# 第四章

# 一阶逻辑基本概念

# 目录

Catalogue

# 4.1 一阶逻辑命题符号化

苏格拉底三段论：

凡是人都要死的.

苏格拉底是人.

所以苏格拉底是要死的.

在命题逻辑中，用$p$、$q$、$r$表示以上3个命题

上述推理可表成 $(p\wedge q)\rightarrow r$

说明：1）上式不是重言式，不能由它判断推理的正确性；

2）命题逻辑不能很好的描述“凡”；

3）为了克服命题逻辑的局限性，引入一阶逻辑。

## 一阶逻辑命题符号化的3个基本要素

① 个体词

② 谓词

③ 量词

# 4.1 一阶逻辑命题符号化

① 个体词: 所研究对象中可以独立存在的具体或抽象的客体。

个体常项：具体或特定的客体，常用$a, b, c$表示

个体变项：抽象或泛指的客体，常用$x, y, z$表示

个体域: 个体变项的取值范围

有限个体域，如$\{a, b, c\}$, $\{1, 2\}$

无限个体域，如自然数集合N, 实数集合R, …

全总个体域：宇宙间一切事物组成

说明：本书中不指明所采用的的个体域，都是使用全总个体域。

② **谓词**: 表示个体词性质或个体词之间相互关系的词。

**谓词常项**：具体性质或者关系，$F(a)$：$a$是人

**谓词变项**：抽象或泛指的性质或者关系， $F(x)$：$x$具有性质$F$

说明：无论是谓词常项还是谓词变项都用大写字母$F,G,H$表示。

**0元谓词**: 不含个体变项的谓词, 即命题常项或命题变项 。

**一元谓词**: 含有1个个体变项，表示这个个体变项的性质。

**多元谓词($n$元谓词, $n\geq2$)**: 含有$n$个个体变项，表示$n$个个体变项的关系。

③ 量词: 表示个体常项或变项之间数量关系的词。

全称量词$\forall$: 表示任意的, 所有的, 一切的等

如 $\forall x$ 表示对个体域中所有的$x$

存在量词$\exists$: 表示存在, 有的, 至少有一个等

如 $\exists x$ 表示在个体域中存在$x$

**例 4.2** 将个体域分别限制为(a)和(b)条件时，将下面命题符号化。

凡人都呼吸。

(a)个体域$D_1$为人类集合，

(b)个体域$D_2$为全总个体域。

解：(a)$F(x)$：$x$呼吸；$\forall xF(x)$

(b)$F(x)$：$x$呼吸，$M(x)$：$x$是人；$\forall x(M(x)\rightarrow F(x))$

说明：1）在不同个体域内，同一个命题的符号化形式可能不一样；

2）为了将目标客体与其他客体区别出来，引入**特性谓词**。

## 4.1 一阶逻辑命题符号化

**练习** 用命题逻辑和0元谓词将命题符号化

(1) 墨西哥位于南美洲

(2) $\sqrt{2}$ 是无理数仅当$\sqrt{3}$ 是有理数

(3) 如果$2>3$，则$3<4$

要求：先将它们在命题逻辑中符号化，再在一阶逻辑中符号化。

(1)在**命题**逻辑中, 设 $p$: 墨西哥位于南美洲
符号化为 $p$；
在**一阶**逻辑中, 设$a$：墨西哥，$F(x)$：$x$位于南美洲,
符号化为$F(a)$.

# 4.1 一阶逻辑命题符号化

(2)$\sqrt{2}$ 是无理数仅当 $\sqrt{3}$是有理数

在命题逻辑中，设 $p$:$\sqrt{2}$ 是无理数，$q$: $\sqrt{3}$ 是有理数.
符号化为 $p \to q$

在一阶逻辑中，设$F(a)$: $a$是无理数, $G(b)$: $b$是有理数
符号化为 $F(\sqrt{2}) \to G(\sqrt{3})$

(3) 如果2>3，则3<4

在命题逻辑中，设 $p$：2>3，$q$：3<4.
符号化为 $p \to q$
在一阶逻辑中，设 $F(a,b)$：$a>b$，$G(b,c)$：$b<c$,
符号化为 $F(2,3) \to G(3,4)$

例4.3 在个体域限制为（a）和（b）条件时，将下列命题符号化，并给出它们的真值。

（1）对于任意的$x$，均有$x^2$-3$x$+2=($x$-1)($x$-2).

（2）存在$x$，使得$x$+5=3.

