第三章

命题逻辑的推理理论

目录

Catalogue

3.1 推理的形式结构

数理逻辑的主要任务是用数学的方法研究推理。

前提: 已知的命题公式集合

推理: 从前提出发推出结论的思维过程

结论: 从前提出发应用推理规则推出的命题公式

证明: 描述推理正确的过程.

3.1 推理的形式结构

定义 若对于每组赋值，或者$A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k$均为假；或者当$A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k$为真时，$B$也为真，则称由$A_1$, A_2, …, A_k推B的推理是正确的，并称B为有效的结论。

说明：

1）由前提推出结论的推理是否正确与诸前提的排列次序无关；

2）前提和结论的取值情况有4种：

① $A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k$为0，B为0

② $A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k$为0，B为1

③ $A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k$为1，B为1

④ $A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k$为1，B为0

只要不出现情况④，推理就是正确的。

3.1 推理的形式结构

例 3.1 (1)判断由p，$p\to q$推q的推理是否正确.

p	q	$p\to q$	$p\wedge(p\to q)$
0	0	1	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	1	1	1

推理正确。

3.1 推理的形式结构

例 3.1 (2)判断由p，$q \to p$推q的推理是否正确.

p	q	$q \to p$	$p \wedge (q \to p)$
0	0	1	0
0	1	0	0
1	0	1	1
1	1	1	1

推理不正确。

3.1 推理的形式结构

定理 "$A_1, A_2, \ldots, A_k$ 推B" 的推理正确当且仅当

$A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k \rightarrow B$为重言式.

说明：

1）若推理正确，则记作：$A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k \Rightarrow B$;

2）$\Rightarrow$是一种元语言符号，表示蕴涵式为重言式。

推理的形式结构:

1） $A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k \rightarrow B$

2）前提： $A_1, A_2, \ldots , A_k$

结论： B

3.1 推理的形式结构

判断推理是否正确步骤

1）将简单命题符号化；

2）分别写出前提、结论、推理的形式结构；

3）用以下方法进行判断：

　　真值表法

　　等值演算法

　　主析取范式法

　　构造证明法

说明：用前3个方法时采用形式结构“$A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k \rightarrow B$”.

用构造证明时, 采用“前提: $A_1, A_2, \ldots, A_k$, 结论: B”.

3.1 推理的形式结构

例3.2 判断下面推理是否正确。

若a能被4整除，则a能被2整除。a能被4整除。所以，a能被2整除。

解：设

p：a能被4整除

q：a能被2整除

前提：$p \to q$，p

结论：q

推理的形式结构：$p \wedge (p \to q) \to q$

3.1 推理的形式结构

(1) 真值表法

p	q	$p\to q$	$p\wedge(p\to q)$	$p\wedge(p\to q)\to q$
0	0	1	0	1
0	1	1	0	1
1	0	0	0	1
1	1	1	1	1

推理正确。

(2) 等值演算法/主析取范式法

$$
\begin{aligned}
& p\wedge(p\rightarrow q)\rightarrow q \\
\Leftrightarrow\ & p\wedge(\neg p\vee q)\rightarrow q \\
\Leftrightarrow\ & \neg(p\wedge(\neg p\vee q))\vee q \\
\Leftrightarrow\ & \neg p\vee(p\wedge\neg q)\vee q \\
\Leftrightarrow\ & (\neg p\vee p\vee q)\wedge(\neg p\vee\neg q\vee q) \\
\Leftrightarrow\ & (1\vee q)\wedge(\neg p\vee 1) \\
\Leftrightarrow\ & 1\wedge 1 \\
\Leftrightarrow\ & 1 \\
\Leftrightarrow\ & m_0\vee m_1\vee m_2\vee m_3
\end{aligned}
$$

推理正确。

练 判断下面推理是否正确

(1) 若今天是1号，则明天是5号. 今天是1号. 所以明天是5号.

(2) 若今天是1号，则明天是5号. 明天是5号. 所以今天是1号.

解 （1）设p：今天是1号，q：明天是5号.

推理的形式结构为：$(p\to q)\wedge p\to q$

证明（用等值演算法）

$$(p\to q)\wedge p\to q$$

$$\Leftrightarrow \neg((\neg p\vee q)\wedge p)\vee q$$

$$\Leftrightarrow \neg p\vee\neg q\vee q \Leftrightarrow 1$$

得证推理正确

(2) 若今天是1号，则明天是5号. 明天是5号. 所以今天是1号.

解 设p：今天是1号，q：明天是5号.

