Prepared for submission to JHEP

超对称规范场论的基础和前沿探索

苏歆然[a]

[a]中山大学物理学院,广东广州 *510275*

E-mail: suxr5@mail2.sysu.edu.cn

Abstract: 超对称是一种连接费米子和玻色子的对称性，该对称性至今在自然界中尚未被观测到.超对称模型在大一统理论、暗物质理论、弦理论等发挥着重要作用.超对称规范场论是一个复杂的数学物理课题，本文旨在以大二学生知识水平为基础，简要补充理解超对称规范场论所需知识，并对其基础和前沿发展进行科普，使得同学们对这个课题有进一步探索的兴趣.

[1]22级物理学A班，学号22344123

目录

1 引言

粒子物理的标准模型是一种相对论性的量子规范理论，它很好地描述了在一定尺度下的物理，其中“规范”这个词代表了局部的对称性.而超越标准模型的新物理的一个想法是超对称.超对称规范场论是现代理论物理中的一个分支，在大一统理论、暗物质理论、弦理论等方面发挥着重要作用.本文贴合大二学生的基础，在第2部分首先介绍了必要的群论知识，然后在第3部分从量子场论中不同的场讲起，简单引入了Poincare变换和规范变换，进而在第4部分引入超对称，介绍了其物理背景和数学基础，最后在第5部分概括介绍了超对称规范场论的前沿发展现状.

附录A以一个直观的例子说明了$SU(2)$和$SO(3)$群作为三维旋转群的不同，附录B更加数学化地介绍了Lorentz群的不同表示，附录C介绍了在推导超对称时引入的Majorana旋量.附录D是为想要更加深入了解该课题的同学写的阅读资料的索引.

2 数学基础

2.1 群论基础

2.1.1 群的定义

什么是群？

定义：**群（Group）**是一种配备二元运算的集合，其二元运算满足结合律，有单位元和逆元.

简言之，群是集合以及集合中元素之间的一种运算.该种运算满足结合律. 若群中两个元素A和元素B作运算*等于元素C，即：A*B=C，C一定在群内.这里的*指代的是抽象运算，不仅是乘法. 形象地说，群内元素通过互相做运算“跳来跳去”，但运算有封闭性，不会超出群.

交换性：满足A*B=B*A这种交换律的群，我们叫做**阿贝尔(Abel)群**；否则，称作**非阿贝尔群**.

> 整数域上的加法是一种阿贝尔群：封闭、结合、可交换.

群的元素是抽象的元素，不一定需要是数.

> 你可以定义绕空间固定轴顺时针转动$2\pi/N$角的变换R为一个群。它显然满足封闭、结合、可交换.

很多自然界的变换（如平移、镜射）的汇总都符合群的定义.这也就是为什么场论需要群的语言：我们想研究变换中的对称性.

群是一种描述元素之间关系的概念，而元素具体到底是什么反而不太重要.

有限元素的群叫有限群，无限元素的群叫无限群.

2.1.2 群的同构与同态

定义：如果有两个群G和G'，他们的元素以一种规则一一对应时，其乘积也以同一种方式对应，则称两群**同构（Isomorphism）**。如果有两个群G和G'，他们的元素以一种规

则一对多时，其乘积也以同一种方式对应，则称两群**同态**（**Homomorphism**），记作$G \sim G'$.

因为群是一种描述元素之间关系的概念，所以“同构”类似于一一映射，不会丢失信息.“同态”类似一对多的映射，意味着丢失部分信息的关系对应.

> 但是注意其实这里的所谓“一对多的映射”并不一定是简单的“{1}对应{A,B}，{2}对应{C,D,E}”这种简单的对应，否则容易造成困惑.这里可以参考 [9]详细阅读.

2.2 李群

定义：**李群(Lie Group)**是一种连续（无限）群，它的每一个元素都可以用一组独立实参数来描写.

> 三维空间转动群$SO(3)$:
> 群内元素为所有3×3可逆实矩阵Q,满足：
> 字母S：Special：$|Q|=1$
> 字母O：Orthogonal正交:
> $$Q^TQ{=}E$$

其实$SO(3)$群对应的是三维空间顺时针转动任意角度的操作. 比如如果你要旋转一个三维空间的矢量，可以通过乘以这个三乘三的矩阵：

$$R=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\phi & -\sin\phi\\ 0 & \sin\phi & \cos\phi\end{pmatrix} \tag{2.1}$$

常见的李群还有：

> 幺正群$U(n)$：字母U:Unitary幺正：在复数域上满足$U^\dagger U{=}E_{\mathrm{n\times n}}$，其中$U$为n维复矩阵.
> 特别地,
> $$U(1)=e^{i\varphi}$$
> 也就是在复平面中单位圆上旋转.

