第十五章

欧拉图与哈密顿图

目录

Catalogue

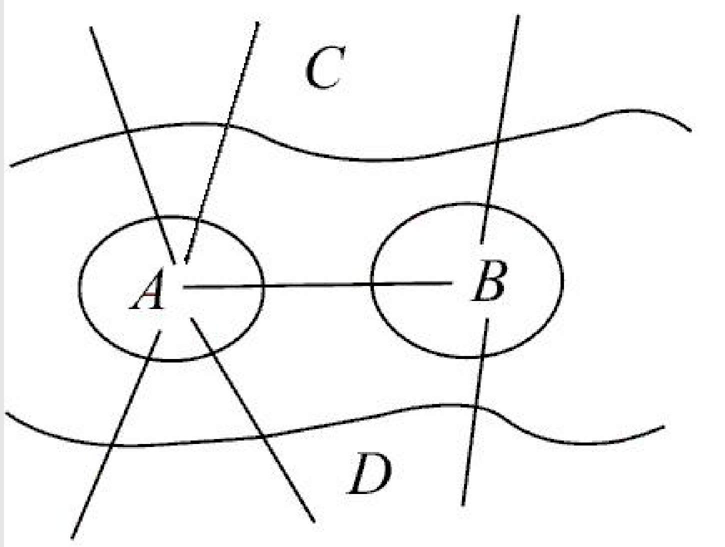
15.1 欧拉图

- 欧拉通路与欧拉回路
- 存在欧拉通路和欧拉回路的充分必要条件

15.1 欧拉图

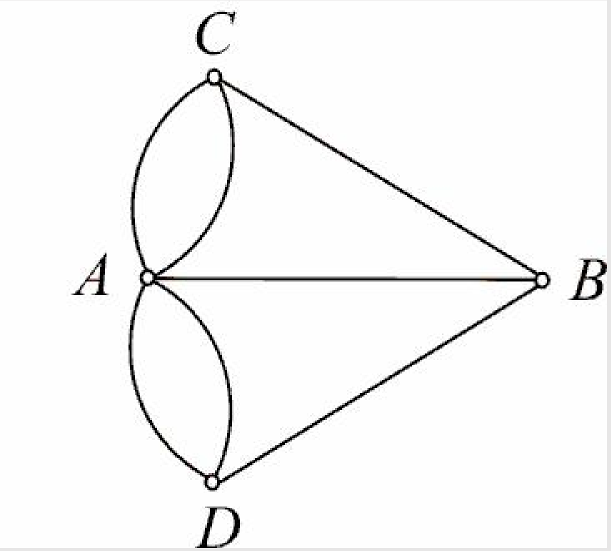
哥尼斯堡七桥问题

哥尼斯堡有一条河穿过，河上有两个小岛，有七座桥把两个岛与河岸联系起来，一个步行者怎样才能**不重复、不遗漏**地一次走完**七座桥**，最后回到出发点。



一笔画问题

要求**边不重复**地一笔画出整个图。



15.1 欧拉图

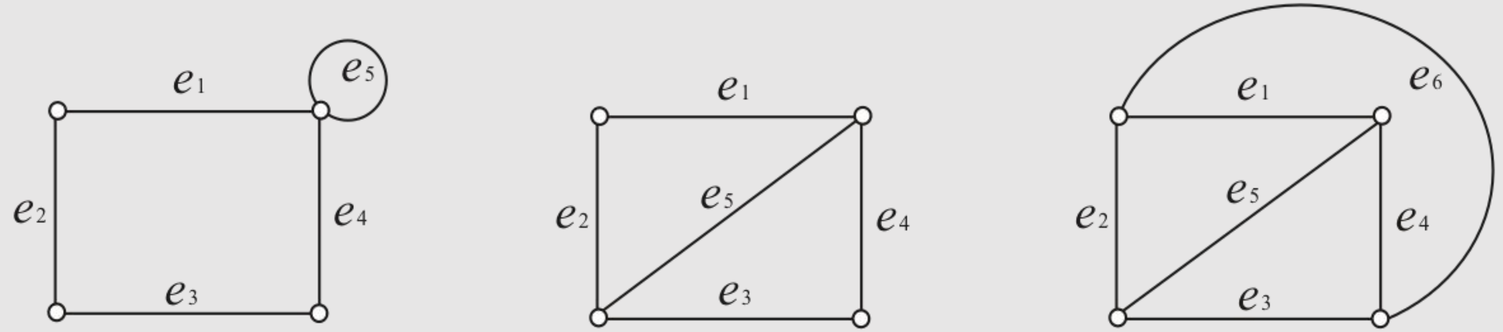
定义15.1 通过图（无向图或有向图）中所有边一次且仅一次行遍所有顶点的通路称作欧拉通路。

