Prepared for submission to JHEP

电动力学笔记

苏歆然

E-mail: suxr5@mail2.sysu.edu.cn

Abstract: 这个笔记是我对电动力学课堂笔记的简要整理，覆盖了课堂所有重要的知识点和关键推导的思路.目前整理到课堂第一至第六周周二，第十周的内容；后续会更新最新内容，以及补充相应的习题.

目录

1 高等数学复习

本章内容用来回顾北大版高数教材第六、七章部分内容.

1.1 梯度

我们首先引入记号

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{j} + \frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{k} \tag{1.1}$$

定义：作用于数量场$u = f(x, y, z)$（就是空间中一个点的坐标映射到一个数量），得到如下向量场：

$$\nabla u = \mathrm{grad} u = (\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}) \tag{1.2}$$

显然：

$$\mathrm{d}\phi = \triangledown\phi \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} \tag{1.3}$$

梯度与数量场的关系，可以类比于电场和电势的关系来推知其意义.

某一点的电场的方向在该点垂直于等势面~某一点的梯度在该点垂直于等值面

如何证明这一点呢？让我们把它翻译为数学语言：
等值面，即：

$$f(x, y, z) = C \tag{1.4}$$

在该点垂直于等值面，即梯度垂直于等值面上一切过点(x_0, y_0, z_0)的曲线在该点的切线.
曲线的定义是区间$[a, b]$到空间R^3的一个连续映射的像，因此可以以参数方程来表示：

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \tag{1.5}$$

曲线的切线就是相邻非常非常小的两个点$(x_1 \text{fi} y_1 \text{fi} z_1)$，$(x_2, y_2, z_2)$连成线的方向：

$$(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1) \tag{1.6}$$

同时除个t，取极限：

$$(\frac{\partial x}{\partial t}, \frac{\partial y}{\partial t}, \frac{\partial z}{\partial t}) \tag{1.7}$$

对(1.4)两边对t求导，得到:

$$\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t} = 0 \tag{1.8}$$

也就是：

$$(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}) \cdot (\frac{\partial x}{\partial t}, \frac{\partial y}{\partial t}, \frac{\partial z}{\partial t}) = 0 \tag{1.9}$$

即所求证梯度垂直于等值面（代入$t = t_0$就是一点；该曲线方程并未指定，因此说明梯度垂直于所有经过该点的曲线的切线，也就是在该点垂直于等值面）.

1.2 散度

定义： 作用于向量场$\boldsymbol{F} = P\boldsymbol{i} + Q\boldsymbol{j} + R\boldsymbol{k}$（就是空间中每一点映射到一个向量）上，得到：

$$\mathrm{div}\boldsymbol{F} = \nabla \cdot \boldsymbol{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \tag{1.10}$$

$$\oint \boldsymbol{f} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int \mathrm{div} f \mathrm{d}V \tag{1.11}$$

1.3 旋度

定义： 旋量：作用于向量场$\boldsymbol{F} = P\boldsymbol{i} + Q\boldsymbol{j} + R\boldsymbol{k}$上，得到：

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{f} = \nabla \times \boldsymbol{f} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial x} \\ P & Q & R \end{vmatrix} \tag{1.12}$$

$$\oint \boldsymbol{f} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \int \mathrm{rot} f \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{1.13}$$

1.4 平方反比矢量函数

对于

$$\frac{\boldsymbol{e_r}}{r^2} \tag{1.14}$$

有：

（1）对任意封闭曲面

$$\int_\Sigma \frac{\boldsymbol{e_r}}{r^2} \cdot d\boldsymbol{S} = 4\pi(\text{q在曲面内}) \text{ or } \ 0 \ (\text{q在曲面外}) \tag{1.15}$$

（2）对任意封闭曲线

$$\int \frac{\boldsymbol{e_r}}{r^2} \cdot d\boldsymbol{l} = 0 \tag{1.16}$$

1.5 矢量分析公式

（1）混合积：

$$\boldsymbol{c} \cdot (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \tag{1.17}$$

显然，$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$大小与a，b围成的平行四边形面积大小相等.乘以高，混合积自然就是a，b，c围成的平行六面体的体积，由此易知三个矢量满足反对称性.

