第六章

集合代数

目录
Catalogue

6.1 集合的基本概念

集合　没有精确的数学定义

把一些事物汇集到一起组成一个整体

理解：一些离散个体组成的全体

组成集合的个体称为它的元素或成员

常用数集

N, Z, Q, R, C 分别表示

自然数、整数、有理数、实数和复数集合；0 是自然数.

集合的表示

列元素法　$A=\{a, b, c, d\}$，元素之间用逗号隔开

谓词表示法 $B=\{x \mid P(x)\}$，B 由使得 $P(x)$ 为真的 x 构成

6.1 集合的基本概念

元素与集合的关系：隶属关系

属于$\in$，不属于 $\notin$

实例

$A=\{ x \mid x\in \mathrm{R} \wedge x^2-1=0 \}$(谓词表示法),

$A=\{-1,1\}$ (列元素法)

$1\in A$, $2\notin A$

注意：对于任何集合 A 和元素 x (可以是集合),

$x\in A$和 $x\notin A$ 两者成立其一，且仅成立其一.

6.1 集合的基本概念

例

$A=\{\, a, \{b,c\}, d, \{\{d\}\} \,\}$

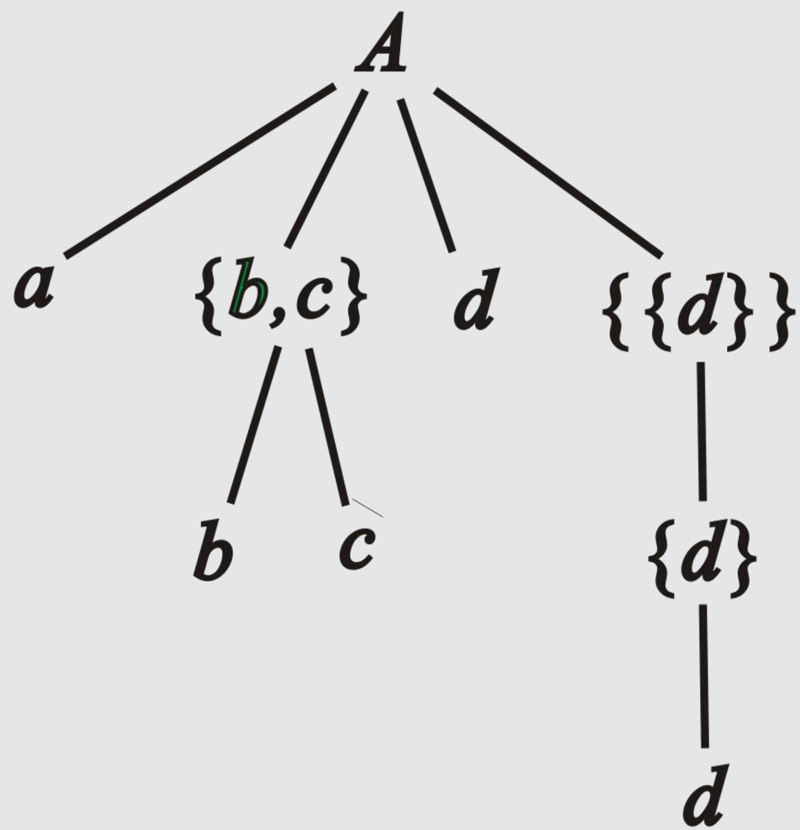
$\{b,c\} \in A$

$b \notin A$

$d \in A$

$\{\{d\}\} \in A$

$\{d\} \notin A$



6.1 集合的基本概念

定义 设A，B为集合，如果 B中的每个元素都是 A 中的元素，则称B是 A 的**子集合**，简称子集。这时也称B 被 A 包含，或 A 包含 B，记作 $B \subseteq A$ 。如果B 不被 A 包含，则记作$B \nsubseteq A$ 。

包含的符号化表示为： $B \subseteq A \Leftrightarrow \forall x\,(x \in B \rightarrow x \in A)$。