> $SU(2)$群：行列式为1，同时幺正的二维复矩阵.

$SU(2)$群和$SO(3)$群实际上都代表了三维空间中的旋转. 不幸的是，他们之间的关系并不是单射.实际上它们之间为同态关系.

形象地说，在三维空间中$SO(3)$的参数转两圈（4π），对应 $SU(2)$群才能回到原位.这个概念对于理解旋量场较为重要，感兴趣的读者可以参阅附录A.

李群代表空间中的一块流形，而李代数代表其切空间上的生成元.

3 场论基础

3.1 简要介绍

量子场论是一种将狭义相对论与量子力学统一起来的理论.其中，随着时空点而变化的场$\Phi(x,t)$被视作是更加基本的，而粒子在场中不断产生与湮灭. 标准模型中，粒子的不同自旋数对应不同的场：自旋为0对应**标量(Scalar)场**（希格斯粒子），自旋为1对应**矢量(Vector)场**（规范玻色子），自旋为1/2对应**旋量(Spinor)场**（费米子）. 另外，量子引力中的自旋为2的引力子被认为对应着张量场（尚未在实验中发现此种粒子）.

3.2 Lorentz群

在狭义相对论中，四矢量x^μ的内积 $x^2 = g_{\mu\nu}x^\mu x^\nu$ 在Lorentz变换（惯性系之间相对匀速直线运动、转动）下保持不变.

记变换矩阵为$\Lambda^\mu{}_\nu$ ，则保内积变为保度规条件:

$$\begin{aligned} &x'^2 = g_{\mu\nu}x'^\mu x'^\nu = g_{\mu\nu}\Lambda^\mu{}_\alpha \Lambda^\nu{}_\beta x^\alpha x^\beta \\ &g_{\mu\nu}\Lambda^\mu{}_\alpha \Lambda^\nu{}_\beta = g_{\alpha\beta} \end{aligned} \tag{3.1}$$

满足上式的矩阵构成不定正交群O(1,3)，称为Lorentz群，定义为：

$$O(1,3) = \{\Lambda|\Lambda^T\Lambda{=}E, g_{\mu\nu}\Lambda^\mu{}_\rho\Lambda^\nu{}_\sigma = g_{\rho\sigma}, \Lambda\text{为}4\ \times\ 4\text{的矩阵}\}$$

这里的“不定”的意思是，矩阵的一共4个维度，有1个维度是时间，对应到度规中的“-”.

保度规条件也就是：

$$\Lambda^T g\Lambda = g$$

标量场、矢量场、旋量场分别对应于Lorentz群的不同**表示（Representation）**“表示”的意思是从群G到n维复线性空间V上所有n乘n可逆矩阵的同态映射.这个概念看起来复杂，但其实就只是从抽象的群元素到具体的矩阵的一个一对多的映射.

标量场：

$$\Lambda \to 1\ (\text{视为1维矩阵})$$

矢量场：

$$\Lambda^\mu{}_\nu{=}\begin{bmatrix} \gamma_0 & -\gamma_0\beta & 0 & 0 \\ -\gamma_0\beta & \gamma_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

其中，γ_0为狭义相对论中的那个γ.

旋量场：难以直观解释，要写表达式的话就要借助Lorentz群的生成元，可以类比SU(2)群（SO(3)的二重覆盖群）

关于群的表示的详细介绍，参见附录B.

Lorentz变换为

$$x^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$$

对应的无穷小变换生成元为

$$\Lambda^{\mu}{}_{\nu} = \delta^{\mu}{}_{\nu} + \omega^{\mu}{}_{\nu} \tag{3.2}$$

也即

$$\delta x^{\mu} = \omega^{\mu}{}_{\nu} x^{\nu} \tag{3.3}$$

可以这样理解式3.2 ：$\delta^{\mu}{}_{\nu}$实际对应着单位矩阵，也就是恒等变换；添加一个无穷小的参数$\omega^{\mu}{}_{\nu}$则对应一个无穷小变换.无穷小变换几乎没有变化，因此行列式的绝对值是1.