其中，（a）个体域$D_1$=N（自然数集）

（b）个体域$D_2$=R（实数集）

解：（1） $F(x)$：$x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$， $\forall xF(x)$

（a）真　　　　（b）真

（2）$G(x)$：$x+5=3$，$\exists xG(x)$

（a）真　　　　（b）假

说明：1）在不同个体域内，同一个命题的符号化形式可能不同，也可能相同；

2）同一个命题，在不同个体域中的真值也可能不同。

例4.5 将下列命题符号化。

（1）兔子比乌龟跑得快.

（2）有的兔子比所有的乌龟跑得快.

（3）并不是所有的兔子都比乌龟跑得快.

解： $F(x)$：$x$是兔子

$G(y)$：$y$是乌龟

$H(x,y)$：$x$比$y$跑得快

（1） $\forall x\,\forall y(F(x)\land G(y)\rightarrow H(x,y))$

（2） $\exists x\,(F(x)\land\forall y(G(y)\rightarrow H(x,y)))$

（3） $\neg\,\forall x\,\forall y(F(x)\land G(y)\rightarrow H(x,y))$

# 4.1 一阶逻辑命题符号化

对于含$n$元谓词的命题，符号化时应注意以下几点：

1）命题中表示性质和关系的谓词，分别符号化为1元谓词与$n$（$n\geq 2$）元谓词；

2）根据命题的实际意义，选用全称量词或存在量词；

3）一般来说，当多个量词出现时，它们的顺序不能随意调换；

4）命题的符号化形式不唯一。

## Table1 量词

| 描述 | 真 | 假 |
| --- | --- | --- |
| $\forall x P(x)$ | 对于所有的$x$，$P(x)$都为真。 | 至少存在一个$x$，使得$P(x)$为假。 |
| $\exists x P(x)$ | 至少存在一个$x$，使得$P(x)$为真。 | 对于所有的$x$，$P(x)$都为假。 |

### Table2两个变量的量词

| 描述 | 真 | 假 |
|---|---|---|
| $\forall x \forall y P(x,y)$<br>$\forall y \forall x P(x,y)$ | 对于任意一组$x$和$y$，$P(x,y)$为真 | 存在一组$x$和$y$，使得$P(x,y)$为假 |
| $\forall x \exists y P(x,y)$ | 对于任意$x$，存在$y$，使得$P(x,y)$为真 | 存在$x$，对于任意$y$，$P(x,y)$为假 |
| $\exists x \forall y P(x,y)$ | 存在$x$，对于任意$y$，$P(x,y)$为真 | 对于任意$x$，存在$y$，使得$P(x,y)$为假 |
| $\exists x \exists y P(x,y)$<br>$\exists y \exists x P(x,y)$ | 存在一组$x$和$y$，使得$P(x,y)$为真 | 对于任意一组$x$和$y$，$P(x,y)$为假 |

# 作业

习题4（P70）

**5**

# 目录

Catalogue

## 4.2 一阶逻辑公式及其解释

与在命题逻辑中一样，为了在一阶逻辑中进行演算和推理，引入一阶语言的概念。

**定义** 设$L$是一个非逻辑符号集合，由$L$生成的一阶语言$\mathscr{L}$的**字母表**包含下述符号：

**非逻辑符号**

(1) 个体常项：$a, b, c, \ldots, a_i, b_i, c_i, \ldots, i \geq 1$

(2) 函数符号：$f, g, h, \ldots, f_i, g_i, h_i, \ldots, i \geq 1$

(3) 谓词符号：$F, G, H, \ldots, F_i, G_i, H_i, \ldots, i \geq 1$

**逻辑符号**

(4) 个体变项：$x, y, z, \ldots, x_i, y_i, z_i, \ldots, i \geq 1$

(5) 量词符号：$\forall, \exists$

(6) 联结词符号：$\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$

(7) 括号与逗号：(, ), ,

## 4.2 一阶逻辑公式及其解释

定义 $\mathscr{L}$的项的定义如下：

(1) 个体常项符号和个体变项符号是项；

(2) 若$\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$是任意的$n$元函数符号，

$t_1,t_2,\ldots,t_n$是任意的$n$个项，则$\varphi(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ 是项；

(3) 所有的项都是有限次使用 (1), (2) 得到的.

说明：个体常项、变项是项，由它们构成的$n$元函数和复合函数还是项。

# 4.2 一阶逻辑公式及其解释

**定义** 设$R(x_1, x_2, \ldots, x_n)$是$\mathscr{L}$的$n$元**谓词**，$t_1, t_2, \ldots, t_n$是$\mathscr{L}$的$n$个项，则称$R(t_1, t_2, \ldots, t_n)$是$\mathscr{L}$的**原子公式**.