显然对任何集合A，都有 $A \subseteq A$ 。

6.1 集合的基本概念

定义 设A，B为集合，如果 $A \subseteq B$ 且 $B \subseteq A$，则称A 与 B相等，记作$A = B$。

如果A 与 B不相等，则记作$A \neq B$。

相等的符号化表示为： $A = B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A$

定义 设A，B为集合，如果 $B \subseteq A$ 且$B \neq A$，则称B 是 A 的真子集，记作 $B \subset A$。

如果B 不是A 的真子集，则记作 $B \not\subset A$。

真子集的符号化表示为： $B \subset A \Leftrightarrow B \subseteq A \wedge B \neq A$

集合之间的关系

包含（子集）	$A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x\,(x \in A \to x \in B)$
不包含	$A \nsubseteq B \Leftrightarrow \exists x\,(x \in A \wedge x \notin B)$
相等	$A = B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A$
不相等	$A \neq B$
真包含(真子集)	$A \subset B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge A \neq B$
不真包含	$A \not\subset B$

注意: $\in$ 和 $\subseteq$ 是不同层次的问题

例 $A=\{a, \{a\}\}$和$B=\{a\}$

$B=\{a\}$看做一个集合，那么$B\subseteq A$

$B=\{a\}$看做集合A里的一个元素，$B\in A$

6.1 集合的基本概念

空集 $\varnothing$　不含任何元素的集合

定理　空集是任何集合的子集

推论　空集是惟一的.

全集 E（相对性）

在给定问题中，如果所涉及的集合都是某个集合的子集，则称这个集合为全集，记为E。

含有n个元素的集合简称为n元集，它的含有m（$m\le n$）个元素的子集称作它的m元子集。

定义 设A为集合，把A的全体子集构成的集合称作A的幂集，即作P(A)。

$$P(A) = \{ x \mid x\subseteq A \}$$

说明：如果 $|A| = n$，则 $|P(A)| = 2^n$

实例

$P(\varnothing) = \{\varnothing\}$,

$P(\{\varnothing\}) = \{\varnothing,\{\varnothing\}\}$

$P(\{1,\{2,3\}\})=\{\varnothing,\{1\},\{\{2,3\}\},\{1,\{2,3\}\}\}$

作业

习题 6（P104）

8（4,5）

目录

Catalogue

6.2 集合的运算

定义 设为 A，B集合， A与B的并集 $A\cup B$，交集 $A\cap B$， A对B的相对补集$A-B$分别定义如下：

并 $A\cup B = \{ x \mid x\in A \vee x\in B \}$

交 $A\cap B = \{ x \mid x\in A \wedge x\in B \}$

相对补 $A-B = \{ x \mid x\in A \wedge x\notin B \}$

说明：$A_1\cup A_2\cup \ldots A_n= \{x \mid x\in A_1\vee x\in A_2\vee \ldots \vee x\in A_n\}$

$A_1\cap A_2\cap \ldots A_n= \{x \mid x\in A_1\wedge x\in A_2\wedge \ldots \wedge x\in A_n\}$

6.2 集合的运算

定义 设为 A，B集合， A与B的对称差集$A \oplus B$定义如下：

$$A \oplus B = (A-B) \cup (B-A)$$
$$= (A \cup B)-(A \cap B)$$

定义 给定全集E后，$A \subseteq E$， A的绝对补集$\sim A$定义如下：

$$\sim A = E - A = \{x \mid x \in E \land x \notin A\}$$

6.2 集合的运算

定义 设 A为集合， A的元素的元素构成的集合称作的 A广义并，记作$\cup A$，符号化表示为：

$$\cup A=\{x \mid \exists z(z \in A \wedge x \in z)\}.$$

若$A=\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$，则$\cup A=A_1 \cup A_2 \cup \ldots A_n$

例6.2 设$A=\{\{a,b,c\},\{a,c,d\},\{a,e,f\}\}$，$B=\{\{a\}\}$，

$C=\{a,\{c,d\}\}$，求 $\cup A$，$\cup B$，$\cup C$。

解：$\cup A=\{a,b,c\} \cup \{a,c,d\} \cup \{a,e,f\}=\{a,b,c,d,e,f\}$

$\cup B=\{a\}$

$\cup C=a \cup \{c,d\}$

$\cup \varnothing=\varnothing$

6.2 集合的运算

定义 设 A为非空集合， A的元素的公共元素构成的集合称作的 A广义交，记作$\cap A$，符号化表示为：

$$\cap A = \{ x \mid \forall z (z \in A \rightarrow x \in z) \}.$$

若$A=\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$，则$\cap A = A_1 \cap A_2 \cap \ldots A_n$

