第五章

一阶逻辑等值演算与推理

目录

Catalogue

定义 设A，B是一阶逻辑中任意两个公式，若$A\leftrightarrow B$是永真式，则称A与B是等值的，记作 $A\Leftrightarrow B$，并称$A\Leftrightarrow B$为等值式.

基本等值式:

命题逻辑中16组基本等值式的代换实例

如，$\forall xF(x) \Leftrightarrow \neg\neg\forall xF(x)$

$F(x)\to G(y) \Leftrightarrow \neg F(x)\vee G(y)$

量词否定等值式

设$A(x)$是含x自由出现的公式

$\neg\forall xA(x)\Leftrightarrow \exists x\neg A(x)$

$\neg\exists xA(x)\Leftrightarrow \forall x\neg A(x)$

量词辖域收缩与扩张等值式

设$A(x)$是含x自由出现的公式，B中不含x的出现

关于全称量词的：

$$\forall x(A(x)\vee B)\Leftrightarrow\forall xA(x)\vee B$$
$$\forall x(A(x)\wedge B)\Leftrightarrow\forall xA(x)\wedge B$$
$$\forall x(A(x)\rightarrow B)\Leftrightarrow\exists xA(x)\rightarrow B$$
$$\forall x(B\rightarrow A(x))\Leftrightarrow B\rightarrow\forall xA(x)$$

关于存在量词的：

$$\exists x(A(x)\vee B)\Leftrightarrow\exists xA(x)\vee B$$
$$\exists x(A(x)\wedge B)\Leftrightarrow\exists xA(x)\wedge B$$
$$\exists x(A(x)\rightarrow B)\Leftrightarrow\forall xA(x)\rightarrow B$$
$$\exists x(B\rightarrow A(x))\Leftrightarrow B\rightarrow\exists xA(x)$$

5.1 一阶逻辑等值式与置换规则

量词分配等值式

$$\forall x(A(x)\wedge B(x)) \Leftrightarrow \forall xA(x)\wedge\forall xB(x)$$

$$\exists x(A(x)\vee B(x)) \Leftrightarrow \exists xA(x)\vee\exists xB(x)$$

注意：$\forall$对$\vee$无分配律，$\exists$对$\wedge$无分配律, 即

$$\forall x(A(x)\vee B(x)) \not\Leftrightarrow \forall xA(x)\vee\forall xB(x)$$

$$\exists x(A(x)\wedge B(x)) \not\Leftrightarrow \exists xA(x)\wedge\exists xB(x)$$

5.1 一阶逻辑等值式与置换规则

置换规则：设 $\Phi(A)$ 是含公式A的公式，$\Phi(B)$ 是用公式B取代$\Phi(A)$ 中所有A的后得到的公式。

那么，若$A\Leftrightarrow B$, 则$\Phi(B)\Leftrightarrow\Phi(A)$。

换名规则：将量词辖域中出现的某个约束出现的个体变项及对应的指导变项，改成其他辖域中未曾出现过的个体变项符号，公式中其余部分不变，则所得公式与原来的公式等值.

例 5.1 将下面公式化成等值的公式，使其不含既是约束出现又是自由出现的个体变项。

（1）$\forall x F(x,y,z) \rightarrow \exists y G(x,y,z)$

（2）$\forall x (F(x,y,z) \rightarrow \exists y G(x,y,z))$

解：(1)公式中*x*,*y*都是即约束出现，又自由出现的个体变项，可以通过换名消去这种情况

$\forall x F(x,y,z) \rightarrow \exists y G(x,y,z)$

$\Leftrightarrow \forall s F(s,y,z) \rightarrow \exists y G(x,y,z)$

$\Leftrightarrow \forall s F(s,y,z) \rightarrow \exists t G(x,t,z)$

(2)公式中*y*既有约束出现又有自由出现，需要处理；*x*只有约束出现，*z*只有自由出现，保持不变。

$\forall x (F(x,y,z) \rightarrow \exists y G(x,y,z))$

$\Leftrightarrow \forall x (F(x,y,z) \rightarrow \exists s G(x,s,z))$

当个体域为有限集$D=\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}$，可以消去量词，将

$\forall xA(x)$写为$A(a_1)\wedge A(a_2)\wedge\ldots\wedge A(a_n)$

$\exists xA(x)$写为$A(a_1)\vee A(a_2)\vee\ldots\vee A(a_n)$

例 5.3 设个体域D={a,b,c}，将下列公式的量词消去。

（1）$\forall x(F(x)\rightarrow G(x))$

（2）$\forall x(F(x)\vee\exists yG(y))$

（3）$\exists x\forall yF(x,y)$

解：

（1）$\forall x(F(x)\rightarrow G(x))$

$\Leftrightarrow(F(a)\rightarrow G(a))\wedge(F(b)\rightarrow G(b))\wedge(F(c)\rightarrow G(c))$