（2）三矢量矢积：

$$\boldsymbol{c} \times (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{b})\boldsymbol{a} - (\boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{a})\boldsymbol{b} \tag{1.18}$$

三矢量的矢积结果肯定在a，b张成的平面上，结果以a，b为基表示，且交换a，b会异号，所以肯定是这种形式.

（3）$\triangledown$算符运算公式：

推导见上一篇文章.

对于标量和矢量场的结合，公式：

$$\nabla \times (f\boldsymbol{A}) = \nabla f \times \boldsymbol{A} + f\nabla \times \boldsymbol{A} \tag{1.19}$$

$$\nabla \cdot (f\boldsymbol{A}) = (\nabla f) \cdot \boldsymbol{A} + f(\nabla \cdot \boldsymbol{A}) \tag{1.20}$$

很显然，只需要利用$\triangledown$的微分性质即可得出.

两个矢量场结合：

$$\nabla\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})=(\nabla\times\boldsymbol{A})\cdot\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{B})\tag{1.21}$$

$$\nabla\times(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})=((\nabla\cdot\boldsymbol{B})+\boldsymbol{B}\cdot\nabla)\boldsymbol{A}-((\nabla\cdot\boldsymbol{A})+\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\boldsymbol{B}\tag{1.22}$$

$$\nabla(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})=(\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\boldsymbol{B}+(\boldsymbol{B}\cdot\nabla)\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}\times(\nabla\times\boldsymbol{B})+\boldsymbol{B}\times(\nabla\times\boldsymbol{A})\tag{1.23}$$

(1.21)可以这样分析：结果一定和$\boldsymbol{A}$fi$\boldsymbol{B}$有关，回想到混合积的轮换性质，写出形式上与(1.17)相等的两项.

(1.22)可以这样分析：结果一定和$\boldsymbol{A}$fi$\boldsymbol{B}$有关，回想到三矢量叉乘的公式，写出$(\nabla\cdot\boldsymbol{B})\boldsymbol{A}-(\nabla\cdot\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}$，再根据微分性质补上后两项.

(1.23)的推导：

$$\text{LHS}=\partial^b(A^aB_a)$$

$$\begin{aligned}
&\text{RHS}=A^a\partial_aB^b+B^b\partial_bA^a+\varepsilon^{fdc}\varepsilon_{cba}A_d\partial^bB^a+\varepsilon_{bcf}\varepsilon^{fda}B^c\partial_dA_a\\
&=A^a\partial_aB^b+B^b\partial_bA^a+({\delta^f}_b{\delta^d}_a-{\delta^f}_a{\delta^d}_b)A_d\partial^bB^a+({\delta^b}_d{\delta^c}_a-{\delta^b}_a{\delta^c}_d)B^c\partial_dA_a\\
&=A^a\partial_aB^b+B^b\partial_bA^a+{\delta^f}_b{\delta^d}_aA_d\partial^bB^a-{\delta^f}_a{\delta^d}_bA_d\partial^bB^a+{\delta^b}_d{\delta^c}_aB^c\partial_dA_a-{\delta^b}_a{\delta^c}_dB^c\partial_dA_a\\
&=A^a\partial_aB^b+B^b\partial_bA^a+A_a\partial^fB^a-A_b\partial^bB^f+B^a\partial_bA_a-B^d\partial_dA_b\\
&=A_a\partial^bB^a+B^a\partial_bA_a
\end{aligned}$$

可以先猜到有前两项，然后回忆需要后两项以凑出来指标位置.

根据(1.18)易知：

$$\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{A})=\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{A})-\nabla^2\boldsymbol{A}\tag{1.24}$$

(4)梯度无旋、旋度无源：

$$\nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{A})=0\tag{1.25}$$

$$\nabla\times(\nabla f)=0\tag{1.26}$$

1.6 并矢、张量的计算

我认为并矢的计算是这样的：

$$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{B}_j$$

推广点乘到并矢$\boldsymbol{AB}$与矢量$\boldsymbol{C}$：

$$(\boldsymbol{AB})\cdot\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{B}_j\boldsymbol{C}^j$$

$$\boldsymbol{C}\cdot(\boldsymbol{AB})=\boldsymbol{C}^i\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{B}_j$$

