第七章

二元关系

目录

Catalogue

7.1 有序对与笛卡尔积

定义7.1 由两个元素 x 和 y（允许 $x=y$）按照一定的顺序组成的二元组称为**有序对**或序偶，记作 $<x,y>$，其中 x 是它的第一元素，y 是它的第二元素。

例 点的直角坐标(3, –4)

有序对性质

(1)有序性 当 $x\neq y$ 时, $<x,y>\neq<y,x>$

(2) $<x,y>$ 与 $<u,v>$ 相等的充分必要条件是

$$<x,y>=<u,v> \Leftrightarrow x=u \wedge y=v$$

例7.1 $<x+2,4> = <5,2x+y>$，求 x, y.

解 $x+2 = 5,\ 2x+y = 4 \Rightarrow y =-2,\ x = 3$

7.1 有序对与笛卡尔积

定义7.2 设A,B为集合，用A中的元素为第一元素，B中的元素为第二元素构成有序对。所有这样的有序对组成的集合称作A与B 的**笛卡儿积**记作$A\times B$，即

$$A\times B =\{ \langle x,y\rangle \mid x\in A \wedge y\in B \}$$

例 $A=\{1,2,3\}, B=\{a,b,c\}$，求出$A\times B$。

$$A\times B =\{\langle 1,a\rangle,\langle 1,b\rangle,\langle 1,c\rangle,\langle 2,a\rangle,\langle 2,b\rangle,\langle 2,c\rangle, \langle 3,a\rangle,\langle 3,b\rangle,\langle 3,c\rangle\}$$

练 $A=\{1,2,3\}, B=\{a,b,c\}$，求出$B\times A$。

$$B\times A =\{\langle a,1\rangle,\langle b,1\rangle,\langle c,1\rangle,\langle a,2\rangle,\langle b,2\rangle,\langle c,2\rangle, \langle a,3\rangle, \langle b,3\rangle,\langle c,3\rangle\}$$

笛卡儿积的性质

若A或B中有一个为空集，则$A\times B$就是空集.

$$A\times\varnothing=\varnothing\times B=\varnothing$$

一般不适合交换律 $A\times B\neq B\times A$ $(A\neq B, A\neq\varnothing, B\neq\varnothing)$

一般不适合结合律 $(A\times B)\times C\neq A\times(B\times C)$ $(A\neq\varnothing, B\neq\varnothing)$

对于并或交运算满足分配律

$$A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)$$

$$(B\cup C)\times A=(B\times A)\cup(C\times A)$$

$$A\times(B\cap C)=(A\times B)\cap(A\times C)$$

$$(B\cap C)\times A=(B\times A)\cap(C\times A)$$

$$A\subseteq C \wedge B\subseteq D \Rightarrow A\times B\subseteq C\times D$$

说明：若$|A|=m$, $|B|=n$，则 $|A\times B|=mn$

例7.2 $A=\{1,2\}$，求 $P(A)\times A$。

解：$P(A)\times A$

$=\{\varnothing, \{1\},\{2\},\{1,2\}\} \times \{1,2\}$

$=\{<\varnothing,1>,<\varnothing,2>,<\{1\},1>,<\{1\},2>,$

$<\{2\},1>,<\{2\},2>,<\{1,2\},1>,<\{1,2\},2>\}$

练 $A=\{\varnothing\}$，求出 $P(A)\times A$。

解：$P(A)\times A$

$=\{\varnothing, \{\varnothing\}\} \times \{\varnothing\}$

$=\{<\varnothing,\varnothing>, <\{\varnothing\},\varnothing>\}$

作业

习题 7（P139 ）

1

目录

Catalogue

7.2 二元关系

- 二元关系的定义
- 二元关系的表示

7.2 二元关系

定义7.3 如果一个集合满足以下条件之一：

1）集合非空, 且它的元素都是有序对；

2）集合是空集；

则称该集合为一个二元关系, 简称为关系， 记作R.

例 $<x,y> \in R$, 可记作 xRy； 如果$<x,y> \notin R$, 则记作$x \not R y$

例 $R_1=\{<1,2>,<a,b>\}$, $R_2=\{<1,2>,a,b\}$是否为二元关系？

解：R_1是二元关系， 可以写 $1R_12$, aR_1b等。

当a, b不是有序对时， R_2不是二元关系,只是一个集合。

定义7.4 设A,B为集合，$A\times B$的任何子集所定义的二元关系叫做从A到B的二元关系，当$A=B$时则叫做A上的二元关系.

