第七章

二元关系

目录

Catalogue

7.4 关系的性质

- 自反性
- 反自反性
- 对称性
- 反对称性
- 传递性

定义7.11 设R为A上的关系,

(1) 若$\forall x(x\in A\rightarrow <x,x>\in R)$, 则称$R$在$A$上是自反的.

(2) 若$\forall x(x\in A\rightarrow <x,x>\notin R)$, 则称$R$在$A$上是反自反的.

例7.10 $A=\{1,2,3\}$, R_1, R_2, R_3是A上的关系, 其中

$R_1=\{<1,1>,<2,2>\}$

$R_2=\{<1,1>,<2,2>,<3,3>,<1,2>\}$

$R_3=\{<1,3>\}$

说明R_1，R_2，R_3是否为A上的自反关系和反自反关系。

R_1既不是自反也不是反自反的；R_2自反；R_3反自反。

定义7.12 设R为A上的关系,

(1) 若$\forall x\forall y(x,y\in A\wedge \langle x,y\rangle\in R\rightarrow \langle y,x\rangle\in R)$，则称$R$为$A$上对称的关系.

(2) 若$\forall x\forall y(x,y\in A\wedge \langle x,y\rangle\in R\wedge \langle y,x\rangle\in R\rightarrow x=y)$，则称$R$为$A$上的反对称关系.

例7.11 设$A=\{1,2,3\}$, R_1, R_2, R_3和R_4都是A上的关系, 其中

$R_1=\{\langle 1,1\rangle,\langle 2,2\rangle\}$，　$R_2=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,1\rangle\}$

$R_3=\{\langle 1,2\rangle,\langle 1,3\rangle\}$，　$R_4=\{\langle 1,2\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 1,3\rangle\}$

说明R_1，R_2，R_3，R_4是否为A上的对称关系和反对称关系。

R_1 对称、反对称.　　R_2 对称，不反对称.

R_3 不对称，反对称.　　R_4 不对称、也不反对称.

7.4 关系的性质

定义7.13 设R为A上的关系, 若

$\forall x \forall y \forall z(x,y,z \in A \wedge <x,y> \in R \wedge <y,z> \in R \rightarrow <x,z> \in R)$,

则称R是A上的传递关系.

