超对称规范场论的基础和前沿探索

报告人：苏歆然

suxr5@mail2.sysu.edu.cn

2023/12/13

B站：BV1FG411e7wT

前言

目的：

- 以大二学生知识为基础，简要介绍超对称规范场论的**基本概念**
- 对于其中复杂的数学，我们在主体部分只给出**直观解释**，而希望深入了解的同学也可以参阅蓝色的幻灯片和参考文献。
- 希望大家能觉得这个报告有意思！
- 如果有错误/不严谨的地方，欢迎批评指正，谢谢！

目录

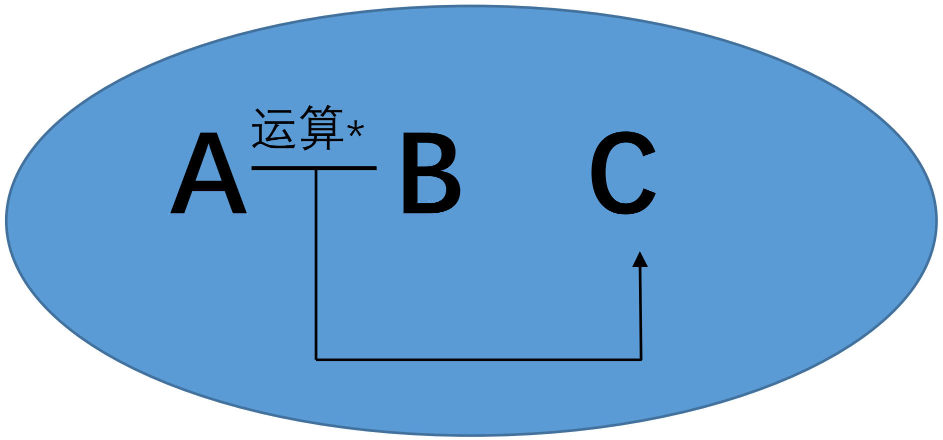
- 场论基础
  - 数学基础
    - 群（定义、同构与同态）
    - 李群（常用李群）
  - 什么是场
    - 简要介绍
    - Lorentz群与Poincare代数
    - 规范场
      - 规范变换
      - 实例（Maxwell场）
      - Yang-Mills场
- 超对称
  - 什么是超对称
  - 为什么引入超对称
  - 超对称代数
  - 现状
- 超对称规范场论
  - 前沿发展现状

场论基础

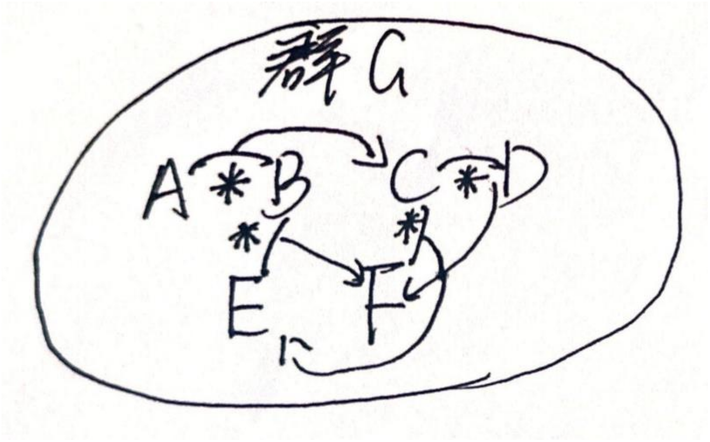
数学基础

群

- 什么是群？
  - 定义：群（group）是由一种配备二元运算的集合，其二元运算有结合律、单位元和逆元。
  - 简言之，群是集合+集合中元素之间的一种运算。该种运算满足结合律
  - 若元素A和元素B作运算*等于元素C：A*B=C，C一定在群内。

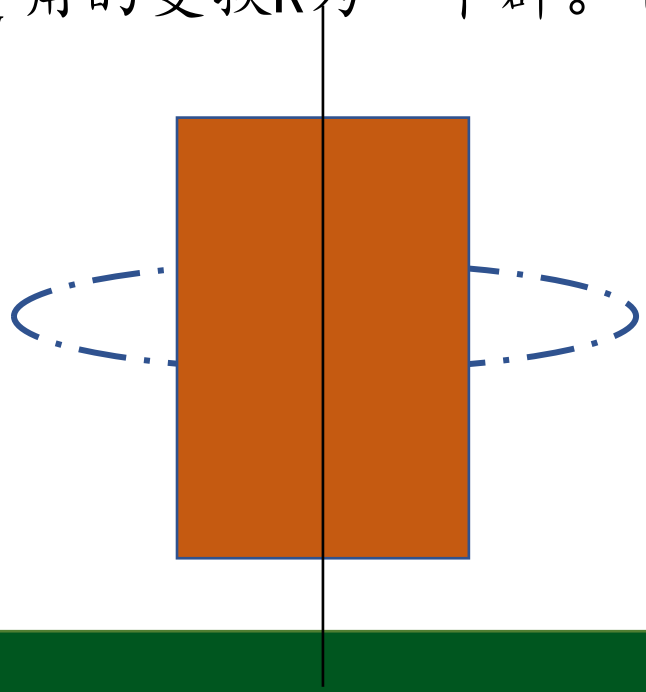


群G



群内元素通过互相做运算跳来跳去，但运算有封闭性，不会超出群。

- 交换性：
  - 满足A*B=B*A这种交换律的群，我们叫做阿贝尔群；否则，称作非阿贝尔群。
  - 整数上的加法是一种阿贝尔群：封闭、结合、可交换。
- 群的元素是抽象的元素，不一定需要是数
  - 例如，你可以定义绕空间固定轴顺时针转动$\frac{2\pi}{N}$角的变换R为一个群。它显然满足封闭、结合、可交换。
  - 很多自然界的变换（如平移、镜射）
  - 的汇总都符合群的定义。
- 群是一种描述元素之间关系的概念。