例 $A=\{0,1\}$, $B=\{1,2,3\}$，那么

$R_1=\{<0,2>\}$，$R_2=A\times B$，$R_3=\varnothing$，$R_4=\{<0,1>\}$

都是从A到B的二元关系，R_3和R_4同时也是A上的二元关系.

7.2 二元关系

定义7.4 设A,B为集合，$A\times B$的<u>任何子集</u>所定义的二元关系叫做**从A到B的二元关系**，当$A=B$时则叫做 A上的二元关系.

计数 $|A|=n$, $|A\times A|=n^2$, $A\times A$的子集有 2^{n^2} 个. 所以A上有 2^{n^2} 个不同的二元关系.

例 $|A|=3$, 则 A上有$=2^{3^2}=512$个不同的二元关系.

定义7.5

设 A 为任意集合，$\varnothing$是 A 上的关系，称为空关系.

全域关系E_A定义如下：

$$E_A=\{<x,y>|x\in A\wedge y\in A\}=A\times A$$

恒等关系I_A定义如下：

$$I_A=\{<x,x>|x\in A\}$$

例 $A=\{1,2\}$, 求E_A和I_A

则$E_A=A\times A=\{1,2\}\times\{1,2\}$

$=\{<1,1>,<1,2>,<2,1>,<2,2>\}$

$I_A=\{<1,1>,<2,2>\}$

小于等于关系 L_A定义：（*Less*）

$L_A=\{<x,y>|\ x,y\in A\wedge x\le y\}$, $A\subseteq$R，R为实数集合

整除关系D_A定义：（*Divisible*）

$D_A=\{<x,y>|\ x,y\in A\wedge x$整除$y\}$, $A\subseteq$Z*, Z*为非0整数集

例 $A=\{1, 2, 3\}$，求L_A与D_A。

$L_A=\{<1,1>,<1,2>,<1,3>,<2,2>,<2,3>,<3,3>\}$

$D_A=\{<1,1>,<1,2>,<1,3>,<2,2>,<3,3>\}$

包含关系$R_{\subseteq}$定义：

$R_{\subseteq}=\{<x,y>|\ x,y\in A\wedge x\subseteq y\}$, A是集合族.

说明：类似的还可以定义大于等于关系, 小于关系, 大于关系, 真包含关系等等.

例 $B=\{a,b\}$,$P(B)=\{\varnothing,\{a\},\{b\},\{a,b\}\}$, 求 $P(B)$上的包含关系$R_{\subseteq}$。

$R_{\subseteq}=\{<\varnothing,\varnothing>,<\varnothing,\{a\}>,<\varnothing,\{b\}>,<\varnothing,\{a,b\}>,<\{a\},\{a\}>,$
$<\{a\},\{a,b\}>,<\{b\},\{b\}>,<\{b\},\{a,b\}>,<\{a,b\},\{a,b\}>\}$

关系的表示方式：集合表达式、关系矩阵、关系图。

关系矩阵　设$A=\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$，$R$是$A$上的关系，令

$r_{ij}=1 \Leftrightarrow \langle x_i, x_j\rangle \in R.$

$r_{ij}=0 \Leftrightarrow \langle x_i, x_j\rangle \notin R.$

则R的关系矩阵为$M_R=(r_{ij})_{n\times n}$

$$M_R=\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} & \cdots & r_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ r_{n1} & r_{n2} & \cdots & r_{nn} \end{bmatrix}$$

关系的表示方式：集合表达式、关系矩阵、关系图。

关系图 设$A=\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$，$R$是从$A$上的关系，$R$的关系图记为$G_R=\langle A, R\rangle$, 其中$A$为结点集，$R$为边集。如果$\langle x_i,x_j\rangle$属于关系$R$，在图中就有一条从 x_i 到 x_j 的有向边。