例7.12 设$A=\{1,2,3\}$, R_1, R_2, R_3是A上的关系, 其中

$R_1=\{<1,1>,<2,2>\}$

$R_2=\{<1,2>,<2,3>\}$

$R_3=\{<1,3>\}$

说明R_1，R_2，R_3是否为A上的传递关系。

R_1 和 R_3 是A上的传递关系

R_2不是A上的传递关系

关系性质的充要条件

定理7.9 设R为A上的关系, 则

(1) R在A上自反当且仅当 $I_A \subseteq R$

(2) R在A上反自反当且仅当 $R \cap I_A = \varnothing$

例 $A=\{1,2,3\}$, R_1, R_2, R_3是A上的关系,

$R_1=\{<1,1>,<2,2>\}$ 不自反，不反自反

$R_2=\{<1,1>,<2,2>,<3,3>,<1,2>\}$ 自反

$R_3=\{<1,3>\}$ 反自反

关系性质的充要条件

定理7.9 设R为A上的关系, 则

(3) R在A上对称当且仅当 $R=R^{-1}$

(4) R在A上反对称当且仅当 $R\cap R^{-1}\subseteq I_A$

例 $A=\{1,2,3\}$, R_1, R_2, R_3是A上的关系,

$R_1=\{<1,1>,<2,2>\}$ 对称、反对称

$R_2=\{<1,1>,<1,2>,<2,1>\}$ 对称，不反对称

$R_3=\{<1,2>,<1,3>\}$ 不对称，反对称

关系性质的充要条件

定理7.9 设R为A上的关系, 则

(5) R在A上传递当且仅当 $R \circ R \subseteq R$

例 $A=\{1,2,3\}$, R_1, R_2, R_3是A上的关系,

$R_1 = \{<1,1>,<2,2>\}$

$R_2 = \{<1,2>,<2,3>\}$

$R_3 = \{<1,3>\}$，判断传递性。

R_1 和 R_3 是A上的传递关系， R_2不是A上的传递关系

关系性质的充要条件

定理7.9 设R为A上的关系, 则

(1) R在A上自反当且仅当 $I_A \subseteq R$

(2) R在A上反自反当且仅当 $R \cap I_A = \varnothing$

(3) R在A上对称当且仅当 $R = R^{-1}$

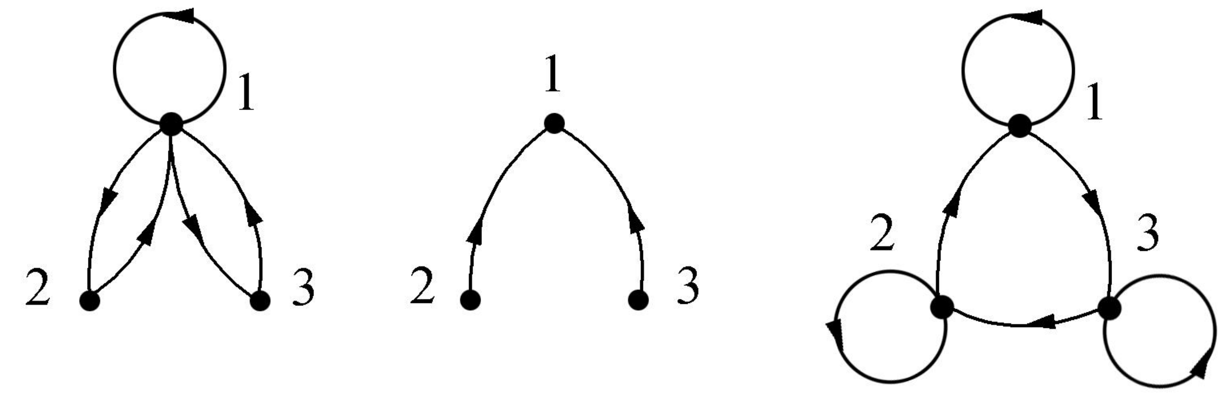
(4) R在A上反对称当且仅当 $R \cap R^{-1} \subseteq I_A$

(5) R在A上传递当且仅当 $R \circ R \subseteq R$

关系性质判别

	自反	反自反	对称	反对称	传递
表达式	$I_A \subseteq R$	$R \cap I_A = \varnothing$	$R = R^{-1}$	$R \cap R^{-1} \subseteq I_A$	$R \circ R \subseteq R$
关系矩阵	主对角线元素全是1	主对角线元素全是0	矩阵是对称矩阵	若$r_{ij}=1$, 且$i \neq j$, 则$r_{ji}=0$	对M^2中1所在位置, M中相应位置都是1
关系图	每个顶点都有环	每个顶点都没有环	如果两个顶点之间有边, 是2条方向相反的边(无单边)	如果两点之间有边, 是1条有向边(无双向边)	如果顶点x_i到x_j有边，x_j到x_k有边, 则从x_i到x_k有边

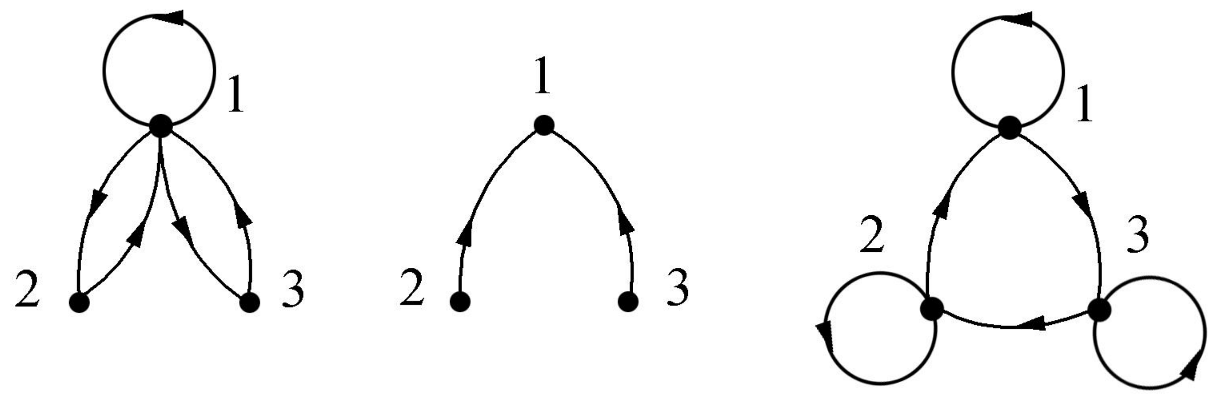
例7.14 判断下图中关系的性质，并说明理由.



(a) (b) (c)

	自反	反自反	对称	反对称	传递
关系图	每个顶点都有环	每个顶点都没有环	如果两个顶点之间有边，是2条方向相反的边(无单边)	如果两点之间有边，是1条有向边(无双向边)	如果顶点 x_i 到 x_j 有边，x_j 到 x_k 有边，则从 x_i 到 x_k 有边

例7.14 判断下图中关系的性质，并说明理由.