两个并矢的双点乘：

$$(\boldsymbol{AB}):(\boldsymbol{CD})=\boldsymbol{AB}_{ij}\boldsymbol{CD}_{ji}=\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{B}_j\boldsymbol{C}_j\boldsymbol{D}_i$$

推广梯度的公式到矢量$\boldsymbol{A}$:

$$\nabla \boldsymbol{A} = \partial_a \boldsymbol{A}^b \tag{1.27}$$

推广散度的公式到张量$\boldsymbol{T}_{ab}$:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{T}_{ab} = \partial_a \boldsymbol{T}_{ab} \tag{1.28}$$

2 静电场

2.1 矢量分类

极矢量：在空间反射变换下，矢量变换与坐标变换相同.平行镜像分量不变，垂直镜像的分量改变符号.

轴矢量（赝矢量，pseudo-vector）：在空间反射变换下，垂直分量不变，平行分量改变符号.例如：角速度、角动量、力矩、磁场强度.

赝矢量的性质大概是因为其本身并不是一个矢量，而是两个矢量的叉积.

极矢量×极矢量=轴矢量极矢量×轴矢量=极矢量

2.2 电场

首先我们已知了库仑力的公式，进而定义电场强度.

电场强度是一个平方反比力，对一个封闭曲面进行积分，根据(1.15)我们可以想见：

$$\iint \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{\Sigma} = \sum_i \frac{q_i}{\epsilon_0}$$

根据高斯定理有微分形式：

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \tag{2.1}$$

同样根据平方反比力，根据(1.16)有：

$$\int \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{l} = 0$$

这说明电场力是保守力.根据Stokes定理，有：

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = 0 \tag{2.2}$$

2.3 电流

定义：单位时间内单位面积通过的电荷量称为该点的电流密度，用$\vec{J}$表示，方向与电荷流向一致.定义式为

$$\vec{J} \equiv \rho \cdot \vec{v}$$

定义：单位时间内某处通过的电荷量称为该处的电流I.这是一个标量.定义式为

$$I \equiv \iint \vec{J} \cdot d\vec{\Sigma}$$

电荷守恒定律：

$$\nabla \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \tag{2.3}$$

导出：电荷守恒定律的意思是，电荷不会凭空产生或消失.所以对于某一区域，电荷的增加量来自于外界的流入.也即：

$$I = \frac{dq}{dt}$$

（注意这不是I的定义式.）左边为

$$I = \iiint \vec{J} \cdot d\vec{\Sigma} = \iiint \nabla \cdot \vec{J} dV$$

注意我们约定流出为正.右边为

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} \iiint \rho dV = \iiint \frac{\partial}{\partial t} \rho dV$$

得证.

沿着电场线取一个柱面，我们可以得到

$$\vec{J} dV = I d\vec{l} = \vec{v} dq$$

2.4 稳恒电流产生的磁场

定义：稳恒电流指的是处处无电荷积累，即

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} \equiv 0$$

由电荷守恒定律(2.3)可知，相当于

$$\nabla \cdot \vec{J} \equiv 0$$

也就是，电流线是闭合的，进多少出多少.

稳恒电流会产生磁场，由Biot-Savart Law给出.

Biot-Savart Law:有一小电流元$I d\vec{l}$，在距离为r处产生的磁场为：

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{l} \times \vec{e}_r}{r^2}$$

由此，类似(2.1)(2.2)的推导，我们有：

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \tag{2.4}$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} \tag{2.5}$$

在推导积分形式时，有安培环路定理：

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I$$

至此我们得到了稳恒电流下的Maxwell equations:

$$\begin{aligned}&\nabla\cdot E=\tfrac{\rho}{\varepsilon_0}\\&\nabla\times E=0\\&\nabla\cdot\vec{B}=0\\&\nabla\times\vec{B}=\mu_0\vec{J}\end{aligned}$$

其中第三个式子说明了“无磁单极子”.

3 Maxwell Equations

在非恒定场状态下，变化的磁场会产生感应电动势.这就是电磁感应.