注意：A, B为有穷集，

关系矩阵适于表示从A到B的关系或者A上的关系，

关系图适于表示A上的关系。

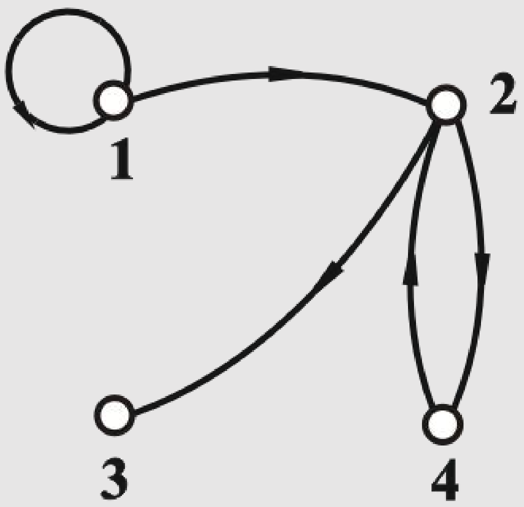
7.2 二元关系

例 $A=\{1,2,3,4\}$,

$R=\{<1,1>,<1,2>,<2,3>,<2,4>,<4,2>\}$,

写出R的关系矩阵M_R和关系图G_R。

$$M_R=\begin{bmatrix}1&1&0&0\\0&0&1&1\\0&0&0&0\\0&1&0&0\end{bmatrix}$$



作业

习题 7（P139 ）

7

12

目录

Catalogue

7.3 关系的运算

- 基本运算定义
  - 定义域、值域、域
  - 逆、合成、限制、像
- 基本运算的性质
- 幂运算
  - 定义
  - 求法
  - 性质

定义7.6 设R是一个二元关系,

1)定义域：R中所有有序对的第一元素构成的集合

$$\mathrm{dom}R = \{\, x \mid \exists y\,(\langle x,y\rangle \in R)\,\}$$

2)值域：R中所有有序对的第二元素构成的集合

$$\mathrm{ran}R = \{\, y \mid \exists x\,(\langle x,y\rangle \in R)\,\}$$

3)域：R的定义域和值域的并集

$$\mathrm{fld}R = \mathrm{dom}R \cup \mathrm{ran}R$$

例7.5 $R=\{\langle 1,2\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 2,4\rangle,\langle 4,3\rangle\}$, 求定义域,值域,域.

解：$\mathrm{dom}R=\{1, 2, 4\}$

$\mathrm{ran}R=\{2, 3, 4\}$

$\mathrm{fld}R=\{1, 2, 3, 4\}$

7.3 关系的运算

定义7.7 设R为二元关系,R的逆关系,简称为的R逆,记为

$$R^{-1} = \{<y,x> \mid <x,y> \in R\}。$$

定义7.8 设F，G为二元关系，G对F的右复合，记为

$$F\circ G = |<x,z> \mid \exists y\,(<x,y>\in F \wedge <y,z>\in G)\}.$$

例7.6 $F=\{<3,3>, <6,2>\}$,$G=\{ <2,3>\}$，求 F^{-1}, $F\circ G$, $G\circ F$。

解： $F^{-1}=\{<3,3>, <2,6>\}$

$F\circ G =\{<6,3>\}$

$G\circ F =\{<2,3>\}$

7.3 关系的运算

定义7.9 设F为二元关系, A为集合，则

1）F 在A上的**限制**

$$F\upharpoonright A = \{<x,y> \mid xFy \land x\in A\}$$

2）A 在F下的**像**

$$F[A] = \mathrm{ran}(F\upharpoonright A)$$

例7.7 $R=\{<1,2>, <1,3>, <2,2>,<2,4>,<3,2>\}$

求$R\upharpoonright\{1\}$，$R\upharpoonright\varnothing$，$R\upharpoonright\{2,3\}$，$R[\{1\}]$，$R[\varnothing]$，$R[\{2,3\}]$

$R\upharpoonright\{1\}=\{<1,2>,<1,3>\}$

$R\upharpoonright\varnothing=\varnothing$

$R\upharpoonright\{2,3\}=\{<2,2>,<2,4>,<3,2>\}$

$R[\{1\}]=\{2,3\}$

$R[\varnothing]=\varnothing$

$R[\{2,3\}]=\{2,4\}$

关系运算与集合运算的关系

(1)关系是集合，第6章定义的集合运算对于关系也适用；

(2)逆运算优先于其它运算；

(3)关系运算高于集合运算；

(4)没有规定优先权的运算以括号决定运算顺序。

7.3 关系的运算

定理7.1 设F是任意的关系, 则

1) $(F^{-1})^{-1}=F$

2) $\mathrm{dom}F^{-1}=\mathrm{ran}F$, $\mathrm{ran}F^{-1}=\mathrm{dom}F$

定理7.2 设F, G, H是任意的关系, 则

1) $(F\circ G)\circ H=F\circ(G\circ H)$

2) $(F\circ G)^{-1}=G^{-1}\circ F^{-1}$

定理7.3 设R是A上的关系, 则

$$R\circ I_A=I_A\circ R=R$$

7.3 关系的运算

定理7.4 设F, G, H是任意的关系, 则

1) $F\circ(G\cup H)=F\circ G\cup F\circ H$
2) $(G\cup H)\circ F=G\circ F\cup H\circ F$
3) $F\circ(G\cap H)=F\circ G\cap F\circ H$
4) $(G\cap H)\circ F=G\circ F\cap H\circ F$

