第八章

函数

目录

Catalogue

PART 01

函数的定义与性质

PART 02

函数的复合与反函数

8.1 函数的定义与性质

- 函数的定义
  - 函数定义
  - 从A到B的函数
  - 函数的像
- 函数的性质
  - 函数的单射、满射、双射性
  - 构造双射函数

8.1 函数的定义与性质

定义8.1 设 F 为二元关系, 若 $\forall x \in \mathrm{dom}F$ 都存在唯一的$y \in \mathrm{ran}F$ 使 xFy 成立, 则称 F 为**函数**.
对于函数F, 如果有 xFy, 则记作 $y=F(x)$, 并称 y 为 F 在 x 的**值**.

例 $F_1=\{<x_1,y_1>,<x_2,y_2>,<x_3,y_2>\}$， $F_2=\{<x_1,y_1>,<x_1,y_2>\}$
判断F_1和F_2是不是函数

F_1是函数, F_2不是函数

定义8.2 设F, G为函数, 则

$$F = G \Leftrightarrow F \subseteq G \wedge G \subseteq F$$

如果两个函数 F 和 G 相等, 一定满足下面两个条件:

(1) $\mathrm{dom}F = \mathrm{dom}G$

(2) $\forall x \in \mathrm{dom}F = \mathrm{dom}G$ 都有 $F(x) = G(x)$

例 函数$F(x)=(x^2-1)/(x+1)$, $G(x)=x-1$，判断两个函数是否相等

不相等, 因为 $\mathrm{dom}F \subset \mathrm{dom}G$.

定义8.3 设A, B为集合, 如果f为函数，且

$$\mathrm{dom}f = A$$

$$\mathrm{ran}f \subseteq B,$$

则称f为**从A到B的函数**, 记作 $f: A \to B$.

例

$f: N \to N$, $f(x)=2x$ 是从 N 到 N 的函数

$g: N \to N$, $g(x)=2$也是从 N 到 N 的函数

定义8.4 所有从 A 到 B 的函数的集合记作 B^A, 读作"B上A", 符号化表示为:

$$B^A=\{ f \mid f\colon A\to B \}.$$

例8.2 设 $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{a, b\}$, 求B^A.

解: $\mathrm{dom}f_i = A$, $\mathrm{ran}f_i \subseteq B$, $B^A = \{f_0, f_1, \ldots , f_7\}$, 其中

$f_0=\{<1,a>,<2,a>,<3,a>\}$, $f_1=\{<1,a>,<2,a>,<3,b>\}$

$f_2=\{<1,a>,<2,b>,<3,a>\}$, $f_3=\{<1,a>,<2,b>,<3,b>\}$

$f_4=\{<1,b>,<2,a>,<3,a>\}$, $f_5=\{<1,b>,<2,a>,<3,b>\}$

$f_6=\{<1,b>,<2,b>,<3,a>\}$, $f_7=\{<1,b>,<2,b>,<3,b>\}$

定义8.4 所有从 A 到 B 的函数的集合记作 B^A，读作"B上A"，符号化表示为：

$$B^A=\{ f \mid f: A\to B \}.$$

计数

1）$|A|=m$, $|B|=n$, 且$m, n>0$，$|B^A|=n^m$.

2）$A=\varnothing$, 则 $B^A=B^{\varnothing}=\{\varnothing\}$.

3）$A\neq\varnothing$且$B=\varnothing$, 则 $B^A=\varnothing^A=\varnothing$.

定义8.5 设函数 f: $A \to B$, $A_1 \subseteq A$, $B_1 \subseteq B$.

1）令 $f(A_1) = \{ f(x) \mid x \in A_1 \}$，则称 $f(A_1)$为A_1在f下的像；当$A_1=A$时称 $f(A)$为函数的像.

2）令 $f^{-1}(B_1) = \{x \mid x \in A \wedge f(x) \in B_1 \}$,称 $f^{-1}(B_1)$为B_1在f下的完全原像.

说明：函数值 $f(x) \in B$, 而像 $f(A_1) \subseteq B$.

例8.3 设 f: $N \to N$, 且 $f(x) = \begin{cases} x/2 & 若x为偶数 \\ x+1 & 若x为奇数 \end{cases}$

令$A=\{0,1\}$，$B=\{2\}$，求出 $f(A)$和$f^{-1}(B)$.

解：$f(A) = f(\{0,1\}) = \{ f(0), f(1) \} = \{0, 2\}$, $f^{-1}(B) = \{1, 4\}$.

定义8.6(函数的性质) 设 f: $A \to B$,

1）若 $\mathrm{ran}f = B$, 则称 f: $A \to B$ 是**满射**的.

2）若 $\forall y \in \mathrm{ran}f$ 都存在**唯一**的 $x \in A$ 使得 $f(x)=y$, 则称 f: $A \to B$ 是**单射**的.