3.3 Poincare群

在式3.3中，考虑时空平移不变性，我们添加对应的时空平移参数得

$$\delta x^{\mu} = \omega^{\mu}{}_{\nu} x^{\nu} + a^{\mu}$$

这个变换保证的是四维矢量的线元长度不变.将其叫作Poincare变换.

将Poincare变换写作$U(\Lambda, a)$.我们知道，先作变换$U(\Lambda_1, a_1)$ ，再做变换$U(\Lambda_2, a_2)$ ，我们应该得到一个新的Poincare变换。通过这个关系我们得到Poincare群的生成元变换：

$$\delta x^{\mu} = i a^{\nu} P_{\nu}(x^{\mu}) + \frac{i}{2}\omega^{\nu\lambda} M_{\nu\lambda}(x^{\mu})$$

此处“得到一个新的Poincare变换”大致是指考虑：

$$(\delta_1\delta_2 - \delta_2\delta_1)x^{\mu} = a^{\mu} + \omega^{\mu}{}_{\nu} x^{\nu}$$

具体推导见 [1]的Section 3.2 ，或者 [3]的3.1.1节.

以及得到无穷小算符的对易关系为：

$$\begin{aligned} [P_{\mu}, P_{\nu}] &= 0 \\ [P_{\mu}, M_{\nu\lambda}] &= -i\eta_{\mu\nu}P_{\lambda} + i\eta_{\mu\lambda}P_{\nu} \\ [M_{\mu\nu}, M_{\lambda\rho}] &= -i\eta_{\nu\lambda}M_{\mu\rho} + i\eta_{\mu\lambda}M_{\nu\rho} - i\eta_{\mu\rho}M_{\nu\lambda} + i\eta_{\nu\rho}M_{\mu\lambda} \end{aligned} \tag{3.4}$$

此处，P_{μ}类似于动量算符, $M_{\mu}\lambda$类似于自旋算符.

这里可以这样理解这两个算符：动量守恒对应时空平移不变性，故P类似于动量算符.M对应的是Lorentz变换.

Poincare群实际上也就是Lorentz群与时空平移群的半直积群.

总之，可以这样理解：

Lorentz群是内积在Lorentz变换下保持不变的群，包括惯性系之间的相对匀速直线运动、转动.

Poincare群是在Lorentz群基础上添加了“平移”这个变换的群.

3.4 规范场

3.4.1 整体规范变换

当对场量ϕ作U(1)=$e^{iq\theta}$这样的变换时，场的拉氏密度应保持不变.也就是说：

$$\phi \to \phi' = e^{iq\theta}\phi, \delta\mathfrak{L} = 0$$

U（1）规范变换类似于转圈圈，只改变场的相位$q\theta$.这里你可以对应到电磁场的相位、波函数的相位都没有物理意义.

当变换参量θ是常数，与坐标无关时，我们称之为**整体（Global）规范变换**.

值得一提的是，每种对称性都对应着一种守恒量，这里的q对应场粒子携带的某种荷，如电荷、重子数、轻子数、奇异数、粲数、底数、顶数等.

3.4.2 定域规范变换

当前述$\theta = \theta(x)$，为时空坐标的函数，这种变换我们叫做**定域（Local）规范变换**. 在定域规范变换下，我们也可以假设场方程的拉氏密度不变。无论是整体规范变换，还是定域规范变换，改变的都是场的内部相位，因此是一种内部对称性。

Maxwell场:
对于电子，满足自由Dirac方程：

$$(\gamma_\mu \partial_\mu + m)\psi = 0$$

对应的拉氏量：

$$\mathfrak{L} = -\bar{\psi}(\gamma_\mu \partial_\mu + m)\psi$$

在定域规范变换$\phi \to \phi' = e^{iq\theta(x)}$下，要保持拉氏量形式不变，必须引入另一个有这样规范变换的场：

$$A_\mu(x) \to {A_\mu}'(x) = A_\mu(x) - \frac{1}{e}\partial_\mu \theta(x)$$

这样改写为的拉氏密度在规范变换下不变：

$$\mathfrak{L} = -\bar{\psi}(\gamma_\mu(\partial_\mu - ieA_\mu) + m)\psi$$

这相当于电磁场和带电费米场，带电粒子之间通过交换光子发生电磁相互作用.引入的这个场A_μ叫做**规范（Gauge）场**.

