目录
Catalogue

7.6 等价关系与划分

例 用a,b,c,d,e,f 分别表示6位大学生，其中a,b,c都姓张，d,e,f都姓李。若令集合A={a ,b ,c , d ,e , f }; R是A上的同姓氏关系，求同姓氏关系R的关系矩阵。

$$
\begin{array}{c|c}
 & \begin{array}{cccccc} a & b & c & d & e & f \end{array} \\
\begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{array} &
\begin{bmatrix}
1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

例 设$A=\{1,2,\ldots,8\}$, 如下定义A上的关系R:

$R=\{\langle x,y\rangle \mid x,y\in A \wedge x\equiv y(\mathrm{mod}\ 3)\}$求关系R的关系矩阵。

$$
\begin{array}{c|c}
 & \begin{matrix} 1 & 4 & 7 & 2 & 5 & 8 & 3 & 6 \end{matrix} \\
\begin{matrix} 1 \\ 4 \\ 7 \\ 2 \\ 5 \\ 8 \\ 3 \\ 6 \end{matrix} &
\begin{bmatrix}
1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

7.6 等价关系与划分

$$
\begin{array}{c|c}
 & \begin{matrix} a & b & c & d & e & f \end{matrix} \\
\begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{matrix} &
\begin{bmatrix}
1 & 1 & 1 & & & \\
1 & 1 & 1 & & & \\
1 & 1 & 1 & & & \\
 & & & 1 & 1 & 1 \\
 & & & 1 & 1 & 1 \\
 & & & 1 & 1 & 1
\end{bmatrix}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c|c}
 & \begin{matrix} 1 & 4 & 7 & 2 & 5 & 8 & 3 & 6 \end{matrix} \\
\begin{matrix} 1 \\ 4 \\ 7 \\ 2 \\ 5 \\ 8 \\ 3 \\ 6 \end{matrix} &
\begin{bmatrix}
1 & 1 & 1 & & & & & \\
1 & 1 & 1 & & & & & \\
1 & 1 & 1 & & & & & \\
 & & & 1 & 1 & 1 & & \\
 & & & 1 & 1 & 1 & & \\
 & & & 1 & 1 & 1 & & \\
 & & & & & & 1 & 1 \\
 & & & & & & 1 & 1
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

具有这类特征的关系 —— 等价关系

7.6 等价关系与划分

- 等价关系的定义与实例
- 等价类及其性质
- 集合的划分
- 等价关系与划分的一一对应

定义7.15 设R为非空集合A上的关系. 如果R是自反的、对称的和传递的, 则称R为A上的**等价关系**.

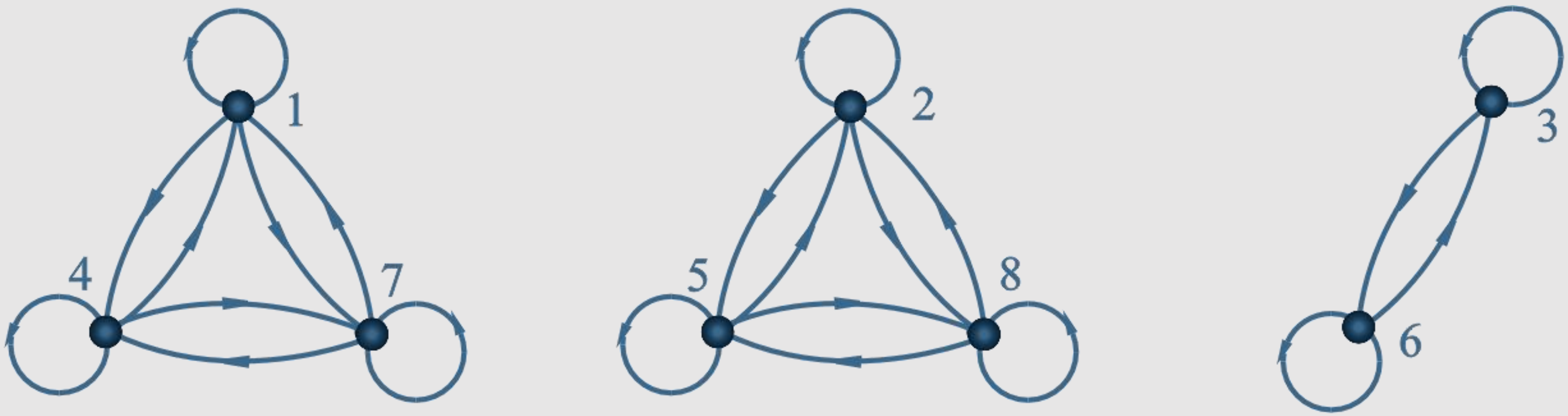
设R是一个等价关系, 若$<x,y>\in R$, 称x等价于y, 记做$x \sim y$.