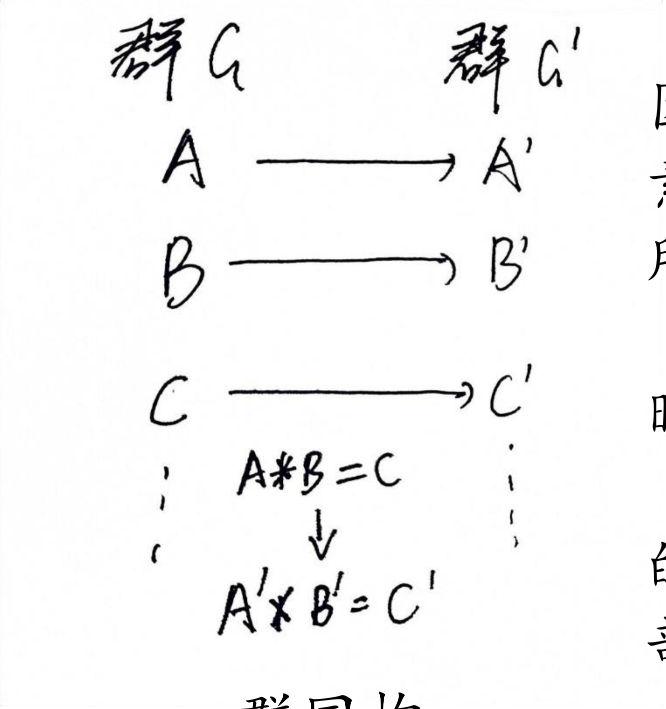


群

- 上述讲解忽略了群定义中“有逆元”“有单位元”两个条件。这两个条件实际上是必不可少的。
- 想要初步了解什么是群，可以直接查看维基百科，有比较详细的推导。

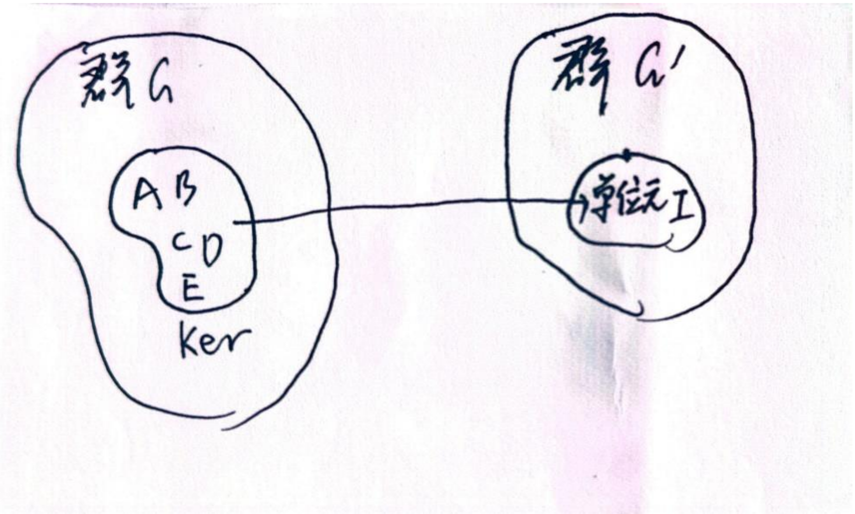
群同构与同态

- 如果有两个群G和G’，他们的元素以一种规则一一对应时，其乘积也以同一种方式对应，则称两群同构。
- 如果有两个群G和G’，他们的元素以一种规则一对多时，其乘积也以同一种方式对应，则称两群同态，记作 $G \sim G'$



群同构

因为群是一种描述元素之间关系的概念，所以：
“同构”类似于一一映射，不会丢失信息.
“同态”类似一对多的映射，意味着丢失部分信息的关系对应.



群同态

群同构与同态

- 正式定义：

在群的定义中，群元素是什么客体并不重要，重要的是它们的乘积规则，也就是它们以什么方式构成群. 如果两个群，它们的元素之间可用某种适当给定的方式一一对应起来，而且元素的乘积仍以此同一方式一一对应，那么，从群论观点看，这两个群完全相同，虽然它们描述的对象可以完全不同. 文献中常称这种对应关系对元素乘积保持不变. 具有这种对应关系的两个群称为同构 (isomorphism).

定义 若群 G' 和 G 的所有元素间都按某种规则存在一一对应关系，它们的乘积也按同一规则一一对应，则称两群同构. 用符号表示，若 R 和 $S \in G$，R' 和 $S' \in G'$，$R' \longleftrightarrow R$，$S' \longleftrightarrow S$，必有 $R'S' \longleftrightarrow RS$，则 $G' \approx G$，其中符号 "$\longleftrightarrow$" 代表一一对应，"$\approx$" 代表同构.

马中骐.物理学中的群论 [M].第2版. 北京: 科学出版社, 2006

定义 若群 G' 和 G 的所有元素间都按某种规则存在一多对应关系，即 G 中任一元素都唯一地对应 G' 中一个确定的元素，G' 中任一元素至少对应 G 中一个元素，也可以对应 G 中若干个元素，而且群元素的乘积也按同一规则一多对应，则称两群同态. 用符号表示，若 R 和 $S \in G$，R' 和 $S' \in G'$，$R' \longleftarrow R$，$S' \longleftarrow S$，必有 $R'S' \longleftarrow RS$，则 $G' \sim G$，其中符号 "$\longleftarrow$" 代表一多对应，"$\sim$" 代表同态，写在左面的群 G' 的元素一多对应于写在右面的群 G 的元素.

两个群元素间的对应关系不是唯一的. 只要在两个群元素间存在一种一多对应关系，而且这种对应关系对群元素乘积保持不变，这两个群就同态. 若 $G' \sim G$，则群 G' 只反映了群 G 的部分性质，下面定理将精确地告诉我们群 G' 反映了群 G 的哪

李群

- 定义
  - 李群是一种连续（无限）群，它的每一个元素都可以用一组独立实参数来描写。
- 举例：三维空间转动群SO(3)
  - 群内元素为所有3×3可逆实矩阵Q
  - 字母S：Special：|Q|=1
  - 字母O：正交Orthogonal：$Q^T Q = E$
  - 其实SO(3)群就是三维空间顺时针转动任意角度的操作。
  - 比如，如果你要旋转一个三维空间的矢量，可以通过乘以这个三乘三的矩阵：

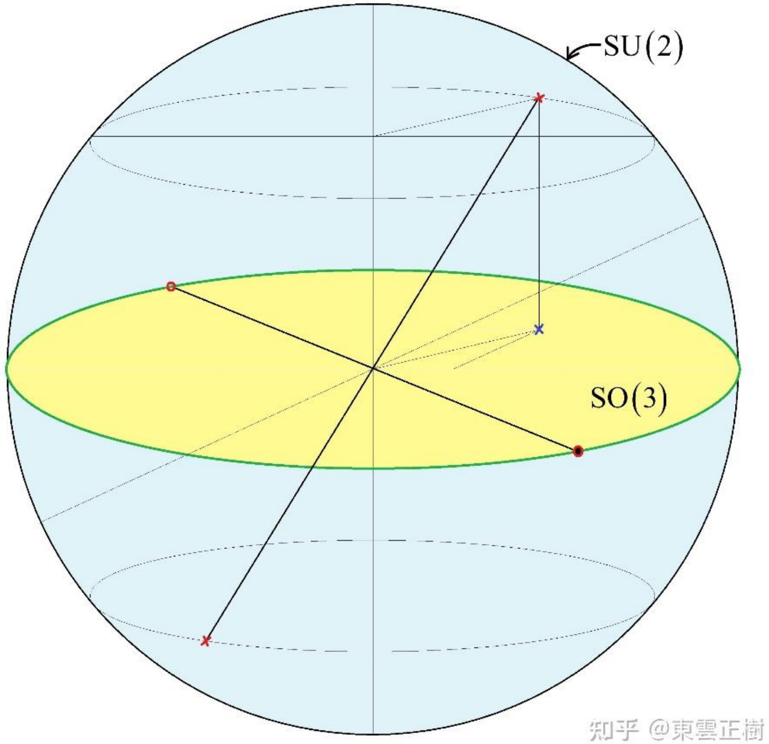
$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & -\sin\phi \\ 0 & \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}$$

李群

- 常见的李群还有：
  - 幺正群U（n）：Unitary，在复数域上满足 $U^{\dagger}U=E_{n\times n}$
  - 特别地，$U(1)=e^{i\varphi}$，也就是在复平面中单位圆上。
  - SU（2）群：行列式为1，同时幺正的二维矩阵。
- SU（2）群和SO（3）群实际上都代表了三维空间中的旋转
  - 不幸的是，他们之间的关系并不是单射。实际上它们之间为同态关系 $SU(2)\sim SO(3)$
  - 形象地说，在三维空间中SO（3）的参数转两圈（4π），对应SU（2）群才能回到原位。

SU（2）群和SO（3）群

- SU（2）叫作SO（3）的二重覆盖群。
- 理解这两个群之间的关系对于理解旋量非常重要。建议参考专业群论教材。
- 下面是知乎：[東雲正樹]的一个形象解释：
  - SU(2)群对应的流形为S^3三维超球面（见[链接]）。



SU(2)群对应的流形为S^3三维超球面，而SO(3)作为流形是一个表面对径认同（就是正转180度和反转180度对应同一个点的）的实心球.