(a) (b) (c)

(a)不自反也不反自反；对称，不反对称；不传递.

(b)反自反，不是自反的；反对称，不是对称的；是传递的.

(c)自反，不反自反；反对称，不是对称；不传递.

作业

习题 7（P139 ）

22

目录

Catalogue

7.5 关系的闭包

- 闭包定义
- 闭包的构造方法
  - 集合表示
  - 矩阵表示
  - 图表示
- 闭包的性质

定义7.14 设R是非空集合A上的关系, R的自反闭包是A上的关系R', 使得R'满足以下条件:

（1）R'是自反的

（2）$R \subseteq R'$

（3）对A上任何包含R的自反关系 R'' 有 $R' \subseteq R''$.

一般将 R 的自反闭包记作 $r(R)$。

简言之， $r(R)$是包含 R且具备自反性的最小集合。

定义7.14 设R是非空集合A上的关系, R的对称闭包是A上的关系R', 使得R'满足以下条件:

（1）R'是对称的

（2）$R\subseteq R'$

（3）对A上任何包含R的对称关系 R'' 有 $R'\subseteq R''$.

一般将 R 的对称闭包记作 $s(R)$。

简言之， $s(R)$是包含 R且具备对称性的最小集合。

定义7.14 设R是非空集合A上的关系，R的传递闭包是A上的关系R'，使得R'满足以下条件：

（1）R'是传递的

（2）$R \subseteq R'$

（3）对A上任何包含R的传递关系 R'' 有 $R' \subseteq R''$.

一般将 R 的传递闭包记作 $t(R)$ 。

简言之，$t(R)$是包含 R且具备传递性的最小集合。

定义7.14 设R是非空集合A上的关系，R的自反（对称或传递）闭包是A上的关系R'，使得R'满足以下条件：

（1）R'是自反的（对称的或传递的）

（2）$R \subseteq R'$

（3）对A上任何包含R的自反（对称或传递）关系 R'' 有 $R' \subseteq R''$.

一般将 R 的自反闭包记作 $r(R)$（对称闭包记作 $s(R)$，传递闭包记作 $t(R)$）

闭包的构造方法（关系矩阵）

定理7.10 设R为A上的关系, 则有

(1) $r(R) = R \cup R^0$

(2) $s(R) = R \cup R^{-1}$

(3) $t(R) = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \ldots$

说明： 若R是自反的，则 $r(R)=R$;

若R是对称的，则$s(R)=R$;

若R是传递的，则 $t(R)=R$.

推论 设R为有穷集A上的关系, 则存在正整数m使得

$$t(R) = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \ldots \cup R^m$$

闭包的构造方法——关系矩阵

设关系R，$r(R)$，$s(R)$，$t(R)$的关系矩阵分别为M, M_r, M_s和 M_t, 则

$$M_r = M + E$$

$$M_s = M + M'$$

$$M_t = M + M^2 + M^3 + \dots$$

说明：

1）E 是和 M 同阶的单位矩阵, M'是 M 的转置矩阵.

2）在上述等式中矩阵的元素相加时使用逻辑加.

例 设$A=\{a,b,c,d\}$, $R=\{\langle a,b\rangle,\langle b,a\rangle,\langle b,c\rangle,\langle c,d\rangle,\langle d,b\rangle\}$, 求$R$和 $r(R)$, $s(R)$, $t(R)$的关系矩阵。

关系矩阵：$\mathbf{M}=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&0&0&1\\0&1&0&0\end{bmatrix}$

自反闭包关系矩阵：

$$\mathbf{M_r}=\mathbf{M}+\mathbf{E}=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&0&0&1\\0&1&0&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&0&0\\1&1&1&0\\0&0&1&1\\0&1&0&1\end{bmatrix}$$

对称闭包矩阵：

$$\mathbf{M_s=M+M'=}\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&0&0&1\\0&1&0&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&1&1\\0&1&0&1\\0&1&1&0\end{bmatrix}$$

传递闭包矩阵：$\mathbf{M_t=M^1+M^2+M^3+\ldots=}$

$$\mathbf{M^2}=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&0&0&1\\0&1&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&0&0&1\\0&1&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&1\\0&1&0&0\\1&0&1&0\end{bmatrix}$$