例6.2 设$A=\{\{a,b,c\},\{a,c,d\},\{a,e,f\}\}$，$B=\{\{a\}\}$，

$C=\{a,\{c,d\}\}$，求 $\cap A$， $\cap B$，$\cap C$。

解：$\cap A=\{a,b,c\}\cap\{a,c,d\}\cap\{a,e,f\}=\{a\}$

$\cap B=\{a\}$

$\cap C=a\cap\{c,d\}$

$\varnothing$ 不可以进行广义交

6.2 集合的运算

集合运算优先顺序

一类运算：广义并、广义交、幂集、绝对补
二类运算：并、交、相对补、对称差

- 一类运算优先于二类运算
- 一类运算之间由右向左顺序进行
- 二类运算之间由括号决定先后顺序

例 6.3 设$A=\{\{a\},\{a,b\}\}$，计算

$\cup\cup A$，$\cap\cap A$，$\cap\cup A\cup(\cup\cup A-\cup\cap A)$

解： $A=\{\{a\},\{a,b\}\}$

$\cup A=\{a,b\}$,

$\cap A=\{a\}$

$\cup\cup A=a\cup b$

$\cap\cap A=a$

$\cap\cup A=a\cap b$

$\cup\cap A=a$

$\cap\cup A\cup(\cup\cup A-\cup\cap A)$

$=(a\cap b)\cup((a\cup b)-a)$

$=(a\cap b)\cup(b-a)$

$=b$

6.2 集合的运算

练习

F:一年级大学生的集合　　S：二年级大学生的集合

R：计算机系学生的集合　　M：数学系学生的集合

T：选修离散数学的学生的集合

L：爱好文学学生的集合　　P：爱好体育运动学生的集合

所有计算机系二年级学生都选修离散数学

数学系一年级的学生都没有选修离散数学

数学系学生或爱好文学或爱好体育运动

只有一、二年级的学生才爱好体育运动

除去数学和计算机系二年级学生外都不选修离散数学

$T \subseteq (M \cup R) \cap S$

$R \cap S \subseteq T$

$(M \cap F) \cap T = \varnothing$

$M \subseteq L \cup P$

$P \subseteq F \cup S$

$S - (M \cup R) \subseteq P$

练习 分别对条件(1)到(5)，确定 X 集合与下述那些集合相等。

$S_1 = \{ 1, 2, \ldots, 8, 9 \}$, $S_2 = \{ 2, 4, 6, 8 \}$, $S_3 = \{ 1, 3, 5, 7, 9 \}$,

$S_4 = \{ 3, 4, 5 \}$, $S_5 = \{ 3, 5 \}$

(1) 若 $X \cap S_3 = \varnothing$，则 $X = S_2$

(2) 若 $X \subseteq S_4$, $X \cap S_2 = \varnothing$, 则 $X = S_5$

(3) 若 $X \subseteq S_1$，$X \nsubseteq S_3$，则 $X = S_1, S_2, S_4$

(4) 若 $X - S_3 = \varnothing$，则 $X = S_3, S_5$

(5) 若 $X \subseteq S_3$，$X \nsubseteq S_1$，则 X 与 $S_1, \ldots, S_5$ 都不等

作业

习题 6（P104）

9（2,5）

目录
Catalogue

6.3 有穷集的计数

集合 A 的基数：集合A中的元素数，记作 card A。

有穷集 A： card A=|A|=n，n为自然数.