3）若 f: $A \to B$ 既是**满射**又是**单射**的, 则称 f: $A \to B$ 是**双射**的.

说明:

1）f 满射意味着：$\forall y \in B$, 都存在 $x \in A$ 使得 $f(x) = y$.

2）f 单射意味着：$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

例8.4 判断下面函数是否为单射, 满射, 双射的, 为什么?

(1) f: R→R, $f(x) = -x^2+2x-1$

f: R→R, $f(x)=-x^2+2x-1=-(x+1)^2 \le 0$

在x=1取得极大值0. 既不单射也不满射.

(2) f: Z^+→R, $f(x) = \ln x$, Z^+为正整数集

f: Z^+→R, $f(x)=\ln x$

单调上升, 是单射. 但不满射, ran$f$={ln1, ln2, …}.

(3) f: R→Z, $f(x) = \lfloor x \rfloor$

f: R→Z, $f(x)=\lfloor x \rfloor$

满射, 但不单射, 例如 $f(1.5)=f(1.2)=1$.

例8.4 判断下面函数是否为单射, 满射, 双射的, 为什么?

(4) f: R→R, $f(x) = 2x+1$

f: R→R, $f(x)=2x+1$

满射、单射、双射, 因为它是单调的并且ran$f$=R.

(5) f: R^+→R^+, $f(x)=(x^2+1)/x$, 其中R^+为正实数集.

f: R^+→R^+, $f(x)=(x^2+1)/x$

有极小值$f(1)=2$. 该函数既不单射也不满射

例8.6(1) $A=P(\{1,2,3\})$，$B=\{0,1\}^{\{1,2,3\}}$， 构造双射函数$f:A\to B$.

解 $A=\{\varnothing,\{1\},\{2\},\{3\},\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},\{1,2,3\}\}$.

$B=\{f_0, f_1, \ldots, f_7\}$, 其中

$f_0=\{<1,0>,<2,0>,<3,0>\}$， $f_1=\{<1,0>,<2,0>,<3,1>\}$,

$f_2=\{<1,0>,<2,1>,<3,0>\}$， $f_3=\{<1,0>,<2,1>,<3,1>\}$,

$f_4=\{<1,1>,<2,0>,<3,0>\}$， $f_5=\{<1,1>,<2,0>,<3,1>\}$,

$f_6=\{<1,1>,<2,1>,<3,0>\}$， $f_7=\{<1,1>,<2,1>,<3,1>\}$.

令 f: $A\to B$,

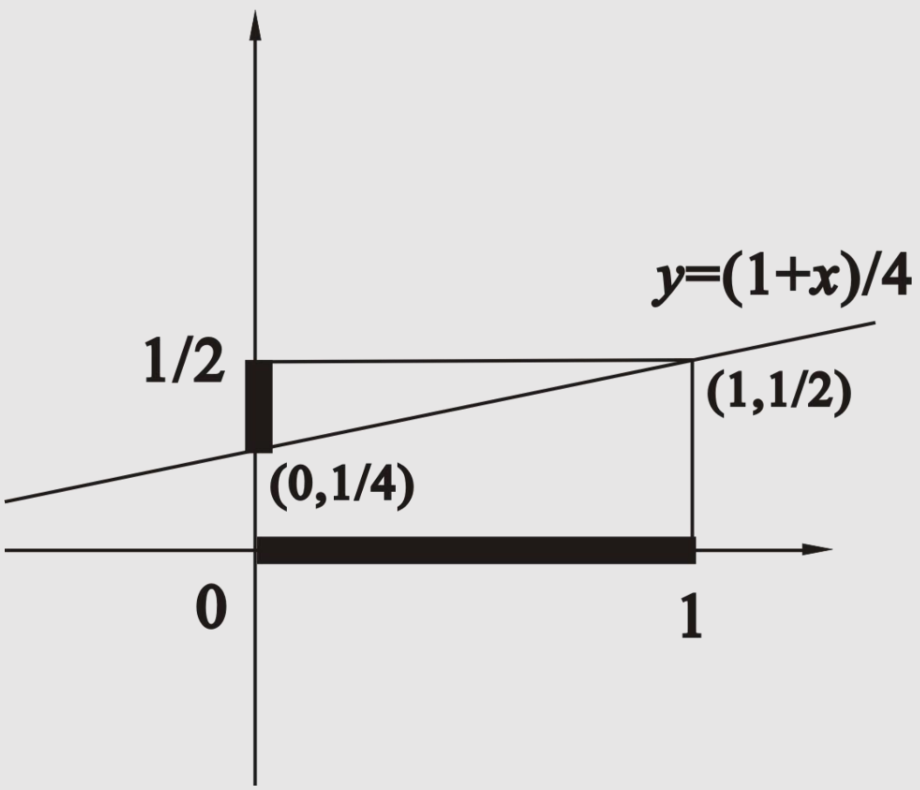
$f(\varnothing)=f_0$, $f(\{1\})=f_1$, $f(\{2\})=f_2$, $f(\{3\})=f_3$,