7.5 关系的闭包

$$M^3=M^2M=\begin{bmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&1\\0&1&0&0\\1&0&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&0&0&1\\0&1&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1&0&1\\1&1&1&0\\1&0&1&0\\0&1&0&1\end{bmatrix}$$

$$M^4=M^3M=\begin{bmatrix}0&1&0&1\\1&1&1&0\\1&0&1&0\\0&1&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&0&0&1\\0&1&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&1&0\\1&1&1&1\\0&1&0&1\\1&1&1&0\end{bmatrix}$$

$$M^5=M^4M=\begin{bmatrix}1&1&1&0\\1&1&1&1\\0&1&0&1\\1&1&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&0&0&1\\0&1&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&0\\1&1&1&1\end{bmatrix}$$

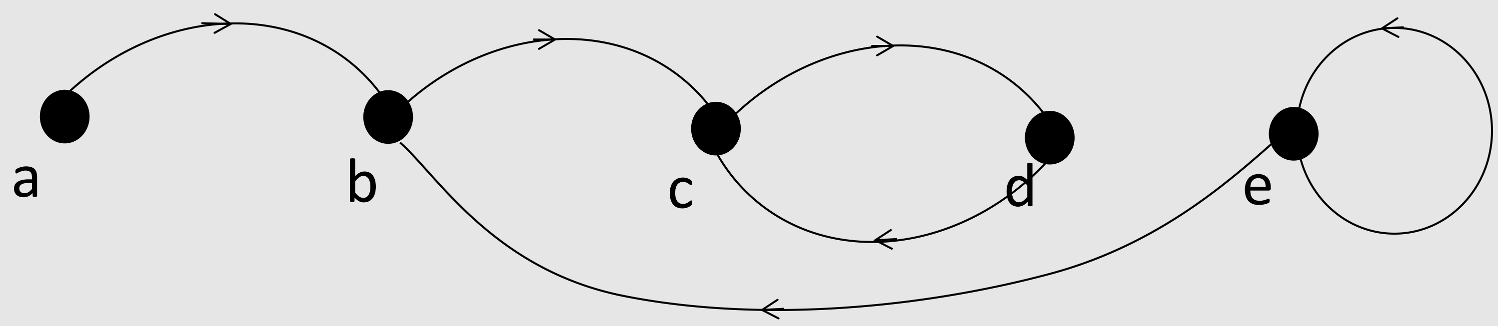
$$\mathbf{M}^6 = \mathbf{M}^5\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}^7 = \mathbf{M}^6\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{M}^6$$

即 $\mathbf{M}^i=\mathbf{M}^6$，$i \geq 7$

传递闭包矩阵：$\mathbf{M}_t=\mathbf{M}^1+\mathbf{M}^2+\mathbf{M}^3+\ldots\mathbf{M}^6=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

测验6 设R的关系图如下图所示，给出自反闭包r(R)，对称闭包s(R)和传递闭包t(R)的关系矩阵。



闭包的构造方法——关系图

设关系R, $r(R)$的关系图分别记为G, G_r, 则G_r的顶点集与G 的顶点集相等. 除了G 的边以外, 以下述方法添加新边:

G_r :考察G的每个顶点, 如果没有环就加上一个环，最终得到G_r.

闭包的构造方法——关系图

设关系R, $s(R)$的关系图分别记为G, G_s, 则G_s的顶点集与G的顶点集相等. 除了G的边以外, 以下述方法添加新边:

G_s :考察G的每条边, 如果有一条 x_i 到 x_j 的单向边, $i \neq j$, 则在G中加一条 x_j 到 x_i 的反方向边，最终得到G_s.

闭包的构造方法——关系图

设关系R,$t(R)$的关系图分别记为G，G_t, 则G_t的顶点集与G的顶点集相等. 除了G的边以外, 以下述方法添加新边:

G_t：考察G的每个顶点 x_i, 找从 x_i出发的所有2,3,...,n步长的路径，设路径终点为 x_{j1} , x_{j2},.., x_{jn} ,如果没有从 x_i到x_{jk}(k=1,2,...,n)的边，就加上这条边. 当检查完所有的顶点后就得到图G_t.

闭包的构造方法——关系图

设关系R, $r(R)$, $s(R)$, $t(R)$的关系图分别记为G, G_r, G_s, G_t，则G_r, G_s, G_t的顶点集与G的顶点集相等. 除了G的边以外, 以下述方法添加新边：

G_r:考察G的每个顶点, 如果没有环就加上一个环，最终得到G_r.