但是我们作为三维生物想象不到三维的球面，于是我们将其降一维画在图里.

于是，二维的球面代表SU(2),而黄色的对径认同的圆盘代表SO(3).

于是，我们可以构造一种二对一的映射，使得两个红叉叉都可以到对应圆盘上同一蓝点.

对于圆周上的两个红圆圈和黑点也同理.

李代数

- 本报告没有介绍李代数，且有时可能会混淆李群与李代数
- 这也许不会造成致命后果，因为一个李群对应的李代数是唯一的（反之不然，例如su(2）和so(3)。
- 李群是一个流形，而李代数则是其切空间，也就是其生成元空间。
- 关于李代数的介绍，可以查看
  - Pfeifer, W. Te Lie Algebras su(N): An Introduction,2003.（*整体介绍李代数*）
  - Useful relations involving the generators of su(N)

场论基础

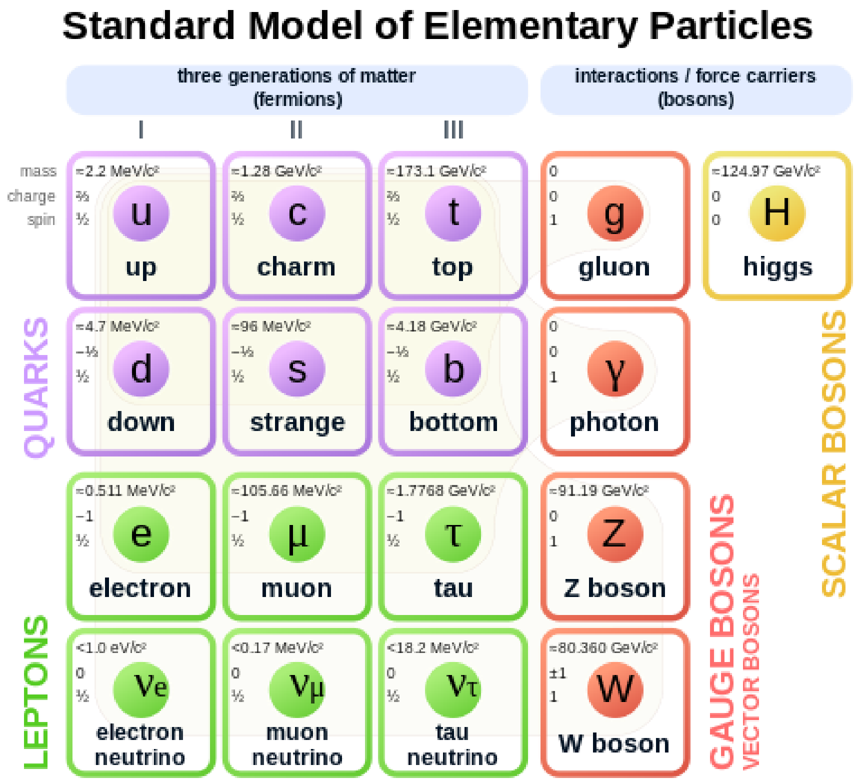
什么是场

14

简要介绍

- 量子场论是将狭义相对论与量子力学统一起来的一种理论。其中，随着时空点而变化的场 $\Phi(x,t)$ 被视作是更基本的，而粒子在场中不断产生与湮灭。
- 标准模型中，粒子的不同自旋数对应不同的场
  - 自旋为0对应标量场（希格斯粒子）
  - 自旋为1对应矢量场（规范玻色子）
  - 自旋为1/2对应旋量场（费米子）

另外，量子引力中的自旋为2的引力子被认为对应着张量场（尚未在实验中发现此种粒子）.



Lorentz群

- 在狭义相对论中，四矢量x^μ的内积$x^2=g_{\mu\nu}x^\mu x^\nu$在Lorentz变换（惯性系之间相对匀速直线运动、转动）下保持不变。
- 记变换矩阵为 $\Lambda^\mu_{\ ,\nu}$ 则保内积变为保度规条件

$$x'^2=g_{\mu\nu}x'^\mu x'^\nu=g_{\mu\nu}\Lambda^\mu{}_\alpha\Lambda^\nu{}_\beta x^\alpha x^\beta$$

$$g_{\mu\nu}\Lambda^\mu{}_\alpha\Lambda^\nu{}_\beta=g_{\alpha\beta}$$

这里的“不定”的意思是，矩阵的一共4个维度，有1个维度是时间，对应到度规中的“–”.

- 满足上式的矩阵构成不定正交群O(1,3)，称为Lorentz群，定义为：

$$O(1,3)=\{\Lambda\mid\Lambda^T\Lambda=E,g_{\mu\nu}\Lambda^\mu{}_\rho\Lambda^\nu{}_\sigma=g_{\rho\sigma},\Lambda\text{为4x4可逆实矩阵}\}$$