有穷集的实例：

$A=\{a,b,c\}$, card $A=|A|=3$；

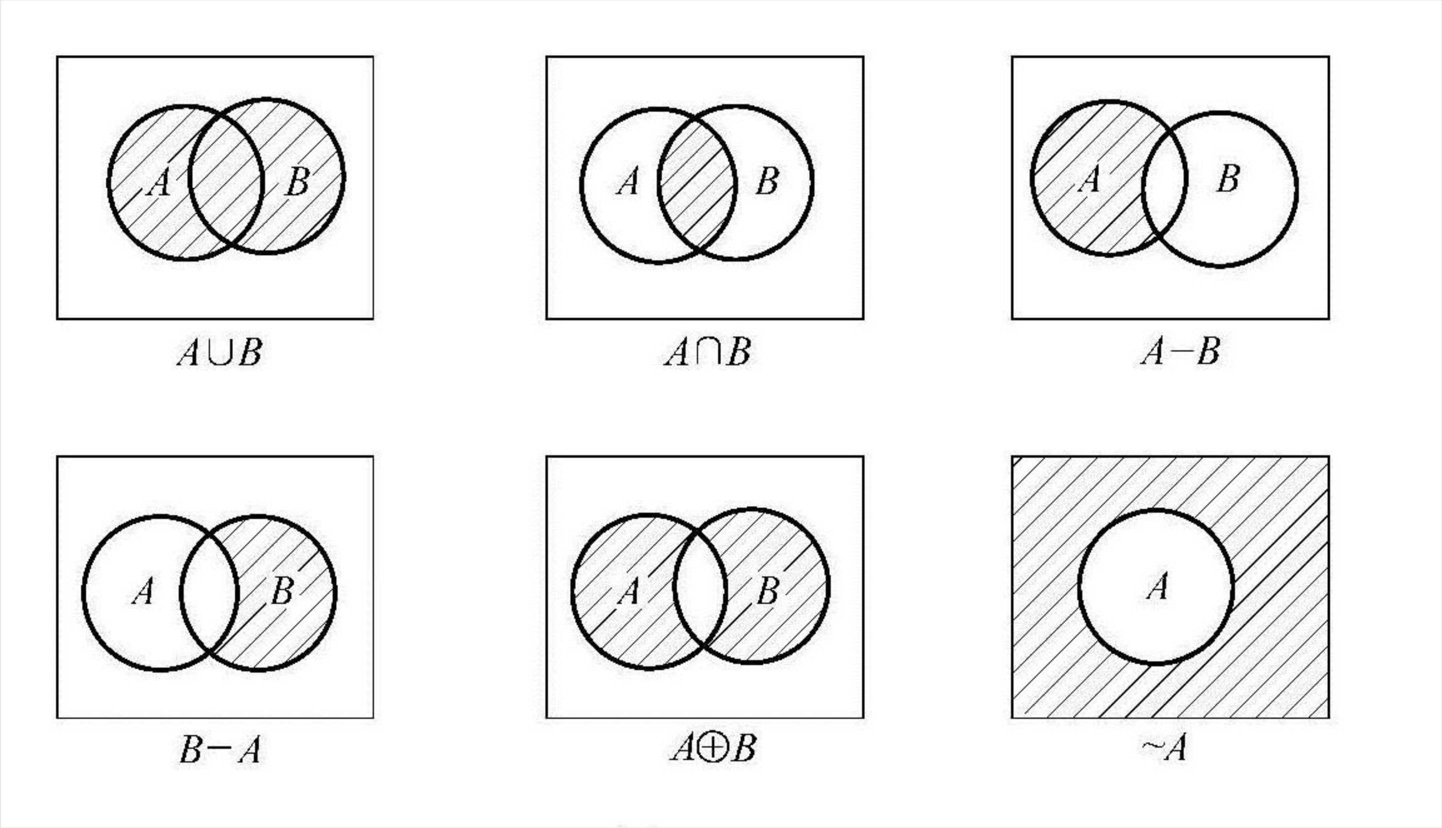
$B=\{x \mid x^2+1=0, x\in R\}$, card $B=|B|=0$

无穷集的实例：

N, Z, Q, R, C 等

6.3 有穷集的计数

集合之间的关系和初级运算可以用文氏图（**Venn diagram**）给予形象的描述，使用文氏图可以很方便地解决有穷集的计数问题。



6.3 有穷集的计数

例 6.4 24名科技人员，每人至少会1门外语.

