第二章

命题逻辑等值演算

目录

Catalogue

2.1 等值式

设公式A，B中共含有命题变项p_1，$p_2,\ldots,p_n$,而A或B不全含这些命题变项。

例 A中不含有p_i，$p_{i+1},\ldots,p_n$，$i \geq 2$，这些命题变项为A的哑元。

2.1 等值式

设公式A，B 共同含有n个命题变项，A或B可能有哑元。若A与B有相同的真值表，则说明在所有2^n个赋值下，A与B的真值都相同，因此等价式$A \leftrightarrow B$是重言式。

定义 设A，B是两个命题公式，若等价式$A \leftrightarrow B$是重言式，则称A与B**等值**，记作$A \Leftrightarrow B$。

说明：（1）$\Leftrightarrow$不是联结符；

（2）定义中，$A,B,\Leftrightarrow$均为元语言符号, A或B中可能有哑元出现；

（3）最直接的方法使用真值表判断$A \leftrightarrow B$是否为重言式.

2.1 等值式

例 判断下面两个公式是否等值

$$\neg(p\vee q) \text{与} \neg p\wedge \neg q$$

解： 用真值表判断$(\neg(p\vee q))\leftrightarrow(\neg p\wedge \neg q)$是否为重言式

p q	$\neg p$	$\neg q$	$p\vee q$	$\neg(p\vee q)$	$\neg p\wedge\neg q$	$(\neg(p\vee q))\leftrightarrow(\neg p\wedge\neg q)$
0 0	1	1	0	1	1	1
0 1	1	0	1	0	0	1
1 0	0	1	1	0	0	1
1 1	0	0	1	0	0	1

当命题变项较多时，工作量是很大的

2.1 等值式

利用已知的等值式通过代换得到新的等值式。

16组常用的重要等值式模式，其中A是任意的命题公式。

1. 双重否定律：$\neg\neg A \Leftrightarrow A$
2. 幂等律: $A\vee A \Leftrightarrow A$，$A\wedge A \Leftrightarrow A$
3. 交换律: $A\vee B \Leftrightarrow B\vee A$，$A\wedge B \Leftrightarrow B\wedge A$
4. 结合律: $(A\vee B)\vee C \Leftrightarrow A\vee(B\vee C)$

   $(A\wedge B)\wedge C \Leftrightarrow A\wedge(B\wedge C)$
5. 分配律: $A\vee(B\wedge C) \Leftrightarrow (A\vee B)\wedge(A\vee C)$

   $A\wedge(B\vee C) \Leftrightarrow (A\wedge B)\vee(A\wedge C)$
6. 德·摩根律: $\neg(A\vee B) \Leftrightarrow \neg A\wedge\neg B$

   $\neg(A\wedge B) \Leftrightarrow \neg A\vee\neg B$
7. 吸收律: $A\vee(A\wedge B) \Leftrightarrow A$，$A\wedge(A\vee B) \Leftrightarrow A$
8. 零律: $A\vee 1 \Leftrightarrow 1$，$A\wedge 0 \Leftrightarrow 0$

9. 同一律: $A \vee 0 \Leftrightarrow A$, $A \wedge 1 \Leftrightarrow A$

10. 排中律: $A \vee \neg A \Leftrightarrow 1$

11. 矛盾律: $A \wedge \neg A \Leftrightarrow 0$

12. 蕴涵等值式: $A \rightarrow B \Leftrightarrow \neg A \vee B$

13. 等价等值式: $A \leftrightarrow B \Leftrightarrow (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$

14. 假言易位: $A \rightarrow B \Leftrightarrow \neg B \rightarrow \neg A$

15. 等价否定等值式: $A \leftrightarrow B \Leftrightarrow \neg A \leftrightarrow \neg B$

16. 归谬论: $(A \rightarrow B) \wedge (A \rightarrow \neg B) \Leftrightarrow \neg A$

注意: （1）A,B,C代表任意的命题公式

（2）牢记这些等值式是继续学习的基础

等值演算与置换规则

代入实例:

用具体的公式来替换元语言符号得到的等值式

等值演算:

由已知的等值式推演出新的等值式的过程

置换规则:

