第九章

代数系统

目录

Catalogue

PART 01

二元运算及其性质

PART 02

代数系统

9.1 二元运算及其性质

- 二元运算及一元运算的定义
- 二元运算的性质
  - 交换律、结合律、幂等律、消去律
  - 分配律、吸收律
- 二元运算的特异元素
  - 单位元
  - 零元
  - 可逆元素及其逆元

9.1 二元运算及其性质

定义9.1 设 S 为集合,函数 f: $S \times S \to S$ 称为 S 上的二元运算, 简称为二元运算.

验证一个运算是否为 S 上的二元运算，考虑以下两点:

1）S 中任何元素都可以进行这种运算，且运算的结果是惟一的;

2）S 中任何两个元素的运算结果都属于S，即S 对该运算是封闭的.

9.1 二元运算及其性质

验证一个运算是否为 S 上的二元运算，考虑以下两点：

1）S 中任何元素都可以进行这种运算，且运算的结果是惟一的；

2）S 中任何两个元素的运算结果都属于S，即S 对该运算是封闭的.

例9.1 二元运算的例子

1) N 上的二元运算：加法、乘法.减法、除法

2) 设 $M_n(\mathrm{R})$ 表示所有 n 阶 ($n\geq 2$) 实矩阵的集合，矩阵加法、减法和乘法都是 $M_n(\mathrm{R})$ 上的二元运算.

定义9.2 设 S 为集合，函数 f：$S \to S$ 上的一元运算，简称为**一元运算**。

定义 设 S 为集合，n为正整数，函数

$$f: \underbrace{S \times S \times \ldots \times S}_{n\text{个}} \to S$$

称为 S 上的 n 元运算，简称为 **n元运算**.

算符：$\circ$, $*$, $\cdot$, $\oplus$等符号

①对一元运算$\circ$ ，x 的运算结果记作$\circ\ x$

②对二元运算$\circ$ ， 如果 x 与 y 运算得到 z，记做

$x \circ y = z$

③对n 元运算，如果a_1、 a_2 … a_n运算得到b，记做

$\circ\ (a_1, a_2, \ldots, a_n)=b$.

说明：在同一问题中不同的运算使用不同的算符

运算表（表示有穷集上的一元和二元运算）

a_i	$\circ\ a_i$
a_1	$\circ\ a_1$
a_2	$\circ\ a_2$
$\cdot$	$\cdot$
$\cdot$	$\cdot$
$\cdot$	$\cdot$
a_n	$\circ\ a_n$

$\circ$	a_1	a_2	$\ldots$	a_n
a_1	$a_1\circ\ a_1$	$a_1\circ\ a_2$	$\ldots$	$a_1\circ\ a_n$
a_2	$a_2\circ\ a_1$	$a_2\circ\ a_2$	$\ldots$	$a_2\circ\ a_n$
$\cdot$		$\cdot\ \cdot\ \cdot$		
$\cdot$		$\cdot\ \cdot\ \cdot$		
$\cdot$		$\cdot\ \cdot\ \cdot$		
a_n	$a_n\circ\ a_1$	$a_n\circ\ a_2$	$\ldots$	$a_n\circ\ a_n$

例9.4 $S=\{1, 2\}$，给出$P(S)$上的运算$\oplus$, ~ 的运算表，其中全集为S。（$\oplus$, ~ 分别为对称差和绝对补运算）

$\oplus$ 的运算表

$\oplus$	$\varnothing$	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{1,2\}$
$\varnothing$	$\varnothing$	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{1,2\}$
$\{1\}$	$\{1\}$	$\varnothing$	$\{1,2\}$	$\{2\}$
$\{2\}$	$\{2\}$	$\{1,2\}$	$\varnothing$	$\{1\}$
$\{1,2\}$	$\{1,2\}$	$\{2\}$	$\{1\}$	$\varnothing$

~ 的运算表

X	~ X
$\varnothing$	$\{1,2\}$
$\{1\}$	$\{2\}$
$\{2\}$	$\{1\}$
$\{1,2\}$	$\varnothing$

9.1 二元运算及其性质

练 $Z_5 = \{ 0, 1, 2, 3, 4 \}$，$\otimes$ 为模 5 乘法，即 $x \otimes y = xy \bmod (5)$，写出 $\otimes$ 的运算表。

解：

$\otimes$	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	1	3
3	0	3	1	4	2
4	0	4	3	2	1

注：$Z_n = \{ 0, 1, 2, \ldots, n-1 \}$

二元运算的性质

定义9.3 设 $\circ$ 为 S 上的二元运算，如果对于任意的 $x, y \in S$ 有

$$x \circ y = y \circ x,$$

则称运算在 S 上满足交换律.

