f(x,y)}{f_Y(y)}$

5、X 和 Y 相互独立 $\Leftrightarrow f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$

例 26 设 (X,Y) 的联合密度函数为 $f(x,y)=\begin{cases}c(6-x-y), & 0<x<2,2<y<4,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

求（1）常数 c，（2）$P(X+Y<4)$，（3）$P(X<1\,|\,X+Y<4)$.

例 27 已知$\left(X,Y\right)$的联合密度函数为$f(x,y)=\begin{cases}2e^{-(x+2y)}, & x>0,\quad y>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

（1）求X和Y的边缘密度函数,（2）求条件概率密度$f_{Y|X}(y|x)$,

（3）判断X和Y是否相互独立.

★考点十五 离散型随机变量函数的分布（填空题、与考点十三结合的大题）

函数$U=g\left(X,Y\right)$的分布律为$P\left\{U=k\right\}=P\left\{g\left(X,Y\right)=k\right\}$.

例 28 已知随机变量X和Y的联合分布律为

Y X	0	1	2
0	0.15	0.05	0.21
1	0.22	0.17	0.20

求（1）$Z=X+Y$,（2）$M=\max\left\{X,Y\right\}$,（3）$N=\min\left\{X,Y\right\}$的分布律.

★考点十六 连续型随机变量函数的分布（填空题、选择题、与考点十四结合的大题）

1、求$Z=g(X,Y)$的概率密度函数的步骤为：（分布函数法）

①先求$Z=g(X,Y)$的分布函数：

$$F(z)=P(Z\le z)=P\left(g(X,Y)\le z\right)=P\left((X,Y)\in G_z\right)=\iint\limits_{G_z} f(x,y)dxdy,$$

②求导得到Z的概率密度函数：$f(z)=F'(z)$.

2、若X,Y相互独立，其分布函数分别为$F_X(x)$和$F_Y(y)$，则$Z=\max(X,Y)$的分布函数为

$$\begin{aligned}F_Z(z)&=P\left(\max(X,Y)\le z\right)=P(X\le z,Y\le z)\\&=P(X\le z)P(Y\le z)=F_X(z)F_Y(z)\end{aligned};$$

$Z=\min(X,Y)$的分布函数为

$$\begin{aligned}F_Z(z)=P\left(\min(X,Y)\le z\right)&=1-P\left(\min(X,Y)>z\right)\\&=1-P(X>z,Y>z)\\&=1-P(X>z)P(Y>z)\\&=1-\left[1-F_X(z)\right]\left[1-F_Y(z)\right].\end{aligned}$$

3、正态分布的可加性：设$X\sim N\left(\mu_1,\sigma_1^2\right)$，$X\sim N\left(\mu_2,\sigma_2^2\right)$，且$X,Y$相互独立，则

$X+Y\sim N\left(\mu_1+\mu_2,\sigma_1^2+\sigma_2^2\right)$.

例 29 设X,Y相互独立，分布函数分别为$F_X(x)$，$F_Y(y)$，则$Z=\min(X,Y)$的分布函数为（ ）

A. $F_Z(z)=\min\left\{F_X(z),F_Y(z)\right\}$　　B. $F_Z(z)=1-\left[1-F_X(x)\right]\left[1-F_Y(y)\right]$

C. $F_Z(z)=F_X(z)F_Y(z)$　　D.以上都不是

例 30 设随机变量 X 和 Y 相互独立，且均服从区间 $[0,3]$ 上的均匀分布，则

$P\left\{\min\left\{X,Y\right\}\leq 1\right\}=$____________.

例 31 随机变量 (ξ,η) 的分布密度为 $f(x,y)=\begin{cases}3x, & 0<x<1,0<y<x \\ 0, & \text{其他}\end{cases}$

求 $\zeta=\xi-\eta$ 的分布函数和概率密度。

完整课程扫码观看

★考点十六 数学期望（填空题、大题）

1、离散型随机变量的期望：$E\left(X\right)=\sum_{i=1}^{\infty}x_i p_i$

2、连续型随机变量的期望：$E\left(X\right)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf\left(x\right)dx$

3、期望的性质：

①$E(C)=C$，C为常数；

②$E(CX)=CE(X)$，C为常数；

③$E(X+Y)=E(X)+E(Y)$；

④设X,Y相互独立，则$E(XY)=E(X)E(Y)$.

例 32 设随机变量 X 的分布律为

X	-2	0	1
概率	0.3	0.2	0.5

求$E(X)$和$E\left(3X^2+5\right)$.