推理的形式结构为：$(p\rightarrow q)\wedge q\rightarrow p$

证明（用主析取范式法）

$$\begin{aligned}
&(p\rightarrow q)\wedge q\rightarrow p\\
\Leftrightarrow\ &(\neg p\vee q)\wedge q\rightarrow p\\
\Leftrightarrow\ &\neg\,((\neg p\vee q)\wedge q)\vee p\\
\Leftrightarrow\ &\neg q\vee p\\
\Leftrightarrow\ &(\neg p\wedge\neg q)\vee(p\wedge\neg q)\vee(p\wedge\neg q)\vee(p\wedge q)\\
\Leftrightarrow\ &m_0\vee m_2\vee m_3
\end{aligned}$$

结果不含m_1, 故01是成假赋值，所以推理不正确.

3.1 推理的形式结构

重要的推理定律

$A \Rightarrow (A \lor B)$	附加律
$(A \land B) \Rightarrow A$	化简律
$(A \to B) \land A \Rightarrow B$	假言推理
$(A \to B) \land \neg B \Rightarrow \neg A$	拒取式
$(A \lor B) \land \neg B \Rightarrow A$	析取三段论
$(A \to B) \land (B \to C) \Rightarrow (A \to C)$	假言三段论
$(A \leftrightarrow B) \land (B \leftrightarrow C) \Rightarrow (A \leftrightarrow C)$	等价三段论
$(A \to B) \land (C \to D) \land (A \lor C) \Rightarrow (B \lor D)$	构造性二难
$(A \to B) \land (\neg A \to B) \Rightarrow B$	构造性二难（特殊形式）
$(A \to B) \land (C \to D) \land (\neg B \lor \neg D) \Rightarrow (\neg A \lor \neg C)$	破坏性二难

说明：A，B，C，D等是元语言符号，表示任意的命题公式。

作业

习题 3（P56）

9

目录
Catalogue

PART 01
推理的形式结构

PART 02
自然推理系统P

PART 03
消解证明法

3.2 自然推理系统P

证明:描述推理过程的命题公式序列，其中每个命题公式或者是已知的前提，或者是由前面的命题公式应用推理规则得到的结论.

定义 一个形式系统I由下面4个部分组成

（1）非空的字母表$A(I)$;

（2）$A(I)$中符号构造的合式公式集$E(I)$;

（3）$E(I)$中一些特殊的公式组成的公理集$A_X(I)$;

（4）推理规则集$R(I)$.

将I记为4元组$\langle A(I), E(I), A_X(I), R(I)\rangle$, 其中$\langle A(I), E(I)\rangle$是$I$的形式语言系统，而$\langle A_X(I), R(I)\rangle$为$I$的形式演算系统。

3.2 自然推理系统P

定义 自然推理系统P定义如下

1. 字母表$A(I)$

（1）命题变项符号：p, q, r, . . .

（2）联结词符号:$\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$

（3）括号与逗号:( ),,

2. 合式公式集$E(I)$

合式公式同定义1.6

4. 推理规则集$R(I)$

（1）前提引入规则：证明的任何步骤都可以引入前提

（2）结论引入规则：任何步骤的结论都可作为后续的前提

（3）置换规则：任意公式可用等值的公式置换

（4）假言推理规则 $(A \to B) \wedge A \Rightarrow B$

$$\begin{array}{c} A \to B \\ \mathrm{A} \\ \hline \therefore B \end{array}$$

（5）附加规则 $A \Rightarrow (A \vee B)$

$$\begin{array}{c} A \\ \hline \therefore A \vee B \end{array}$$

（6）化简规则 $(A \wedge B) \Rightarrow A$

$$\begin{array}{c} A \wedge B \\ \hline \therefore A \end{array}$$

（7）拒取式规则　$(A\rightarrow B)\wedge\neg B \Rightarrow \neg A$

$$\begin{array}{c} A\rightarrow B \\ \neg B \\ \hline \therefore \neg A \end{array}$$

（8）假言三段论规则　$(A\rightarrow B)\wedge(B\rightarrow C) \Rightarrow (A\rightarrow C)$

$$\begin{array}{c} A\rightarrow B \\ B\rightarrow C \\ \hline \therefore A\rightarrow C \end{array}$$

（9）析取三段论规则　$(A\vee B)\wedge\neg B \Rightarrow A$

$$\begin{array}{c} A\vee B \\ \neg B \\ \hline \therefore A \end{array}$$

(10) 构造性二难推理规则 $(A\to B)\wedge(C\to D)\wedge(A\vee C)\Rightarrow(B\vee D)$

$$\begin{array}{c} A\to B \\ C\to D \\ A\vee C \\ \hline \therefore B\vee D \end{array}$$

(11) 破坏性二难推理规则 $(A\to B)\wedge(C\to D)\wedge(\neg B\vee\neg D)\Rightarrow(\neg A\vee\neg C)$

$$\begin{array}{c} A\to B \\ C\to D \\ \neg B\vee\neg D \\ \hline \therefore \neg A\vee\neg C \end{array}$$

