第十六章

树

目录

Catalogue

16.1 无向树及其性质

- ✓无向树与森林
- ✓生成树与余树

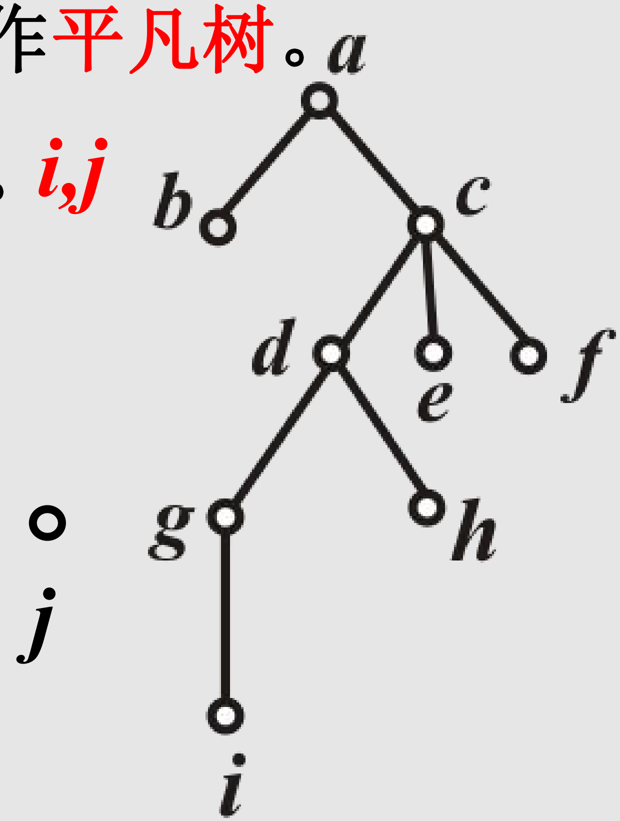
定义16.1 连通无回路的无向图称作无向树,或简称树。

(1)每个连通分支都是树的无向图称作森林。

(2)平凡图（仅有一个结点的图）称作平凡树。

(3)在无向树中，悬挂顶点称作树叶。i,j

(4)度数≥2的顶点称作分支点。a,c



定理16.1 设$G=\langle V,E\rangle$是n阶m条边的无向图, 则下面各命题是等价的:

(1) G是树(连通无回路);

(2) G中任意两个顶点之间存在惟一的路径;

(3) G中无回路且$m=n-1$;

(4) G是连通的且$m=n-1$;

(5) G中无回路, 但在任何两个不同的顶点之间加一条新边后所得图中有惟一的一个含新边的圈.

定理16.2 设T 是 n 阶非平凡的无向树，则T中至少有两片树叶.

证　设T有x片树叶, 由握手定理及定理16.1,

$$2(n-1)=\sum d(v_i)\geq x+2(n-x)$$

解得 $x\geq 2$.

例 已知无向树T中, 有1个3度顶点, 2个2度顶点, 其余顶点全是树叶,试求树叶数及所有顶点的度数。

解 用树的性质$m=n-1$和握手定理.

设有x片树叶，于是

顶点数量$n=1+2+x=3+x$,

$2m=2\times(n-1)=2\times(2+x)=1\times3+2\times2+x$

解得$x=3$，故T有3片树叶.

T的度数列为1, 1, 1, 2, 2, 3

练 已知无向树T有5片树叶, 2度与3度顶点各1个, 其余顶点的度数均为4. 求T的阶数n(顶点数)及顶点的度数列。

解 设T的阶数为n,

则边数为$n-1$,

4度顶点的个数为$n-5-1-1=n-7$.

由握手定理得

$$2m=2(n-1)=5\times1+2\times1+3\times1+4(n-7)$$

解得$n=8$, 4度顶点为1个.