例 Z, Q, R分别为整数、有理数、实数集；$M_n(\mathrm{R})$为 n 阶实矩阵集合, $n \geq 2$.
判断是否满足交换律。

集合	运算	交换律
Z, Q, R	普通加法+	有
	普通乘法×	有
$M_n(\mathrm{R})$	矩阵加法+	有
	矩阵乘法×	无

二元运算的性质

定义9.4 设 $\circ$ 为 S 上的二元运算，如果对于任意的 $x, y, z \in S$ 有

$$(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z),$$

则称运算在 S 上满足结合律.

例 Z, Q, R分别为整数、有理数、实数集；$M_n(\mathrm{R})$为 n 阶实矩阵集合, $n \geq 2$.
判断是否满足结合律。

集合	运算	结合律
Z, Q, R	普通加法+	有
	普通乘法×	有
$M_n(\mathrm{R})$	矩阵加法+	有
	矩阵乘法×	有

二元运算的性质

定义9.5 设∘为 S 上的二元运算，如果对于任意的 $x \in S$ 有

$$x \circ x = x,$$

则称运算在 S 上满足幂等律.

例 Z, Q, R分别为整数、有理数、实数集；$M_n(\mathrm{R})$为 n 阶实矩阵集合, $n \geq 2$.
判断是否满足幂等律。

集合	运算	幂等律
Z, Q, R	普通加法+	无
	普通乘法×	无
$M_n(\mathrm{R})$	矩阵加法+	无
	矩阵乘法×	无

练 $P(B)$为幂集，判断在并∪，交∩，相对补–，对称差⊕四种运算上是否适合交换律，结合律和幂等律。

集合	运算	交换律	结合律	幂等律
$P(B)$	并∪	有	有	有
	交∩	有	有	有
	相对补–	无	无	无
	对称差⊕	有	有	无

定义9.6 设 $\circ$ 和 $*$ 为 S 上两个不同的二元运算，如果 $\forall x, y, z \in S$ 有

$$(x * y) \circ z = (x \circ z) * (y \circ z)$$

$$z \circ (x * y) = (z \circ x) * (z \circ y)$$

则称 $\circ$ 运算对 $*$ 运算满足分配律.

集合	运算	分配律
Z,Q,R	普通加法 + 与乘法 ×	× 对 + 可分配
		+ 对 × 不分配
M_n(R)	矩阵加法 + 与乘法 ×	× 对 + 可分配
		+ 对 × 不分配
$P(B)$	并 ∪ 与交 ∩	∪ 对 ∩ 可分配
		∩ 对 ∪ 可分配

定义9.7 设 $\circ$ 和 $*$ 为 S 上两个可交换的二元运算，如果 $\forall x, y \in S$ 有

$$x \circ (x * y) = x$$

$$x * (x \circ y) = x$$

则称 $\circ$ 和 $*$ 运算满足**吸收律**.

集合	运算	吸收律
Z,Q,R	普通加法 + 与乘法 ×	无
$M_n(\mathrm{R})$	矩阵加法 + 与乘法 ×	无
$P(B)$	并 ∪ 与交 ∩	有

9.1 二元运算及其性质

定义9.8 设$\circ$为S上的二元运算，如果存在e_l（或e_r）$\in S$，使得对任意$x \in S$ 都有

$$e_l \circ x = x \ (\text{或} \ x \circ e_r = x),$$

则称 e_l(或 e_r)是 S 中关于 $\circ$ 运算的 左单位元(或右单位元).

定理9.1 设$\circ$为S上的二元运算，e_l和e_r分别为$\circ$运算的左单位元和右单位元，则有

$$e_l = e_r = e$$

且 e 为 S 上关于 $\circ$ 运算的唯一的单位元(幺元).

集合	运算	单位元
Z, Q, R	普通加法+	0
	普通乘法×	1
M_n(R)	矩阵加法+	n阶全0矩阵
	矩阵乘法×	n阶单位矩阵
$P(B)$	并∪	∅
	交∩	B
	对称差⊕	∅

定义9.9 设 ∘ 为 S 上的二元运算，如果存在θ_l（或θ_r）$\in S$，使得对任意 $x\in S$ 都有

$$\theta_l \circ x = \theta_l \ (\text{或 } x \circ \theta_r = \theta_r),$$

则称θ_l(或θ_r)是 S 中关于 ∘ 运算的 左零元 (或右零元) .

定理9.2 设 ∘ 为 S 上的二元运算，θ_l和θ_r分别为∘运算的左零元和右零元，则有

$$\theta_l = \theta_r = \theta$$

且 θ 为 S 上关于 ∘ 运算的唯一的零元.