设$\Phi(A)$ 是含公式A的命题公式若$A \Leftrightarrow B$, 则$\Phi(B) \Leftrightarrow \Phi(A)$

等值演算的基础:

(1) 等值关系的性质：自反、对称、传递

(2) 基本的等值式

(3) 置换规则

2.1 等值式

说明：等值演算法可以验证两个公式等值。但一般情况下，不能用等值演算法直接验证两个公式不等值。

例 证明 $p\to(q\to r) \Leftrightarrow (p\wedge q)\to r$

证 $p\to(q\to r)$

$\Leftrightarrow \neg p\vee(\neg q\vee r)$ （蕴涵等值式，置换规则）

$\Leftrightarrow (\neg p\vee\neg q)\vee r$ （结合律，置换规则）

$\Leftrightarrow \neg(p\wedge q)\vee r$ （德·摩根律，置换规则）

$\Leftrightarrow (p\wedge q)\to r$ （蕴涵等值式，置换规则）

2.1 等值式

1. $\neg\neg A \Leftrightarrow A$
2. $A\vee A \Leftrightarrow A$, $A\wedge A \Leftrightarrow A$
3. $A\vee B \Leftrightarrow B\vee A$, $A\wedge B \Leftrightarrow B\wedge A$
4. $(A\vee B)\vee C \Leftrightarrow A\vee(B\vee C)$
   $(A\wedge B)\wedge C \Leftrightarrow A\wedge(B\wedge C)$
5. $A\vee(B\wedge C) \Leftrightarrow (A\vee B)\wedge(A\vee C)$
   $A\wedge(B\vee C) \Leftrightarrow (A\wedge B)\vee(A\wedge C)$
6. $\neg(A\vee B) \Leftrightarrow \neg A\wedge\neg B$
   $\neg(A\wedge B) \Leftrightarrow \neg A\vee\neg B$
7. $A\vee(A\wedge B) \Leftrightarrow A$, $A\wedge(A\vee B) \Leftrightarrow A$
8. $A\vee 1 \Leftrightarrow 1$, $A\wedge 0 \Leftrightarrow 0$
9. $A\vee 0 \Leftrightarrow A$, $A\wedge 1 \Leftrightarrow A$
10. $A\vee\neg A \Leftrightarrow 1$
11. $A\wedge\neg A \Leftrightarrow 0$
12. $A\rightarrow B \Leftrightarrow \neg A\vee B$
13. $A\leftrightarrow B \Leftrightarrow (A\rightarrow B)\wedge(B\rightarrow A)$
14. $A\rightarrow B \Leftrightarrow \neg B\rightarrow\neg A$
15. $A\leftrightarrow B \Leftrightarrow \neg A\leftrightarrow\neg B$
16. $(A\rightarrow B)\wedge(A\rightarrow\neg B) \Leftrightarrow \neg A$

练 用等值演算法判断下列公式的类型

(1) $q\wedge\neg(p\to q)$；

(2) $(p\to q)\leftrightarrow(\neg q\to\neg p)$；

(3) $((p\wedge q)\vee(p\wedge\neg q))\wedge r$.

解 $q\wedge\neg(p\to q)$

$\Leftrightarrow q\wedge\neg(\neg p\vee q)$ （蕴涵等值式）

$\Leftrightarrow q\wedge(p\wedge\neg q)$ （德·摩根律）

$\Leftrightarrow p\wedge(q\wedge\neg q)$ （交换律，结合律）

$\Leftrightarrow p\wedge 0$ （矛盾律）

$\Leftrightarrow 0$ （零律）

由最后一步可知，该式为矛盾式.

(2) $(p\to q)\leftrightarrow(\neg q\to\neg p)$

解 $(p\to q)\leftrightarrow(\neg q\to\neg p)$

$\Leftrightarrow (\neg p\vee q)\leftrightarrow(q\vee\neg p)$ （蕴涵等值式）

$\Leftrightarrow (\neg p\vee q)\leftrightarrow(\neg p\vee q)$ （交换律）

$\Leftrightarrow 1$

由最后一步可知，该式为重言式.