例 33 设随机变量 Y 的密度函数为 $f(y)=\begin{cases}2y, & 0<y<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$，

则$P(Y\leqslant EY)=$____________.

完整课程扫码观看

★考点十七 方差和标准差（填空题、大题）

1.定义

①方差：$D\left(X\right)=E\left[X-E\left(X\right)\right]^{2}=E\left(X^{2}\right)-\left[E\left(X\right)\right]^{2}$；

②标准差：$\sigma=\sqrt{D\left(X\right)}$.

2.性质

①$D(C)=0$，C为常数；

②$D(X+C)=D(X)$，C为常数；

③$D(CX)=C^{2}E(X)$，C为常数；

④$D(X\pm Y)=D(X)+D(Y)\pm 2E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\}$；

⑤设X,Y相互独立，则$D(X\pm Y)=D(X)+D(Y)$.

例 34 设随机变量 X 的密度函数为$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{3}x, & 1<x<2\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$,求$D(X)$和$D(X+5)$.

例 35 设随机变量 X 与 Y 的联合分布律为

$Y \backslash X$	-1	0	2
-1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	0
0	$\frac{1}{4}$	0	0
1	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$

求 $E(X)$、$E(Y)$、$D(X)$ 和 $D(Y)$.

★考点十八 常用分布的期望和方差（填空题）

分布	分布律或概率密度	数学期望	方差
0-1 分布	$P\{x=k\}=p^k(1-p)^{1-k}$ （$k=0,1$）	p	$p(1-p)$
二项分布 $B(n,p)$	$P\{x=k\}=C_n^k p^k(1-p)^{1-k}$	np	$np(1-p)$
泊松分布 $P(\lambda)$	$P\{x=k\}=\dfrac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$	λ	λ
均匀分布 $U(a,b)$	$f(x)=\dfrac{1}{b-a},(a<x<b)$	$\dfrac{a+b}{2}$	$\dfrac{(b-a)^2}{12}$
正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$	$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$	μ	σ^2
指数分布 $E(\theta)$	$f(x)=\begin{cases}\theta e^{-\theta x}, & x>0 \\ 0, & \text{其他}\end{cases}$	$\dfrac{1}{\theta}$	$\dfrac{1}{\theta^2}$

例 36 设 X 表示 10 次独立重复射击命中目标的次数，每次射中目标的概率为 0.4，则

$E\left(X^2\right)=$__________.

完整课程扫码观看

例 37 设 X_1,X_2 相互独立，X_1 在 $[0,6]$ 上服从均匀分布，$X_2 \sim N(1,2^2)$，记 $Y = X_1 - 2X_2 + 5$，则 $E(Y) =$ ________，$D(Y) =$ ________.

例 38 设随机变量 X 服从参数为 1 的泊松分布，则 $P\left(X = E\left(X^2\right)\right) =$ ________.

★考点十九 协方差和相关系数（填空题、大题）

1、协方差：$Cov\left(X,Y\right) = E\left(XY\right) - E\left(X\right)E\left(Y\right)$

2、协方差的性质：

①$Cov\left(X,C\right) = 0$，C 为常数；

②$Cov(aX,bY) = abCov(X,Y)$ （a,b 为常数）；

③$Cov(X_1 + X_2,Y) = Cov(X_1,Y) + Cov(X_2,Y)$;

④$D(X \pm Y) = D(X) + D(Y) \pm 2Cov(X,Y)$;

⑤若 X 与 Y 相互独立，则 $Cov(X,Y) = 0$.

3、相关系数：$\rho_{XY}=\dfrac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\cdot\sqrt{D(Y)}}$.

例 39 设两个随机变量X与Y的方差分别为25和36，相关系数为0.4，

则$D(X+Y)=$__________,$D(X-Y)=$__________

例 40 已知二维随机变量(X,Y)的联合密度函数为$f(x,y)=\begin{cases}1,0<x<1,0<y<2x\\0,\text{其他}\end{cases}$

求（1）$D(X)$和$D(Y)$，（2）协方差 $\mathrm{cov}(X,Y)$，（3）相关系数ρ_{XY}.

例 41 设随机变量 X 与 Y 的联合分布律为

$Y \backslash X$	-1	0	2
-1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	0
0	$\frac{1}{4}$	0	0
1	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$

求（1）$E(X-Y)$，

（2）协方差 $\mathrm{cov}(X,Y)$，

（3）相关系数 ρ.