Faraday's Law:

$$\varepsilon=-\frac{d\Phi}{dt}$$

由此可以修改(2.2)为:

$$\nabla\times\vec{E}=-\frac{d\vec{B}}{dt}\tag{3.1}$$

非稳恒状态下，$\nabla\cdot\vec{J}\neq 0$.然而如果

$$\nabla\times\vec{B}=\mu_0\vec{J}$$

则有

$$0=\nabla\cdot(\nabla\times\vec{B})=\mu_0\nabla\cdot\vec{J}$$

矛盾.因此该式必须修改.Maxwell修改的逻辑是补上一项“位移电流”J_D，使得

$$\nabla\times\vec{B}=\mu_0(\vec{J}+\vec{J_D})$$

这样只需成立，$\nabla\cdot(\vec{J}+\vec{J_D})=0$即可.而比对电荷守恒定律(2.3)，有

$$\nabla\cdot\vec{J_D}=\frac{\partial\rho}{\partial t}$$

右边代入Maxwell equations第一式(2.1)，然后同时对体积积分，最终得到

$$\vec{J_D}=\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

注意此处实际不能严格确定位移电流的表达式，因为得到的是第二类曲面积分相等，可以相差常数项.不过我们可以假定位移电流取最简单的无常数项的表达式通过实验验证.

综上所述，Maxwell equations的第四式被修改为

$$\nabla\times\vec{B}=\mu_0\vec{J}+\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\tag{3.2}$$

综合(2.1)，(3.1)，(2.4)，(3.2)，得到真空中的Maxwell equations:

$$
\begin{aligned}
&\nabla\cdot\vec{E}=\tfrac{\rho}{\varepsilon_0}\\
&\nabla\times\vec{E}=-\tfrac{\partial\vec{B}}{\partial t}\\
&\nabla\cdot\vec{B}=0\\
&\nabla\times\vec{B}=\mu_0\vec{J}+\mu_0\varepsilon_0\tfrac{\partial\vec{E}}{\partial t}
\end{aligned}
$$

值得注意的是因为我们用电荷守恒定律推出了第四式，所以第四式自然包括了电荷守恒定律.

4 能量

对于一个普遍的系统，能量守恒定律为“能量既不凭空产生，也不凭空消失”.

设有一个系统在场中，参数如下：
$\vec{f}$ =场对体积V内物质作用力密度.
$\vec{v}$ =体积内物质运动速度.
ω =场的能量密度.
$\vec{S}$ =场的能流密度（单位时间穿出单位面积的能量）
能量守恒定律：

$$\frac{\partial w}{\partial t}+\vec{f}\cdot\vec{v}=-\nabla\cdot\vec{S}$$

以上是普遍讨论.对于电磁场，电磁力的力密度为：

$$f=\rho\vec{v}\times\vec{B}+\rho\vec{E}=\vec{J}\times\vec{B}+\rho\vec{E}$$

通过代入Maxwell equations以及矢量运算，我们最终得到电磁场的能流密度和能量密度：

$$
\begin{aligned}
&\vec{S}=\tfrac{1}{\mu_0}\vec{E}\times\vec{B}\\
&w=\tfrac{\varepsilon_0}{2}E^2+\tfrac{1}{2\mu_0}B^2
\end{aligned}
$$

其中$\vec{S}$被称为坡印廷矢量（Poynting Vector）.该式子的意义是能量藏在电磁场中，而非在电荷中.

Ohm’s law:

$$\vec{J}=\sigma\vec{E}$$

此外，电磁场的动量密度（单位体积的动量）

$$\vec{g}=\varepsilon_0\mu_0\vec{S}=\varepsilon_0(\vec{E}\times\vec{B})$$

角动量密度

$$\vec{l}=\vec{r}\times\vec{g}$$

5 介质

5.1 介质中的麦克斯韦方程组

外加电场时，在电介质中有极化，出现极化电荷.

定义： 电极化强度矢量描述单位体积内的电矩矢量和，

$$\vec{P}=\frac{\Sigma\vec{p_i}}{\Delta V}=n\vec{p}$$

对于一个电介质而言，体内的极化电荷互相抵消，只有距离表面l内的极化电荷有贡献.因此可以取一个长度为l，面积为dS的体积元，求得

$$-q'=n\cdot l\cdot e\cdot d\vec{S}=\vec{P}\cdot d\vec{S}$$

最后我们有闭合面内净余极化电荷与极化强度的关系式

$$\oiint\vec{P}\cdot d\vec{S}=-\sum q' \tag{5.1}$$

微分形式为

$$\rho_p=-\nabla\cdot\vec{P} \tag{5.2}$$

同理，外加磁场时也会出现磁化电流.