2.1 等值式

(3) $((p\wedge q)\vee(p\wedge\neg q))\wedge r$

$\Leftrightarrow (p\wedge(q\vee\neg q))\wedge r$ （分配律）

$\Leftrightarrow p\wedge 1\wedge r$ （排中律）

$\Leftrightarrow p\wedge r$ （同一律）

利用真值表法判断该式类型为可满足式.

总结：A为矛盾式当且仅当$A\Leftrightarrow 0$

A为重言式当且仅当$A\Leftrightarrow 1$

说明：演算步骤不惟一, 应尽量使演算短些

例2.6 在某次研讨会的中间休息时间，3名与会者根据王教授的口音对他是哪个省市的人判断如下：

甲：王教授不是苏州人，是上海人

乙：王教授不是上海人，是苏州人

丙：王教授既不是上海人，也不是杭州人

听完这3个人的判断后，王教授笑着说，你们3个人中有一人说得全对，有一人说对了一半，另一个人说得全不对。

试用逻辑演算分析王教授到底是哪里人。

作业

习题 2 （P42）

4（2,3）

目录

Catalogue

2.2 析取范式与合取范式

文字:命题变项及其否定的总称

简单析取式:有限个文字构成的析取式

如 $p, \neg q, p\vee\neg q, p\vee q\vee r, \ldots$

设A是含有n个文字的**简单析取式**，若A中即含有某个命题变项p，又含有它的否定式$\neg p$，则A为**重言式**；反之，若A为重言式，它必同时含某个命题变项及它的否定式。

简单合取式:有限个文字构成的合取式

如 $p, \neg q, p\wedge\neg q, p\wedge q\wedge r, \ldots$

设A是含有n个文字的**简单合取式**，若A中即含有某个命题变项p，又含有它的否定式$\neg p$，则A为**矛盾式**；反之，若A为矛盾式，它必同时含某个命题变项及它的否定式。

2.2 析取范式与合取范式

析取范式:由有限个简单合取式组成的析取式

$A_1 \vee A_2 \vee \ldots \vee A_r$, 其中$A_1, A_2, \ldots, A_r$是简单合取式

如 $(p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge r) \vee (q \wedge r)$

合取范式:由有限个简单析取式组成的合取式

$A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_r$, 其中$A_1, A_2, \ldots, A_r$是简单析取式

如 $(p \vee r) \wedge (\neg q \vee r) \wedge (\neg p \vee q \vee \neg r)$

范式:析取范式与合取范式的总称

定理

1）一个析取范式是矛盾式当且仅当它的每个简单合取式都是矛盾式;

2）一个合取范式是重言式当且仅当它的每个简单析取式都是重言式。

2.2 析取范式与合取范式

公式A的析取范式: 与A等值的析取范式

公式A的合取范式: 与A等值的合取范式

说明:

单个文字既是简单析取式，又是简单合取式

例 $p\wedge\neg q\wedge r$, $\neg p\vee q\vee\neg r$

既是析取范式，又是合取范式

2.2 析取范式与合取范式

定理 任何命题公式都存在着与之等值的析取范式与合取范式.

求公式A的范式的步骤:

(1) 消去A中的$\rightarrow$, $\leftrightarrow$（若存在）

(2) 否定联结词$\neg$的内移或消去

(3) 使用分配律

$\wedge$对$\vee$分配（析取范式）

$\vee$对$\wedge$分配（合取范式）

说明：公式的范式存在，但不惟一

例 求下列公式的析取范式与合取范式

$A=(p\to\neg q)\vee\neg r$

解 $(p\to\neg q)\vee\neg r$

$\Leftrightarrow (\neg p\vee\neg q)\vee\neg r$ （消去→）

$\Leftrightarrow \neg p\vee\neg q\vee\neg r$ （结合律）

说明：这既是A的析取范式（由3个简单合取式组成的析取式），又是A的合取范式（由一个简单析取式组成的合取式）

例2.7 求下列公式的析取范式与合取范式

$$(p\rightarrow q)\leftrightarrow r$$

解 （1）先求合取范式

$(p\rightarrow q)\leftrightarrow r$

$\Leftrightarrow (\neg p\vee q)\leftrightarrow r$ （消去→）

$\Leftrightarrow ((\neg p\vee q)\rightarrow r)\wedge(r\rightarrow(\neg p\vee q))$ （消去↔）

