第十章

群与环

目录

Catalogue

10.1 群的定义与性质

定义10.1 设$V=<S,\circ>$是代数系统，$\circ$ 为二元运算.

1) 如果$\circ$ 是可结合的，则称$V=<S,\circ>$为半群；

2) 设$V=<S,\circ>$是半群，若$e\in S$是关于$\circ$ 运算的单位元，则称V 为含幺半群，也可叫作独异点；

3)设$V=<S,\circ>$是独异点，存在单位元 $e\in S$，若对 $\forall x\in S$均有$x^{-1}\in S$，则称是群，通常将群记为G。

例 10.1

+是普通加法

$<Z^+,+>,<N,+,0>,<Z,+,0>,<Q,+,0>,<R,+,0>$都是半群

除了$<Z^+,+>$外都是独异点

$<Z,+,0>,<Q,+,0>,<R,+,0>$是群；$<Z^+,+>,<N,+,0>$不是群.

10.1 群的定义与性质

设$G = \{ e, a, b, c \}$，G上的运算由下表给出，G称为**Klein四元群**

	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

运算表特征：

- 对称性---运算可交换
- 主对角线元素都是幺元
  ---每个元素的逆元是自己
- a, b, c 中任两个元素运算都等于第三个元素.

定义10.2

1）若群 G 是有穷集，则称 G 是有限群，否则称为无限群.群 G 的基数称为群G的 阶，有限群 G 的阶记作$|G|$.

2）只含单位元的群称作平凡群.

3）若群G中的二元运算是可交换的，则称G为交换群或 阿贝尔(Abel)群.

例 <Z,+> 和 <R,+>是无限群，交换群

Klein四元群 $G = \{e, a, b, c\}$是4 阶群 ， 交换群

10.1 群的定义与性质

定义10.3 设G是群，$x \in G$，$n \in Z$，则 x 的 n 次幂 x^n 定义为

$$x^n = \begin{cases} e & n = 0 \\ x^{n-1}x & n > 0 \\ (x^{-1})^m & m = -n, n < 0 \end{cases} \qquad n \in Z$$

说明：元素的幂的定义可以推广到半群和独异点

1）n在半群中只能取正整数

2）n在独异点中只能取自然数

例 1）在 <Z,+> 中有 $(-2)^{-3}=((-2)^{-1})^3=2^3=2+2+2=6$

2）在$<Z_3,\oplus>$中有 $2^{-3}=(2^{-1})^3=1^3=1\oplus1\oplus1=2\oplus1=0$

定义10.4 设G是群，$x \in G$，使得等式 $x^k = e$ 成立的最小正整数 k 称为 x 的阶（或周期），记作 $|x| = k$，称 x为 k 阶元. 若不存在这样的正整数 k，则称 x 为无限阶元.

例 1）在<Z,+>中，$0^1=0$,0 是 1 阶元，其它整数的阶都不存在.

2）在$<Z_6,\oplus>$中，$2^3=0$和 $4^3=0$，即 2和 4 是 3 阶元；

$3^2=0$，即3 是 2 阶元；

$1^6=0,5^6=0$，即1 和 5 是 6 阶元；

$0^1=0$，即0 是 1 阶元

定理10.1 设 G 为群，则 G 中的幂运算满足：

(1) $\forall x \in G$，$(x^{-1})^{-1} = x$.

(2) $\forall x, y \in G$，$(xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1}$.

(3) $\forall x \in G$，$x^n x^m = x^{n+m}$，$n, m \in Z$.

(4) $\forall x \in G$，$(x^n)^m = x^{nm}$，$n, m \in Z$.

(5) $(x_1 x_2 \ldots x_n)^{-1} = x_n^{-1} x_{n-1}^{-1} \ldots x_2^{-1} x_1^{-1}$

(6)若G为交换群，则 $(xy)^n = x^n y^n$.

10.1 群的定义与性质

测验10 判断下列集合和给定运算构成什么代数系统（半群，独异点，群，交换群）？其中，$A=Z_5$，$\oplus$ 为模 5 加法。

作业

习题 10（P219）

8

目录

Catalogue

PART 01

群的定义与性质

PART 02

环

10.2 环

定义10.11 设<R,+,·>是代数系统，+和·是二元运算.如果满足以下条件:

1) <R,+>构成交换群

2) <R,·>构成半群

3) ·运算关于+运算适合分配律

则称<R,+,·>是一个环.

说明：1)通常称+运算为环中的加法，· 运算为环中的乘法.

2)环中加法单位元记作 0, 乘法单位元(若存在)记作 1.

3)对任何元素 x，称 x 的加法逆元为负元，记作$-x$. 乘法逆元(若存在)称为逆元，记作 x^{-1}.

10.2 环

定义10.11 设<R,+,·>是代数系统，+和·是二元运算.如果满足以下条件:

1) <R,+>构成交换群

2) <R,·>构成半群

3) ·运算关于+运算适合分配律

则称<R,+,·>是一个环.

例10.18 整数集、有理数集、实数集和复数集关于普通的加法和乘法构成环，分别称为整数环Z，有理数环Q，实数环R 和 复数环C.

例 判断下列集合和给定运算是否构成环.

$A=\{2z \mid z \in Z\}$, 运算为普通加法+和乘法·。

解:

(1) A非空，+和·运算封闭

$\langle A,+,\cdot\rangle$是代数系统

(2) $\langle A,+\rangle$构成交换群

(3) $\langle A,\cdot\rangle$构成半群

(4)·运算关于+运算适合分配律

则称$\langle A,+,\cdot\rangle$是一个环.

例 判断下列集合和给定运算是否构成环.

$A=\{a+b\sqrt[4]{5} \mid a,b\in \mathrm{Q}\}$，运算为普通加法+和乘法·。

解

· 运算不封闭，<*A*,+,· >不是代数系统

作业

习题 10

34（1,2）只判断是否构成环。