第十四章

图的基本概念

目录

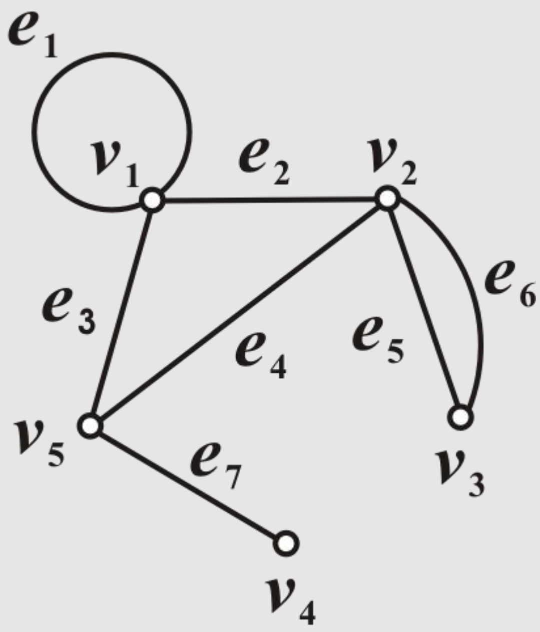
Catalogue

14.1 图

- 无向图与有向图
- 顶点的度数
- 握手定理
- 简单图
- 完全图
- 子图
- 补图

多重集合: 元素可以重复出现的集合

无序积: $A\&B=\{(x,y) \mid x\in A\wedge y\in B\}$



定义14.1 无向图$G=\langle V,E\rangle$, 其中

(1) 顶点集V是非空有穷集合, 其元素称为顶点或结点;

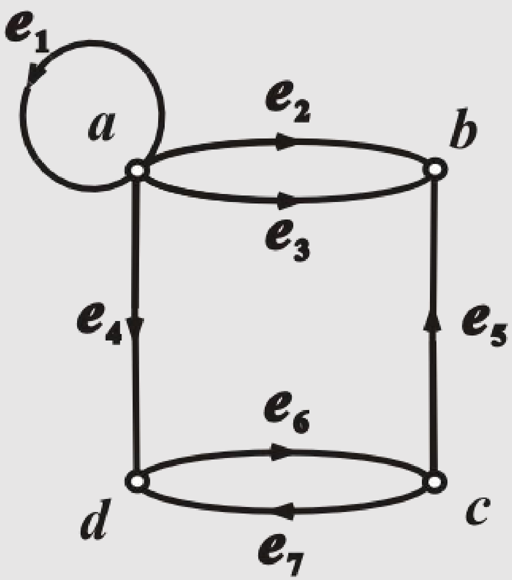
(2) 边集E为$V\&V$的有穷多重子集, 其元素称为无向边，简称边.

14.1 图

定义14.2 有向图$D=\langle V,E\rangle$, 其中

(1)顶点集V是非空有穷集合, 其元素称为顶点;

(2) 边集E为$V\times V$的多重子集，其元素称为有向边，简称边。



D的基图:用无向边代替有向边

14.1 图

无向图和有向图的规定：

1）通常用G表示无向图, D表示有向图, 也常用G泛指无向图和有向图.

2）$V(G)$: G的顶点集　　$E(G)$: G的边集

$V(D)$: D的顶点集　　$E(D)$: D的边集.

3）D的基图:用无向边代替有向边

4）零图: $E=\varnothing$

5）空图: $V=\varnothing$

6）n 阶图: n个顶点的图

7）平凡图: 1 阶零图，只有一个顶点没有边

14.1 图

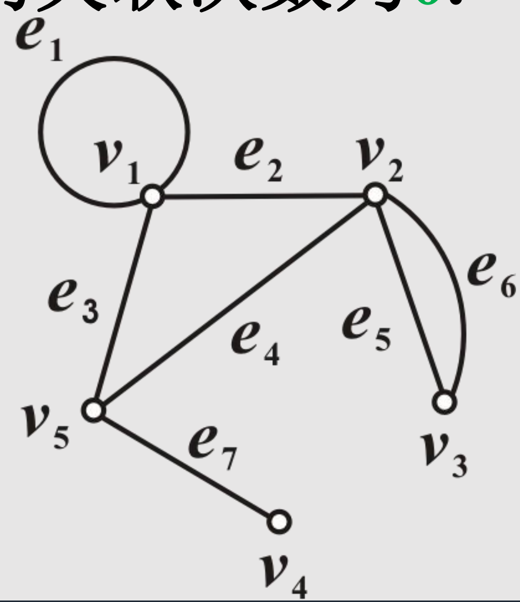
定义 设$e=(u,v)$是无向图$G=\langle V,E\rangle$的一条边，称u,v为e的**端点**，e与$u(v)$**关联**.

①若$u\neq v$，则称e与$u(v)$的关联次数为1；

②若$u=v$，则称e为**环**，此时称e与u的关联次数为2；

③若w不是e端点，则称e与w的关联次数为0.

无边关联的顶点称作**孤立点**.