$\Leftrightarrow (\neg(\neg p\vee q)\vee r)\wedge(\neg r\vee(\neg p\vee q))$ （消去→）

$\Leftrightarrow ((p\wedge\neg q)\vee r)\wedge(\neg r\vee\neg p\vee q)$ （否定符内移）

$\Leftrightarrow ((p\vee r)\wedge(\neg q\vee r))\wedge(\neg p\vee q\vee\neg r)$ （∨对∧的分配率）

$\Leftrightarrow (p\vee r)\wedge(\neg q\vee r)\wedge(\neg p\vee q\vee\neg r)$

例2.7 求下列公式的析取范式与合取范式

$$(p\to q)\leftrightarrow r$$

（2）求析取范式

$(p\to q)\leftrightarrow r$

$\Leftrightarrow ((p\wedge\neg q)\vee r)\wedge(\neg p\vee q\vee\neg r)$

$\Leftrightarrow ((p\wedge\neg q)\wedge(\neg p\vee q\vee\neg r)) \vee (r\wedge(\neg p\vee q\vee\neg r))$

$\Leftrightarrow (p\wedge\neg q\wedge\neg p)\vee(p\wedge\neg q\wedge q)\vee(p\wedge\neg q\wedge\neg r)$

$\vee(r\wedge\neg p)\vee(r\wedge q)\vee(r\wedge\neg r)$

$\Leftrightarrow 0\vee 0\vee(p\wedge\neg q\wedge\neg r)\vee(r\wedge\neg p)\vee(r\wedge q)\vee 0$

$\Leftrightarrow (p\wedge\neg q\wedge\neg r)\vee(\neg p\wedge r)\vee(q\wedge r)$

练 求下列公式的析取范式与合取范式

$B=(p\rightarrow\neg q)\rightarrow r$

解 $(p\rightarrow\neg q)\rightarrow r$

$\Leftrightarrow (\neg p\vee\neg q)\rightarrow r$ （消去第一个→）

$\Leftrightarrow \neg(\neg p\vee\neg q)\vee r$ （消去第二个→）

$\Leftrightarrow (p\wedge q)\vee r$ （否定号内移——德·摩根律）

这一步已为析取范式（两个简单合取式构成）

继续： $(p\wedge q)\vee r$

$\Leftrightarrow (p\vee r)\wedge(q\vee r)$ （∨对∧分配律）

这一步得到合取范式（由两个简单析取式构成）

2.2 析取范式与合取范式

定义 在含有n个命题变项的简单合取式(简单析取式)中，若每个命题变项均以文字的形式出现且仅出现一次，称这样的简单合取式(简单析取式)为极小项(极大项)．

说明：
- n个命题变项产生2^n个极小项和2^n个极大项
- 2^n个极小项（极大项）均互不等值
- 在极小项和极大项中文字均按下标或字母顺序排列
- 用m_i表示第i个极小项，其中i是该极小项成真赋值的十进制表示. 用M_i表示第i个极大项，其中i是该极大项成假赋值的十进制表示, m_i(M_i)称为极小项(极大项)的名称.

由p, q两个命题变项形成的极小项与极大项

极小项			极大项		
公式	成真赋值	名称	公式	成假赋值	名称
$\neg p \wedge \neg q$	0 0	m_0	$p \vee q$	0 0	M_0
$\neg p \wedge q$	0 1	m_1	$p \vee \neg q$	0 1	M_1
$p \wedge \neg q$	1 0	m_2	$\neg p \vee q$	1 0	M_2
$p \wedge q$	1 1	m_3	$\neg p \vee \neg q$	1 1	M_3