3.4.3 Yang-Mills 场

当 $U = e^{iq\gamma(x)}$中，$\gamma(x) = \theta_a T^a$为普通实函数，则为前面的U（1）规范变换. 当T^a为矩阵时，其不能相互对易，对应的U为内部空间的SU(n）矩阵. 要使得拉氏密度在这种规范变换下不变，所引入的规范场叫做非Abel规范场，或**Yang-Mills场**.

例如QCD中，夸克的内部色空间写为

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \end{pmatrix}$$

需要在SU(3)规范下不变.
SU(3)的生成元满足：

$$[T_a, T_b] = if_{abc}T^c$$

此处详细推导请见 [4]的201-205页.

在此，我们推广了变换$U = e^{i\theta_a T^a}$到SU（3）群. 实际上，这种变换是场内部的变换对称性（类比电磁场的相位）. 标准模型中，描述三种基本相互作用的内部规范对称性为

$$SU(3) \times SU(2) \times U(1)$$

粗略地说，SU（3）群的对称性描述了强力，SU（2）描述了弱相互作用，U（1）描述了电磁力.

4 超对称

4.1 简介

超对称假设了玻色子和费米子之间存在某种对称性. 它提出，来自费米子类的每个粒子都会有一个玻色子类中的相关粒子，反之亦然,我们称为超对称粒子，或**超伴子（superpartner）**.

4.2 引入超对称的理由

为什么我们要引入超对称这个假设？有以下几点支持：

重整化：希格斯粒子质量的重整化遇到困难.在超对称模型中，这个问题会简化一些.同时，超对称产生的super-Ward-Takahashi恒等式抵消了许多正常发散的Feymann图.

统一性：一种假设认为，在标准模型之外，所有的规范场在能量大约为10^15GeV处被统一成一个简单的规范群。观察到电磁、强耦合和弱耦合常数在低能量时并不相同，随着能量这一参数变化。但他们惊人地在大约10^15GeV处相遇. 在标准模型中不太符合这一事实，但在超对称模型中符合。

暗物质：超对称模型中最轻的超伴子（LSP）被认为是暗物质的重要候选粒子.它不参与电磁相互作用.

弦论： **弦论（String Theory）**是一种著名的量子引力理论，以统一四种相互作用力为目的.超对称是**超弦理论(Superstring Theory)**的重要组成部分.

4.3 超对称代数

4.3.1 引入

在前面，我们介绍了场论中两种重要的对称性：**Poincare对称性**（与时空变换有关）和**内部规范对称性**（和内部转动有关）。它们的生成元的对易关系如下：

Poincare代数：

$$\begin{aligned}[P_\mu, P_\nu] &= 0 \\ [P_\mu, M_{\nu\lambda}] &= -i\eta_{\mu\nu}P_\lambda + i\eta_{\mu\lambda}P_\nu \\ [M_{\mu\nu}, M_{\lambda\rho}] &= -i\eta_{\nu\lambda}M_{\mu\rho} + i\eta_{\mu\lambda}M_{\nu\rho} - i\eta_{\mu\rho}M_{\nu\lambda} + i\eta_{\nu\rho}M_{\mu\lambda}\end{aligned} \tag{4.1}$$

规范变换：

$$[T_a, T_b] = if_{abc}T^c$$

追求大一统理论的物理学家们想找一种更高层面的群M来统一这两个对称性,使得他们之间是非平凡的对易关系，也就是说最后整体的群为：

$$M \supset P \otimes U$$

其中，P代表Poincare群，U代表统一的内部转动群。

然而，十九世纪六十年代，Coleman和Mandula提出了一个No-Go定理：在任何大于2的时空维数中，相互作用的量子场论都具有一种李代数对称性，它是内部对称性和Poincare代数的直积.

不过，我们可以通过构造超对称代数，或叫做Z_2**阶化(graded)李代数**，来打破这个定理的约束. $Z_2 = \{0, 1\}$. 其实就是把原本李群连续的流形，用Z_2分了个级。0，1可以看作和奇偶性有关。

实际上，超对称代数本身更是一个数学方面的、非常复杂的议题. 我们通常只关心和物理学相关的部分.