（2）$\forall x(F(x)\vee\exists yG(y))$

$\Leftrightarrow\forall xF(x)\vee\exists yG(y)$

$\Leftrightarrow(F(a)\wedge F(b)\wedge F(c))\vee(G(a)\vee G(b)\vee G(c))$

（3）$\exists x\forall yF(x,y)$

$\Leftrightarrow\exists x(\forall yF(x,y))$

$\Leftrightarrow\exists x(F(x,a)\wedge F(x,b)\wedge F(x,c))$

$\Leftrightarrow(F(a,a)\wedge F(a,b)\wedge F(a,c))\vee(F(b,a)\wedge F(b,b)\wedge F(b,c))$

$\vee(F(c,a)\wedge F(c,b)\wedge F(c,c))$

例 5.4 给定解释I如下

(*a*) 个体域 D={2,3}

(*b*) D中特定元素 $\bar{a}=2$

(*c*) D上特定函数 $\bar{f}(x)$: $\bar{f}(2)=3$, $\bar{f}(3)=2$

(*d*) D上特定谓词

$\bar{F}(x)$: $\bar{F}(2)=0$, $\bar{F}(3)=1$

$\bar{\mathrm{G}}(x,y):\bar{\mathrm{G}}(2,2)=\bar{\mathrm{G}}(2,3)=\bar{\mathrm{G}}(3,2)=1$, $\bar{\mathrm{G}}(3,3)=0$

$\bar{L}(x,y):\bar{L}(2,2)=\bar{L}(3,3)=1,\bar{L}(2,3)=\bar{L}(3,2)=0$

求下列各式在 I 的真值 。

(1) $\forall x(F(x)\wedge G(x,a))$

(3) $\forall x\exists yL(x,y)$

5.1 一阶逻辑等值式与置换规则

(1) $\forall x(F(x)\wedge G(x,a))$

$\forall x(F(x)\wedge G(x,2))$

$\Leftrightarrow(F(2)\wedge G(2,2))\wedge(F(3)\wedge G(3,2))$

$\Leftrightarrow(0\wedge 1)\wedge(1\wedge 1)$

$\Leftrightarrow 0$

(3) $\forall x\exists yL(x,y)$

$\Leftrightarrow\forall x(L(x,2)\vee L(x,3))$

$\Leftrightarrow(L(2,2)\vee L(2,3))\wedge(L(3,2)\vee L(3,3))$

$\Leftrightarrow(1\vee 0)\wedge(0\vee 1)$

$\Leftrightarrow 1\wedge 1$

$\Leftrightarrow 1$

例 5.5 证明下列各等值式。

（1）$\neg\exists x(M(x)\wedge F(\mathrm{x}))\Leftrightarrow\forall x(M(x)\rightarrow\neg F(x))$

（2）$\neg\forall x(\mathrm{M}(x)\rightarrow F(x))\Leftrightarrow\exists x(M(x)\wedge\neg F(x))$

（3）$\neg\forall x\forall y(F(x)\wedge G(y)\rightarrow H(x,y))\Leftrightarrow$

$\exists x\exists y(F(x)\wedge G(y)\wedge\neg H(x,y))$

（4）$\neg\exists x\exists y(F(x)\wedge G(y)\wedge L(x,y))\Leftrightarrow$

$\forall x\forall y(F(x)\wedge G(y)\rightarrow\neg L(x,y))$

5.1 一阶逻辑等值式与置换规则

解： （1）$\neg\exists x(M(x)\wedge F(\mathrm{x}))$

$\Leftrightarrow\forall x\neg(M(x)\wedge F(\mathrm{x}))$

$\Leftrightarrow\forall x(\neg M(x)\vee\neg F(\mathrm{x}))$

$\Leftrightarrow\forall x(M(x)\rightarrow\neg F(x))$

（2）$\neg\forall x(\mathrm{M}(x)\rightarrow F(x))$

$\Leftrightarrow\exists x\neg(\mathrm{M}(x)\rightarrow F(x))$

$\Leftrightarrow\exists x\neg(\neg\mathrm{M}(x)\vee F(x))$

$\Leftrightarrow\exists x(\neg\neg M(x)\wedge\neg F(x))$

$\Leftrightarrow\exists x(M(x)\wedge\neg F(x))$

解：（3）$\neg\forall x\forall y(F(x)\wedge G(y)\rightarrow H(x,y))$

$\Leftrightarrow\exists x\neg\forall y(F(x)\wedge G(y)\rightarrow H(x,y))$

$\Leftrightarrow\exists x\exists y\neg(F(x)\wedge G(y)\rightarrow H(x,y))$

$\Leftrightarrow\exists x\exists y\neg(\neg(F(x)\wedge G(y))\vee H(x,y))$

$\Leftrightarrow\exists x\exists y(\neg\neg(F(x)\wedge G(y))\wedge\neg H(x,y))$

$\Leftrightarrow\exists x\exists y(F(x)\wedge G(y)\wedge\neg H(x,y))$

5.1 一阶逻辑等值式与置换规则

解： （4） $\neg\exists x\exists y(F(x)\wedge G(y)\wedge L(x,y))$

$\Leftrightarrow \forall x\neg\exists y(F(x)\wedge G(y)\wedge L(x,y))$

$\Leftrightarrow \forall x\forall y\neg(F(x)\wedge G(y)\wedge L(x,y))$

$\Leftrightarrow \forall x\forall y(\neg(F(x)\wedge G(y))\vee\neg L(x,y))$

$\Leftrightarrow \forall x\forall y(F(x)\wedge G(y)\rightarrow\neg L(x,y))$

作业

习题5（P84）

2(1,4)