$$\Big\downarrow \text{也就是说}$$

$$\boxed{\Lambda^T g\Lambda=g}$$

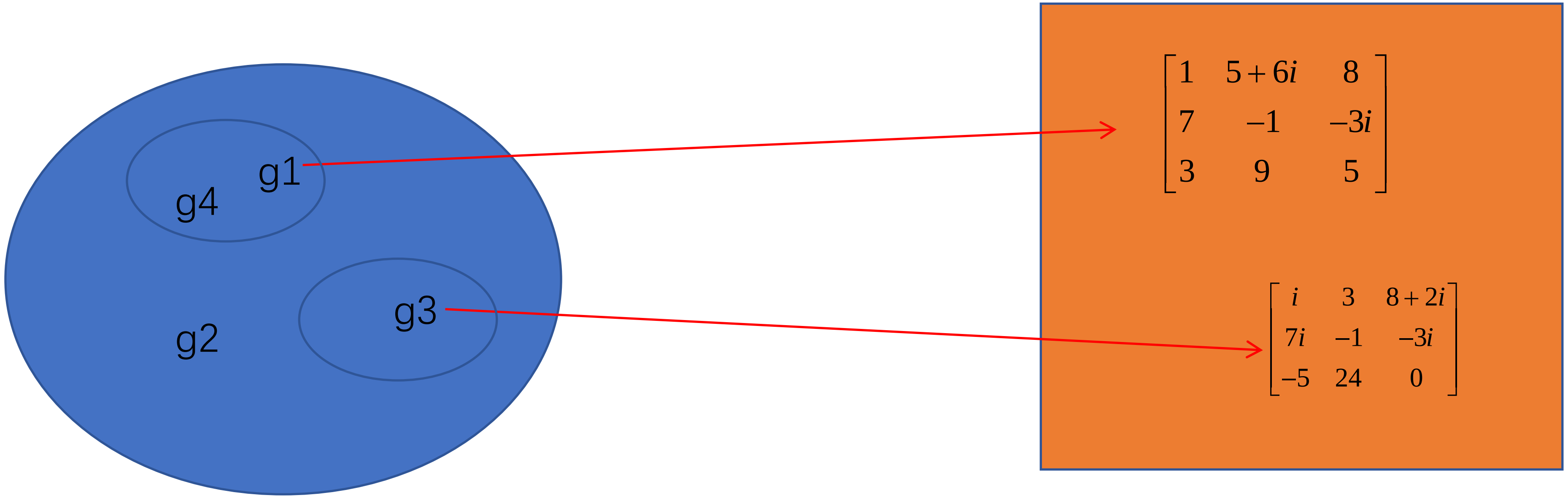
关于张量指标的说明

- 协变、逆变，张量的上下指标不会算怎么办？
- 没关系！量子场论中的指标通常只是一种用来检查的工具，你写出来的式子只要保证等式左右两边的上下指标缩并后相等就好。如图：
- 正经想学张量运算，可以参考广义相对论教材：俞允强. 广义相对论引论 [M]. 第2版 这是我见过讲的最清楚的。

$$A^{\mu\cancel{\nu}}B_{\cancel{\nu}\lambda} = A^{\mu}{}_{\cancel{\nu}}B^{\cancel{\nu}}{}_{\lambda}$$

简要介绍

- 标量场、矢量场、旋量场分别对应于Lorentz群的不同**表示**。
  - “表示”的意思是从**群G**到n维复线性空间V上所有n乘n可逆**矩阵**的**同态映射**。



群G中的一些抽象元素

n维的、实打实可以计算的矩阵

- 这个概念看起来复杂，但其实就只是从抽象的群元素到具体的矩阵的一个一对多的映射.

简要介绍

- 标量场、矢量场、旋量场分别对应于Lorentz群的不同表示。

$$\Lambda^T g \Lambda = g$$

- 标量场：$\Lambda -> 1$ （视为1维矩阵）
- 矢量场：$\Lambda^{\mu}{}_{\nu} = \begin{bmatrix} \gamma_0 & -\gamma_0\beta & & \\ -\gamma_0\beta & \gamma_0 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix}$
  - 其中，γ_0为狭义相对论中的那个γ.
- 旋量场：难以直观解释，可以类比SU(2)群（SO(3)的二重覆盖群）

Lorentz群的表示

- 实际上我们可以通过分类Lorentz群的李代数的生成元，来进一步理解。
- 洛伦兹代数为so(3,1)，我们发现其满足以下关系：

$$so(3,1) = su(2) \oplus su(2)$$

- 不同场对应这两个理想（大概是子集的意思）的不同的表示空间的维度.
- 标量对应（1，1）表示.也就是说两个su(2) 代数都取1维平庸的表示，那么整体也就是平庸的，对应标量.标量其实也是Lorentz群的一种恒等表示，也叫平庸表示.
- Weyl旋量对应（1，2）和（2，1）表示.其实对应着的是左旋和右旋，两个Weyl旋量叠加可以得到Dirac旋量.
- 矢量对应（2，2）表示.

Poincare群

- Lorentz变换为 $x^\mu=\Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$ ，对应的无穷小变换生成元为$\Lambda^\mu{}_\nu=\delta^\mu{}_\nu+\omega^\mu{}_\nu$，也即 $\delta x^\mu=\omega^\mu{}_\nu x^\nu$
- 考虑时空平移不变性，我们添加对应的时空平移参数得 $\delta x^\mu=\omega^\mu{}_\nu x^\nu+a^\mu$
- 这个变换保证的是四维矢量的线元长度不变
- 将Poincare变换写作$U(\Lambda,a)$. 我们知道，先作变换$U(\Lambda_1,a_1)$，再做变换 $U(\Lambda_2,a_2)$，我们应该得到一个新的Poincare变换。通过这个关系我们得到Poincare群的生成元变换：

$$\delta x^\mu=ia^\nu P_\nu(x^\mu)+\frac{i}{2}\omega^{\nu\lambda}M_{\nu\lambda}(x^\mu)$$

- 无穷小算符的对易关系为：

$$[P_\mu,P_\nu]=0$$

$$[P_\mu,M_{\nu\lambda}]=-i\eta_{\mu\nu}P_\lambda+i\eta_{\mu\lambda}P_\nu$$

$$[M_{\mu\nu},M_{\lambda\rho}]=-i\eta_{\nu\lambda}M_{\mu\rho}+i\eta_{\mu\lambda}M_{\nu\rho}-i\eta_{\mu\rho}M_{\nu\lambda}+i\eta_{\nu\rho}M_{\mu\lambda}$$

P_μ类似于动量算符，动量守恒对应时空平移不变性
$M_{\upsilon\lambda}$类似于自旋算符，对应的是Lorentz变换.

Poincare群

- Poincare群实际上也就是Lorentz群与时空平移群的半直积群
- 上一页的“得到一个新的Poincare变换”大致是指考虑

$$(\delta_1\delta_2-\delta_2\delta_1)x^\mu=a^\mu+\omega^\mu{}_\nu x^\nu$$

- 计算公式和具体推导来自Lambert, Neil. “Supersymmetry and Gauge Theory (7 CMMS 41).” (2011)的3.2节。
- 或者参见余钊焕.量子场论讲义的3.1.1节。

Lorentz群和Poincare群

- 总之，你可以这样理解：

- Lorentz群是内积在Lorentz变换下保持不变的群，包括惯性系之间的相对匀速直线运动、转动。

- Poincare群是在Lorentz群基础上添加了“平移”这个变换的群。

场论基础

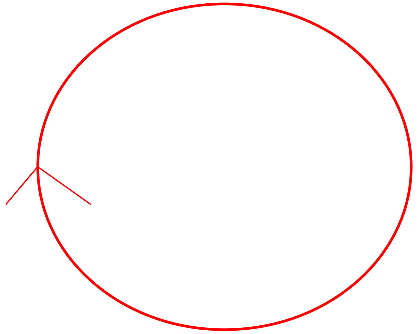
规范场

24

整体规范变换

- 当对场量 ~~作U(1)=~~ $e^{iq\theta}$这样的变换时，场的拉氏密度应保持不变。也就是说：

$$当\phi \rightarrow \phi' = e^{iq\theta}\phi, \delta \mathcal{L} = 0$$



- U（1）规范变换类似于转圈圈。只改变场的相位$q\theta$。

- 当变换参量θ是常数，与坐标无关时，我们称之为整体（global）规范变换。

- 值得一提的是，这里的q对应场粒子携带的某种荷，如电荷、重子数、轻子数、奇异数、粲数、底数、顶数等。

定域规范变换

- 当前述$\theta=\theta(x)$，为时空坐标的函数，这种变换我们叫做定域（local）规范变换.
- 在定域规范变换下，我们也可以假设场方程的拉氏密度不变。
- 无论是整体规范变换，还是定域规范变换，改变的都是场的内部相位，因此是一种内部对称性。