T的度数列为1,1,1,1,1,2,3,4

作业

习题 16（P340）

2

目录

Catalogue

PART 01

无向树及其性质

PART 02

生成树

PART 03

根树及其应用

■ 最小生成树与避圈法

16.2 生成树

定义16.2 如果无向图G的生成子图T是树，T是G的**生成树**。

设T是G的生成树，G在T中的边称作T的**树枝**,不在T中的边称作T的**弦**。

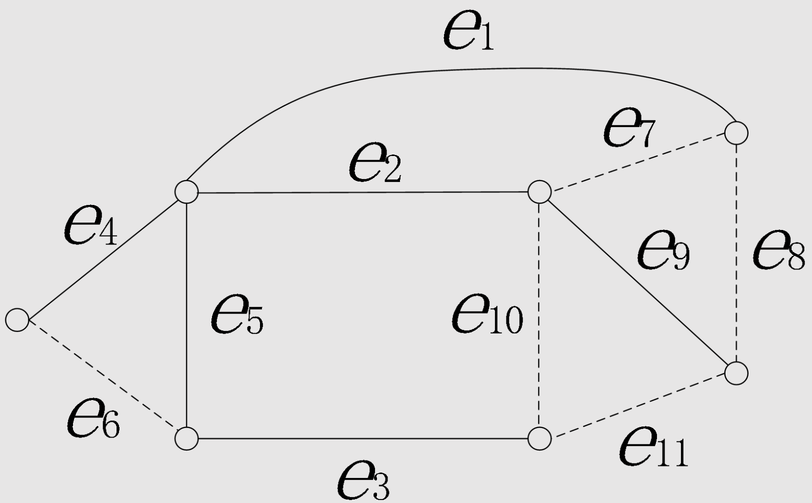
称T的所有弦的导出子图为T的**余树**，记作$\overline{T}$

注意：$\overline{T}$ 不一定连通, 也不一定不含回路.

例

实边图为该图的一颗生成树

虚边为余树，不连通，含回路。



16.2 生成树

定义16.5 设无向连通带权图$G=<V,E,W>$，T是G的生一课成树,T所有边的权的和称作T的权, 记作$W(T)$.

G的所有生成树中权最小的生成树称为的G最小生成树 .

避圈法 (Kruskal) ——求最小生成树的算法

设G是n阶无向连通带权图G.

(1) 按权从小到大排列边(环除外), 设$W(e_1)\le W(e_2)\le\ldots\le W(e_m)$.

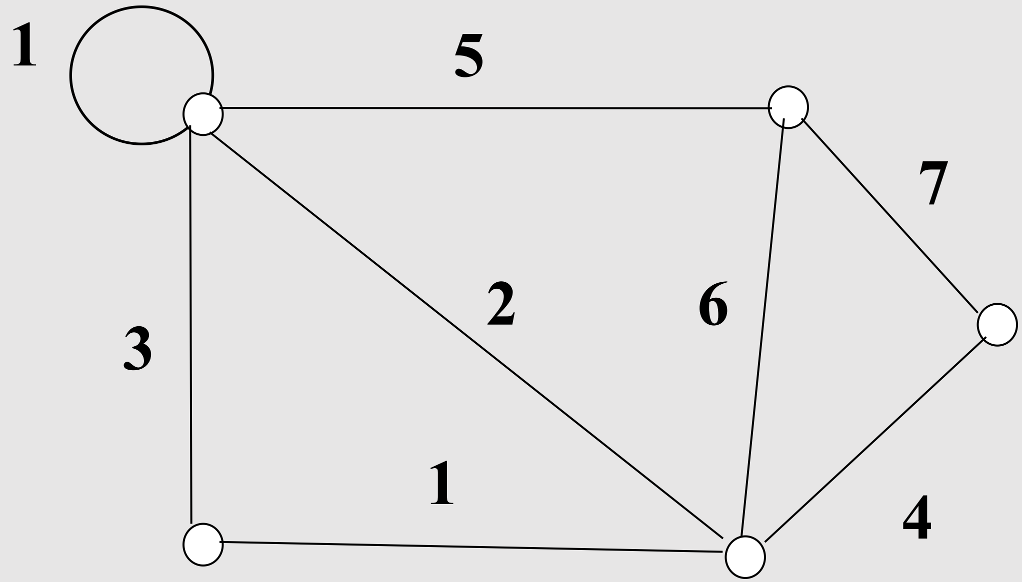
(2) 令$T\leftarrow\varnothing$, $i\leftarrow 1$, $k\leftarrow 0$.