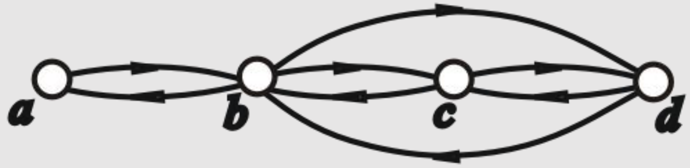
G_s:考察G的每条边, 如果有一条x_i到x_j的单向边, $i \neq j$, 则在G中加一条x_j到x_i的反方向边，最终得到G_s.

G_t:考察G的每个顶点x_i, 找从x_i出发的所有2,3,...,n步长的路径，设路径终点为x_{j1}, x_{j2},..., x_{jn}，如果没有从x_i到x_{jk}(k=1,2,...,n)的边，就加上这条边. 当检查完所有的顶点后就得到图G_t.

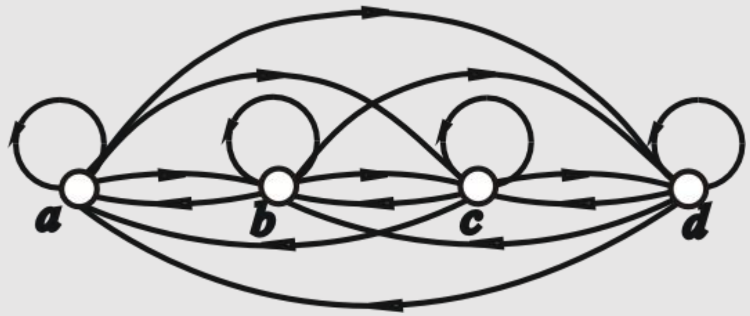
例7.15 设$A=\{a,b,c,d\}$, $R=\{<a,b>,<b,a>,<b,c>,<c,d>,<d,b>\}$, 求$R$和 $r(R)$, $s(R)$, $t(R)$的关系图.

R

$r(R)$

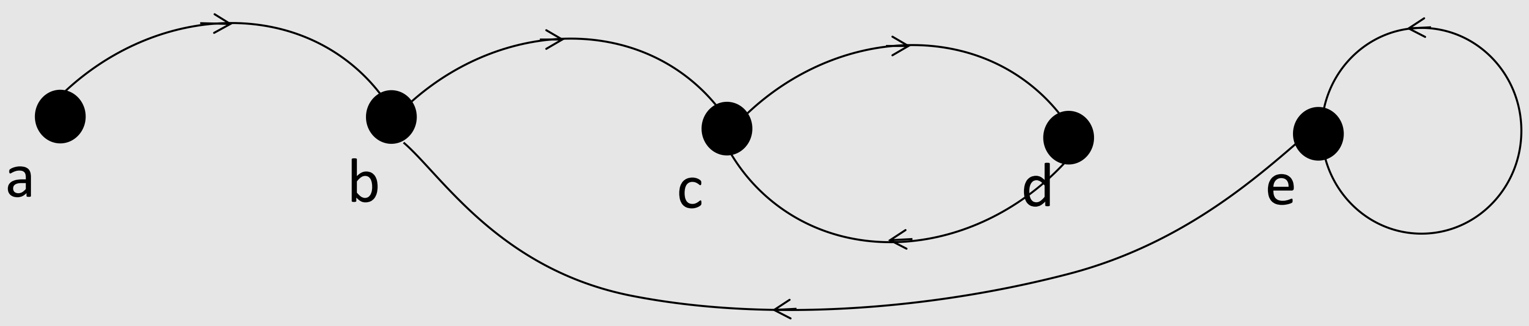


$s(R)$



$t(R)$

测验7 设R的关系图如下图所示，给出自反闭包r(R)，对称闭包s(R)和传递闭包t(R)的关系图。



定理7.11 设R为非空集合A上的关系, 则有

(1) R是自反的当且仅当$r(R) = R$

(2) R是对称的当且仅当$s(R) = R$

(3) R是传递的当且仅当$t(R) = R$

定理7.11 设R为非空集合A上的关系, 则有

(4) 若R是自反的，则$r(R)$、$s(R)$与$t(R)$也是自反的

(5) 若R是对称的，则$s(R)$、$r(R)$与$t(R)$也是对称的

(6) 若R是传递的，则$r(R)$也是传递的

定理7.12 设R_1和R_2为非空集合A上的关系, 且$R_1 \subseteq R_2$, 则有

(1) $r(R_1) \subseteq r(R_2)$

(2) $s(R_1) \subseteq s(R_2)$

(3) $t(R_1) \subseteq t(R_2)$

定义 R的自反、对称、传递闭包记为

$$tsr(R)=t(s(r(R)))$$

作业

习题 7（P139 ）

25

+三个闭包的关系矩阵。