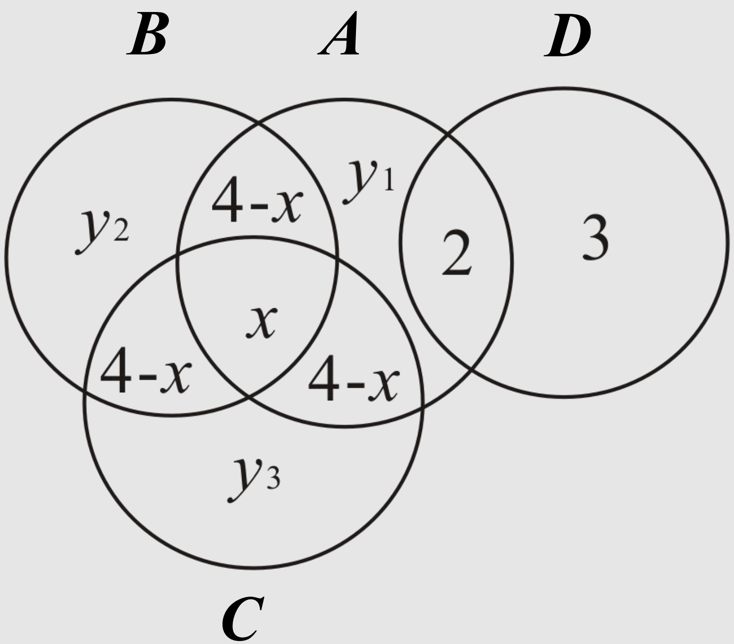
英语：13； 法语：9； 德语：10；日语：5

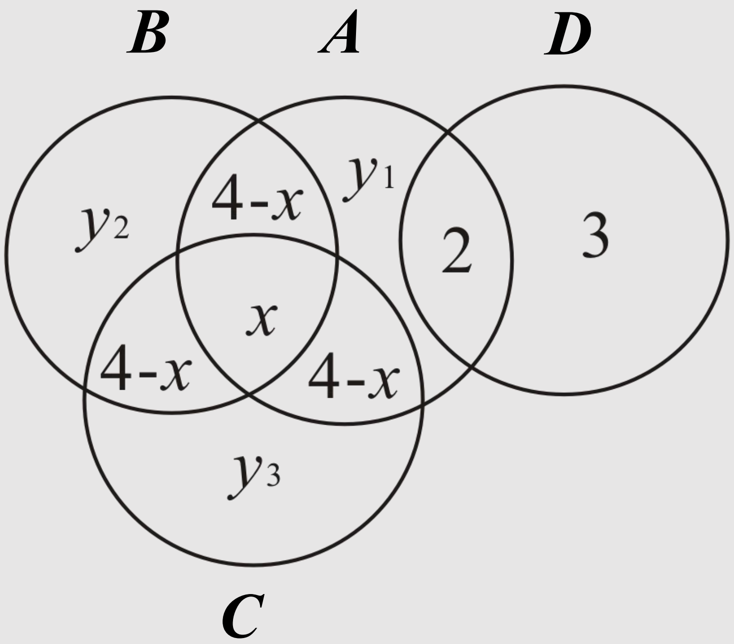
英日：2； 英德：4； 英法：4； 法德：4

会日语的不会法语、德语

求：只会 1 种语言人数，会 3 种语言人数

解：令A,B,C,D分别表示会英、法、德、日语的集合，设同时会三种语言的有x人，只会英法德语一种语言的分别为y_1,y_2,y_3人。





$$x+2(4-x)+y_1+2=13$$

$$x+2(4-x)+y_2=10$$

$$x+2(4-x)+y_3=9$$

$$x+3(4-x)+y_1+y_2+y_3=19$$

$$x=1,\ y_1=4,\ y_2=3,\ y_3=2$$

即同时会三种语言的有2人，

只会英、法、德语一种语言的分别为4、3、2人。

例6.5 求1到1000之间（包含1和1000在内）既不能被 5 和6 整除，也不能被 8 整除的数有多少个？

解：设$S=\{x|x\in Z\wedge 1\le x\le 1000\}$

$A=\{x|x\in S\wedge x$可被5整除$\}$

$B=\{x|x\in S\wedge x$可被6整除$\}$

$C=\{x|x\in S\wedge x$可被8整除$\}$

$\lfloor x\rfloor$表示小于或等于x的最大整数

$lcm(x_1,x_2,\ldots,x_n)$表示$x_1,x_2,\ldots,x_n$的最小公倍数

则有 $|A|=\lfloor 1000/5\rfloor=200$

$|B|=\lfloor 1000/6\rfloor=166$

$|C|=\lfloor 1000/8\rfloor=125$

$|A\cap B|=\lfloor 1000/lcm(5,6)\rfloor=\lfloor 1000/30\rfloor=33$

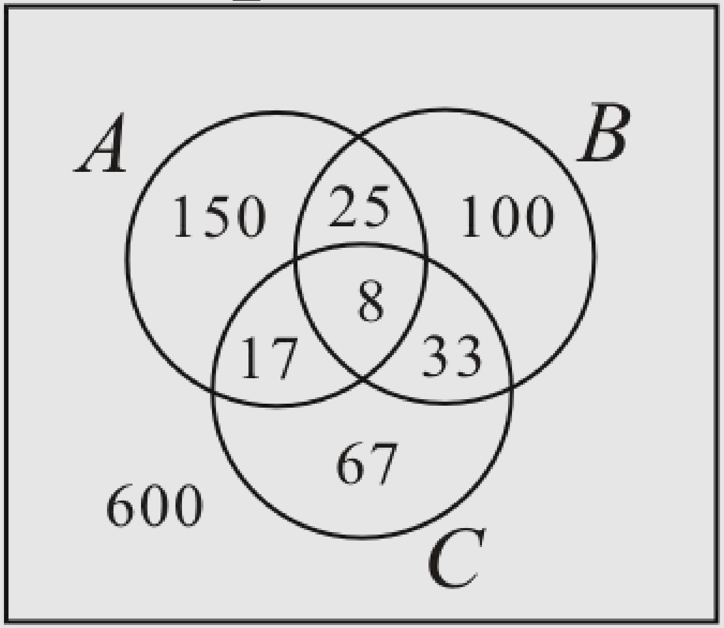
$|A\cap C|=\lfloor 1000/lcm(5,8)\rfloor=\lfloor 1000/40\rfloor=25$,

$|B\cap C|=\lfloor 1000/lcm(6,8)\rfloor=\lfloor 1000/24\rfloor=41$,

$|A\cap B\cap C|=\lfloor 1000/lcm(5,6,8)\rfloor=\lfloor 1000/120\rfloor=8$

将这些数字依次填入文氏图，由图可知，不能被5,6,8整除的数有

1000-(200+100+33+67)=600



定理（包含排斥原理） 设 S 为有穷集，$P_1, P_2, \ldots, P_m$ 是 m 种性质， S中任何元素 x 或者具有性质P_i，或者不具有性质P_i，两种情况必居其一。

A_i是 S 中具有性质 P_i 的元素构成的子集，i=1, 2, …, m.则 S 中不具有性质 $P_1, P_2, \ldots, P_m$ 的元素数为:

$$|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \ldots \cap \overline{A_m}|$$

$$=|S|-\sum_{i=1}^{m}|A_i|+\sum_{1\le i<j\le m}|A_i \cap A_j|-\sum_{1\le i<j<k\le m}|A_i \cap A_j \cap A_k|+\ldots$$

$$+(-1)^m|A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_m|$$

推论 S中**至少具有一条性质**的元素数为

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_m|$$

$$= \sum_{i=1}^{m} |A_i| - \sum_{1 \le i < j \le m} |A_i \cap A_j| + \sum_{1 \le i < j < k \le m} |A_i \cap A_j \cap A_k| + \ldots$$

$$+ (-1)^{m-1} |A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_m|$$

例6.5 求1到1000之间（包含1和1000在内）既不能被 5 和6 整除，也不能被 8 整除的数有多少个？

解：$S=\{ x \mid x\in Z, 1\le x \le 1000 \}$,

如下定义 S 的 3 个子集 A, B, C：

$A=\{ x \mid x\in S, 5 \mid x \}$,

$B=\{ x \mid x\in S, 6 \mid x \}$,

$C=\{ x \mid x\in S, 8 \mid x \}$

对上述子集计数：

$$|S|=1000,$$

$$|A|=\lfloor 1000/5\rfloor=200, \qquad |A\cap B|=\lfloor 1000/30\rfloor=33,$$

$$|B|=\lfloor 1000/6\rfloor=166, \qquad |A\cap C|=\lfloor 1000/40\rfloor=25,$$

$$|C|=\lfloor 1000/8\rfloor=125, \qquad |B\cap C|=\lfloor 1000/24\rfloor=41,$$

$$|A\cap B\cap C|=\lfloor 1000/120\rfloor=8,$$

代入公式

$$N=1000-(200+166+125)+(33+25+41)-8=600$$

测验5 一个学校有507,292,312,和344个学生分别选了微积分、离散数学、数据结构和程序设计，且有14人选了微积分和数据结构，213人选了微积分和程序设计，211人选了离散数学和数据结构，43人选了离散数学和程序设计，没有学生同时选微积分和离散数学，也没有学生同时选数据结构和程序设计。分别求只选了微积分、离散数学、数据结构和程序设计的学生人数。