★考点二十 中心极限定理（大题）

1、设随机变量$X_1,X_2,\cdots$独立同分布，$E(X_k)=\mu,D(X_k)=\sigma^2\neq 0,(k=1,2,\cdots)$，则当$n$充分大时，近似有$\sum_{k=1}^{n}X_k\sim N\left(n\mu,n\sigma^2\right)$，即$\dfrac{\sum_{k=1}^{n}X_k-n\mu}{\sqrt{n}\sigma}\overset{\text{近似}}{\sim}N(0,1).$

2、设随机变量$X\sim B\left(n,p\right)$，则当n充分大时，近似有$X\sim N\left(np,npq\right)$,即$\dfrac{X-np}{\sqrt{npq}}\overset{\text{近似}}{\sim}N(0,1).$

例 42 某复杂系统由 100 个独立工作的同型号电子元件组成，在系统运行期间，每个电子元件损坏的概率为 0.10。若至少需要 84 个电子元件正常工作，系统才能正常运行，求系统正常运行的概率.

例 43 已知某厂生产的晶体管的寿命服从均值为 100 小时的指数分布。现在从该广的产品中随机地抽取 64 只，求这 64 只晶体管的寿命总和超过 70 小时的概率.（假定这些晶体管的寿命相互独立）

★考点二十一 三大分布（填空）

1、$\chi^2(n)$分布：若$X_1,X_2,\cdots,X_n$相互独立，且$X_i \sim N(0,1),(i=1,2,\cdots)$，

则$X_1^2+X_2^2+\cdots+X_n^2 \sim \chi^2(n)$.

2、$t(n)$分布：设$X \sim N(0,1),Y \sim \chi^2(n)$，$X,Y$相互独立，则称$T=\dfrac{X}{\sqrt{Y/n}} \sim t(n).$

3、F分布：设$X \sim \chi_1^2(n_1),Y \sim \chi_2^2(n_2)$，$X,Y$相互独立，则$F=\dfrac{X/n_1}{Y/n_2} \sim F(n_1,n_2)$.

例 44 设总体$X \sim N(0,4^2)$，$(X_1,X_2,\cdots,X_{n+1})$是取自X的样本，

则$Y=\dfrac{1}{16}\sum\limits_{i=1}^{10}X_i^2 \sim$________，$Z=\dfrac{3X_{20}}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{9}X_i^2}} \sim$________，$W=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{15}X_i^2}{3\sum\limits_{i=26}^{30}X_i^2} \sim$________.

★考点二十二 点估计（大题）

1、求解步骤：

①写出总体一阶矩$E(X)=g(\theta)$，和样本一阶矩$\bar{X}=\sum_{i=1}^{n}X_i\Big/n$；

②令总体矩=样本矩，即$g(\theta)=\bar{X}$，反解出估计量$\hat{\theta}=h(\bar{X})$；

③将$\bar{X}$具体值代入$\hat{\theta}=h(\bar{X})$，得到估计值。

2、无偏估计

如果$E(\hat{\theta})=\theta$，则称$\hat{\theta}$为θ的无偏估计量。

例 45 设X的分布律如下表，其中$0<\theta<\frac{1}{2}$未知.

X	0	1	2	3
p_k	θ^2	$2\theta(1-\theta)$	θ^2	$1-2\theta$

现抽取了容量为 9 的样本，样本之中有 1 个 0、4 个 1、1 个 2、3 个 3，求θ的矩估计值.

完整课程扫码观看

例 46 设$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$是取自总体X的一个样本，总体X的密度函数为

$$f(x;a)=\begin{cases}\dfrac{2}{a^2}(a-x), & 0<x<a\\ 0, & 其他\end{cases}$$，求a的矩估计量.

A. $\hat{a}=\overline{X}$　　B. $\hat{a}=2\overline{X}$　　C. $\hat{a}=3\overline{X}$　　D. $\hat{a}=4\overline{X}$

★考点二十三 极大似然估计（大题）

1、离散型总体的最大似然估计步骤

设离散型总体X的分布律为$P\{X=x\}=p(x,\theta),$，其中θ为未知参数，设$x_1,x_2,\cdots,x_n$是一组样本观测值.

①计算似然函数$L(\theta)=\prod\limits_{i=1}^{n}p(x_i,\theta)$；

②对似然函数取对数得到$\ln L(\theta)=\sum\limits_{i=1}^{n}\ln p(x_i,\theta)$；

③令$\dfrac{d}{d\theta}\ln L(\theta)=0$，解出最大似然估计$\hat{\theta}$.