(12) 合取引入规则 $A\wedge B\Rightarrow(A\wedge B)$

$$\begin{array}{c} \mathrm{A} \\ \mathrm{B} \\ \hline \therefore A\wedge B \end{array}$$

3.2 自然推理系统*P*

(1)前提引入规则：证明的任何步骤都可以引入前提

(2)结论引入规则：任何步骤的结论都可作为后续的前提

(3)置换规则：任意公式可用等值的公式置换

(5)附加规则 $A \Rightarrow (A \vee B)$

(6)化简规则 $(A \wedge B) \Rightarrow A$

(4)假言推理规则 $(A \to B) \wedge A \Rightarrow B$

(7)拒取式规则 $(A \to B) \wedge \neg B \Rightarrow \neg A$

(9)析取三段论规则 $(A \vee B) \wedge \neg B \Rightarrow A$

$$\boxed{\begin{array}{l} (\neg(\neg A) \vee B) \wedge \neg B \Rightarrow A \\ (\neg A \to B) \wedge \neg B \Rightarrow \neg(\neg A) \end{array}}$$ （推导步骤）

(8)假言三段论规则 $(A \to B) \wedge (B \to C) \Rightarrow (A \to C)$

(10)构造性二难推理规则 $(A \to B) \wedge (C \to D) \wedge (A \vee C) \Rightarrow (B \vee D)$

(11)破坏性二难推理规则 $(A \to B) \wedge (C \to D) \wedge (\neg B \vee \neg D) \Rightarrow (\neg A \vee \neg C)$

(12)合取引入规则 $A \wedge B \Rightarrow (A \wedge B)$

例3.3 在自然推理系统*P*中构造下面推理的证明：

前提：$p \vee q, q \rightarrow r, p \rightarrow s, \neg s$

结论：$r \wedge (p \vee q)$

证明：① $p \rightarrow s$ 前提引入

② $\neg s$ 前提引入

③ $\neg p$ ①②拒取式

④ $p \vee q$ 前提引入

⑤ q ③④析取三段论

⑥ $q \rightarrow r$ 前提引入

⑦ r ⑤⑥假言推理

⑧ $r \wedge (p \vee q)$ ④⑦合取引入

例3.4 在自然推理系统*P*中构造下面推理的证明：

若数a是实数，则它不是有理数就是无理数。若a不能表示成分数，则它不是有理数。a是实数且它不能表示成分数。所以a是无理数。

解：设

p：a是实数

q：a是有理数

r：a是无理数

s：a能表示成分数

前提：$p \to (q \vee r), \neg s \to \neg q, p \wedge \neg s$

结论：r

证明：① $p\wedge\neg s$ 前提引入

② p ①化简

③ $\neg s$ ①化简

④ $p\rightarrow(q\vee r)$ 前提引入

⑤ $q\vee r$ ②④假言推理

⑥ $\neg s\rightarrow\neg q$ 前提引入

⑦ $\neg q$ ③⑥假言推理

⑧ r ⑤⑦析取三段论

测验3 在自然推理系统*P*中构造下面推理的证明：

若明天是星期一或星期三，我就有课。若有课，今天必备课。我今天下午没备课。所以，明天不是星期一和星期三。

3.2 自然推理系统*P*

附加前提证明法

欲证明

前提：$A_1, A_2, \ldots, A_k$

结论：$A \rightarrow B$

等价地证明

前提：$A_1, A_2, \ldots, A_k, A$

结论：B

理由：

$$(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k) \rightarrow (A \rightarrow B)$$

$$\Leftrightarrow \neg(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k) \vee (\neg A \vee B)$$

$$\Leftrightarrow \neg(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k \wedge A) \vee B$$

$$\Leftrightarrow (A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k \wedge A) \rightarrow B$$

归谬法

欲证明

前提：$A_1, A_2, \ldots, A_k$

结论：B

将$\neg B$加入前提，若推出矛盾，则得证推理正确.

理由:

$$A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k \rightarrow B$$

$$\Leftrightarrow \neg(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k) \vee B$$

$$\Leftrightarrow \neg(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k \wedge \neg B)$$

括号内部为矛盾式当且仅当$(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k \rightarrow B)$为重言式

作业

习题 3（P56）

14（1）

17

目录

Catalogue

消解证明法

依据归谬法的思想，采用消解规则构造证明的方法。

$$A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k \rightarrow B$$

$$\Leftrightarrow \neg(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k \wedge \neg B)$$

把前提中的公式和结论的否定都化成等值的合取范式，以这些合取范式中的所有简单析取式作为前提，用消解规则构造证明。

说明：如果能得到空式（矛盾式），则证明推理是正确的。