定理7.5 设F为关系, A，B为集合，则

1) $F\restriction(A\cup B)=F\restriction A\cup F\restriction B$
2) $F[A\cup B]=F[A]\cup F[B]$
3) $F\restriction(A\cap B)=F\restriction A\cap F\restriction B$
4) $F[A\cap B]\subseteq F[A]\cap F[B]$

定义7.10 设R为A上的关系, n为自然数, 则 R 的 **n次幂** R^n定义为

1) $R^0=\{<x,x> \mid x\in A\}=I_A$

2) $R^{n+1} = R^n\circ R$

说明:

1)对于A上的任何关系R_1和R_2都有

$$R_1^0 = R_2^0 = I_A$$

2)对于A上的任何关系 R 都有

$$R^1 = R^0\circ R = I_A\circ R= R$$

7.3 关系的运算

定义 对于集合表示的关系R，计算 R^n 就是n个R右复合。

方法一：关系矩阵

n个矩阵相乘, 其中相加采用逻辑加.

1+1=1,1+0=1,0+1=1,0+0=0

方法二：关系图

1）R的关系图是G，R^n的关系图是G'；

2）G'的顶点集与G相同；

3）考察G的每个顶点x_i，如果在G中从x_i出发经过n步长的路径到达顶点x_j，则在中加一条从x_i到x_j的边。

例7.8 设$A=\{a,b,c,d\}$, $R=\{\langle a,b\rangle,\langle b,a\rangle,\langle b,c\rangle,\langle c,d\rangle\}$, 求$R$的各次幂, 分别用矩阵和关系图表示.

解：$R^0=I_A$

$$M_{R^0}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\qquad M_R=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$M_{R^2}=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

7.3 关系的运算

同理，R^3和R^4的矩阵分别是：

$$M_{R^3}=M_{R^2}M_R=\begin{bmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1&0&1\\1&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$M_{R^4}=M_{R^3}M_R=\begin{bmatrix}0&1&0&1\\1&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

有上述结果可得：$M_R{}^4=M_R{}^2$, 即$R^4=R^2$

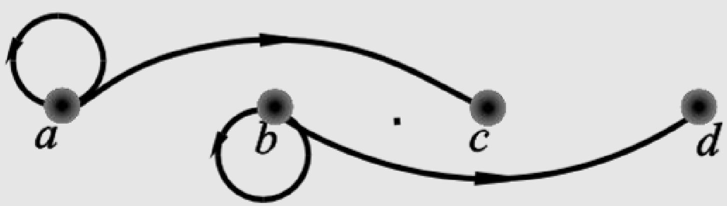
因此可得：$R^2=R^4=R^6=\ldots$， $R^3=R^5=R^7=\ldots$

7.3 关系的运算

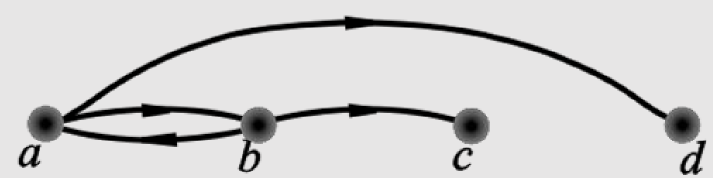
$R^0, R^1, R^2, R^3,\ldots$的关系图如下图所示

R^0

R^1



$R^2=R^4=\ldots$



$R^3=R^5=\ldots$

7.3 关系的运算

定理7.6 设A为n元集, R是A上的关系, 则存在自然数 s 和 t, 使得$R^s = R^t$.

定理7.7 设 R 是 A 上的关系, $m, n \in \mathrm{N}$, 则

1) $R^m \circ R^n = R^{m+n}$
2) $(R^m)^n = R^{mn}$

定理7.8 R是A上的关系, 若存在自然数 $s, t(s < t)$使得$R^s = R^t$, 则

1) 对任何 $k \in N$有$R^{s+k} = R^{t+k}$
2) 对任何 $k, i \in N$有$R^{s+kp+i} = R^{s+i}$，其中，$p = t - s$
3) 令$S = \{R^0, R^1, \ldots, R^{t-1}\}$，则对任意的$q \in N$有$R^q \in S$

作业

习题 7（P139 ）

16