定义： 磁化强度矢量描述单位体积内的分子磁矩矢量和

$$\vec{M}=\frac{\Sigma\vec{m}}{\Delta V}=n\vec{m}$$

其中$\vec{m}=IS\vec{n}$是磁矩.仿照上述做法，真正对磁化电流有贡献的是边缘一圈的磁矩.可得

$$\oint\vec{M}dl=I \tag{5.3}$$

微分形式为

$$\vec{J}_M=\nabla\times\vec{M}$$

另外，当电场变化时，极化强度也会变化，产生极化电流.

$$\vec{J}_P=\frac{\Sigma e_i\vec{v}_i}{\Delta V}=\frac{\partial}{\partial t}(\frac{\Sigma e_i\vec{x}_i}{\Delta V})=\frac{\partial\vec{P}}{\partial t}$$

极化产生的这些量在实际中难以测量，因此我们需要把Maxwell equations修改为只与自由电荷和自由电流有关的形式.真空中的Maxwell equations:

$$\begin{aligned}
&\nabla\cdot\vec{E}=\tfrac{\rho}{\varepsilon_0}\\
&\nabla\times\vec{E}=-\tfrac{\partial\vec{B}}{\partial t}\\
&\nabla\cdot\vec{B}=0\\
&\nabla\times\vec{B}=\mu_0\vec{J}+\mu_0\varepsilon_0\tfrac{\partial\vec{E}}{\partial t}
\end{aligned}$$

其中第二、三项未涉及到极化，不需要改.

第一项中，我们引入一个电位移矢量$\vec{D}=\varepsilon_0\vec{E}+\vec{P}$,修改为

$$\nabla\cdot\vec{D}=\rho_f \tag{5.4}$$

第四项中，我们引入一个磁场强度$\vec{H}=\frac{\vec{B}}{\mu_0}-\vec{M}$,修改为

$$\nabla\times\vec{H}=\vec{J}_f+\frac{\partial\vec{D}}{\partial t} \tag{5.5}$$

综上，介质中的Maxwell Equations为：

$$\begin{array}{l}\nabla\cdot\vec{D}=\rho_f\\ \nabla\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\\ \nabla\cdot\vec{B}=0\\ \nabla\times\vec{H}=\vec{J}_f+\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\end{array}$$

另外，**在各向同性、静止的理想介质中**，有

$$\begin{array}{l}\vec{D}=\varepsilon\vec{E}\\ \vec{H}=\frac{1}{\mu}\vec{B}\end{array}$$

线性介质中[1]可以修正能流密度和能量密度为

$$\begin{array}{l}\vec{S}=\frac{1}{\mu}\vec{E}\times\vec{B}=\vec{E}\times\vec{H}\\ w=\frac{1}{2}(\vec{E}\cdot\vec{D}+\vec{H}\cdot\vec{B})\end{array}$$

5.2 边界条件

两介质交界处根据Maxwell equations需要满足一些边界条件. 导出法向的边界条件需要用到一、三式.取边界面上横跨两介质、无穷薄的一块体积，做体积分，则侧面可忽略，剩下的是关于法向分量之间的关系.可得到：

$$\begin{array}{l}D_{2n}-D_{1n}=\sigma_f\\ B_{2n}=B_{1n}\end{array}$$

其中下标n代表介质1指向介质2方向的矢量分量.σ_f是边界面上自由电荷面密度.

导出切向的边界条件需要用到二、四式.取垂直于边界面平面上的一个矩形，其中法向方向无穷短，做面积分，则法向方向可忽略，剩下的是关于切向分量之间的关系.可得到：

$$\begin{array}{l}E_{2t}=E_{1t}\\ H_{2t}-H_{1t}=\alpha_f\end{array}$$

其中下标t代表切向分量，α_f代表该处的线自由电流密度.

[1]线性介质中可以简单地将ε_0,μ_0换成ε,μ.事实上第一个式子的结论也适用于非线性介质，第二个则不是.具体讨论见郭硕鸿，《电动力学（第四版）》28-29页.