定域规范变换实例：Maxwell场

- 对于电子，满足自由Dirac方程：

$$(\gamma_\mu \partial_\mu + m)\psi = 0$$

- 对应的拉氏量：

$$\mathcal{L} = -\bar{\psi}(\gamma_\mu \partial_\mu + m)\psi$$

- 在定域规范变换 $\psi \to \psi' = e^{iq\theta(x)}\psi$ 下，要保持拉氏量形式不变，必须引入另一个有这样规范变换的场：

$$A_\mu(x) \to A_\mu'(x) = A_\mu(x) - \frac{1}{e}\partial_\mu \theta(x)$$

- 改写为的拉氏密度在规范变换下不变：

$$\mathcal{L}_\psi = -\bar{\psi}(\gamma_\mu(\partial_\mu - ieA_\mu) + m)\psi$$

- 这相当于电磁场和带电费米场，带电粒子之间通过交换光子发生电磁相互作用。引入的这个场A_μ叫做规范场。

Yang-Mills场

- 当 $U=e^{i\gamma(x)}$中，$\gamma(x)=\theta_a T^a$为普通实函数，则为前面的U（1）规范变换。
- 当T^a为矩阵时，其不能相互对易，对应的U为内部空间的SU(n）矩阵。
- 要使得拉氏密度在这种规范变换下不变，所引入的规范场叫做非Abel规范场，或Yang-Mills场。
- 例如QCD中，夸克的内部色空间写为 $\psi=\begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\\ \psi_3\end{pmatrix}$，需要在SU(3)规范下不变
- SU(3)的生成元满足：$[T_a,T_b]=if_{abc}T^c$

Yang-Mills场

$$\mathcal{L}_q = \overline{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi,$$

在定域规范变换下，(15) 式中的质量项 $\overline{\psi}m\psi$ 显然不变，但动能项却不是不变的，

$$\partial_\mu\psi \longrightarrow \partial_\mu(U\psi) = U(\partial_\mu + U^\dagger\partial_\mu U)\psi. \tag{17}$$

注意 $UU^\dagger = 1$. 为了使得动能项也不变，可以把普通微商 ∂_μ 推广为协变微商 D_μ，

$$D_\mu = \partial_\mu + iqA_\mu. \tag{18}$$

引入规范场 A_μ，把相加项 $U^\dagger\partial_\mu U$ 吸收到它的变换中. q 是耦合常数. 注意上式虽然与最小电磁耦合的做法相同，但在这里只是为实现规范不变性要求的一个具体方法. 这样引入的 A_μ 一般既是作用于色空间矢量 ψ 的矩阵，又是闵氏空间的矢量，是矩阵矢量场. 定域规范不变性要求

$$\begin{aligned} D_\mu\psi \longrightarrow D'_\mu\psi' &= (\partial_\mu + iqA'_\mu)U\psi = U(\partial_\mu + U^\dagger\partial_\mu U + iqU^\dagger A'_\mu U)\psi \\ &= U(\partial_\mu + iqA_\mu)\psi = UD_\mu\psi. \end{aligned} \tag{19}$$

亦即

$$D_\mu \longrightarrow D'_\mu = UD_\mu U^\dagger. \tag{20}$$

(19) 式定义了规范场的变换

$$A_\mu \longrightarrow A'_\mu = UA_\mu U^\dagger + \frac{i}{q}(\partial_\mu U)U^\dagger = UA_\mu U^\dagger - \frac{i}{q}U\partial_\mu U^\dagger, \tag{21}$$

这里用了幺正条件 $UU^\dagger = 1$. 现在，动能项也有不变性，

$$\overline{\psi}i\gamma^\mu D_\mu\psi \longrightarrow \overline{\psi}'i\gamma^\mu D'_\mu\psi' = \overline{\psi}U^\dagger i\gamma^\mu UD_\mu\psi = \overline{\psi}i\gamma^\mu D_\mu\psi. \tag{22}$$

于是，可以写出定域规范不变的夸克场拉氏密度

$$\mathcal{L}_{\psi+\psi A} = \overline{\psi}(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi = \mathcal{L}_\psi + \mathcal{L}_{\psi A}, \tag{23}$$

$$\mathcal{L}_{\psi A} = -q\overline{\psi}\gamma^\mu A_\mu\psi. \tag{24}$$

它包含了自由夸克场的 $\mathcal{L}_\psi$ 及其与规范场的耦合 $\mathcal{L}_{\psi A}$.

A_μ 的一般性质 上述讨论是普遍的，由它可以得到规范场 A_μ 的以下性质. 首先是 A_μ 的厄米性. 取 (21) 式的厄米共轭，有

$$A^\dagger_\mu \longrightarrow A'^\dagger_\mu = UA^\dagger_\mu U^\dagger - \frac{i}{q}U\partial_\mu U^\dagger. \tag{25}$$

与 (21) 式相减，给出

$$A^\dagger_\mu - A_\mu \longrightarrow A'^\dagger_\mu - A'_\mu = U(A^\dagger_\mu - A_\mu)U^\dagger. \tag{26}$$

它表明 $A^\dagger_\mu - A_\mu = 0$ 在规范变换下不变，可以取 $A^\dagger_\mu = A_\mu$.

其次是 A_μ 的无限小变换. 对无限小变换 $U = e^{i\theta_a T^a} \approx 1 + i\theta_a T^a$，有

$$A_\mu \longrightarrow A'_\mu = A_\mu + i\theta_a[T^a, A_\mu] - \frac{1}{q}\partial_\mu\theta_a T^a. \tag{27}$$

第三是 A_μ 的矢量表示 A^a_μ. 取上式的迹，由于 $\mathrm{tr}\,T^a = 0$，所以 $\mathrm{tr}A'_\mu = \mathrm{tr}A_\mu$，即 A_μ 的迹在规范变换下不变. 于是可取 $\mathrm{tr}\,A_\mu = 0$，即可表示为

$$A_\mu = A^a_\mu T_a. \tag{28}$$

对于 SU(3) 规范场，$a = 1, 2, \cdots, 8$，A^a_μ 是 8 个闵氏空间的四维矢量场.