作业

习题 6 （P104）

16

20

目录

Catalogue

集合运算的主要算律

	$\cup$	$\cap$	$\oplus$
交换	$A\cup B=B\cup A$	$A\cap B=B\cap A$	$A\oplus B=B\oplus A$
结合	$(A\cup B)\cup C=$ $A\cup(B\cup C)$	$(A\cap B)\cap C=$ $A\cap(B\cap C)$	$(A\oplus B)\oplus C=$ $A\oplus(B\oplus C)$
幂等	$A\cup A=A$	$A\cap A=A$	无

	$\cup$与$\cap$	$\cap$与$\oplus$
分配	$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$ $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$	$A\cap(B\oplus C)=(A\cap B)\oplus(A\cap C)$
吸收	$A\cup(A\cap B)=A$ $A\cap(A\cup B)=A$	

吸收律的前提：$\cup$、$\cap$可交换

6.4 集合恒等式

	$-$	$\sim$
德摩根律	$A-(B\cup C)=(A-B)\cap(A-C)$ $A-(B\cap C)=(A-B)\cup(A-C)$ $(B\cup C)-A=(B-A)\cup(C-A)$ $(B\cap C)-A=(B-A)\cap(C-A)$	$\sim(B\cup C)=\sim B\cap\sim C$ $\sim(B\cap C)=\sim B\cup\sim C$
双重否定	$\sim\sim A=A$	

	$\varnothing$	E
补元律	$A\cap\sim A=\varnothing$	$A\cup\sim A=E$
零律	$A\cap\varnothing=\varnothing$	$A\cup E=E$
同一律	$A\cup\varnothing=A$	$A\cap E=A$
否定	$\sim\varnothing=E$	$\sim E=\varnothing$

集合包含或相等的证明方法

证明 $X \subseteq Y$

- 命题演算法
- 包含传递法
- 等价条件法
- 反证法
- 并交运算法

证明 $X=Y$

- 命题演算法
- 等式代入法
- 反证法
- 运算法

以上的 X, Y 代表集合公式

命题演算法证 $X\subseteq Y$

任取 x，

$$x\in X\Rightarrow \ldots \Rightarrow x\in Y$$

例 证明$A\subseteq B \Leftrightarrow P(A)\subseteq P(B)$

(1)任取x

$$x\in P(A)\Rightarrow x\subseteq A\Rightarrow x\subseteq B\Rightarrow x\in P(B)$$

(2)任取x

$$x\in A\Rightarrow \{x\}\subseteq A\Rightarrow \{x\}\in P(A)\Rightarrow \{x\}\in P(B)$$

$$\Rightarrow \{x\}\subseteq B\Rightarrow x\in B$$

包含传递法证 $X\subseteq Y$

找到集合 T 满足 $X\subseteq T$ 且 $T\subseteq Y$，从而有 $X\subseteq Y$

例 $A-B \subseteq A\cup B$

证 $A-B \subseteq A$

$A \subseteq A\cup B$

所以 $A-B \subseteq A\cup B$

利用包含的等价条件证 $X\subseteq Y$

$$A\subseteq B \Leftrightarrow A\cup B=B \Leftrightarrow A\cap B=A \Leftrightarrow A-B=\phi$$

例 $A\subseteq C \wedge B\subseteq C \Rightarrow A\cup B\subseteq C$

证 $A\subseteq C \Rightarrow A\cup C=C$

$B\subseteq C \Rightarrow B\cup C=C$

$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)=A\cup C=C$

$(A\cup B)\cup C=C \Leftrightarrow A\cup B\subseteq C$

命题得证

6.4 集合恒等式

反证法证 $X\subseteq Y$

欲证$X\subseteq Y$, 假设命题不成立，必存在 x 使得

$x\in X$ 且 $x\notin Y$, 然后推出矛盾.

例 证明 $A\subseteq C \wedge B\subseteq C \Rightarrow A\cup B\subseteq C$

证 假设 $A\cup B \subseteq C$ 不成立,

则 $\exists x\,(x\in A\cup B \wedge x\notin C)$

因此 $x\in A$ 或 $x\in B$，且 $x\notin C$

若 $x\in A$, 则与 $A\subseteq C$ 矛盾;

若 $x\in B$, 则与 $B\subseteq C$ 矛盾;

假设不成立。

6.4 集合恒等式

利用已知包含式并交运算

由已知包含式通过运算产生新的包含式

$$X \subseteq Y \Rightarrow X \cap Z \subseteq Y \cap Z,\ X \cup Z \subseteq Y \cup Z$$