此外，两介质中极化强度和磁化强度也有边界关系，只需仿照上述步骤利用(5.1)和(5.3) 即可得到

$$\sigma_P = -(\vec{P}_2 - \vec{P}_1)\cdot\vec{n}$$
$$\alpha_M = (\vec{M}_2 - \vec{M}_1)\cdot\vec{\tau}$$

其中下标p, M代表极化电荷和磁化电流.

6 静电场的求解

6.1 电势分布

在静电场中，Maxwell equations的电场部分为

$$\nabla\cdot\vec{D} = \rho$$
$$\nabla\times\vec{E} = 0$$

由于“梯度无旋”，我们可以引入一个标势φ，使得$\vec{E} = -\nabla\varphi$.我们可以由此推出

$$W_{12} = q\int\vec{E}\cdot d\vec{l} = q(\varphi_1 - \varphi_2)$$

“无旋”类似于保守力场，两点之间的做功与路径无关.只有势的差值才有物理意义.我们一般规定无穷远处为势能零点，由此有

由于有库仑定律

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\vec{e}_r$$

一旦给定电荷分布，我们就可以严格求得对应的势场分布：

$$\varphi_P = \int_P^\infty \vec{E}\cdot d\vec{l} = \int_P^\infty \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}dr = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r_P}$$

对应连续的电荷分布有:

$$\varphi_P = \int -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\rho}{r_P}dV'$$

其中，r_P为场点与原点之间的距离.

6.2 电势的边界条件

介质中关于电场的边界条件为

$$D_{2n} - D_{1n} = \sigma_f$$
$$E_{2t} = E_{1t}$$

其中第二个式子说明电势在切向方向的导数连续，而电势本身在法向方向也连续（在法向方向取无穷短的一段，做功为0，所以电势差为0），所以第二个式子可以被“电势连续”取代.将第一个式子代入$\vec{E} = -\nabla\varphi$，可以得到电势的边界条件：

$$\varphi_1 = \varphi_2$$
$$\varepsilon_2\frac{\partial\varphi_2}{\partial n} - \varepsilon_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial n} = -\sigma$$

6.3 通过电势表示能量

静电场的总作用能为

$$W = \frac{1}{2}\int_{\infty} \vec{E}\cdot\vec{D}dr = -\frac{1}{2}\int_{\infty} \nabla\varphi\cdot\vec{D}dr$$

代入矢量恒等式

$$\nabla\cdot(\varphi\vec{D}) = \varphi\nabla\cdot\vec{D} + \vec{D}\cdot\nabla\varphi$$

和Maxwell equations第一式，配合适当的边界条件，可以得到通过自由电荷分布和电势表示出来的静电场总能量：

$$W = \frac{1}{2}\int_{V} \rho\varphi dV$$

其中积分只需遍及电荷所在区域即可.注意该公式只适用于求电场的总能量，不能将$\rho\varphi$理解为能量密度（因为能量在场中）.

6.4 Laplace方程

引入标势φ的好处是方便求解电场分布.代入Maxwell equation第一式，可以得到泊松方程

$$\nabla^2\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon}$$

由唯一性定理，只需确定边值关系，通过泊松方程即可唯一确定电场.

在导体中，内部没有自由电荷分布，泊松方程化为Laplace方程

$$\nabla^2\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon}$$

若该问题有对称轴，取此轴为极轴，则此情况下Laplace方程在球坐标系下的通解为

$$\varphi(r,\theta) = \sum_{n}(a_n R^n + \frac{b_n}{R^{n+1}})P_n(\cos\theta)$$

其中$P_n(\cos\theta)$为Legendre函数，有

$$P_0(x) = 1$$
$$P_1(x) = x$$
$$P_2(x) = \tfrac{1}{2}(3x^2 - 1)$$

(待补充）

6.5 镜像法

6.6 格林函数法

6.7 电多极矩

7 静磁场

（待补充.整体思路：与电场一样，因为“散度无源”，引入磁矢势$B = \nabla \times \vec{A}$.磁矢势每个分量都满足拉普拉斯方程，于是可以类比电势求解.由于磁场只给出了磁矢势的旋度的条件，没有限定其散度，所以我们可以取库伦规范进一步限制.因为磁矢势是矢量，总比标量不方便，因此我们考虑在无自由电流的部分$\nabla \times H = 0$，这样可以引入磁标势$H = -\nabla\phi_m$，使用求电势时的方法进行求解.最后，磁矢势也可以有磁多极矩展开.）

8 平面电磁波

8.1 波动方程

在前面我们讨论了静电场与静磁场.回忆Maxwell equations:

$$\begin{array}{l}\nabla \cdot \vec{D} = \rho_f \\ \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \\ \nabla \times \vec{H} = \vec{J}_f + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\end{array}$$

静电场与静磁场的时间导数为0；在变化的电磁场中，这一项不为0.