2、连续型总体的最大似然估计步骤

设连续型总体X的概率密度为$f(x,\theta)$，其中θ为未知参数，设$x_1,x_2,\cdots,x_n$是一组样本观测值. ①计算似然函数$L(\theta)=\prod\limits_{i=1}^{n}f(x_i,\theta)$；

②对似然函数取对数得到$\ln L(\theta)=\sum\limits_{i=1}^{n}\ln f(x_i,\theta)$；

③令$\dfrac{d}{d\theta}\ln L(\theta)=0$，解出最大似然估计$\hat{\theta}$.

例 47 设 X 的分布律如下表，其中 $0<\theta<1$，未知.

X	1	2	3
p_k	θ^2	$2\theta(1-\theta)$	$(1-\theta)^2$

现抽取了样本 $x_1=1, x_2=2, x_3=1$, 求 θ 的最大似然估计值.

例 48 设总体 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}(\theta+1)x^{\theta}, & 0<x<1, \\ 0, & \text{其他},\end{cases}$ 其中 $\theta>-1$ 是未知参数.

$x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是来自总体 X 的一个容量为 n 的简单随机样本，求 θ 的最大似然估计.

完整课程扫码观看

★考点二十四 假设检验（大题）

假设检验的步骤： 1.根据题意构造原假设H_0和它的对立假设H_1；

2.按照下表构造检验统计量；

3.给定显著性水平α，写出拒绝域；

4.代入样本观察值，算出统计量的具体指，如果该值落入拒绝域，则拒绝原假设；否则接受原假设.

设$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$是取自总体$X\sim N(\mu,\sigma^2)$的一个样本，显著性水平为$1-\alpha$，样本均值$\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$，样本方差$S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$。则均值$\mu$和方差$\sigma^2$的假设检验问题及拒绝域可分别整理为如下 2 个表。

检验参数		原假设与备择假设	计算统计量的值	拒绝域W
均值μ	σ^2已知	$H_0:\mu=\mu_0$ $H_1:\mu\neq\mu_0$	$z=\dfrac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$	$z>u_{1-\frac{\alpha}{2}}$
		$H_0:\mu=\mu_0$ $H_1:\mu>\mu_0$		$z>u_{1-\alpha}$
		$H_0:\mu=\mu_0$ $H_1:\mu<\mu_0$		$z<-u_{1-\alpha}$
	σ^2未知	$H_0:\mu=\mu_0$ $H_1:\mu\neq\mu_0$	$t=\dfrac{\bar{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}$	$t>t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)$
		$H_0:\mu=\mu_0$ $H_1:\mu>\mu_0$		$t>t_{1-\alpha}(n-1)$
		$H_0:\mu=\mu_0$ $H_1:\mu<\mu_0$		$t<-t_{1-\alpha}(n-1)$

注：u_α是标准正态分布的α分位数；$t_\alpha(n-1)$是自由度为$n-1$的t分布的α分位数.

检验参数		原假设与备择假设	计算统计量的值	拒绝域W
方差σ^2	μ已知	$H_0:\sigma^2=\sigma_0^2$ $H_1:\sigma^2\neq\sigma_0^2$	$\chi^2=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\mu\right)^2}{\sigma_0^2}$	$\chi^2<\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n)$或 $\chi^2>\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n)$
		$H_0:\sigma^2=\sigma_0^2$ $H_1:\sigma^2>\sigma_0^2$		$\chi^2>\chi^2_{1-\alpha}(n)$
		$H_0:\sigma^2=\sigma_0^2$ $H_1:\sigma^2<\sigma_0^2$		$\chi^2<\chi^2_{\alpha}(n)$
	μ未知	$H_0:\sigma^2=\sigma_0^2$ $H_1:\sigma^2\neq\sigma_0^2$	$\chi^2=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^2}{\sigma_0^2}$	$\chi^2<\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$或 $\chi^2>\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)$
		$H_0:\sigma^2=\sigma_0^2$ $H_1:\sigma^2>\sigma_0^2$		$\chi^2>\chi^2_{1-\alpha}(n-1)$
		$H_0:\sigma^2=\sigma_0^2$ $H_1:\sigma^2<\sigma_0^2$		$\chi^2<\chi^2_{\alpha}(n-1)$

注：$\chi^2_\alpha(n)$是自由度为n的χ^2分布的α分位数.

例 49 某种饮料自动销售机售出的每杯饮料容量正常情形下服从正态分布 $N\left(\mu,\sigma^2\right)$，今随机取 36 杯，测得平均每杯 219ml，标准差为 14.2ml.设显著性水平 $\alpha=0.1$，那么是否可以认为售出的饮料平均每杯为 220ml?

（$t_{0,1}(35)=1.3062, t_{0.05}(35)=1.6896, t_{0.1}(36)=1.3055$，$t_{0.05}(36)=1.6883$）