通过图中所有边一次且仅一次行遍所有顶点的回路称作欧拉回路。

具有欧拉回路的图称作欧拉图。

具有欧拉通路但无欧拉回路的图称作半欧拉图。

例 是否是欧拉图或半欧拉图?



欧拉图　　半欧拉图　　不是

15.1 欧拉图

定理15.1 无向图G为欧拉图当且仅当G连通且无奇度顶点.

定理15.2 无向图G是半欧拉图当且仅当G连通且恰有两个奇度顶点.

定理15.3 有向图D是欧拉图当且仅当D是强连通且每个顶点的入度都等于出度.

定理15.4 有向图D是半欧拉图当且仅当D是单向连通且恰有两个奇度顶点, 其中一个顶点的入度比出度大1, 另一个顶点的出度比入度大1, 其余顶点的入度等于出度.

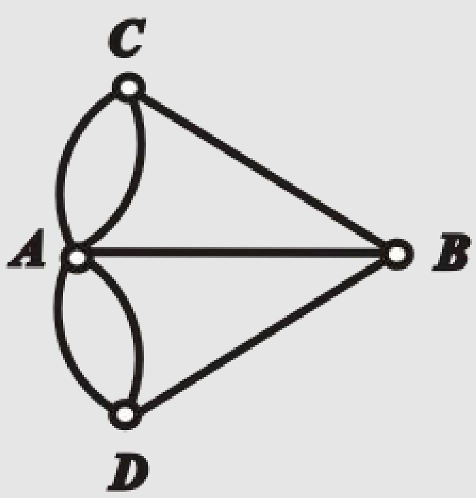
15.1 欧拉图

定理15.1 无向图G为欧拉图当且仅当G连通且无奇度顶点.

定理15.2 无向图G是半欧拉图当且仅当G连通且恰有两个奇度顶点.

例 哥尼斯堡七桥问题

4个奇度顶点, 不存在欧拉通路, 更不存在欧拉回路, 即不是欧拉图。



目录

Catalogue

PART 01

欧拉图

PART 02

哈密顿图

PART 03

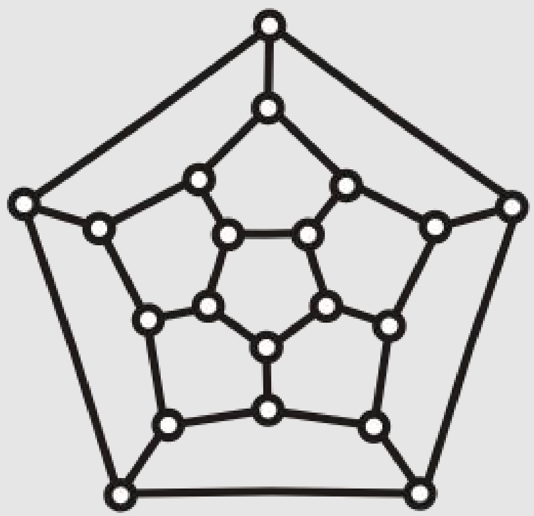
最短路问题

15.2 哈密顿图

- 哈密顿通路和哈密顿回路
- 存在哈密顿通路和哈密顿回路的充分条件与必要条件

哈密顿周游世界问题

每个顶点是一个城市，有20个城市，要求从一个城市出发，恰好经过每一个城市一次，回到出发点.