例7.16 设$A=\{1,2,\ldots,8\}$, 如下定义A上的关系R:

$$R=\{<x,y> \mid x,y\in A \land x\equiv y \pmod 3\}$$

画出关系R的关系图。

7.6 等价关系与划分



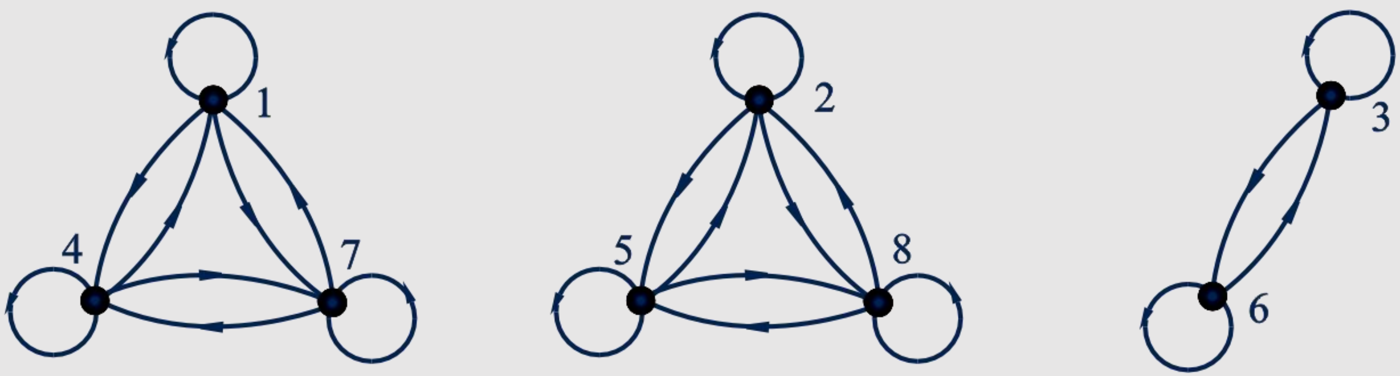
	自反	反自反	对称	反对称	传递
关系图	每个顶点都有环	每个顶点都没有环	如果两个顶点之间有边，是2条方向相反的边(无单边)	如果两点之间有边，是1条有向边(无双向边)	如果顶点 x_i 到 x_j 有边，x_j 到 x_k 有边，则从 x_i 到 x_k 有边

不难验证R为A上的等价关系。

7.6 等价关系与划分

定义7.16 设R为非空集合A上的等价关系, $x \in A$，令$[x]_R = \{ y \mid y \in A \wedge xRy \}$，称$[x]_R$为$x$关于$R$的等价类, 简称为$x$的等价类, 简记为$[x]$或$\bar{x}$.

例 A={1, 2, … , 8}上模3等价关系R的等价类:



- [1] = {1, 4, 7} = [4] = [7]
- [2] = {2, 5, 8} = [5] = [8]
- [3] = {3, 6} =[6]

7.6 等价关系与划分

定理7.14 设R是非空集合A上的**等价**关系, 则

（1）$\forall x \in A$, $[x]$是A的非空子集.

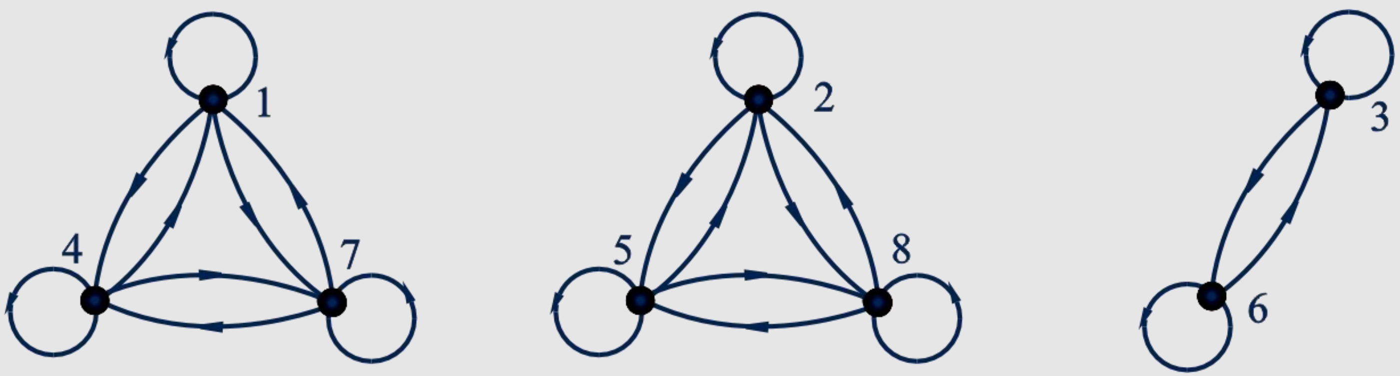
（2）$\forall x, y \in A$, 如果xRy, 则 $[x] = [y]$.