4.3.2 构造

如何构造这种Z_2分级李代数？让我们回到拉氏量的层面。考虑这样一个简单的超对称模型：

$$\mathfrak{L} = (\partial_\mu\phi)(\partial^\mu\phi^\dagger) + \frac{i}{4}\bar{\Psi}\gamma^\mu\overleftrightarrow{\partial}_\mu\Psi$$

其中：ϕ为复标量场，Ψ为**Majorana旋量**.关于此处Majorana旋量的简单介绍，见附录C.

因为要考虑玻色子和费米子之间的对称性，让我们引入一个混合它们的超对称变换:

$$\begin{cases} \delta\phi = \sqrt{2}\bar{\varepsilon}P_L\Psi \\ \delta\phi^\dagger = \sqrt{2}\bar{\varepsilon}P_R\Psi \\ \delta\Psi = -\sqrt{2}i\gamma^\mu(P_R\varepsilon\partial_\mu\phi + P_L\varepsilon\partial_\mu\phi^\dagger) \end{cases}$$

其中，

$$P_L \equiv \frac{1}{2}(1-\gamma^5), P_R \equiv \frac{1}{2}(1+\gamma^5)$$

将上述超对称变换作用到拉氏量上，我们可以得到

$$\delta\mathfrak{L} = 0$$

由此便可证明该模型在超对称变换下不变. 如读者对推导细节感兴趣，参见 [2].

但是这里还没结束. 考虑Weyl表象下分解Majorana旋量，我们得到拉氏密度等价形式：

$$L = (\partial_\mu\phi)(\partial^\mu\phi^\dagger) + \frac{i}{2}\sigma^\mu{}_{\alpha\bar{\beta}}\psi^\alpha\overleftrightarrow{\partial}_\mu\psi^{\bar{\beta}}$$

我们需要一个封闭的代数关系.也就是说，连续的两次超对称变换下，变分的对易子对各种场量的作用有相同形式,因为这样我们才能引入超对称生成元Q. 目前我们可以计算得到:

$$\begin{cases} [\delta_1,\delta_2]\phi = -2i\bar{\varepsilon}_2\gamma^\mu\varepsilon_1\partial_\mu\phi \\ [\delta_1,\delta_2]\Psi = -2i\bar{\varepsilon}_2\gamma^\mu\varepsilon_1\partial_\mu\Psi + i\gamma^\mu\bar{\varepsilon}_2\gamma_\mu\varepsilon_1\gamma^\nu\partial_\nu\Psi \end{cases} \tag{4.2}$$

显然，上两式的第一项有相同形式，但第二式多出了一项，我们想消去它.

还记得我们在Maxwell场中如何让拉氏量规范不变吗？引入一个辅助场！让我们引入一个复标量场Φ,使得可以改写旋量场的超对称无穷小变换为：

$$\delta\Psi = -\sqrt{2}i\gamma^\mu(P_R\varepsilon\partial_\mu\phi + P_L\varepsilon\partial_\mu\phi^\dagger) - \sqrt{2}(P_R\varepsilon\Phi + P_L\varepsilon\Phi^\dagger)$$

这样我们得到的超对称变换为：

$$\begin{cases} [\delta_1,\delta_2]\phi = -2i\bar{\varepsilon}_2\gamma^\mu\varepsilon_1\partial_\mu\phi \\ [\delta_1,\delta_2]\Psi = -2i\bar{\varepsilon}_2\gamma^\mu\varepsilon_1\partial_\mu\Psi \\ [\delta_1,\delta_2]\Phi = -2i\bar{\varepsilon}_2\gamma^\mu\varepsilon_1\partial_\mu\Phi \end{cases} \tag{4.3}$$

这时这三个式子有同样的变换方式！让我们来看看这个变换是什么.回想Poincare群里的动量算符P：

$$P_\mu \equiv -i\partial_\mu$$

由此改写超对称对易子：

$$[\delta_1,\delta_2] = -2i\bar{\varepsilon}_2\gamma^\mu\varepsilon_1\partial_\mu = 2\bar{\varepsilon}_2\gamma^\mu\varepsilon_1 P_\mu$$

现在我们已经将超对称变换和平移变换联系在一起了，但还没得到真正的超对称生成元Q.