例 证明 $A \cap C \subseteq B \cap C \wedge A - C \subseteq B - C \Rightarrow A \subseteq B$

证 $A \cap C \subseteq B \cap C$，$A - C \subseteq B - C$

上式两边求并，得

$$(A \cap C) \cup (A - C) \subseteq (B \cap C) \cup (B - C)$$

$$\Rightarrow (A \cap C) \cup (A \cap \sim C) \subseteq (B \cap C) \cup (B \cap \sim C)$$

$$\Rightarrow A \cap (C \cup \sim C) \subseteq B \cap (C \cup \sim C)$$

$$\Rightarrow A \cap E \subseteq B \cap E$$

$$\Rightarrow A \subseteq B$$

命题演算法证明$X=Y$

任取 x，

$x \in X \Rightarrow \ldots \Rightarrow x \in Y$

$x \in Y \Rightarrow \ldots \Rightarrow x \in X$

或者

$x \in X \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow x \in Y$

例 证明 $A \cup (A \cap B) = A$ （吸收律）

证 任取x,

$x \in A \cup (A \cap B) \Leftrightarrow x \in A \vee x \in A \cap B$

$\Leftrightarrow x \in A \vee (x \in A \wedge x \in B) \Leftrightarrow x \in A$

等式替换证明$X=Y$

不断进行代入化简，最终得到两边相等

例 证明$A\cup(A\cap B)=A$ （吸收律）

证 (假设交换律、分配律、同一律、零律成立)

$A\cup(A\cap B)$

$=(A\cap E)\cup(A\cap B)$ 同一律

$=A\cap(E\cup B)$ 分配律

$=A\cap(B\cup E)$ 交换律

$=A\cap E$ 零律

$=A$ 同一律

反证法证明$X=Y$

假设 $X=Y$ 不成立，则存在 x 使得 $x\in X$且$x\notin Y$，或者存在 x 使得 $x\in Y$且$x\notin X$，然后推出矛盾.

例 证明以下等价条件

$$\underset{(1)}{A\subseteq B} \Leftrightarrow \underset{(2)}{A\cup B=B} \Leftrightarrow \underset{(3)}{A\cap B=A} \Leftrightarrow \underset{(4)}{A-B=\varnothing}$$

证明顺序：

$$(1)\Rightarrow(2),\ (2)\Rightarrow(3),\ (3)\Rightarrow(4),\ (4)\Rightarrow(1)$$

(1) $\Rightarrow$(2) $A\subseteq B \Rightarrow A\cup B=B$

显然$B\subseteq A\cup B$，下面证明$A\cup B\subseteq B$.

任取x,

$$x\in A\cup B \Leftrightarrow x\in A\vee x\in B \Rightarrow x\in B\vee x\in B \Leftrightarrow x\in B$$

因此有$A\cup B\subseteq B$. 综合上述（2）得证.

(2) $\Rightarrow$(3) $A\cup B=B \Rightarrow A\cap B=A$

$$A=A\cap(A\cup B) \Rightarrow A=A\cap B$$

（将$A\cup B$用B代入)

(3) $\Rightarrow$(4) $A\cap B=A \Rightarrow A-B=\varnothing$

假设$A-B\neq\varnothing$, 即$\exists x\in A-B$，那么$x\in A$且$x\notin B$. 而

$$x\notin B \Rightarrow x\notin A\cap B.$$

从而与$A\cap B=A$矛盾.

(4) $\Rightarrow$(1) $A-B=\varnothing \Rightarrow A\subseteq B$

假设$A\subseteq B$不成立，那么

$$\exists x\,(x\in A \wedge x\notin B) \Rightarrow x\in A-B \Rightarrow A-B\neq\varnothing$$

与条件（4）矛盾.

集合运算法证明$X=Y$

由已知等式通过运算产生新的等式

$$X=Y \Leftrightarrow X\cap Z=Y\cap Z,\ X\cup Z=Y\cup Z,$$

$$X-Z=Y-Z，X\oplus Z=Y\oplus Z$$

例 证明$A\cap C=B\cap C \wedge A\cup C=B\cup C \Rightarrow A=B$

证 由 $A\cap C=B\cap C$ 和 $A\cup C=B\cup C$ 得到

$$(A\cup C)-(A\cap C)=(B\cup C)-(B\cap C)$$

从而有 $A\oplus C=B\oplus C$

因此

$$A=B$$

作业

习题 6 （P104）

28（3）