（3）$\forall x, y \in A$, 如果$x \not R y$, 则 $[x]$与$[y]$**不交**.

（4）$\cup\{[x] \mid x \in A\} = A$.

定义7.17 设R为非空集合A上的等价关系，以R的**所有等价类**作为**元素**的集合称为A关于R的商集，记做A/R

$$A/R = \{[x]_R \mid x \in A\}$$



- $[1] = \{1, 4, 7\} = [4] = [7]$
- $[2] = [5] = [8] = \{2, 5, 8\}$
- $[3] = [6] = \{3, 6\}$
- A关于R的商集为$A/R = \{ \{1,4,7\},\{2,5,8\},\{3,6\} \}$

定义7.18 设A为非空集合，若A的子集族$\pi(\pi \subseteq P(A))$满足下面条件：

（1）$\varnothing \notin \pi$

（2）$\forall x \forall y(x,y \in \pi \wedge x \neq y \rightarrow x \cap y = \varnothing)$

（3）$\cup \pi = A$

则称π是A的一个划分，称π中的元素为A的划分块.

例7.17 设A={a,b,c,d},给定$\pi_1,\pi_2,\pi_3,\pi_4,\pi_5,\pi_6$如下，那些是$A$的划分？

π_1={{a,b,c},{d}}　　π_2={{a,b},{c},{d}}

π_3={{a},{a,b,c,d}}　　π_4={{a,b},{c}}

π_5={$\varnothing$,{a,b},{c,d}}　　π_6={{a,{a}},{b,c,d}}

解：π_1，π_2是A的划分，其他均不是。

定义7.18 设A为非空集合, 若A的子集族$\pi(\pi \subseteq P(A))$满足下面条件:

（1）$\varnothing \notin \pi$

（2）$\forall x \forall y(x,y \in \pi \wedge x \neq y \rightarrow x \cap y = \varnothing)$

（3）$\cup \pi = A$

则称π是A的一个划分, 称π中的元素为A的划分块.

定理 A上的等价关系与A的划分是一一对应的.

作业

习题 7（P139 ）

32（1，2）

目录

Catalogue

7.7 偏序关系

- 偏序关系
- 偏序集与哈斯图
- 偏序集中的特定元素

定义7.19 非空集合A上的自反、反对称和传递的关系，称为A上的偏序关系，记作≼．设≼为偏序关系，如果$<x, y>\in$≼，则记作 $x \preccurlyeq y$，读作 x“小于等于” y.

例

1）集合A上的恒等关系 I_A 是A上的偏序关系.

2）小于或等于关系，整除关系和包含关系也是相应集合上的偏序关系.

定义7.20 设$\preccurlyeq$为非空集合A上的偏序关系, 定义

（1） $\forall x,y \in A,\ x \prec y \Leftrightarrow x \preccurlyeq y \wedge x \neq y$

（2） $\forall x,y \in A$, x与y可比 $\Leftrightarrow x \preccurlyeq y \vee y \preccurlyeq x$

其中， $x \prec y$ 读作 x “小于”y 。这里的“小于”是指在偏序中 x排在y的前边。

说明：任取两个元素x和y, 可能有下述情况：

1) $x \prec y$ (或$y \prec x$),

2) $x = y$,

3) x 与 y不是可比的.

例 A={1,2,3}，$\preccurlyeq$ 是A上的整除关系，则有

$1 \prec 2$，$1 \prec 3$； $1 = 1$，$2 = 2$，$3 = 3$； 2和3不可比

7.7 偏序关系

定义7.21 R为非空集合A上的偏序, $\forall x,y\in A$, x与 y 都是可比的，则称 R 为全序关系（或 线序关系）.