考虑这个无穷小变换写作：

$$\delta(field) = i(\varepsilon^A Q_A)(field)$$

其在Weyl表象下分解为：

$$\varepsilon^A = \begin{pmatrix} \eta^\alpha \\ \bar{\eta}_{\bar{\beta}} \end{pmatrix}, Q_A = \begin{pmatrix} Q_\alpha \\ \bar{Q}^{\bar{\beta}} \end{pmatrix}$$

于是超对称变换可以写作：

$$\delta = i(\eta^\alpha Q_\alpha + \bar{\eta}_{\bar{\alpha}}\bar{Q}^{\bar{\alpha}}) = i(\eta Q + \bar{\eta}\bar{Q})$$

结合前面的对易子公式，经计算可得超对称生成元之间的关系为：

$$\{Q_\alpha, Q_\beta\} = 0, \{\bar{Q}^{\bar{\alpha}}, \bar{Q}^{\bar{\beta}}\} = 0, \{Q_\alpha, \bar{Q}^{\bar{\beta}}\} = 2\sigma^{\mu}{}_{\alpha}^{\bar{\beta}} P_\mu$$

超对称生成元 Q_α和$\bar{Q}^{\bar{\alpha}}$都为Weyl旋量，因此我们可以结合之前Weyl旋量的性质，得到完整的超Poincare代数的结构：

$$\begin{aligned} [P_\mu, P_\nu] &= 0 \\ [P_\mu, M_{\nu\lambda}] &= -i\eta_{\mu\nu}P_\lambda + i\eta_{\mu\lambda}P_\nu \\ [M_{\mu\nu}, M_{\lambda\rho}] &= -i\eta_{\nu\lambda}M_{\mu\rho} + i\eta_{\mu\lambda}M_{\nu\rho} - i\eta_{\mu\rho}M_{\nu\lambda} + i\eta_{\nu\rho}M_{\mu\lambda} \end{aligned} \tag{4.4}$$

$$
\begin{aligned}
\{Q_\alpha, Q_\beta\} &= 0 \\
\{\bar{Q}^{\bar{\alpha}}, \bar{Q}^{\bar{\beta}}\} &= 0 \\
\{Q_\alpha, \bar{Q}^{\bar{\beta}}\} &= 2\sigma^{\mu}{}_{\alpha}^{\bar{\beta}} P_\mu \\
\{Q_\alpha, \bar{Q}_{\bar{\beta}}\} &= 2\sigma^{\mu}{}_{\alpha\bar{\beta}} P_\mu \\
\{Q^\alpha, \bar{Q}^{\bar{\beta}}\} &= 2\sigma^{\mu\bar{\beta}\alpha} P_\mu
\end{aligned} \tag{4.5}
$$

$$
\begin{aligned}
[Q_\alpha, P_\mu] &= 0 = [\bar{Q}^{\bar{\alpha}}, P_\mu] \\
[M_{\mu\nu}, Q_\alpha] &= -i(\sigma_{\mu\nu})_\alpha{}^\beta Q_\beta \\
[M_{\mu\nu}, \bar{Q}^{\bar{\alpha}}] &= -i(\bar{\sigma}_{\mu\nu})_\alpha{}^\beta Q_\beta
\end{aligned} \tag{4.6}
$$

式4.4为Poincare代数，式4.5为超对称生成元之间的对易关系，而式4.6为超对称生成元和Poincare群两个生成元的对易关系，可以看到Q和动量算符P直接对易，而和自旋算符M则不是.

> 将其称作“阶化李代数”的原因是，李代数中只定义了一个李括号[ ]，而这里还有{}。什么时候用[ ],什么时候用{}，可能需要Grassmann代数基础.

我们可以拓展超对称代数.如果有N个生成元$Q_\alpha{}^A, A = 1, 2, 3...N$，满足：

$$\{Q_\alpha{}^A, \bar{Q}_{\bar{\beta}B}\} = 2\sigma^{\mu}{}_{\alpha\bar{\beta}} P_\mu \delta^A_B$$

则$N > 1$时，称作**扩展(extended)超对称代数**.

此外，在超空间下，我们可以定义超场,其核心精神是仿照动量算符$P_\mu \equiv -i\partial_\mu$,寻找坐标$\theta$使得

$$Q_\alpha \sim \frac{\partial}{\partial\theta^\alpha}, \bar{Q}^{\bar{\alpha}} \sim \frac{\partial}{\partial\bar{\theta}_{\bar{\alpha}}}$$

想深入了解的读者请参考 [2]，由于其难度较大，本文不再进行深入.