由p, q, r三个命题变项形成的极小项与极大项

极小项			极大项		
公式	成真赋值	名称	公式	成假赋值	名称
$\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r$	0 0 0	m_0	$p \vee q \vee r$	0 0 0	M_0
$\neg p \wedge \neg q \wedge r$	0 0 1	m_1	$p \vee q \vee \neg r$	0 0 1	M_1
$\neg p \wedge q \wedge \neg r$	0 1 0	m_2	$p \vee \neg q \vee r$	0 1 0	M_2
$\neg p \wedge q \wedge r$	0 1 1	m_3	$p \vee \neg q \vee \neg r$	0 1 1	M_3
$p \wedge \neg q \wedge \neg r$	1 0 0	m_4	$\neg p \vee q \vee r$	1 0 0	M_4
$p \wedge \neg q \wedge r$	1 0 1	m_5	$\neg p \vee q \vee \neg r$	1 0 1	M_5
$p \wedge q \wedge \neg r$	1 1 0	m_6	$\neg p \vee \neg q \vee r$	1 1 0	M_6
$p \wedge q \wedge r$	1 1 1	m_7	$\neg p \vee \neg q \vee \neg r$	1 1 1	M_7

2.2 析取范式与合取范式

定理 m_i与M_i的关系： $\neg m_i \Leftrightarrow M_i$， $\neg M_i \Leftrightarrow m_i$

主析取范式：由极小项构成的析取范式
主合取范式：由极大项构成的合取范式

例如，n=3, 命题变项为p, q, r时，

$(\neg p\wedge\neg q\wedge r)\vee(\neg p\wedge q\wedge r) \Leftrightarrow m_1\vee m_3$ 是主析取范式

$(p\vee q\vee\neg r)\wedge(\neg p\vee q\vee\neg r) \Leftrightarrow M_1\wedge M_5$ 是主合取范式

A的主析取范式：与A等值的主析取范式
A的主合取范式：与A等值的主合取范式.

定理 任何命题公式都存在着与之等值的主析取范式和主合取范式, 并且是**唯一**的.

用等值演算法求公式的主范式的步骤:

(1) 先求析取范式（合取范式）

(2) 将不是极小项（极大项）的简单合取式（简单析取式）化成与之等值的若干个极小项的析取（极大项的合取），需要利用同一律（零律）、排中律（矛盾律）、分配律、幂等律等.

(3) 极小项（极大项）用名称m_i（M_i）表示，并按角标从小到大顺序排序.

例2.8 求例2.7中公式的主析取范式和主合取范式。

解 (1)求主析取范式

在例2.7中已给出公式的析取范式

$$(p\rightarrow q)\leftrightarrow r$$

$$\Leftrightarrow (p\wedge\neg q\wedge\neg r)\vee(\neg p\wedge r)\vee(q\wedge r)$$

$$\Leftrightarrow (p\wedge\neg q\wedge\neg r)\vee(\neg p\wedge 1\wedge r)\vee(1\wedge q\wedge r)$$

$$\Leftrightarrow (p\wedge\neg q\wedge\neg r)\vee(\neg p\wedge(q\vee\neg q)\wedge r)\vee((p\vee\neg p)\wedge q\wedge r)$$

$$\Leftrightarrow (p\wedge\neg q\wedge\neg r)\vee(\neg p\wedge q\wedge r)\vee(\neg p\wedge\neg q\wedge r)\vee(p\wedge q\wedge r)\vee(\neg p\wedge q\wedge r)$$

$$\Leftrightarrow (p\wedge\neg q\wedge\neg r)\vee(\neg p\wedge q\wedge r)\vee(\neg p\wedge\neg q\wedge r)\vee(p\wedge q\wedge r)$$

$$\Leftrightarrow m_4\vee m_3\vee m_1\vee m_7$$

$$\Leftrightarrow m_1\vee m_3\vee m_4\vee m_7$$

(2)求主合取范式

$$(p\to q)\leftrightarrow r$$

$$\Leftrightarrow (p\vee r)\wedge(\neg q\vee r)\wedge(\neg p\vee q\vee\neg r)$$

$$\Leftrightarrow (p\vee 0\vee r)\wedge(0\vee\neg q\vee r)\wedge(\neg p\vee q\vee\neg r)$$

$$\Leftrightarrow (p\vee(q\wedge\neg q)\vee r)\wedge((p\wedge\neg p)\vee\neg q\vee r)\wedge(\neg p\vee q\vee\neg r)$$

$$\Leftrightarrow (p\vee q\wedge\vee r)\wedge(p\vee\neg q\vee r)$$

$$\wedge(p\vee\neg q\vee r)\wedge(\neg p\vee\neg q\vee r)\wedge(\neg p\vee q\vee\neg r)$$

$$\Leftrightarrow (p\vee q\vee r)\wedge(p\vee\neg q\vee r)\wedge(\neg p\vee\neg q\vee r)\wedge(\neg p\vee q\vee\neg r)$$

$$\Leftrightarrow M_0\wedge M_2\wedge M_6\wedge M_5$$

$$\Leftrightarrow M_0\wedge M_2\wedge M_5\wedge M_6$$

练 求公式$B=(p\to\neg q)\to r$的主析取范式与主合取范式.