(3) 若e_i与T中的边不构成回路，则令$T\leftarrow T\cup\{e_i\}$, $k\leftarrow k+1$.

(4) 若$k<n-1$, 则令$i\leftarrow i+1$, 转(3).

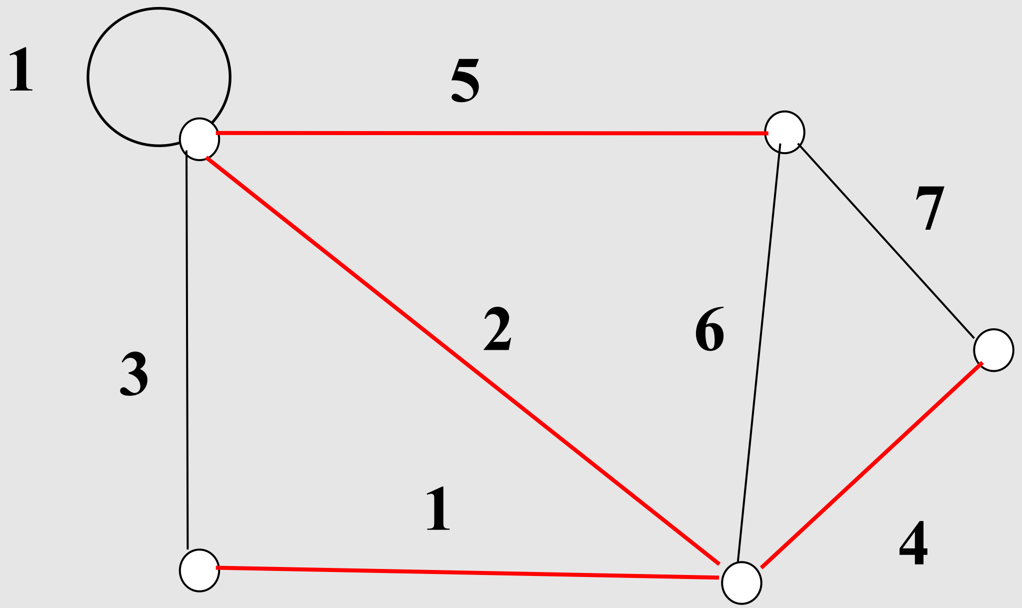
16.2 生成树

例16.3 利用避圈法求出下图的最小生成树。