4.4 超对称的现状

超对称在数学上无疑是具有美感的.那么在现实世界中，我们是否已经探测到了超对称粒子？

很遗憾的是，答案是否定的.目前尚没有证据能说明现实世界中存在超对称.

大型强子对撞机（LHC）是世界上最大、能量最高的粒子对撞机，由欧洲核子研究组织（CERN）建造。该对撞机曾发现了Higgs粒子，但在不断提升能量层次的实验下，我们一直没有发现超对称的迹象.

有人认为，我们总可以认为超对称在更高的能量上“对称性自发破缺”，也就是说，超对称生活在更高的能标，只不过在我们这个低能标的时空下被打破了.所以永远都不能证伪超对称.

但即使这样，我们可以说超对称没有描述我们目前的这个世界，而且假设提高对称性自发破缺的能量会造成我们一开始在4.2中支持超对称的理由不再成立.

5 超对称规范场论前沿发展现状

各种（扩展）超对称代数N=1,2⋯都有学者在研究.

基本上，我们看到的以“Super”开头的单词都和超对称有关（除了Superconductor），比如：Super-Yang Mills, Superstring theory, Supergravity⋯⋯

这是一个非常复杂和专业的领域，作者的能力所限，难以在此具体介绍.

> 为了符合这个报告的主题，这里补充一些科普.
>
> 对同学们来说，比较有名的和超对称有关的理论是弦论.最早的弦论只涉及玻色子，称为玻色弦理论，一度达到26个维度.后来为了使模型包含费米子，以及解决其他的问题，引入了超对称性，称为超弦理论，简化到了10维时空.
>
> 包括最多的超对称生成元的理论为$N=32$（从数学上看，N完全可以任意大，但更多的超对称生成元会导致出现自旋大于2的粒子，而我们假设的自旋最大的是自旋为2的引力子，所以更大的自旋不对应我们关心的物理），这时时空维度为11维，是一种叫M理论的维度.

A $SU(2)$群和$SO(3)$群

$SU(2)$叫作$SO(3)$的二重覆盖群。理解这两个群之间的关系对于理解旋量非常重要.建议最好参考专业群论教材. 下面是来自 [5]的一个形象解释： $SU(2)$群对应的流形为S^3三维超球面，而$SO(3)$作为流形是一个表面对径认同（就是正转180度和反转180度对应同一个点的）的实心球.

但是我们作为三维生物想象不到三维的球面，于是我们将其降一维画在图里.

于是，二维的球面代表$SU(2)$,而黄色的对径认同的圆盘代表$SO(3)$.

于是，我们可以构造一种二对一的映射，使得两个红叉叉都可以到对应圆盘上同一蓝点.

对于圆周上的两个红圆圈和黑点也同理.

B Lorentz群的表示

实际上我们可以通过分类Lorentz群的李代数的生成元，来进一步理解。洛伦兹代数为so(3,1)，我们发现其满足以下关系：

$$\mathrm{so}(3,1)=\mathrm{su}(2)\oplus\mathrm{su}(2)$$

不同场对应这两个**理想（ideal）**（大概是子集的意思）的不同的表示空间的维度.

标量对应（1，1）表示.也就是说两个su(2)代数都取1维平庸的表示，那么整体也就是平庸的，对应标量.标量其实也是Lorentz群的一种**恒等表示**，也叫平庸表示. Weyl旋量对应（1，2）和（2，1）表示.其实对应着的是左旋和右旋，两个Weyl旋量叠加可以得到Dirac旋量. 矢量对应（2，2）表示. 一个很好的关于Lorentz群表示的介绍是 [6].

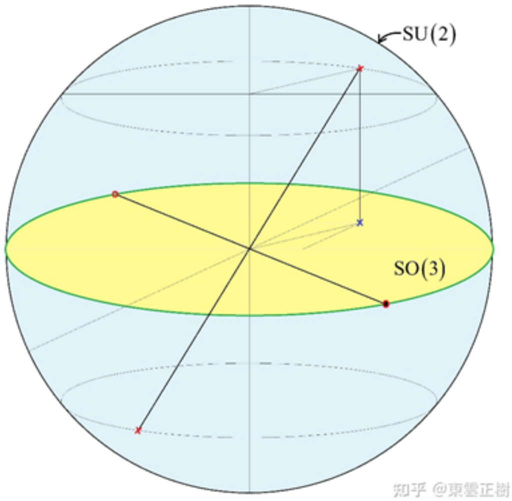

图 1.