集合	运算	零元
Z, Q, R	普通加法+	无
	普通乘法×	0
M_n(R)	矩阵加法+	无
	矩阵乘法×	n阶全0矩阵
$P(B)$	并∪	B
	交∩	∅
	对称差⊕	无

9.1 二元运算及其性质

定义9.10 令 e 为 S 中关于运算∘ 的单位元. 对于 $x\in S$，如果存在y_l（或 y_r）$\in S$ 使得

$$y_l \circ x = e \text{（或 } x \circ y_r = e\text{）}$$

则称 y_l(或 y_r)是 x 的 左逆元 (或右逆元).

定理9.4 设∘ 为 S 上可结合的二元运算, e 为该运算∘ 的单位元，对于 $x\in S$，如果存在左逆元y_l和右逆元 y_r，则有

$$y_l = y_r = y$$

且 y 为 x 唯一的逆元.

集合	运算	逆元
Z, Q, R	普通加法+	X 的逆元 $-x$
	普通乘法×	X 的逆元 x^{-1} x^{-1}属于给定集合
M_n(R)	矩阵加法+	X逆元$-X$
	矩阵乘法×	X的逆元 X^{-1} X是可逆矩阵
$P(B)$	并∪	∅ 的逆元为 ∅
	交∩	B 的逆元为 B
	对称差⊕	X 的逆元为 X

定义9.11 设$\circ$为V上二元运算，如果$\forall\, x, y, z\in V$，

若 $x\circ y = x\circ z$，且 x不是零元，则 $y = z$

若 $y\circ x = z\circ x$，且 x 不是零元，则 $y = z$

那么称$\circ$运算满足 消去律.

例 1）Z, Q, R 关于普通加法和乘法满足消去律.

2）M_n(R) 关于矩阵加法满足消去律，但是关于矩阵乘法不满足消去律.

3）$Z_n=\{0,1,2,..,n-1\}$关于模 n 加法$x\oplus y=(x+y)\bmod(n)$满足消去律.

例9.6 设 $\circ$ 运算为 Q 上的二元运算，

$\forall x, y \in Q,\ x \circ y = x+y-xy$,

(1) $\circ$ 运算是否满足交换和结合律？说明理由.

(2) 求 $\circ$ 运算的单位元、零元和所有可逆元.

解 (1) 任取 $x, y \in Q$, $x \circ y = x+y-xy = y+x-yx = y \circ x$,

则 $\circ$ 运算可交换，

任取 $x, y, z \in Q$,

$(x \circ y) \circ z = (x+y-xy) + z - (x+y-xy)z$

$= x+y+z-xy-xz-yz+xyz$

$x \circ (y \circ z) = x + (y+z-yz) - x(y+z+2yz$

$= x+y+z-xy-xz-yz+xyz$

则 $\circ$ 运算可结合.

(2) 设∘运算的单位元和零元分别为 e 和 θ，则对于任意 x 有 $x \circ e = x$ 成立，即 $x+e-xe = x \Rightarrow e = 0$
由于∘运算可交换，所以 0 是幺元.

对于任意 x 有 $x \circ \theta = \theta$ 成立，即
$x+\theta- x\theta = \theta \Rightarrow x - x\theta = 0 \Rightarrow \theta = 1$ 由于∘
由于∘运算可交换，所以 1 是单位元.

给定 x，设 x 的逆元为 y, 则有 $x \circ y = 0$ 成立，即

$$x+y+-xy = 0 \Rightarrow y = -\frac{x}{1-x} \quad (x \neq 1)$$

因此当 $x \neq 1$时，$y = -\dfrac{x}{1-x}$ 是 x 的逆元.
x=1无逆元.

例9.7 设A={a,b,c}，A上的二元运算*如表所示.

(1) 说明运算是否交换的、可结合的、幂等的.

(2) 求出运算的单位元、零元、所有可逆元素的逆元.

*	a	b	c
a	a	b	c
b	b	c	a
c	c	a	b

解 (1) 任取$x, y \in A$, $x * y = y * x$,

则 * 运算满足交换率;

任取$x, y, z \in A$, $(x * y) * z = x * (y * z)$

则 * 运算满足结合率;

当 $x=b$ 时, $b * b = c \neq b$

则 * 运算不满足幂等率;

(2)设*运算的单位元和零元分别为 e 和 θ,

则对于任意 x 有 $x*e = x$ 成立,

由表可知$e = a$;

对于任意 x 有 $x*\theta = \theta$ 成立,

由表可知零元θ不存在;

给定 x，设 x 的逆元为 y, 则有 $x*y = e = a$成立,

由表可知$a^{-1} = a$, $b^{-1} = c$, $c^{-1} = b$

*	a	b	c
a	a	b	c
b	b	c	a
c	c	a	b

练 设 $A = \{ a, b, c \}$, 构造 A 上的二元运算* 使得 $a*b = c$, $c*b = b$, 且*运算是幂等的、可交换的，给出关于*运算的一个运算表，说明它是否可结合，为什么？