$f(\{1,2\})=f_4$, $f(\{1,3\})=f_5$, $f(\{2,3\})=f_6$, $f(\{1,2,3\})=f_7$

例8.6(2) $A=[0,1]$

$B=[1/4,1/2]$

构造双射 $f:A\to B$



解

令 f: $[0,1]\to[1/4,1/2]$

$f(x)=(x+1)/4$

实数区间之间构造双射方法:直线方程

例8.6(3) A=Z, B=N，构造双射 f：$A \to B$

将Z中元素以下列顺序排列并与N中元素对应：

$$
\begin{array}{lcccccccc}
\text{Z:} & 0 & -1 & 1 & -2 & 2 & -3 & 3 & \ldots \\
 & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\
\text{N:} & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \ldots
\end{array}
$$

则这种对应所表示的函数是：

$$
f\text{:}\ \mathrm{Z} \to \mathrm{N},\ f(x) = \begin{cases} 2x & \geq 0 \\ -2x-1 & x < 0 \end{cases}
$$

集合A 与自然数集合之间构造双射方法：

1）将A中元素排成有序图形，

2）从第一个元素开始按照次序与自然数对应.

常用函数

1）设f：$A \to B$, 若存在 $c \in B$ 使得 $\forall x \in A$ 都有$f(x)=c$, 则称 f：$A \to B$是常函数.

2）称 A 上的恒等关系 I_A为 A 上的恒等函数, 对所有的 $x \in A$ 都有 $I_A(x)=x$.

3）设 f：$R \to R$，如果对任意的 $x_1, x_2 \in R$，$x_1<x_2$, 就有 $f(x_1) \le f(x_2)$, 则称 f 为单调递增的；如果对任意的 $x_1, x_2 \in A$, $x_1< x_2$, 就有 $f(x_1) < f(x_2)$, 则称 f 为 严格单调递增的.

类似3)可以定义单调递减 和严格单调递减的函数.

4）设 A 为集合, $\forall A' \subseteq A$, A' 的 特征函数 $\chi_{A'}$: $A \to \{0,1\}$ 定义为

$$\chi_{A'}(a) = \begin{cases} 1, & a \in A' \\ 0, & a \in A - A' \end{cases}$$

例 集合：$X = \{$ A, B, C, D, E, F, G, H $\}$,

子集：$T = \{$ A, C, F, G, H $\}$

T 的特征函数χ_T：

x	A	B	C	D	E	F	G	H
$\chi_T(x)$	1	0	1	0	0	1	1	1

A的每一个子集A'都对应于一个特征函数, 不同的子集对应于不同的特征函数.

练 $A=\{a, b, c\}$, 求出$\chi_{\varnothing}$和$\chi_{\{a,b\}}$.

$$\chi_{\varnothing} = \{ <a,0>, <b,0>, <c,0> \},$$

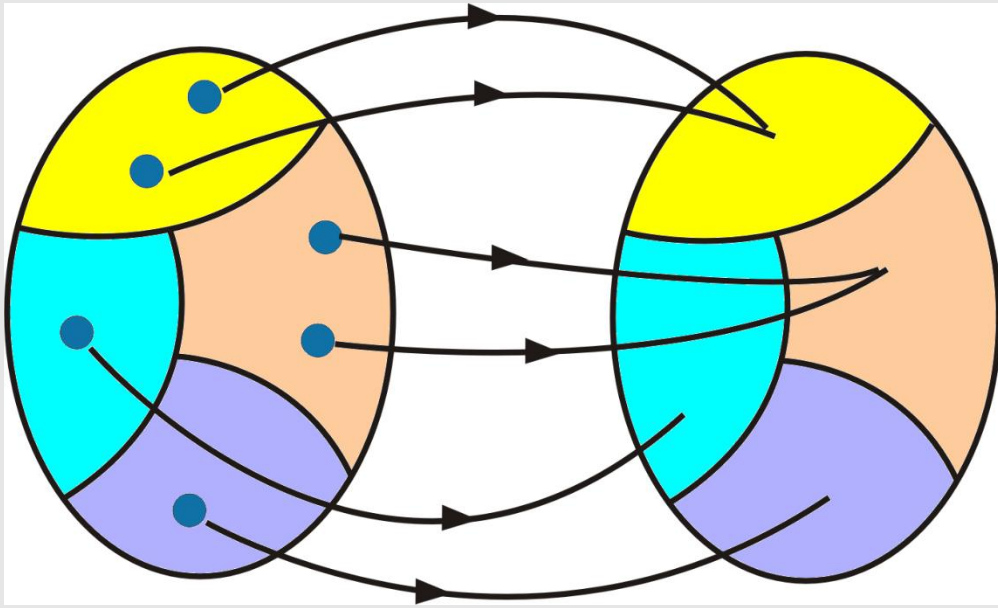
$$\chi_{\{a,b\}} = \{ <a,1>, <b,1>, <c,0>\}$$

5）设 R 是 A 上的等价关系, 令

$g: A \to A/R$

$g(a) = [a], \forall a \in A$

称 g 是从 A 到商集 A/R 的自然映射.