15.2 哈密顿图

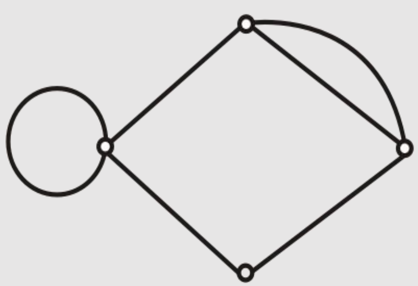
定义15.2 经过图（有向图或无向图）中所有顶点一次且仅一次的通路称作哈密顿通路 .

经过图中所有顶点一次且仅一次的回路称作哈密顿回路.

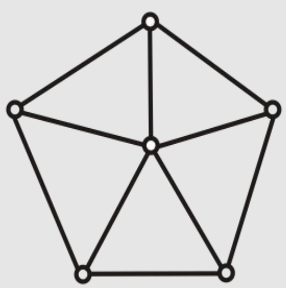
具有哈密顿回路的图称作哈密顿图.

具有哈密顿通路而无哈密顿回路的图称作半哈密顿图.

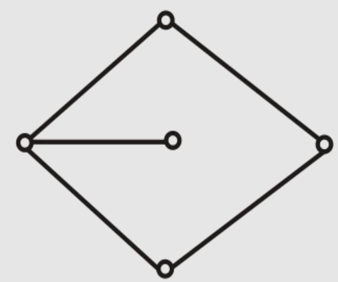
例 是否是哈密顿图,半哈密顿图?