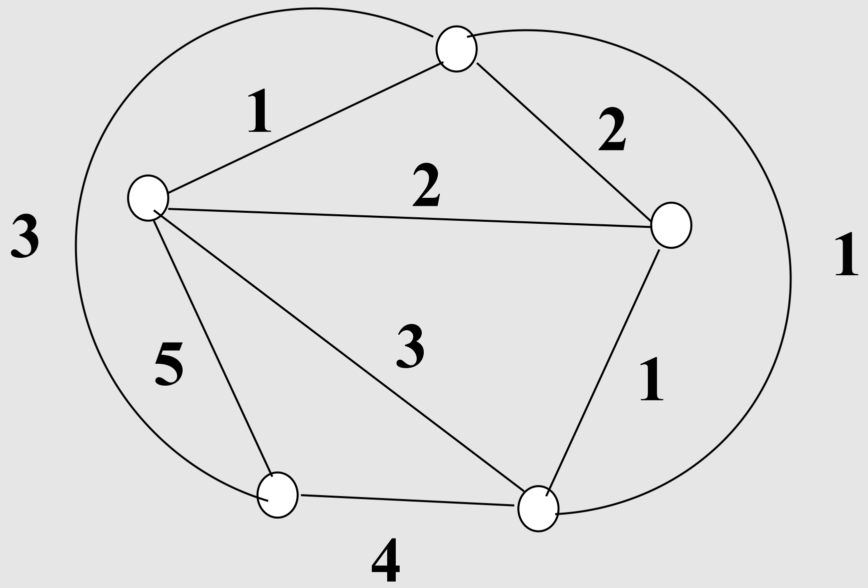


16.2 生成树

解：

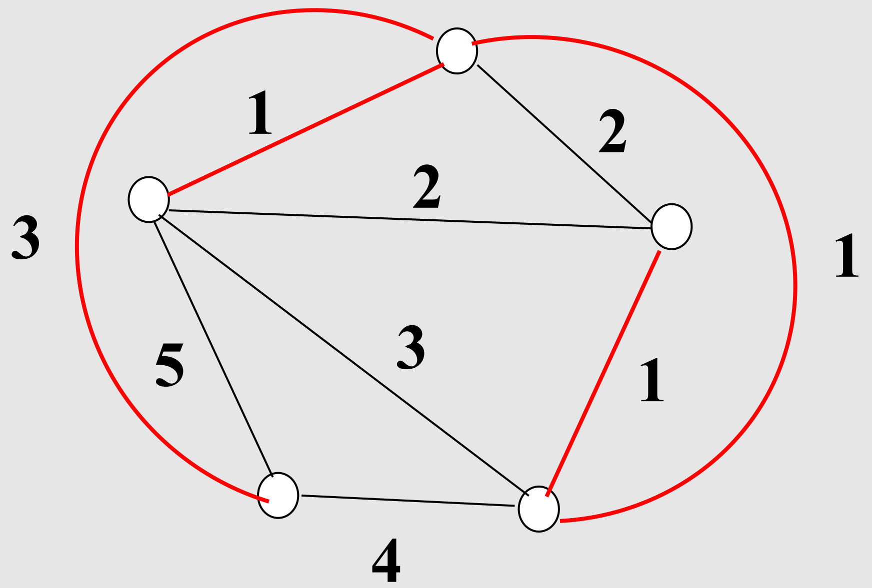


例16.3 利用避圈法求出下图的最小生成树。

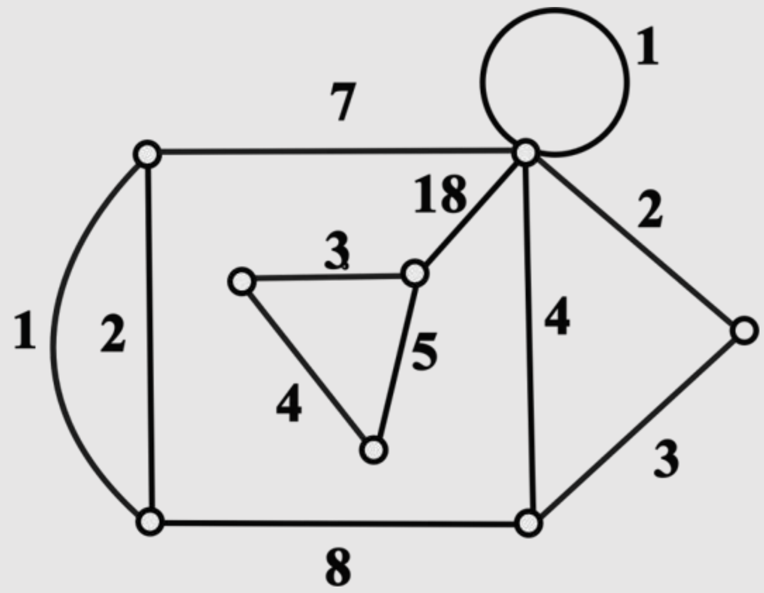


16.2 生成树

解:



测验13 利用避圈法（Kruskal）求出下图的最小生成树及其权重。



作业

习题 16 （P340 ）

25

目录

Catalogue

16.3 根树及其应用

- 有向树与根树
- 家族树与根子树
- 有序树
- 根树与有序树的分类
  r叉(有序)树, r叉正则(有序)树,
  r叉完全正则(有序) 树
- 最优2叉树与Huffman算法
- 前缀码与最佳前缀码
- 中序行遍法、前序行遍法、后序行遍法

16.3 根树及其应用

定义16.6 若有向图基图为无向树，则称这个有向图为有向树。

一个顶点入度为0, 其余的入度均为1的有向树称作根树。

根树的画法:树根放上方, 省去所有有向边上的箭头

1)入度为0的顶点称作树根；— a

2)入度为1, 出度为0的顶点称作树叶；— b,e,f,h,i

3)入度为1, 出度不为0的顶点称作内点；— c,d,g

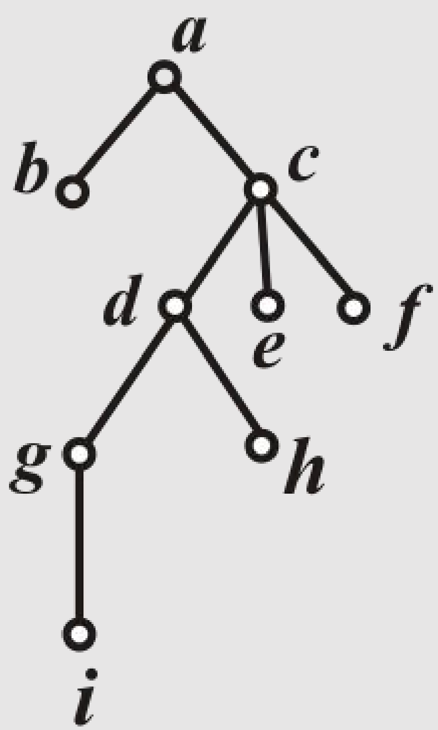
4)树根与内点统称作分支点；— a,c,d,g

5)从树根到任意v的路径的长度（即路径中边数）

称作v的层数，所有顶点的最大层数称作树高；

— 0层有 a; 1层有b,c; 2层有d,e,f; 3层有g,h; 4层有i.

— 树高为4



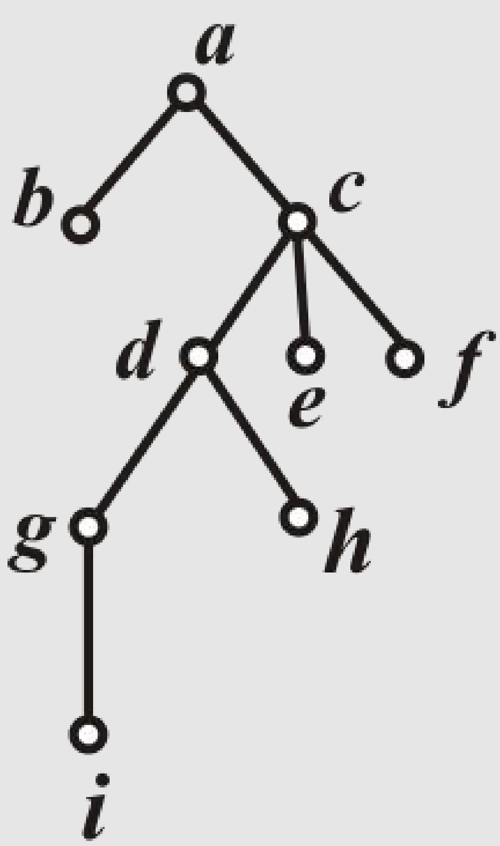
16.3 根树及其应用

定义16.7 设T是一棵非平凡的根树，$\forall v_i, v_j \in V(T)$，

1)若v_i可达v_j，则称v_i为v_j的祖先，v_j为v_i的后代;

2)若v_i邻接到v_j（即$<v_i,v_j> \in E(T)$），则称v_i为v_j的父亲，而v_j为v_i的儿子;

3)若v_i, v_j的父亲相同，则v_j称v_i与是兄弟.