例 数集上的小于或等于关系是全序关系
整除关系不是正整数集合上的全序关系

定义7.22 集合A和A上的偏序关系$\preccurlyeq$ 一起叫做偏序集, 记作 $<A,\preccurlyeq>$.

例 整数集和小于等于关系构成偏序集$<Z,\le>$,
幂集$P(A)$和包含关系构成偏序集$<P(A),R_{\subseteq}>$.

7.7 偏序关系

定义7.23 设 $<A,\preccurlyeq>$为偏序集，$\forall x, y\in A$，如果 $x \prec y$且不存在 $z\in A$ 使得 $x \prec z \prec y$, 则称 y 覆盖 x.

例 { 1, 2, 4, 6 }集合上的整除关系, 找出所有覆盖。

$R_{整除}$=

{<1,1>,<1,2>,<1,4>,<1,6>,<2,2>,<2,4>,<2,6>,<4,4>,<6,6>}

2 覆盖 1.

4 和 6 覆盖 2.

4 不覆盖 1.

7.7 偏序关系

哈斯图：利用偏序自反、反对称、传递性简化的关系图.

特点：1）每个结点没有环；

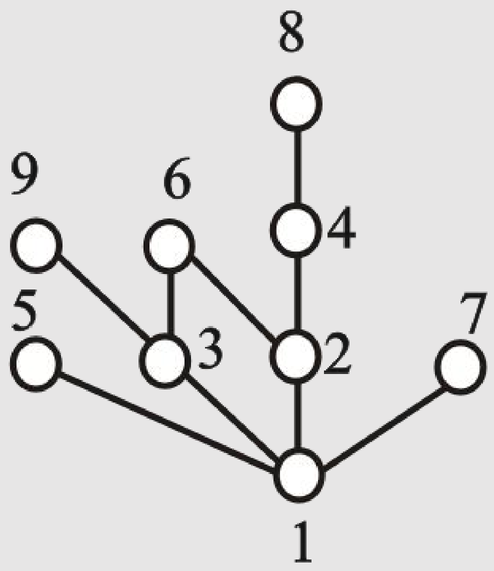
2）两个连通的结点之间的序关系通过结点位置的高低表示，位置低的元素的顺序在前，具有覆盖关系的两个结点之间连边；

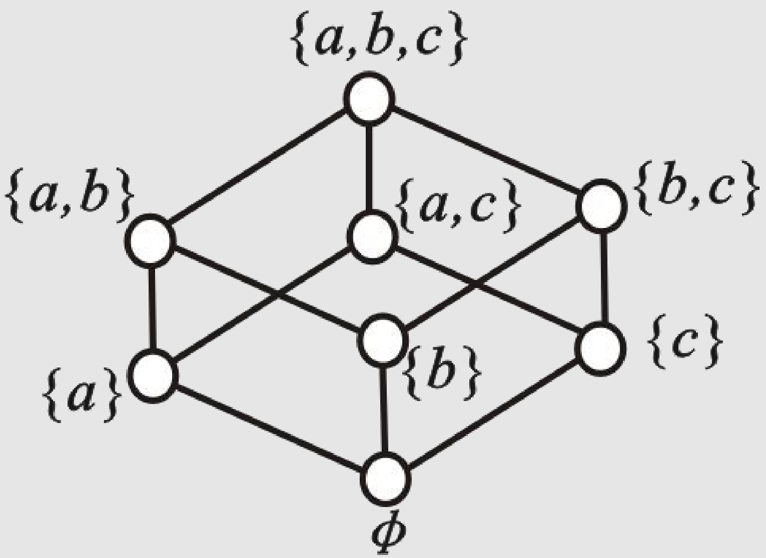
3）无连通关系的结点单独画出。

例7.19 $<\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}, R_{整除}>$

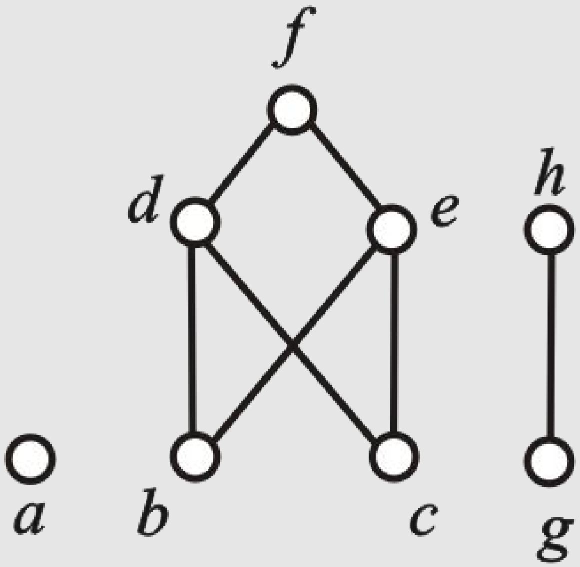
$<P(\{a, b, c\}), R_{\subseteq}>$

画出两个偏序集的哈斯图





例7.20 已知偏序集$<A,R>$的哈斯图如右图所示, 试求出集合A和关系R的表达式.