第四是 A^a_μ 的变换. 在 (27) 式中代入 $A_\mu = A^a_\mu T_a$ 和 $[T_a, T_b] = if_{abc}T^c$，就有 A^a_μ 的无限小变换

$$\begin{aligned} A^a_\mu \longrightarrow A^{a\,\prime}_\mu &= A^a_\mu - f^{abc}\theta^b A^c_\mu - \frac{1}{q}\partial_\mu\theta^a \\ &= A^a_\mu - \frac{1}{q}D^{ab}_\mu\theta^b, \end{aligned} \tag{29}$$

$$D^{ab}_\mu = \delta^{ab}\partial_\mu + qf^{abc}A^c_\mu. \tag{30}$$

王正行.简明量子场论[M].北京大学出版社，P201-205

内部对称性

- 在前面，我们推广了变换$U = e^{i\theta_a T^a}$到SU（3）群。
- 实际上，这种变换是场内部的变换对称性（类比电磁场的相位、）。
- 标准模型中，描述三种基本相互作用的内部规范对称性为

$$SU(3)\times SU(2)\times U(1)$$

- 粗略地说，SU（3）群的对称性描述了强力，SU（2）描述了弱相互作用，U（1）描述了电磁力。

超对称

Supersymmetry(SUSY)

31

什么是超对称

- 超对称假设了玻色子和费米子之间存在某种对称性。
- 它提出，来自费米子类的每个粒子都会有一个玻色子类中的相关粒子，反之亦然，称为超对称粒子，或超伴子（superpartner）。

为什么引入超对称

- 重整化：
  - 希格斯粒子质量的重整化遇到困难。在超对称模型中，这个问题会简化一些。同时，超对称产生的super-Ward-Takahashi恒等式抵消了许多正常发散的Feymann图。
- 统一性：
  - 一种假设认为，在标准模型之外，所有的规范场在能量大约为10^{15}GeV处被统一成一个简单的规范群。
  - 观察到电磁、强耦合和弱耦合常数在低能量时并不相同，随着能量这一参数变化。但他们惊人地在大约10^{15}GeV处相遇。
  - 在标准模型中不太符合这一事实，但在超对称模型中符合。
- 暗物质：
  - 超对称模型中最轻的超伴子（LSP）被认为是暗物质的重要候选粒子。它不参与电磁相互作用。
- 弦论：
  - 弦论是一种是一种著名的量子引力理论，以统一四种相互作用力为目的超对称是超弦理论的重要组成部分。

为什么引入超对称

- 在前面，我们介绍了场论中两种重要的对称性：Poincare对称性（与时空有关）和规范对称性（和内部转动有关）。
- 它们的生成元的对易关系如下：

$$[P_\mu, P_\nu] = 0$$

$$[P_\mu, M_{\nu\lambda}] = -i\eta_{\mu\nu}P_\lambda + i\eta_{\mu\lambda}P_\nu$$

$$[M_{\mu\nu}, M_{\lambda\rho}] = -i\eta_{\nu\lambda}M_{\mu\rho} + i\eta_{\mu\lambda}M_{\nu\rho} - i\eta_{\mu\rho}M_{\nu\lambda} + i\eta_{\nu\rho}M_{\mu\lambda}$$

Poincare代数

$$[T_a, T_b] = if_{abc}T^c$$

规范对称

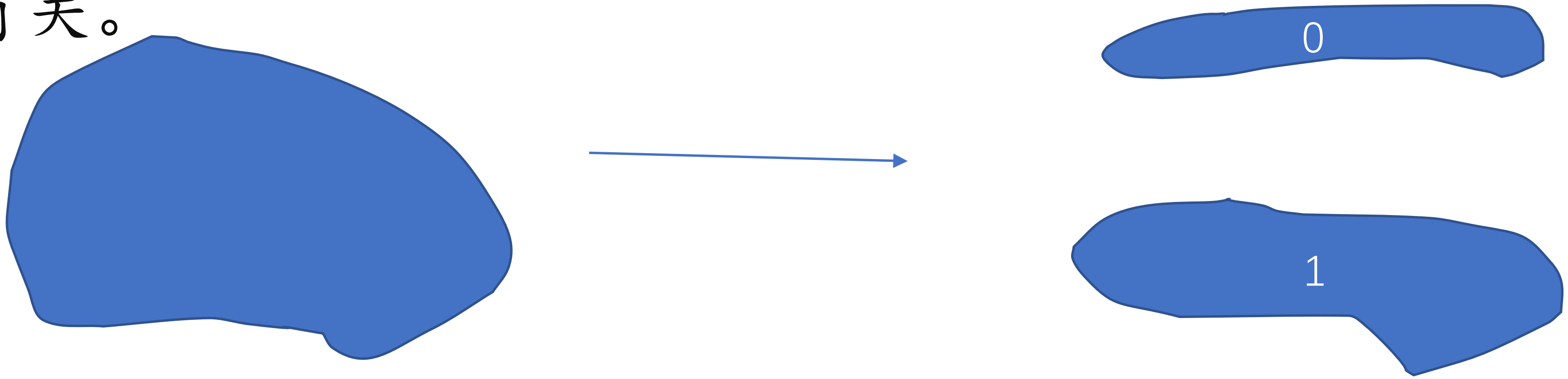
- 追求大一统理论的物理学家们想找一种更高层面的群M来统一这两个对称性，使得他们之间是非平凡的对易关系，也就是说最后整体的群为：

$$M \supset P \otimes U$$

- 其中，P代表Poincare群，U代表统一的内部转动群。

超对称代数

- 然而，十九世纪六十年代，Coleman和Mandula提出了一个No-Go定理：在任何大于2的时空维数中，相互作用的量子场论都具有一种李代数对称性，它是内部对称性和Poincare代数的直积.
- 不过，我们可以通过构造超对称代数，或叫做Z_2分级李代数，来打破这个定理的约束。
- $Z_2 = \{0,1\}$
- 其实就是把原本李群连续的流形，用Z_2分了个级。0，1可以看作和奇偶性有关。



超对称代数

- 实际上，超对称代数本身更是一个数学方面的、非常复杂的议题。
- 我们通常只关心和物理学相关的部分。

超对称

超对称代数

37

超对称代数

- 如何构造这种Z_2分级李代数？让我们回到拉氏量的层面。考虑这样一个简单模型：

$$\mathcal{L}=(\partial_\mu\phi)(\partial^\mu\phi^\dagger)+\frac{i}{4}\bar{\Psi}\gamma^\mu\overleftrightarrow{\partial}_\mu\Psi$$

- 其中：ϕ为复标量场，Ψ为Majorana旋量

- 因为要考虑玻色子和费米子之间的对称性，让我们引入一个混合它们的超对称变换：

$$\begin{cases}\delta\phi=\sqrt{2}\bar{\varepsilon}P_L\Psi\\ \delta\phi^\dagger=\sqrt{2}\bar{\varepsilon}P_R\Psi\\ \delta\Psi=-\sqrt{2}i\gamma^\mu(P_R\varepsilon\partial_\mu\phi+P_L\varepsilon\partial_\mu\phi^\dagger)\end{cases}$$

其中，

$$P_L\equiv\frac{1}{2}(1-\gamma^5),P_R\equiv\frac{1}{2}(1+\gamma^5)$$

Majorana旋量

- 由于此处用到了Majorana旋量，我们再进一步叙述一下旋量场。
- 还记得我们前面提到，Lorentz代数可分解为

$$\mathrm{so}(3,1) = \mathrm{su}(2) \oplus \mathrm{su}(2)$$

- 而Weyl旋量对应（1，2）和（2，1）表示，他们的直和 $(2,1) \oplus (1,2)$ 对应着Dirac旋量。
- 具体来说，我们使用Weyl表象，4分量的Dirac旋量可以看作两个2分量的Weyl旋量组成：

$$\Psi = \begin{pmatrix} \chi \\ \bar{\eta} \end{pmatrix}$$

Majorana旋量

- 旋量的变换方式为：$\Psi'(x')=S(\Lambda)\Psi(x)$，其中$S(\Lambda)$为Lorentz旋量表示下的生成元.
- Weyl表象下，$S(\Lambda)$可化为分块对角矩阵：

$$S(\Lambda)=\begin{pmatrix} \exp(-\frac{1}{2}\lambda_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}) & 0 \\ 0 & \exp(-\frac{1}{2}\lambda_{\mu\nu}\bar{\sigma}^{\mu\nu}) \end{pmatrix}$$