例 a是$bcdefgh$的祖先

$bcdefgh$是a的后代

a是bc的父亲

bc是a的儿子

bc是兄弟

16.3 根树及其应用

设T为根树，若将T中层数相同的顶点都标定次序，则称T为有序树.

根据根树T中每个分支点儿子数以及是否有序，可以将根树分成下列各类.

1)若T中每个分支点至多有r个儿子，则称T为r叉树；
又若T是有序的，则称它为r叉有序树；

2)若T中每个分支点恰有r个儿子，则称T为r叉正则树；
又若T是有序的，则称T为r叉正则有序树；

3)若T是r叉正则树，且每个树叶的层数均为树高，则称T为r叉完全正则树；
又若T是有序的，则称T为r叉完全正则有序树.

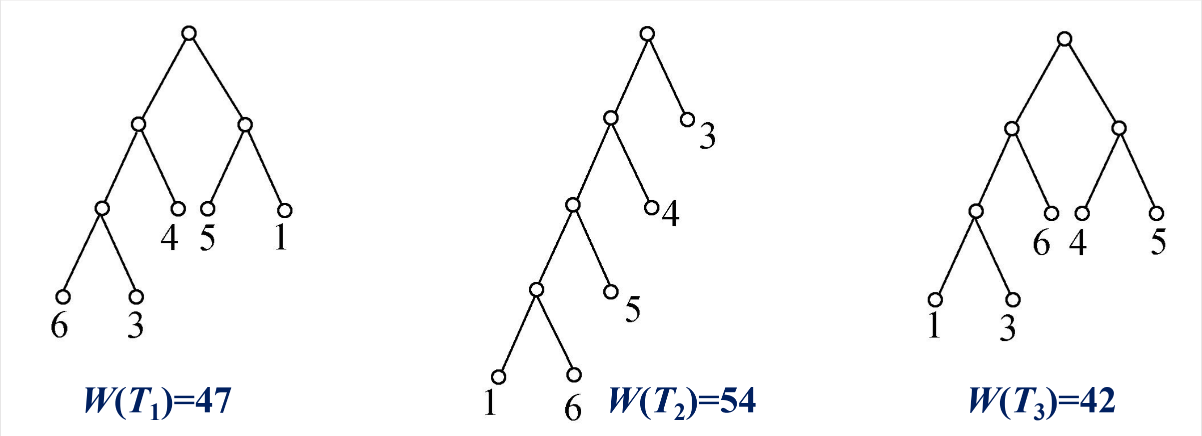
定义16.9 设2叉树T有t片树叶$v_1, v_2, \ldots, v_t$, 树叶的权分别为$w_1, w_2, \ldots, w_t$, 称

$$W(t) = \sum_{i=1}^{t} w_i l(v_i)$$

为**T的权**, 其中 $l(v_i)$是v_i的层数.

在所有权为$w_1, w_2, \ldots, w_t$的t片树叶的2叉树中, **权最小的2叉树**称为**最优 2叉树**.

例



求最优2叉树的算法：**Huffman算法**:

给定实数$w_1, w_2, \ldots, w_t$,

① 作t片树叶, 分别以$w_1, w_2, \ldots, w_t$为权.

② 在所有入度为0的顶点(不一定是树叶)中选出两个权最小的顶点, 添加一个新分支点, 以这2个顶点为儿子, 其权等于这2个儿子的权之和.

③ 重复②, 直到只有1个入度为0 的顶点为止.