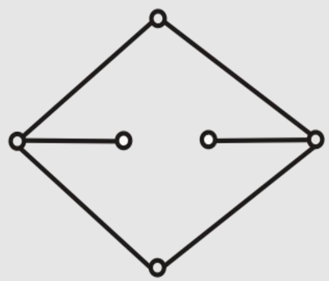
哈密顿图



哈密顿图



半哈密顿图

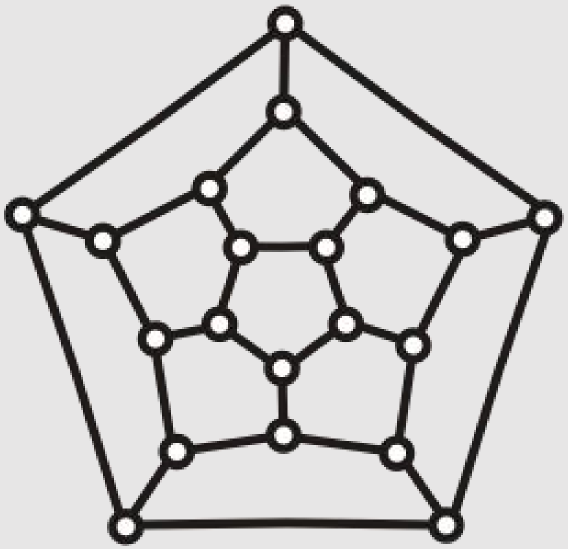


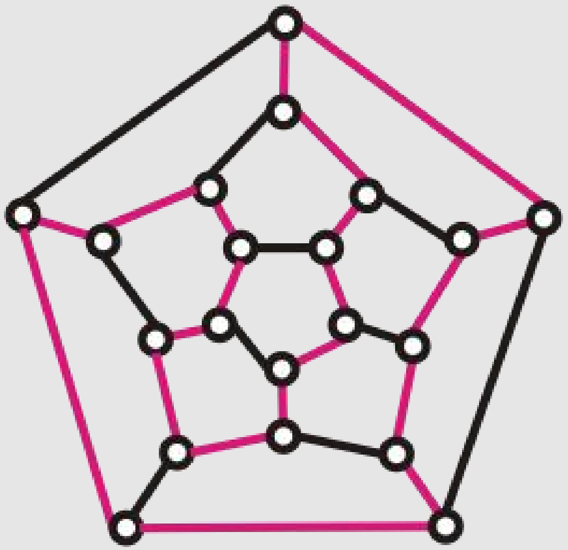
不是

15.2 哈密顿图

例 周游世界问题，即为找出图中的一条哈密顿回路。

右下图中红边给出一条哈密顿回路, 故它是哈密顿图，红边即为周游世界问题的解决方案。





目录

Catalogue

PART 01

欧拉图

PART 02

哈密顿图

PART 03

最短路问题

定义15.3 设图$G = <V,E>$（无向图或有向图），给定W：$E \to R$（R为实数集），对G的每一条边$e = (v_i,v_j)$（G为有向图时，$e = <v_i,v_j>$），称

$$W(e) = w_{ij},$$

为边e上的权，并将w_{ij}标注在边e上，称G为**带权图**，此时常将带权图G记作 $<V,E,W>$.

15.3 最短路问题

设P是G中的一条通路，P中所有边的权之和称作P的长度（通路的长度），记作W（P），即

$$W(P)=\sum_{e\in E(P)} w(e)$$

带权无向图$G=\langle V,E,W \rangle$, 每一条边e的权 $W(e)$ 为非负实数。

- $\forall u,v\in V$，当u和v连通时，称从u到v长度最短的路径为从u到v的最短路径，称其长度为从u到v的距离，记为$d(u,v)$。
- 其中，$d(u,u)=0$，当u和v不连通$d(u,v)=+\infty$。

设P是G中的一条通路，P中所有边的权之和称作P的长度，记作W（P），即

$$W(P)=\sum_{e\in E(P)} w(e)$$

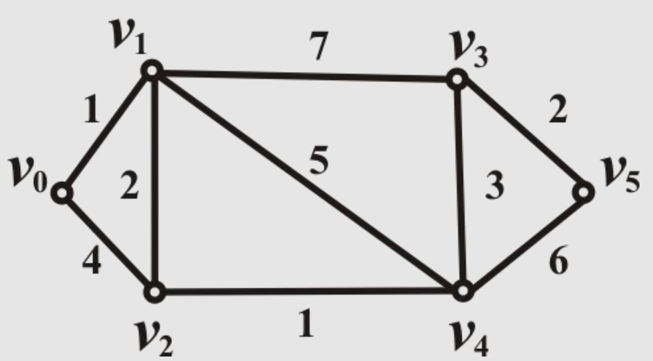
例 找出图中从v_0到v_5的路径，求出路径的长度，并找出最短路径。

$P_1=v_0v_1v_3v_5$, $w(P_1)=10$,

$P_2=v_0v_1v_4v_5$, $w(P_2)=12$,

$P_3=v_0v_2v_4v_5$, $w(P_3)=11$....

$d(v_0,v_5)=10$



标号法(E.W.Dijkstra, 1959)

如果$uv_{i1}v_{i2}...v_{ik}v$是从u到v的最短路径，则对每个v_{it}，
$uv_{i1}v_{i2}......v_{it}$是从$u$到$v_{it}$的最短路径，依据这条性质得出Dijkstra最短路径算法.

说明：

1）算法给出从起点s到每一点的最短路径.

2）计算过程中，赋予每一个顶点一个标号

$$l(v)=(l_1(v), l_2(v)),$$

$l_1(v)$是s到v的最短路径上v的前一个顶点

$l_2(v)$是从s到v的距离 .