- 作用到旋量场上，我们很明显地看到，上两个分量和下两个分量独立变换。

$$\Psi=\begin{pmatrix} \chi \\ \bar{\eta} \end{pmatrix}$$

Majorana旋量

- 上面带bar的量和不带bar的量分属两个表示空间，有不同的变换方式（实际前者相当于后者的复共轭）。
- 对Majorana旋量，有

$$\chi = \eta$$

- 也就是：

$$\Psi = \begin{pmatrix} \chi \\ \bar{\chi} \end{pmatrix}$$

超对称代数

$$\mathcal{L}=(\partial_\mu\phi)(\partial^\mu\phi^\dagger)+\frac{i}{4}\bar{\Psi}\gamma^\mu\overleftrightarrow{\partial}_\mu\Psi$$

- 对这个模型做超对称变换，我们可以得到

$$\delta\mathcal{L}=0$$

- 这便可以证明其在超对称变换下不变。
- 考虑Weyl表象下分解Majorana旋量，我们得到拉氏密度等价形式：

$$L=(\partial_\mu\phi)(\partial^\mu\phi^\dagger)+\frac{i}{2}\sigma^\mu{}_{\alpha\bar{\beta}}\psi^\alpha\overleftrightarrow{\partial}_\mu\psi^{\bar{\beta}}$$

超对称代数

- 我们需要一个封闭的代数关系。也就是说，连续的两次超对称变换下，变分的对易子对各种场量的作用有相同形式。（因为这样我们才能引入超对称生成元Q）
- 目前我们可以计算得到

$$\begin{cases} [\delta_1, \delta_2]\phi = -2i\bar{\varepsilon}_2\gamma^\mu\varepsilon_1\partial_\mu\phi \\ [\delta_1, \delta_2]\Psi = -2i\bar{\varepsilon}_2\gamma^\mu\varepsilon_1\partial_\mu\Psi \boxed{+ i\gamma^\mu\bar{\varepsilon}_2\gamma_\mu\varepsilon_1\gamma^\nu\partial_\nu\Psi} \end{cases}$$

前一项是相同的时空平移操作

多出来了

超对称代数

- 还记得我们在Maxwell场中如何让拉氏量规范不变吗？引入一个辅助场！
- 改写旋量场的超对称无穷小变换为：

$$\delta\Psi = -\sqrt{2}i\gamma^\mu(P_R\varepsilon\partial_\mu\phi + P_L\varepsilon\partial_\mu\phi^\dagger) - \sqrt{2}(P_R\varepsilon\Phi + P_L\varepsilon\Phi^\dagger)$$

- 这样我们得到的超对称变换为：

$$\begin{cases} [\delta_1,\delta_2]\phi = -2i\bar{\varepsilon}_2\gamma^\mu\varepsilon_1\partial_\mu\phi \\ [\delta_1,\delta_2]\Psi = -2i\bar{\varepsilon}_2\gamma^\mu\varepsilon_1\partial_\mu\Psi \\ [\delta_1,\delta_2]\Phi = -2i\bar{\varepsilon}_2\gamma^\mu\varepsilon_1\partial_\mu\Phi \end{cases}$$

- 这时这三个式子有同样的变换方式！

超对称代数

- 我们看着这个式子，回想起了Poincare代数中的代表动量的平移生成元P：

$$P_\mu \equiv -i\partial_\mu$$

$$\begin{cases} [\delta_1,\delta_2]\phi = -2i\bar{\varepsilon}_2\gamma^\mu\varepsilon_1\partial_\mu\phi \\ [\delta_1,\delta_2]\Psi = -2i\bar{\varepsilon}_2\gamma^\mu\varepsilon_1\partial_\mu\Psi \\ [\delta_1,\delta_2]\Phi = -2i\bar{\varepsilon}_2\gamma^\mu\varepsilon_1\partial_\mu\Phi \end{cases}$$

- 由此改写超对称变分对易子：

$$[\delta_1,\delta_2] = -2i\bar{\varepsilon}_2\gamma^\mu\varepsilon_1\partial_\mu = 2\bar{\varepsilon}_2\gamma^\mu\varepsilon_1 P_\mu$$

- 现在我们已经将超对称变换和平移变换联系在一起了，但还没得到真正的生成元。

超对称代数

- 考虑这个无穷小变换写作 $\delta(field)=i(\varepsilon^A Q_A)(field)$
- 其在Weyl表象下分解为

$$\varepsilon^A=\begin{pmatrix}\eta^\alpha\\ \bar{\eta}_{\bar{\beta}}\end{pmatrix},Q_A=\begin{pmatrix}Q_\alpha\\ \bar{Q}^{\bar{\beta}}\end{pmatrix}$$

- 于是超对称变换可以写作：

$$\delta=i(\eta^\alpha Q_\alpha+\bar{\eta}_{\bar{\alpha}}\bar{Q}^{\bar{\alpha}})=i(\eta Q+\bar{\eta}\bar{Q})$$

超对称代数

- 结合前面的对易子公式，经计算可得超对称生成元之间的关系为：

$$\{Q_\alpha, Q_\beta\} = 0, \{\bar{Q}^{\bar{\alpha}}, \bar{Q}^{\bar{\beta}}\} = 0, \{Q_\alpha, \bar{Q}^{\bar{\beta}}\} = 2\sigma^{\mu\bar{\beta}}{}_{\alpha} P_\mu$$

- 超对称生成元 Q_α和$\bar{Q}_{\bar{\alpha}}$ 都为Weyl旋量，因此我们可以结合之前Weyl旋量的性质，得到完整的超Poincare代数的结构：

$$[P_\mu, P_\nu] = 0$$

$$[P_\mu, M_{\nu\lambda}] = -i\eta_{\mu\nu}P_\lambda + i\eta_{\mu\lambda}P_\nu$$

$$[M_{\mu\nu}, M_{\lambda\rho}] = -i\eta_{\nu\lambda}M_{\mu\rho} + i\eta_{\mu\lambda}M_{\nu\rho} - i\eta_{\mu\rho}M_{\nu\lambda} + i\eta_{\nu\rho}M_{\mu\lambda}$$

$$[Q_\alpha, P_\mu] = 0 = [\bar{Q}^{\bar{\alpha}}, P_\mu]$$

$$[M_{\mu\nu}, Q_\alpha] = -i(\sigma_{\mu\nu})_\alpha{}^\beta Q_\beta$$

$$[M_{\mu\nu}, \bar{Q}^{\bar{\alpha}}] = -i(\bar{\sigma}_{\mu\nu})_\alpha{}^{\bar{\beta}} Q_\beta$$

$$\{Q_\alpha, Q_\beta\} = 0, \{\bar{Q}^{\bar{\alpha}}, \bar{Q}^{\bar{\beta}}\} = 0, \{Q_\alpha, \bar{Q}^{\bar{\beta}}\} = 2\sigma^{\mu\bar{\beta}}{}_{\alpha} P_\mu, \{Q_\alpha, \bar{Q}_{\bar{\beta}}\} = 2\sigma^{\mu}{}_{\alpha\bar{\beta}} P_\mu, \{Q^\alpha, \bar{Q}^{\bar{\beta}}\} = 2\sigma^{\mu\bar{\beta}\alpha} P_\mu$$