例16.5 求带权2,2,3,3,5的最优二叉树.

16.3 根树及其应用

定义16.10 设$\alpha=\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n-1}\alpha_n$是长度为$n$的符号串，称其子串$\alpha_1, \alpha_1\alpha_2, \ldots, \alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n$为该符号串的**前缀**.

例 符号串010110前缀:

0，01，010，0101，01011，010110

定义16.10 设$A=\{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m\}$,是一个符号串集合，若$A$的任意两个符号串都互不为前缀，则称$A$为**前缀码**.

由0-1符号串构成的前缀码称作**2元前缀码**.

例 2元前缀码

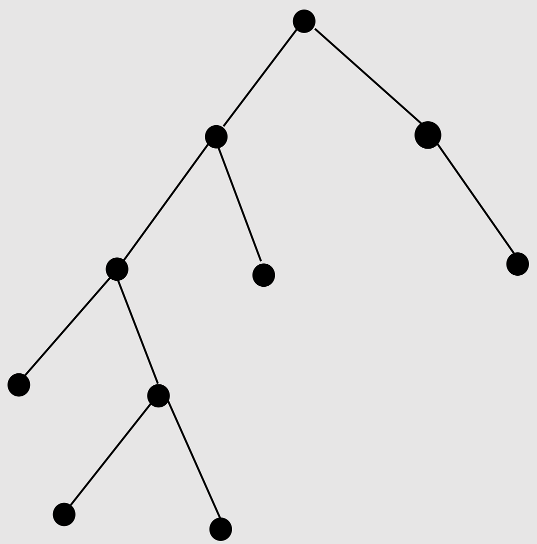
{0,10,110, 1111}

{10,01,001,110}

{0,10,010, 1010}

一棵2叉树产生一个二元前缀码:
对每个分支点, 若关联2条边, 则给左边标0, 右边标1; 若只关联1条边, 则可以给它标0(看作左边), 也可以标1(看作右边).
将从树根到每一片树叶的通路上标的数字组成的字符串记在树叶处, 所得的字符串构成一个前缀码.

例 16.6 求图中所示2叉树所产生的2元前缀码.



定义 设要传输的电文中含有t个字符, 字符a_i出现的频率为p_i, 它的编码长度为l_i, 那么10^n个字符的电文的编码的期望长度是 $\sum_{i=1}^{t} l_i(10^n p_i)$.
称编码期望长度最小的2元前缀码为最佳2元前缀码.

说明: 最佳前缀码不唯一;
对应的最优树权重相同.

在用2叉树产生2元前缀码时, 每个字符的编码长度等于它所在树叶的深度, 因而权为$10^n p_1, 10^n p_2, \ldots, 10^n p_t$的最优2叉树产生的2元前缀码是最佳2元前缀码.
于是, 给定字符出现的频率, 可以用Huffman算法产生最佳2元前缀码.

例16.7 在通信中，设八进制数字出现的频率如下：

0：25%　　1：20%　　2：15%　　3：10%

4：10%　　5：10%　　6：5%　　7：5%

采用2元前缀码, 求传输数字最少的2元前缀码 , 并求传输 $10^n(n\geq2)$个按上述比例出现的八进制数字需要多少个二进制数字？若用等长的 (长为3) 的码字传输需要多少个二进制数字?

解　用Huffman算法求以频率(乘以100)为权的最优2叉树.

这里 $w_1=5, w_2=5, w_3=10, w_4=10, w_5=10, w_6=15, w_7=20, w_8=25$.