C　Majorana旋量

由于此处用到了Majorana旋量，我们再进一步叙述一下旋量场。还记得我们前面提到，Lorentz代数可分解为

$$\mathrm{so}(3,1) = \mathrm{su}(2) \oplus \mathrm{su}(2)$$

而Weyl旋量对应（1，2）和（2，1）表示，他们的直和对应着Dirac旋量。具体来说，我们使用Weyl表象，4分量的Dirac旋量可以看作两个2分量的Weyl旋量组成：

$$\Psi = \begin{pmatrix} \chi \\ \bar{\eta} \end{pmatrix}$$

旋量的变换方式为:

$$\Psi'(x') = S(\Lambda)\Psi(x)$$

其中$S(\Lambda)$为Lorentz旋量表示下的生成元. Weyl表象下，$S(\Lambda)$可化为分块对角矩阵：

$$S(\Lambda) = \begin{pmatrix} \exp(-\frac{1}{2}\lambda_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}) & 0 \\ 0 & \exp(-\frac{1}{2}\lambda_{\mu\nu}\bar{\sigma}^{\mu\nu}) \end{pmatrix}$$

作用到旋量场上，我们很明显地看到，上两个分量和下两个分量独立变换:

$$\Psi = \begin{pmatrix} \chi \\ \bar{\eta} \end{pmatrix}$$

上面带bar的量和不带bar的量分属两个表示空间，有不同的变换方式（实际前者相当于后者的复共轭）。对Majorana旋量，有

$$\chi = \eta$$

D　阅读资料

为了方便感兴趣的同学，附录D主要介绍了希望进一步学习可能可以用到的参考资料.

首先是 [1, 2]，这俩篇文献是这篇文章的主要参考资料. [1]面向的是熟悉量子力学的读者，从零开始介绍场论，最终介绍到超对称规范场论. [2]是中文的一篇笔记，适合已经有量子场论基础的同学来看超对称代数以及$SU(5)$这一种大一统模型的推导，这篇推导很详细.

关于量子场论，首先是 [4]这篇简要介绍量子场论的教材，大二的同学完全可以看懂，并熟悉相关概念.稍微难一点的也可以看余钊焕老师的讲义 [3]推导非常详细，也会补充相关数学基础.另外有一篇 [8]补充量子场论中常用的公式供查找.

关于群论，可以以 [9]入门，然后查找知乎 [5].

关于李代数，有 [10]这篇从零开始介绍$su(n)$的李代数，还有 [11]可以查找常用的su(N)李代数的公式.

还有一本书 [7]是介绍超弦理论和M理论的，本文参考了它的附录4关于超对称代数的简要介绍.

Acknowledgments

本文关于超对称的几乎所有内容都摘抄自参考文献 [1, 2].非常感谢他们写出了如此详尽的笔记.

感谢姚道新老师和各位同学观看我的报告并批评指正.

感谢潘逸文老师回答了我向他询问的关于这个题目的疑问并指引方向.

感谢张梦菡学姐回答我关于量子场论的疑问并给予指导.

感谢陈铭沁、黄智鹏、谢潇、肖璐同学参与了讨论.

参考文献

[1] Lambert, Neil. *Supersymmetry and Gauge Theory (7 CMMS 41)*(2011)

[2] 潘逸文,冯开喜,余钊焕,刘家兴,余华超,郭汉青, *超对称场论与SU(5)大统一模型*,https://yzhxxzxy.github.io/doc/0909_SUSY_GUT_v5.pdf

[3] 余钊焕, *量子场论讲义*,https://yzhxxzxy.github.io/cn/teaching.html .

[4] 王正行,*简明量子场论*,北京大学出版社.

[5] 東雲正樹，https://zhuanlan.zhihu.com/p/341625428

[6] Yuchen Wang，https://zhuanlan.zhihu.com/p/388164337

[7] Michio Kaku,*Introduction to Superstrings and M-Theory (Second Edition)*

[8] V.I. Borodulin,*COmpendium of RElations*,arXiv:1702.08246v3

[9] 马中骐,*物理学中的群论.第2版*. 北京：科学出版社(2006)

[10] Pfeifer, W. Te ,*Lie Algebras su(N): An Introduction*(2003)

[11] Useful relations involving the generators of su(N)(2016)