(1) 求主析取范式

$(p\to\neg q)\to r$

$\Leftrightarrow (p\wedge q)\vee r$,（析取范式） ①

$(p\wedge q)$

$\Leftrightarrow (p\wedge q)\wedge(\neg r\vee r)$

$\Leftrightarrow (p\wedge q\wedge\neg r)\vee(p\wedge q\wedge r)$

$\Leftrightarrow m_6\vee m_7$, ②

2.2 析取范式与合取范式

r

$\Leftrightarrow(\neg p \vee p) \wedge(\neg q \vee q) \wedge r$

$\Leftrightarrow(\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee(\neg p \wedge q \wedge r) \vee(p \wedge \neg q \wedge r) \vee(p \wedge q \wedge r)$

$\Leftrightarrow m_1 \vee m_3 \vee m_5 \vee m_7$ ③

②, ③代入①并排序，得

$(p \to \neg q) \to r \Leftrightarrow m_1 \vee m_3 \vee m_5 \vee m_6 \vee m_7$（主析取范式）

(2) 求B的主合取范式

$(p\to\neg q)\to r$

$\Leftrightarrow (p\vee r)\wedge(q\vee r)$ ，　　（合取范式）　　①

$p\vee r$

$\Leftrightarrow p\vee(q\wedge\neg q)\vee r$

$\Leftrightarrow (p\vee q\vee r)\wedge(p\vee\neg q\vee r)$

$\Leftrightarrow M_0\wedge M_2$ ，　　②

$q \vee r$

$\Leftrightarrow (p \wedge \neg p) \vee q \vee r$

$\Leftrightarrow (p \vee q \vee r) \wedge (\neg p \vee q \vee r)$

$\Leftrightarrow M_0 \wedge M_4$ ③

②, ③代入①并排序，得

$(p \rightarrow \neg q) \rightarrow r \Leftrightarrow M_0 \wedge M_2 \wedge M_4$ （主合取范式）

主范式的用途——与真值表相同

(1) 求公式的成真赋值和成假赋值

例如 $(p\to\neg q)\to r \Leftrightarrow m_1\vee m_3\vee m_5\vee m_6\vee m_7$，

其成真赋值为001, 011, 101, 110, 111，

其余的赋值 000, 010, 100为成假赋值.

类似地，由主合取范式也可立即求出成假赋值和成真赋值.

(2) 判断公式的类型

设A含n个命题变项，则

A为**重言式**$\Leftrightarrow A$的主析取范式含2^n个极小项

$\Leftrightarrow A$的主合取范式为1.

A为**矛盾式**$\Leftrightarrow A$的主析取范式为0

$\Leftrightarrow A$的主合取范式含2^n个极大项

A为非重言式的**可满足式**

$\Leftrightarrow A$的主析取范式中至少含一个且不含全部极小项

$\Leftrightarrow A$的主合取范式中至少含一个且不含全部极大项

(3) 判断两个公式是否等值

例 用主析取范式判断下述两个公式是否等值:

(1) $p\to(q\to r)$ 与 $(p\wedge q)\to r$

(2) $p\to(q\to r)$ 与 $(p\to q)\to r$

解 $p\to(q\to r) \Leftrightarrow m_0\vee m_1\vee m_2\vee m_3\vee m_4\vee m_5\vee m_7$

$(p\wedge q)\to r \Leftrightarrow m_0\vee m_1\vee m_2\vee m_3\vee m_4\vee m_5\vee m_7$

$(p\to q)\to r \Leftrightarrow m_1\vee m_3\vee m_4\vee m_5\vee m_7$

故(1)中的两公式等值，而(2)的不等值.