5(1)

目录

Catalogue

定义 具有如下形式

$$Q_1x_1Q_2x_2\cdots Q_kx_kB,$$

的一阶逻辑公式称作前束范式,其中Q_i $(1\le i\le k)$为$\forall$或$\exists$，B为不含量词的公式。

例 $\forall x\exists y(F(x)\to(G(y)\land H(x,y)))$

是前束范式；

$\forall x(F(x)\to\exists y(G(y)\land H(x,y)))$

不是前束范式。

定理（前束范式存在定理） 一阶逻辑中的任何公式都存在与之等值的前束范式

求前束范式：使用重要等值式、置换规则、换名规则进行等值演算.

例5.6 求下列公式的前束范式

(1) $\forall xF(x)\wedge\neg\exists xG(x)$

(2) $\forall xF(x)\vee\neg\exists xG(x)$

解：

(1) $\forall xF(x)\wedge\neg\exists xG(x)$

$\Leftrightarrow\forall xF(x)\wedge\forall x\neg G(x)$

$\Leftrightarrow\forall x(F(x)\wedge\neg G(x))$

(2) $\forall xF(x)\vee\neg\exists xG(x)$

$\Leftrightarrow\forall xF(x)\vee\neg\exists yG(y)$

$\Leftrightarrow\forall xF(x)\vee\forall y\neg G(y)$

$\Leftrightarrow\forall x(F(x)\vee\forall y\neg G(y))$

$\Leftrightarrow\forall x\forall y(F(x)\vee\neg G(y))$

练习 求下列公式的前束范式

(1) $\neg\exists x(M(x)\wedge F(x))$

(2) $\exists xF(x)\vee\neg\forall xG(x)$

(3) $\forall xF(x)\rightarrow\exists y(G(x,y)\wedge\neg H(y))$

(4) $\forall x(F(x,y)\rightarrow\exists y(G(x,y)\wedge H(x,z)))$

解：(1) $\neg\exists x(M(x)\wedge F(x))$

$\Leftrightarrow \forall x(\neg M(x)\vee\neg F(x))$ 量词否定等值式

$\Leftrightarrow \forall x(M(x)\rightarrow\neg F(x))$

两步结果都是前束范式，说明前束范式不惟一.

5.2 一阶逻辑前束范式

(2) $\exists xF(x)\vee\neg\forall xG(x)$

$\Leftrightarrow\exists xF(x)\vee\exists x\neg G(x)$

$\Leftrightarrow\exists x(F(x)\vee\neg G(x))$

或 $\Leftrightarrow\exists xF(x)\vee\neg\exists yG(y)$

$\Leftrightarrow\exists x(F(x)\vee\exists y\neg G(y))$

$\Leftrightarrow\exists x\exists y(F(x)\vee\neg G(y))$

(3) $\forall xF(x)\rightarrow\exists y(G(x,y)\wedge\neg H(y))$

$\Leftrightarrow\forall zF(z)\rightarrow\exists y(G(x,y)\wedge\neg H(y))$

$\Leftrightarrow\exists z\exists y(F(z)\rightarrow(G(x,y)\wedge\neg H(y)))$

(4) $\forall x(F(x,y)\rightarrow\exists y(G(x,y)\wedge H(x,z)))$

$\Leftrightarrow\forall x(F(x,y)\rightarrow\exists u(G(x,u)\wedge H(x,z)))$

$\Leftrightarrow\forall x\exists u(F(x,y)\rightarrow G(x,u)\wedge H(x,z)))$

注意：∀与∃不能颠倒

苏格拉底三段论的正确性

“凡是人都要死的. 苏格拉底是人. 所以苏格拉底是要死的.”

设$F(x)$：x是人，$G(x)$：x是要死的，a：苏格拉底.

A：$\forall x(F(x)\to G(x))\land F(a)\to G(a)$

1）设前件为真，即$\forall x(F(x)\to G(x))$与$F(a)$都为真.

由于$\forall x(F(x)\to G(x))$为真，故$F(a)\to G(a)$为真.

由$F(a)$ 与$F(a)\to G(a)$为真，根据假言推理得证$G(a)$为真.

则A真值为真。

2）设前件为假，则A真值为真。

综上所述，A是重言式，推理正确。

作业

习题5（P84）

12(1)(2)