练 $A=\{1, 2, 3\}$, $R=\{<1,3>,<3,1>\} \cup I_A$, 求出 A 到商集 A/R 的自然映射.

解：$I_A=\{<1,1>,<2,2>,<3,3>\}$

$g(1) = g(3) = \{1,3\}$, $g(2) = \{2\}$

作业

习题 8（P 170 ）

3（3，5）

14

16

目录
Catalogue

8.2 函数的复合与反函数

- 函数的复合
  - 函数复合的定理
  - 函数复合的性质

- 反函数
  - 反函数存在的条件
  - 反函数的性质

函数是一种特殊的二元关系，函数的复合就是关系的右复合.

定理8.1 设F, G是函数, 则$F\circ G$也是函数, 且满足

1) $\mathrm{dom}(F\circ G)=\{\, x \mid x\in \mathrm{dom}F \wedge F(x)\in \mathrm{dom}G\}$

2) $\forall x\in \mathrm{dom}(F\circ G)$ 有 $F\circ G(x) = G(F(x))$

推论1 设F, G, H为函数, 则 $(F\circ G)\circ H$ 和 $F\circ (G\circ H)$ 都是函数, 且

$$(F\circ G)\circ H = F\circ (G\circ H).$$

推论2 设 $f: A\to B$, $g: B\to C$, 则 $f\circ g: A\to C$, 且

$$\forall x\in A \text{ 都有 } f\circ g(x) = g(f(x)).$$

定理8.2 设 f：$A \to B$，g：$B \to C$.

1) 如果 f：$A \to B$, g：$B \to C$ 都是满射的, 则

$f \circ g$：$A \to C$也是满射的.

2) 如果 f：$A \to B$, g：$B \to C$ 都是单射的, 则

$f \circ g$：$A \to C$也是单射的.

3) 如果 f：$A \to B$, g：$B \to C$ 都是双射的, 则

$f \circ g$：$A \to C$也是双射的.

定理8.3 设 f: $A \to B$，则 $f = f \circ I_B = I_A \circ f$.

反函数存在的条件

任给函数 F, 它的逆F^{-1}不一定是函数, 是二元关系.

例 $F=\{\langle a,b\rangle,\langle c,b\rangle\}$， $F^{-1}=\{\langle b,a\rangle,\langle b,c\rangle\}$

F^{-1}是二元关系，不是函数。

任给单射函数 f: $A \to B$, 则 f^{-1}是函数, 且是从 $\text{ran}f$ 到 A的双射函数, 但不一定是从 B 到 A 的双射函数.

例 $f: \mathbf{N} \to \mathbf{N}$, $f(x) = 2x$,

$f^{-1}(x) = x/2$

$f^{-1}: \text{ran}f \to \mathbf{N}$

定义 对于双射函数f：$A\to B$, 称f^{-1}：$B\to A$是它的反函数，且f^{-1}：$B\to A$也是双射的.

定理8. 5 设f：$A\to B$是双射的, 则

$$f^{-1}\circ f = I_B,\quad f\circ f^{-1} = I_A$$

推论 对于双射函数f：$A\to A$, 有

$$f^{-1}\circ f = f\circ f^{-1} = I_A$$

例8.9 设 f: R→R, g: R→R

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & x \geq 3 \\ -2 & x < 3 \end{cases} \qquad g(x)=x+2$$

求 $f\circ g$, $g\circ f$. 如果 f 和 g 存在反函数, 求出它们的反函数.

解 $f\circ g: \mathrm{R}\to\mathrm{R}$　　　$g\circ f: \mathrm{R}\to\mathrm{R}$

$$f\circ g(x)=\begin{cases} x^2+2 & x \geq 3 \\ 0 & x < 3 \end{cases} \qquad g\circ f(x)=\begin{cases} (x+2)^2 & x \geq 1 \\ -2 & x < 1 \end{cases}$$

f: R→R不是双射的, 不存在反函数.

g: R→R是双射的, 它的反函数是

$g^{-1}(x)=x-2$，g^{-1}：R→R

作业

习题 8（P 170 ）

19