首先讨论简单的情况：真空。真空中无电荷电流分布，且$\vec{D} = \varepsilon\vec{E}, \vec{H} = \frac{1}{\mu_0}\vec{B}$，因此Maxwell equations为

$$\begin{array}{l}\nabla \cdot \vec{E} = 0 \\ \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \\ \nabla \times \vec{B} = \mu_0\varepsilon\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\end{array}$$

为了分离变量，将第四式代入第二式，得

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$$

其中由(1.18)和第一式可知$\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{E}) - \nabla^2\vec{E} = -\nabla^2\vec{E}$，并令$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0)}}$得到

$$\nabla^2\vec{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \tag{8.1}$$

这就是真空中电场的波动方程.同理磁场的波动方程是

$$\nabla^2\vec{B} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0 \tag{8.2}$$

8.2 时谐电磁波

在介质中，由于微观结构，不同频率的电磁波在同一介质中传播的电容率和磁导率往往不同。所以后续我们只研究某种频率下的电磁波.而由于我们一般可以对任意形状的波做Fourier分解，我们也可以只讨论一定频率的正弦振动的波.其复数形式为

$$\vec{E}(\vec{x},t)=\vec{E}(\vec{x})e^{-i\omega t}$$
$$\vec{B}(\vec{x},t)=\vec{B}(\vec{x})e^{-i\omega t}$$

此时，对应线性介质，我们有$\vec{D}=\varepsilon\vec{E}$,$\vec{H}=\frac{1}{\mu}\vec{B}$.将这些代入Maxwell equations，得出

$$\nabla^2\vec{E}+k^2\vec{E}=0,k=\omega\sqrt{\mu\varepsilon} \tag{8.3}$$

(8.3)称为Helmholtz方程，是一定频率下电磁波的基本方程.需要注意的是它需要加上$\nabla\cdot\vec{E}=0$才与麦克斯韦方程组等价.

8.3 平面电磁波

(8.3)最基本的一种解是平面波，即电磁场在垂直于传播方向的平面上的场强在各点有相同的值.设传播方向为x方向，(8.3)化为

$$\frac{d^2\vec{E}}{dx^2}+k^2\vec{E}=0$$

其一个解为$\vec{E}(x,t)=\vec{E}_0e^{i(kx-\omega t)}$.$\nabla\cdot\vec{E}=0$的限制条件得出$\vec{E}_x=0$，即电场与传播方向垂直.

如果我们不选取传播方向为x方向的坐标系，而是选一个一般的坐标系，上述平面电磁波的表达式变为

$$\vec{E}(x,t)=\vec{E}_0e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)}$$

限制条件变为

$$\vec{k}\cdot\vec{E}=0$$

相应地磁场也可以求出：

$$\vec{B}=-\frac{i}{\omega}\nabla\times\vec{E}=-\frac{i}{\omega}(\nabla e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)})\times\vec{E}_0=\frac{1}{\omega}\vec{k}\times\vec{E}_0=\frac{1}{v}\vec{e}_k\times\vec{E}_0$$

其中v为相速度.可以看到平面电磁波的电场和磁场能量相等.

对于有复数表示的两个函数

$$f(t)=f_0e^{-i\omega t},g(t)=g_0e^{-i\omega t+i\phi}$$

一周期的平均值为

$$\overline{fg}=\frac{1}{2}\mathrm{Re}(f^*g)$$

由此公式计算平面电磁波的能量密度和能流密度的平均值为

$$\bar{w}=\tfrac{1}{2}\varepsilon E^2{}_0=\tfrac{1}{2\mu}B^2{}_0$$
$$\bar{S}=\tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{\varepsilon}{\mu}}E^2{}_0\vec{e}_k$$