说明:

1）由公式A的主析取范式确定它的主合取范式，反之亦然.

2）用公式A的真值表求A的主范式.

应用主析取范式分析和解决实际问题。

例2.12

解此类问题的步骤为：

① 将简单命题符号化

② 写出各复合命题

③ 写出由②中复合命题组成的合取式/析取式

④ 求③中所得公式的主析取范式/主合取范式

例2.12 某科研所要从三名科研骨干ABC中挑选1~2名出国进修，由于工作需求，选派时要满足以下条件：

(1)若A去，则C同去

(2)若B去，则C不能去

(3)若C不去，则A或B可以去

问所里有哪些选派方案？

解 设 p：派A去

q：派B去

r：派C去

由已知条件可得公式

$$(p\to r)\wedge(q\to\neg r)\wedge(\neg r\to(p\vee q))$$

该公式的成真赋值即为可行的选派方案。

2.2 析取范式与合取范式

$$(p\to r)\wedge(q\to\neg r)\wedge(\neg r\to(p\vee q))$$

$$\Leftrightarrow (\neg p\vee r)\wedge(\neg q\vee\neg r)\wedge(r\vee(p\vee q))$$

$$\Leftrightarrow (\neg p\vee r)\wedge(((\neg q\vee\neg r)\wedge r)\vee((\neg q\vee\neg r)\wedge p)\vee((\neg q\vee\neg r)\wedge q))$$

$$\Leftrightarrow (\neg p\vee r)\wedge((\neg q\wedge r)\vee(\neg r\wedge r)\vee(\neg q\wedge p)\vee(\neg r\wedge p)\vee(\neg q\wedge q)\vee(\neg r\wedge q))$$

$$\Leftrightarrow (\neg p\vee r)\wedge((\neg q\wedge r)\vee 0\vee(p\wedge\neg q)\vee(p\wedge\neg r)\vee 0\vee(q\wedge\neg r))$$

$$\Leftrightarrow (\neg p\wedge\neg q\wedge r)\vee(\underline{\neg p\wedge p}\wedge\neg q)\vee(\underline{\neg p\wedge p}\wedge\neg r)\vee(\neg p\wedge q\wedge\neg r)\vee$$
$$(\neg q\wedge r\wedge r)\vee(p\wedge\neg q\wedge r)\vee(p\wedge\underline{\neg r\wedge r})\vee(q\wedge\underline{\neg r\wedge r})$$

$$\Leftrightarrow (\neg p\wedge\neg q\wedge r)\vee 0\vee 0\vee(\neg p\wedge q\wedge\neg r)\vee(\neg q\wedge r)\vee(p\wedge\neg q\wedge r)\vee 0\vee 0$$

$$\Leftrightarrow (\neg p\wedge q\wedge\neg r)\vee(\neg p\wedge\neg q\wedge r)\vee(p\wedge\neg q\wedge r)\vee(\neg q\wedge r)$$

$$\Leftrightarrow (\neg p\wedge q\wedge\neg r)\vee(\neg p\wedge\neg q\wedge r)\vee(p\wedge\neg q\wedge r)$$

$$\Leftrightarrow m_1\vee m_2\vee m_5$$

$$(p\rightarrow r)\wedge(q\rightarrow\neg r)\wedge(\neg r\rightarrow(p\vee q))$$

$$\Leftrightarrow (\neg p\wedge q\wedge\neg r)\vee(\neg p\wedge\neg q\wedge r)\vee(p\wedge\neg q\wedge r)$$

$$\Leftrightarrow m_1\vee m_2\vee m_5$$

成真赋值为选派方案

010，001，101

即**B**去，**AC**不去

C去，**AB**不去

AC同去，**B**不去

2.2 析取范式与合取范式

测验2 某公司要从赵、钱、孙、李、周五名新毕业的大学生中选派一些人出国学习. 选派必须满足以下条件:

(1)若赵去，钱也去;

(2)李、周两人中至少有一人去;

(3)钱、孙两人中有一人去且仅去一人;

(4)孙、李两人同去或同不去;

(5)若周去，则赵、钱也去.

试用主析取范式法分析该公司如何选派他们出国?