$A=\{a, b, c, d, e, f, g, h\}$

$R=\{<b,d>,<b,e>,<b,f>,<c,d>,$
$<c,e>,<c,f>,<d,f>,<e,f>,<g,h>\}\cup I_A$

偏序集的特定元素

定义7.24 设$<A,\preccurlyeq>$为偏序集, $B\subseteq A$, $y\in B$.

(1) 若$\forall x(x\in B\rightarrow y\preccurlyeq x)$ 成立, 则称 y 为 B 的最小元.

(2) 若$\forall x(x\in B\rightarrow x\preccurlyeq y)$ 成立, 则称 y 为 B 的最大元.

(3) 若$\neg\exists x\,(x\in B\wedge x\prec y)$ 成立, 则称 y 为B的极小元.

(4) 若$\neg\exists x\,(x\in B\wedge y\prec x)$ 成立, 则称 y 为B的极大元.

定义7.24 设$<A,\preccurlyeq>$为偏序集.

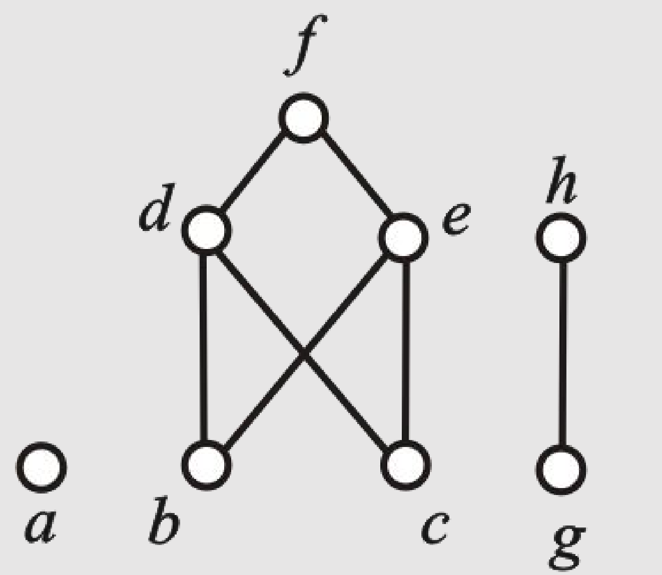
(1) 若$\forall x(x\in A\rightarrow y\preccurlyeq x)$成立, 则称 y 为 A 的最小元.

(2) 若$\forall x(x\in A\rightarrow x\preccurlyeq y)$成立, 则称 y 为 A 的最大元.

(3) 若$\neg\exists x\ (x\in A\wedge x\prec y)$成立, 则称 y 为A的极小元.

(4) 若$\neg\exists x\ (x\in A\wedge y\prec x)$成立, 则称 y 为A的极大元.

例7.21 设偏序集$<A,\preccurlyeq>$如下图所示，求 A 的极小元、最小元、极大元、最大元.



极小元：a, b, c, g;

极大元：a, f, h;

没有最小元与最大元.

测验8 设$<A, R>$是偏序集，其中$A=\{a,b,c,d,e,f\}$，$R=\{<a,b>,<a,c>,<a,d>,<d,e>,<a,e>\}\cup I_A$。

（1）画出偏序集$<A, R>$的哈斯图；

（2）写出偏序集$<A, R>$的极大元、极小元、最大元、最小元。

定义7.24 设$<A, \preccurlyeq>$为偏序集, $B \subseteq A$, $y \in B$.