超对称代数

- 将其称作“分级李代数”的原因是，李代数中只定义了一个李括号[]，而这里还有{}。什么时候用[]，什么时候用{}，可能需要Grassmann代数基础。

$$[P_\mu, P_\nu] = 0$$

$$[P_\mu, M_{\nu\lambda}] = -i\eta_{\mu\nu}P_\lambda + i\eta_{\mu\lambda}P_\nu$$

$$[M_{\mu\nu}, M_{\lambda\rho}] = -i\eta_{\nu\lambda}M_{\mu\rho} + i\eta_{\mu\lambda}M_{\nu\rho} - i\eta_{\mu\rho}M_{\nu\lambda} + i\eta_{\nu\rho}M_{\mu\lambda}$$

←Poincare代数

$$\{Q_\alpha, Q_\beta\} = 0, \{\bar{Q}^{\bar{\alpha}}, \bar{Q}^{\bar{\beta}}\} = 0, \{Q_\alpha, \bar{Q}^{\bar{\beta}}\} = 2\sigma^{\mu\bar{\beta}}{}_\alpha P_\mu, \{Q_\alpha, \bar{Q}_{\bar{\beta}}\} = 2\sigma^\mu{}_{\alpha\bar{\beta}} P_\mu, \{Q^\alpha, \bar{Q}^{\bar{\beta}}\} = 2\sigma^{\mu\bar{\beta}\alpha} P_\mu$$

↑超对称本身生成元之间的关系

超对称和Poincare变换混合⟶

$$[Q_\alpha, P_\mu] = 0 = [\bar{Q}^{\bar{\alpha}}, P_\mu]$$

$$[M_{\mu\nu}, Q_\alpha] = -i(\sigma_{\mu\nu})_\alpha{}^\beta Q_\beta$$

$$[M_{\mu\nu}, \bar{Q}^{\bar{\alpha}}] = -i(\bar{\sigma}_{\mu\nu})_\alpha{}^{\bar{\beta}} Q_\beta$$

超空间

上一节中, 我们已经得到了 P_μ, $J_{\mu\nu}$, Q_α 和 $\bar{Q}_{\bar{\alpha}}$ 彼此之间的对易或反对易关系, 即超 Poincaré 代数的结构. 我们知道, $P_\mu = -i\partial/\partial x_\mu$ 是时空平移的生成元, 那么是否能够找到“坐标” θ^α 和 $\bar{\theta}_{\bar{\alpha}}$ 使得

$$Q_\alpha \sim \frac{\partial}{\partial\theta^\alpha}, \quad \bar{Q}^{\bar{\alpha}} \sim \frac{\partial}{\partial\bar{\theta}_{\bar{\alpha}}} \ ? \tag{1.124}$$

由于 Q_α 和 $\bar{Q}_{\bar{\alpha}}$ 是 Grassmann 量, “坐标” θ^α 和 $\bar{\theta}_{\bar{\alpha}}$ 也应该是 Grassmann 量.

下面, 我们将引入超空间的概念, 它紧密地联系着超场, 并且能够把整个超对称理论简洁地表达出来.

现在, 我们扩充时空, 通过增加 Grassmann 坐标, 使得超空间中任意一点能够表达成

$$z^m = \left(x^\mu,\ \theta^\alpha,\ \bar{\theta}_{\bar{\alpha}}\right), \tag{1.125}$$

一共由 8 个坐标描述.

我们知道, 任意 Poincaré 变换可以表达成齐次 Lorentz 变换和时空平

此外，在超空间下，我们可以定义超场。

超对称代数

- 我们可以拓展超对称代数。如果有N个生成元Q_α^A, A=1, 2, ⋯, N，满足：

$$\{Q_\alpha{}^A, \bar{Q}_{\bar{\beta}B}\} = 2\sigma^\mu{}_{\alpha\bar{\beta}} P_\mu \delta_B^A$$

- 则N>1时，称作扩展超对称代数。
- 关于“超对称代数”的内容全部来自于超对称场论与SU(5)大统一模型，其中有详细讲解和推导。

超对称

现在发现了吗？

51

现状

- 很遗憾的是，目前尚没有证据能说明现实世界中存在超对称。
- 大型强子对撞机（LHC）是世界上最大、能量最高的粒子对撞机，由欧洲核子研究组织（CERN）建造。
- 该对撞机曾发现了Higgs粒子，但在不断提升能量层次的实验下，我们一直没有发现超对称的迹象。
- 有人认为，我们总可以认为超对称在更高的能量上“对称性自发破缺”，也就是说，超对称生活在更高的能标，只不过在我们这个低能标的时空下被打破了.所以永远都不能证伪超对称。
- 但即使这样，我们可以说超对称没有描述我们目前的这个世界，而且提高对称性自发破缺的能量会造成我们一开始支持超对称的理由不再成立。

超对称规范场论

前沿发展现状

53

前沿发展

- 各种（扩展）超对称代数N=1,2…都有学者在研究
- 基本上，我们看到的以“Super”开头的单词都和超对称有关，比如：Super-Yang Mills，Superstring theory，Supergravity……
- 弦论：最早的弦论只涉及玻色子，称为玻色弦理论。后来为了使模型包含费米子，引入了超对称性，称为超弦理论（superstring theory）
- 包括最多的超对称生成元的理论为N=32（更多的超对称生成元会导致出现自旋大于2的粒子），这时时空维度为11维，是M理论的维度。

前沿发展

- d ： 0 1 2 3 4 5 6

3d ABJM ⟷ AdS_4

SQM → 2

gravity → 3

Z(b->?)~S_{BH}

Top string

2d N= (0,4) (2,2) (0,2)

Calabi Yau

SYM → gravity

Bethe anzatz

参考资料

56

参考资料

- 关于超对称规范场论
  - 本报告全文参考Lambert, Neil. “Supersymmetry and Gauge Theory (7 CMMS 41).” (2011).
  - 超对称场论与SU(5) 大统一模型
  - Michio Kaku.Introduction to Superstrings and M-Theory (Second Edition)(*超对称代数的介绍来自于这本的Appendix 4)*

参考资料

- 关于群论
  - 教材： 马中骐. 物理学中的群论 [M]. 第2版. 北京：科学出版社, 2006
  - 网页资料：知乎：東雲正樹-群论（Group Theory）终极速成 / 物理系零基础火箭级 notes
- 关于李代数
  - Pfeifer, W. Te Lie Algebras su(N): An Introduction,2003. *（整体介绍李代数）*
  - Useful relations involving the generators of su(N)
- 关于流形
  - 梁灿彬，周彬. 微分几何入门与广义相对论[M]. 第2版. 北京：科学出版社, 2006

参考资料

- 关于量子场论
  - 教材：
    1. 王正行. 简明量子场论[M]. 北京大学出版社.
    2. 余钊焕.量子场论讲义. https://yzhxxzxy.github.io/cn/teaching.html
  - 资料：
    - arXiv:1702.08246v3（*整理了量子场论中各种常用公式*）

谢谢观看！

60