*	a	b	c
a	a	c	
b	c	b	b
c		b	c

根据幂等律和已知条件$a*b = c$, $c*b = b$ 得到运算表

根据交换律得到新的运算表

方框 可以填入a, b, c中任一选定的符号, 完成运算表

不结合，因为 $(a*b)*b = c*b = b$, $a*(b*b) = a*b = c$

由运算表判别算律的一般方法

- 交换律：运算表关于主对角线对称
- 幂等律：主对角线元素排列与表头顺序一致
- 消去律：所有的行与列中没有重复元素
- 单位元：所在的行与列的元素排列都与表头一致
- 零元：所在的行与列都由该元素自身构成
- A的可逆元：a 所在的行(第i行)中某列 (比如第 j 列)元素为 e，且第 j 行 i 列的元素也是 e，那么 a 与第 j 个元素互逆
- 结合律：除了单位元、零元之外，要对所有3个元素的组合验证表示结合律的等式是否成立

作业

习题 9 （P191 ）

1

9(f_1，f_2)

目录

Catalogue

PART 01

二元运算及其性质

PART 02

代数系统

定义9.12 非空集合 S 和 S 上 k 个一元或二元运算 $f_1, f_2, \ldots, f_k$ 组成的系统称为一个代数系统, 简称代数，记做 $V=\langle S, f_1, f_2, \ldots, f_k \rangle$.

1）S 称为代数系统的载体， S 和运算叫做代数系统的成分.

2）有的代数系统定义指定了S中的特殊元素，称为代数常数, 例如二元运算的单位元.

3）有时也将代数常数作为系统的成分.

9.1 二元运算及其性质

定义9.1 设 S 为集合,函数 f：$S \times S \to S$ 称为 S 上的二元运算, 简称为二元运算.

验证一个运算是否为 S 上的二元运算，考虑以下两点：

1）S 中任何元素都可以进行这种运算，且运算的结果是惟一的；

2）S 中任何两个元素的运算结果都属于S，即S 对该运算是封闭的.

9.2 代数系统

定义9.12 非空集合 S 和 S 上 k 个一元或二元运算 $f_1, f_2, \ldots, f_k$ 组成的系统称为一个代数系统, 简称代数，记做 $V=<S, f_1, f_2, \ldots, f_k>$.

1）S 称为代数系统的载体， S 和运算叫做代数系统的成分.

2）有的代数系统定义指定了S中的特殊元素，称为代数常数, 例如二元运算的单位元.

3）有时也将代数常数作为系统的成分.

例 $<N,+,0>$, $<Z,+,\cdot,0,1>$, $<R,+,\cdot,0,1>$是代数系统，

$+$ 和 $\cdot$ 分别表示普通加法和乘法.

定义9.13 如果两个代数系统中运算的个数相同，对应运算的元数相同，且代数常数的个数也相同，则称它们是同类型的代数系统.

例 $V_1=<R,+,\times,-,0,1>$

$V_2=<P(B),\cup,\cap,\sim,\varnothing,B>$

2个二元运算，1个一元运算，2个代数常数，故同类型.

推论 如果两个同类型的代数系统规定的运算性质也相同，则称为同种的代数系统.

定义9.15 设 $V_1=<S_1,\circ>$和 $V_2=<S_2,*>$是代数系统，其中 $\circ$ 和 $*$ 是二元运算. V_1 与 V_2 的 **积代数** 是$V=<S_1\times S_2,\cdot>$,

$$\forall <x_1,y_1>, <x_2,y_2>\in S_1\times S_2,$$

$$<x_1,y_1>\cdot<x_2,y_2>=<x_1\circ x_2, y_1*y_2>$$

例 $V_1=<\mathrm{Z},+>$, $V_2=<M_2(\mathrm{R}),\cdot>$, 积代数$<\mathrm{Z}\times M_2(\mathrm{R}),\circ>$

$$\forall <z_1,M_1>, <z_2,M_2>\in \mathrm{Z}\times M_2(\mathrm{R}),$$

$$<z_1,M_1>\circ<z_2,M_2> = <z_1+z_2, M_1\cdot M_2>$$

$$<5,\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}>\circ<-2,\begin{pmatrix}2 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}> \quad =<3,\begin{pmatrix}2 & -1\\ 2 & 0\end{pmatrix}>$$

测验9 设V=<Z_5，⊕>为代数系统，

（1）列出⊕的运算表；

（2）列出二元运算⊕的性质；

（3）求⊕运算的零元和单位元，并求出所有可逆元素的逆元。

作业

习题 9 （P191 ）

11(1)