16.3 根树及其应用

编码:

0---01

1---11

2---001

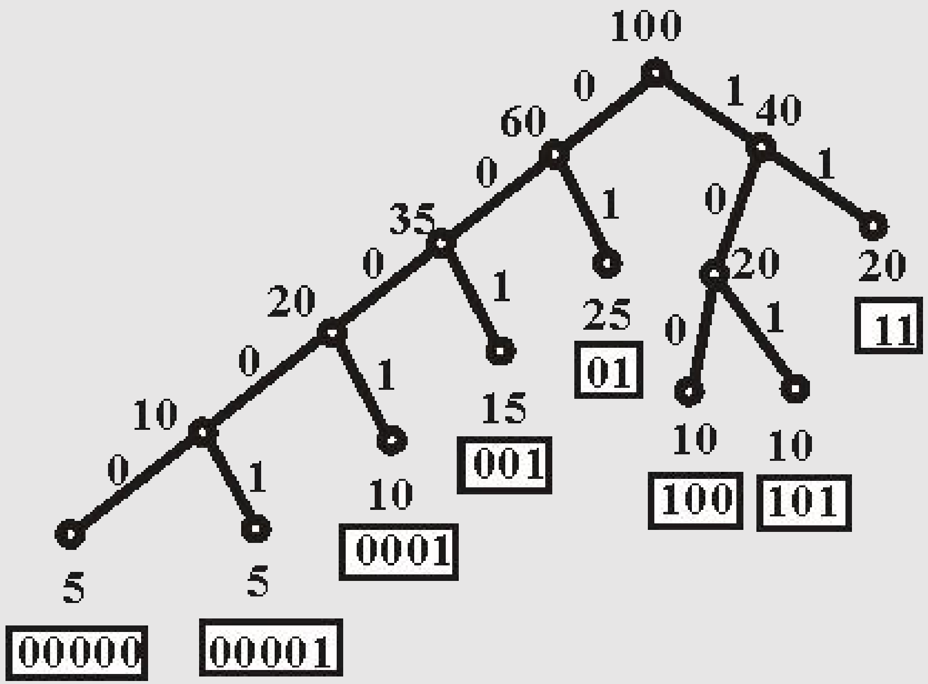
3---100

4---101

5---0001

6---00000

7---00001



传100个按比例出现的八进制数字所需二进制数字的个数为 $W(T)$=285.

传$10^n(n\geq2)$个所用二进制数字的个数为2.85×10^n,

而用等长码(长为3)需要用 3×10^n个数字.

16.3 根树及其应用

行遍(周游)根树T：对T的每个顶点访问且仅访问一次.

行遍2叉有序树的方式:

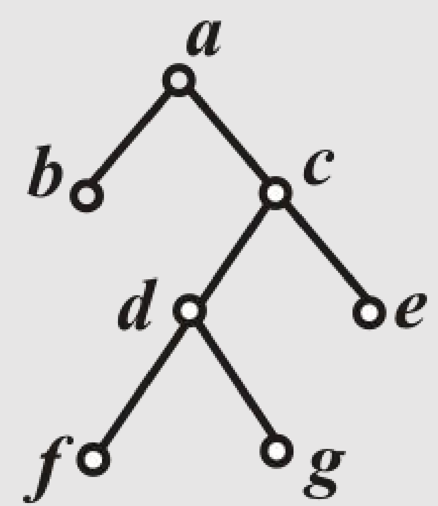
① 中序行遍法: 左子树、根、右子树

② 前序行遍法: 根、左子树、右子树

③ 后序行遍法: 左子树、右子树、根

当不是正则树时, 左子树或右子树可缺省

例 求图中二叉有序正则树，按照中序、前序、后序行遍的周游结果。



解： 中序行遍: $b\ \underline{a}\ ((f\ \underline{d}\ g)\ \underline{c}\ e)$

前序行遍: $\underline{a}\ b\ (\underline{c}\ (\underline{d}\ f\ g)\ e)$

后序行遍: $b\ ((f\ g\ \underline{d})\ e\ \underline{c})\ \underline{a}$

测验14

（1）画出带权1,3,4,5,6的最优二叉树；

（2）写出最优二叉树所产生的2元前缀码；

（3）写出对最优二叉树按照中序、前序、后序行遍的周游结果。

作业

习题 16（P340）

41， 42