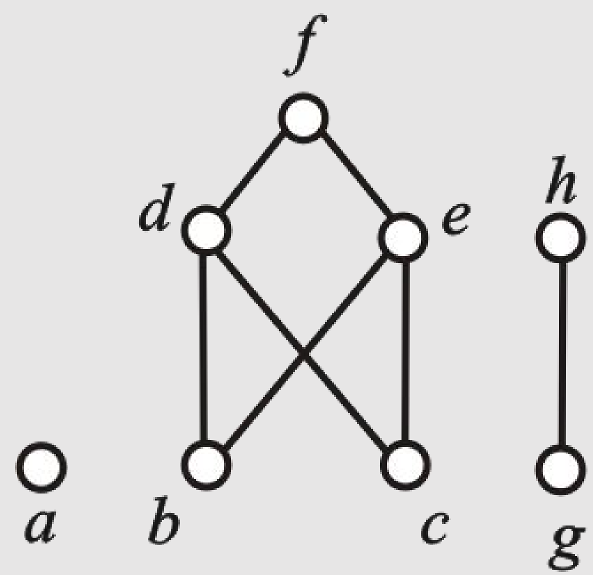
(1) 若$\forall x(x \in B \rightarrow y \preccurlyeq x)$ 成立, 则称 y 为 B 的最小元.

(2) 若$\forall x(x \in B \rightarrow x \preccurlyeq y)$ 成立, 则称 y 为 B 的最大元.

(3) 若$\neg\exists x\,(x \in B \wedge x \prec y)$ 成立, 则称 y 为B的极小元.

(4) 若$\neg\exists x\,(x \in B \wedge y \prec x)$ 成立, 则称 y 为B的极大元.

例 设偏序集$<A, \preccurlyeq>$如下图所示，令B={b,c,d}，求B 的极小元、最小元、极大元、最大元.



极小元：b,c；极大元： d

最小元：无；最大元： d

偏序集的特定元素(续)

定义 设$<A,\preccurlyeq>$为偏序集, $B\subseteq A$, $y\in A$.

(1) 若$\forall x(x\in B\rightarrow x\preccurlyeq y)$ 成立, 则称 y 为B的上界.

若$\forall x(x\in B\rightarrow x\preccurlyeq y)$ 成立, 则称 y 为 B 的最大元.

(2) 若$\forall x(x\in B\rightarrow y\preccurlyeq x)$ 成立, 则称 y 为B的下界.

若$\forall x(x\in B\rightarrow y\preccurlyeq x)$ 成立, 则称 y 为 B 的最小元.

(3) 令$C=\{y \mid y$为B的上界$\}$, 则称C的最小元为B的最小上界 或 上确界.

(4) 令$D=\{y \mid y$为B的下界$\}$, 则称D的最大元为B的最大下界 或 下确界.

定义7.25 设$<A, \preccurlyeq>$为偏序集, $B \subseteq A$, $y \in A$.

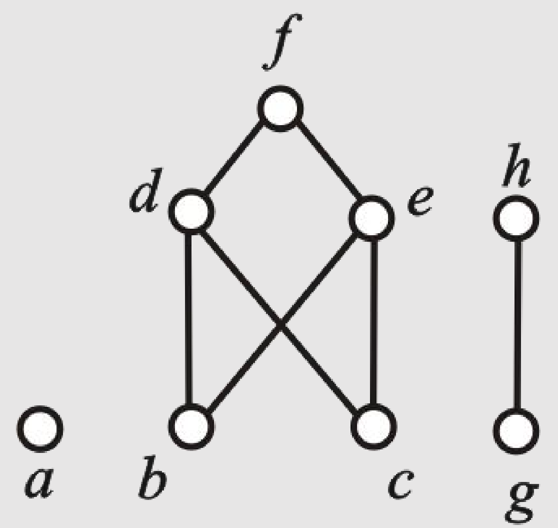
1) 若$\forall x(x \in B \to x \preccurlyeq y)$ 成立, 则称 y 为B的上界.

2) 若$\forall x(x \in B \to y \preccurlyeq x)$ 成立, 则称 y 为B的下界.

3) 令$C = \{y \mid y$为B的上界$\}$, 称C的最小元为B的最小上界或上确界.

4) 令$D = \{y \mid y$为B的下界$\}$, 称D的最大元为B的最大下界或下确界.

例7.21 设偏序集$<A, \preccurlyeq>$如下图所示，设 $B = \{b,c,d\}$, 求 B 的下界、上界、下确界、上确界.



B的下界和最大下界都不存在,

B的上界有d 和 f, 最小上界为 d.

特殊元素的性质

1）下界、上界、下确界、上确界不一定存在

2）下界、上界存在不一定惟一

3）下确界、上确界如果存在，则惟一

4）集合的最小元就是它的下确界，最大元就是它的上确界；反之不对.

作业

习题 7（P139 ）

46（1）