**定义** $\mathscr{L}$的合式公式定义如下：

(1) 原子公式是合式公式；

(2) 若$A$是合式公式，则 $(\neg A)$也是合式公式；

(3) 若$A$, $B$是合式公式，则$(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \rightarrow B)$, $(A \leftrightarrow B)$也是合式公式；

(4) 若$A$是合式公式，则$\forall xA$, $\exists xA$也是合式公式；

(5) 只有有限次地应用(1)~(4)形成的符号串是合式公式；

说明：$\mathscr{L}$的合式公式也称作谓词公式，简称为公式。

# 4.2 一阶逻辑公式及其解释

**定义** 在公式$\forall xA$和$\exists xA$中，称$x$为**指导变元**，$A$为相应量词的**辖域**. 在$\forall x$和$\exists x$的辖域中，$x$的所有出现都称为约束出现，$A$中不是约束出现的其他变项均称为是自由出现.

例如, 在公式 $\forall x(F(x,y)\rightarrow G(x,z))$ 中,

$A=(F(x,y)\rightarrow G(x,z))$为$\forall x$的辖域,

$x$为指导变元, $A$中$x$的两次出现均为约束出现,

$y$与$z$均为自由出现.

**闭式**: 不含自由出现的个体变项的公式.

## 4.2 一阶逻辑公式及其解释

给定闭式 $A:\forall x(F(x)\to G(x))$

取个体域 N, $F(x)$: $x>2$, $G(x)$: $x>1$

代入得 $A:\forall x(x>2\to x>1)$　　真命题

给定非闭式 $B:\forall xF(x,y)$

取个体域 N, $F(x,y)$: $x\geq y$

代入得 $B:\forall x(x\geq y)$　　不是命题

令 $y=1$, $B:\forall x(x\geq 1)$　　假命题

说明：对公式中个体域及个体常项符号、函数符号、谓词符号的指定称作解释，指定自由出现的个体变项的值称作赋值。

# 4.2 一阶逻辑公式及其解释

定义 设 $\mathscr{L}$是由$L$生成的一阶语言，$\mathscr{L}$ **解释$I$**由下面4部分组成：

1) **非空个体域$D_I$**；

2) 对每一个**个体常项**$a \in L$，有一个$\bar{a} \in D_I$，称 $\bar{a}$ 为$a$ 在$I$中的解释；

3) 对每一个$n$元**函数符号** $f \in L$，有一个$D_I$上的函数$\bar{f}$，称 $\bar{f}$ 为$f$ 在 $I$ 中的解释；

4) 对每一个$n$元**谓词符号** $F$ 指定一个$D_I$上的谓词 $\bar{F}$，称 $\bar{F}$ 为$f$ 在 $I$ 中的解释。

**赋值$\sigma$**：对每一个个体变项$x$指定$D_I$中的一个值$\sigma(x)$。

# 4.2 一阶逻辑公式及其解释

设公式 $A$，在解释 $I$ 和赋值 $\sigma$ 下

1）取个体域 $D_I$,

2）若 $A$ 中含个体常项符号 $a$ 就将它替换成 $\bar{a}$，

3）若 $A$ 中含函数符号 $f$ 就将它替换成 $\bar{f}$，

4）若 $A$ 中含谓词符号 $F$ 就将它替换成 $\bar{F}$，

5）若 $A$ 中含自由出现的个体变项 $x$ 就将它替换成 $\sigma(x)$，

把这样所得到的公式记作 $A'$。

称 $A'$ 为 $A$ 在 $I$ 和 $\sigma$ 下的解释。

**例4.8** 给定解释 $I$ 和赋值$\sigma$如下:

(*a*) 个体域 $D$=N

(*b*) $\bar{a}=0$

(*c*) $\bar{f}(x,y)=x+y, \bar{g}(x,y)=xy$

(*d*) 谓词 $\bar{F}(x,y): x=y$

(*e*) 赋值$\sigma$: $\sigma(x)=1, \sigma(y)=2, \sigma(z)=3$.