作业

习题 2 （P42）

7（1）

8（2）

12

目录

Catalogue

2.3 联结词的完备集

定义 称F：$\{0, 1\}^n \to \{0, 1\}$为n元真值函数。

F的**自变量**为n个命题变项，

定义域：$\{0, 1\}^n$={00…0,00…1,…,11…1}，即由0，1组成的长为n的符号串的全体

值域：$\{0, 1\}$

n个命题变项共可构成2^{2^n}个不同的真值函数

p	$F_0^{(1)}$	$F_1^{(1)}$	$F_2^{(1)}$	$F_3^{(1)}$
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

2.3 联结词的完备集

定义 设S是一个联结词集合，如果任何$n(n\geq 1)$ 元真值函数都可以由仅含S中的联结词构成的公式表示，则称S是联结词完备集.

说明：

1）若S是联结词完备集，则任何命题公式都可用S中的联结词表示.

2）设S_1, S_2是两个联结词集合，且$S_1 \subseteq S_2$. 若S_1是完备集，则S_2也是完备集. 反之，若S_2不是完备集，则S_1也不是完备集.

2.3 联结词的完备集

定理 $S=\{\neg, \wedge, \vee\}$是联结词完备集.

推论 以下联结词集都是联结词完备集

$S_1=\{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow\}$

$S_2=\{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$

$S_3=\{\neg, \wedge\}$

$S_4=\{\neg, \vee\}$

$S_5=\{\neg, \rightarrow\}$

说明：$\{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$不是联结词完备集，进而它的任何子集都不是连接词完备集。

复合联结词

与非式：$p \uparrow q \Leftrightarrow \neg(p \wedge q)$

或非式：$p \downarrow q \Leftrightarrow \neg(p \vee q)$

说明：
1）$p \uparrow q$为真当且仅当p、q不同时为真；
2）$p \downarrow q$为真当且仅当p、q同时为假。

定理 $\{\uparrow\}$, $\{\downarrow\}$是联结词完备集.

2.3 联结词的完备集

↑和↓与¬, ∧, ∨有下述关系：

$$\neg p \Leftrightarrow \neg(p \wedge p) \Leftrightarrow p \uparrow p$$

$$p \wedge q \Leftrightarrow \neg\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg(p \uparrow q) \Leftrightarrow (p \uparrow q) \uparrow (p \uparrow q)$$

$$p \vee q \Leftrightarrow \neg(\neg p \wedge \neg q) \Leftrightarrow (\neg p) \uparrow (\neg q) \Leftrightarrow (p \uparrow p) \uparrow (q \uparrow q)$$

$$\neg p \Leftrightarrow \neg(p \vee p) \Leftrightarrow p \downarrow p$$

$$p \wedge q \Leftrightarrow \neg(\neg p \vee \neg q) \Leftrightarrow (\neg p) \downarrow (\neg q) \Leftrightarrow (p \downarrow p) \downarrow (q \downarrow q)$$

$$p \vee q \Leftrightarrow \neg\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg(p \downarrow q) \Leftrightarrow (p \downarrow q) \downarrow (p \downarrow q)$$

例 将公式$p\wedge\neg q$化成只含下列各联结词集中的联结词的等值的公式.

(1) $\{\neg, \vee\}$; (2) $\{\neg, \rightarrow\}$; (3) $\{\uparrow\}$; (4) $\{\downarrow\}$.

解 (1) $p\wedge\neg q \Leftrightarrow \neg(\neg p\vee q)$.

(2) $p\wedge\neg q \Leftrightarrow \neg(\neg p\vee q) \Leftrightarrow \neg(p\rightarrow q)$.

(3) $p\wedge\neg q \Leftrightarrow p\wedge(q\uparrow q) \Leftrightarrow \neg(\neg(p\wedge(q\uparrow q)))$

$\Leftrightarrow \neg(p\uparrow(q\uparrow q)) \Leftrightarrow (p\uparrow(q\uparrow q))\uparrow(p\uparrow(q\uparrow q))$.

(4) $p\wedge\neg q \Leftrightarrow \neg(\neg p\vee q) \Leftrightarrow (\neg p)\downarrow q \Leftrightarrow (p\downarrow p)\downarrow q$.