输入：带权图$G=<V,E,w>$和出发点s

输出：s到G中每一点的最短路径及距离

1. 令$l(s)\leftarrow(s, 0)$, $l(v)\leftarrow(s, +\infty)$, $v\in V-\{s\}$

   $l(s)$是永久标号，其它的都是临时标号,$u\leftarrow s$

2. *for*与u关联的临时标号的顶点v

3. *if* $l_2(u)+W(u,v)<l_2(v)$

   then $l(v)\leftarrow(u, l_2(u)+W(u,v))$

4. 计算$l_2(t)=\min\{l_2(v)|\ v\in V\}$

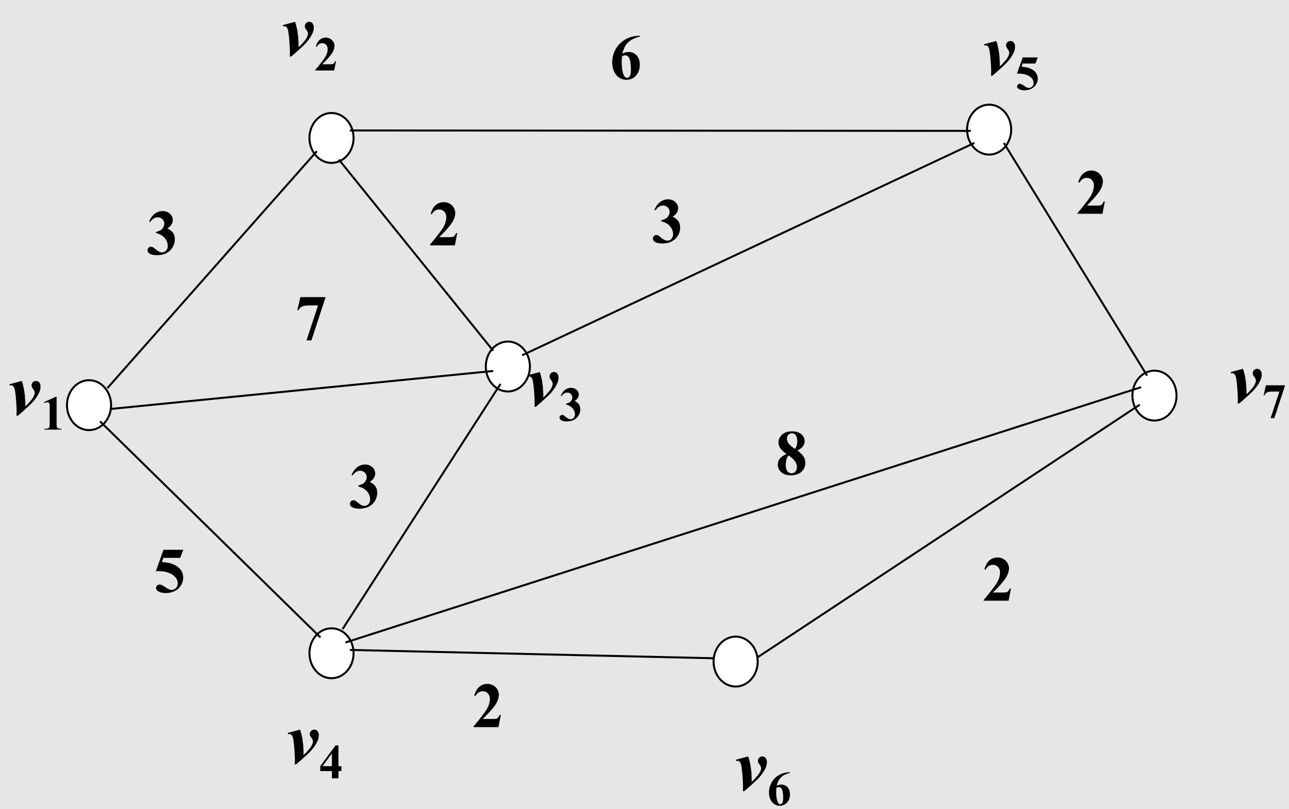
   把$l(t)$改为永久标号

5. *if* $i<n$

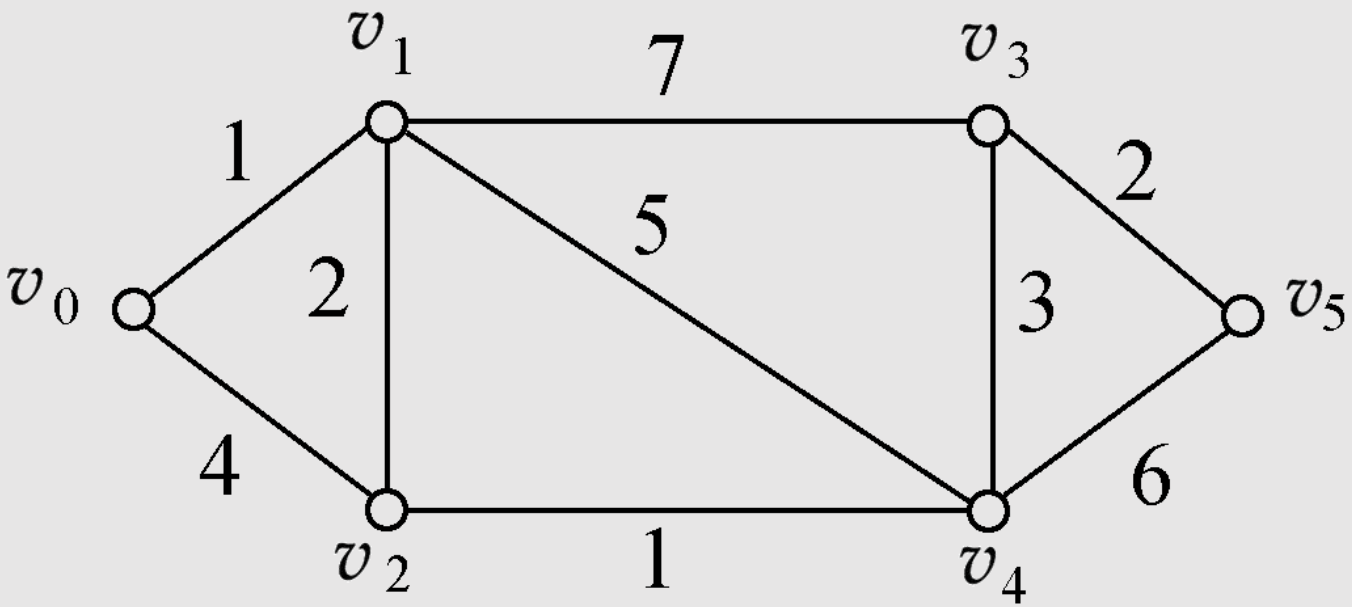
   then 令$u\leftarrow t, i\leftarrow i+1$,转2

15.3 最短路问题

例 15.6 带权图G如图所示，求从v_1到其余各点的**最短路径**和**距离**。



测验12 求v_0到其它顶点的最短路径和距离。



中国邮政员问题与货郎担问题

中国邮递员问题

邮递员每天从邮局出发，走遍该地区所有街道再返回邮局，问题是他应如何安排送信的路线可以使所走的总路程最短。

用图论的语言描述：给定一个带权无向图，每边e有非负权，要求一条回路经过每条边至少一次，且满足总权最小。

如果图中有欧拉回路，显然欧拉回路就是最短的投递路线。

中国邮政员问题与货郎担问题

货郎担问题

有n个城市，给定城市之间道路的长度，一个旅行商从某个城市出发，要经过每个城市一次且仅一次，最后回到出发的城市，问：如何走才能使他走的路线最短。

用图论的语言描述：给定一个n阶完全带权图，每边e有非负权，要求一条回路经过每个顶点一次，且满足总权最小。

求出图中的一条最短哈密顿回路。

作业

习题 15（P 326 ）

21