说明下列公式在 $I$ 与$\sigma$下的涵义,并讨论真值

(1) $F(f(x,y),g(x,y))$

(8) $\forall x\forall y\exists zF(f(x,y),z)$

解：（1）$F(f(x,y),g(x,y))$

(*a*) 个体域 $D$=N

(*b*) $\bar{a}=0$

(*c*) $\bar{f}(x,y)=x+y, \bar{g}(x,y)=xy$

$$F(x+y,xy)$$

(*d*) 谓词 $\bar{F}(x,y): x=y$

$$x+y=xy$$

(*e*) 赋值$\sigma$：$\sigma(x)$=1, $\sigma(y)$=2, $\sigma(z)$=3.

$$\sigma(x)+\sigma(y)=\sigma(x)\sigma(y)$$

$$1+2=1*2$$

假命题

# 4.2 一阶逻辑公式及其解释

解：（8）$\forall x \forall y \exists z F(f(x,y),z)$

(*a*) 个体域 $D$=N

(*b*) $\bar{a} = 0$

(*c*) $\bar{f}(x, y) = x + y, \bar{g}(x, y) = xy$

$$\forall x \forall y \exists z\, F(x+y,z)$$

(*d*) 谓词 $\bar{F}(x, y) : x = y$

$$\forall x \forall y \exists z\, x+y=z$$

(*e*) 赋值$\sigma$：$\sigma(x)=1, \sigma(y)=2, \sigma(z)=3.$

$$\forall x \forall y \exists z\, x+y=z$$

真命题

测验4 给定解释 $I$ 如下:

(*a*) 个体域 $D$=N

(*b*) $\bar{a}=2$

(c) $\bar{f}(x,y)=x+y$, $\bar{g}(x,y)=xy$

(*d*) 谓词 $\bar{F}(x,y): x=y$

(*e*) 赋值$\sigma$: $\sigma(x)=0$, $\sigma(y)=1$, $\sigma(z)=2$.

说明下列公式在 $I$ 与$\sigma$下的涵义,并讨论真值

(1) $\forall xF(g(x,a),y)$

(2) $\forall xF(f(x,a),y)\rightarrow\forall yF(x,f(y,a))$

(3) $\exists x\forall y\forall zF(f(y,z),x)$

# 4.2 一阶逻辑公式及其解释

设$A$为一公式，则称$A$为

永真式(逻辑有效式):在任何解释和赋值下为真命题。

矛盾式(永假式):在任何解释和赋值下为假命题。

可满足式：存在成真的解释和赋值。

说明：1）永真式为可满足式，但反之不真;

2）谓词公式的可满足性（永真性,永假性)是不可判定的。

**定义** 设$A_0$是含命题变项$p_1, p_2, \ldots, p_n$的命题公式，$A_1, A_2, \ldots, A_n$是$n$个谓词公式，用$A_i$处处代替$A_0$中的$p_i$ $(1 \le i \le n)$，所得公式$A$称为$A_0$的**代换实例**.

如 $F(x) \to G(x)$, $\forall x F(x) \to \exists y G(y)$是$p \to q$的代换实例

**定理** 重言式的代换实例都是永真式，矛盾式的代换实例都是矛盾式.

例 4.9 判断下列公式的类型

(1) $\forall x(F(x)\to G(x))$

(2) $\exists x(F(x)\wedge G(x,y))$

(3) $\forall xF(x)\to(\exists x\exists yG(x,y)\to\forall xF(x))$

(4) $\neg(\forall xF(x)\to\exists yG(y))\wedge\exists yG(y)$

解：(1)取解释$I_1$：个体域为实数集合R，$F(x)$：$x$是整数，$G(x)$：x是有理数.在$I_1$下为真；

取解释$I_2$：个体域为实数集合R，$F(x)$：$x$是无理数，$G(x)$：$x$能表示为分数.在$I_2$下为假；

故为非永真式的可满足式。

解：(2) $\exists x(F(x)\wedge G(x,y))$

取解释$I_1$：个体域为实数集合R，$F(x)$：$x$是自然数，

$G(x,y)$：$x=y$；

赋值$\sigma_1(y)=1$

赋值$\sigma_2(y)=-1$

在解释$I_1$和赋值$\sigma_1(y)=1$下为真命题

在解释$I_1$和赋值$\sigma_2(y)=-1$下为假命题

故为非永真式的可满足式。

解：(3) $\forall xF(x)\rightarrow(\exists x\exists yG(x,y)\rightarrow\forall xF(x))$
是$p\rightarrow(q\rightarrow p)$的代换实例，而该命题公式为重言式
故原式为永真式

(4) $\neg(\forall xF(x)\rightarrow\exists yG(y))\wedge\exists yG(y)$
是 $\neg(p\rightarrow q)\wedge q$的代换实例，而该命题公式为矛盾式
故原式为矛盾式

# 作业

习题4（P70）

**9(1,2)**