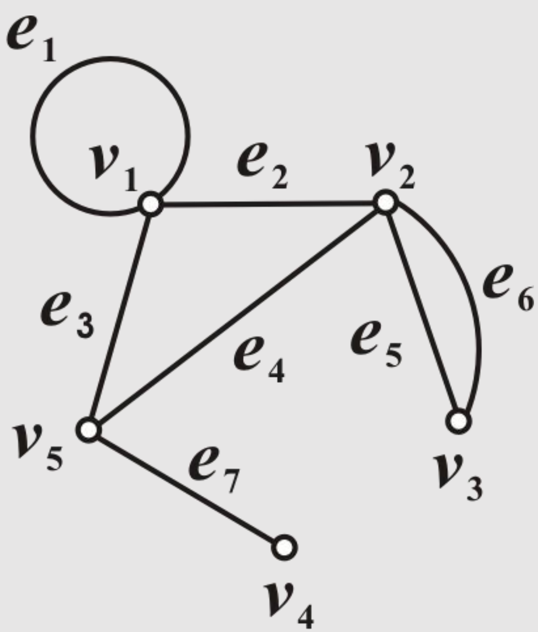
例 v_1与e_2的关联次数为1

v_1与e_1的关联次数为2

v_1与e_4的关联次数为0

14.1 图

定义 设无向图$G=<V,E>$, $u,v\in V$, $e,e'\in E$, 若$(u,v)\in E$, 则称u,v相邻(点与点相邻); 若e,e'至少有一个公共端点, 则称e和e'相邻(边与边相邻).



例 点v_1和v_2相邻(点与点相邻)

边e_2和e_3相邻(边与边相邻)

14.1 图

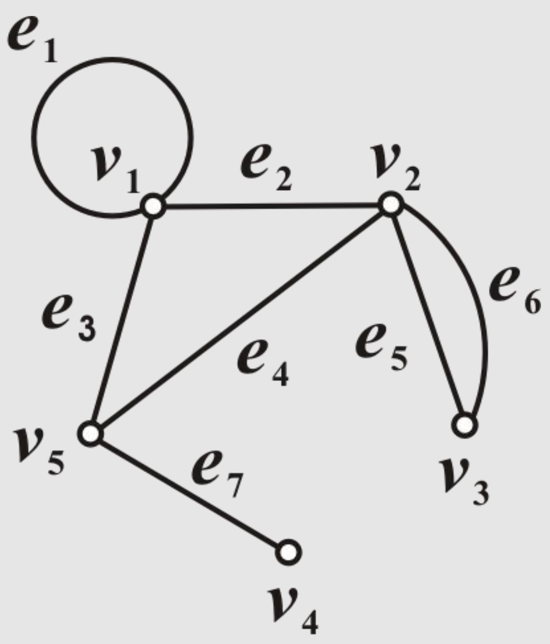
定义 设$G=<V,E>$为无向图, $v\in V$,

顶点v的度数(度) $d(v)$: v作为边的端点次数之和

例 $d(v_2)=4$

$d(v_1)=4$

$d(v_4)=1$

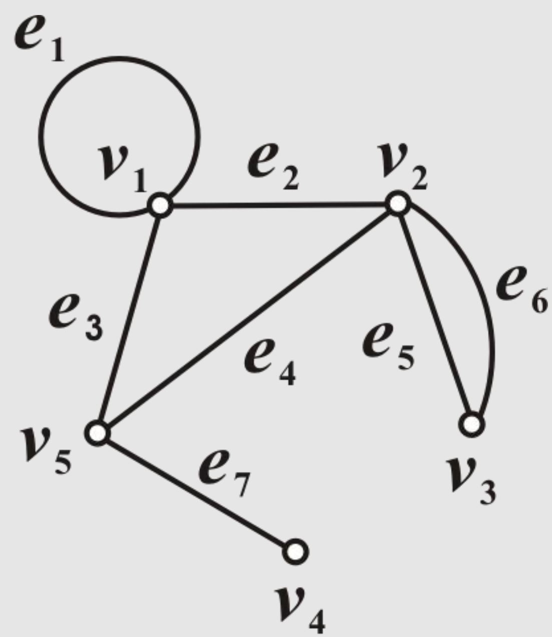


定义 设$G=<V,E>$为无向图, $v\in V$,

顶点v的度数(度) $d(v)$: v作为边的端点次数之和

G的最大度$\Delta(G)=\max\{d(v)|\ v\in V\}$

G的最小度$\delta(G)=\min\{d(v)|\ v\in V\}$



练 求图的最大度和最小度。

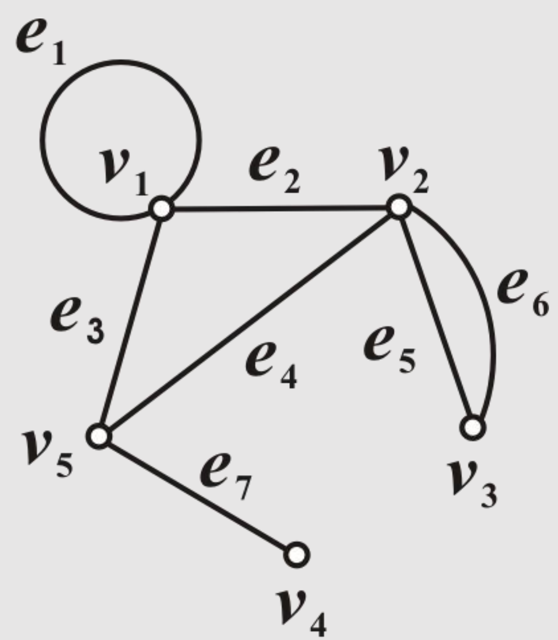
$\Delta(G)=4$； $\delta(G)=1$

定义 设$G=<V,E>$为无向图, $v\in V$,

顶点v的度数(度) $d(v)$: v作为边的端点次数之和

悬挂顶点: 度数为1的顶点 v_4

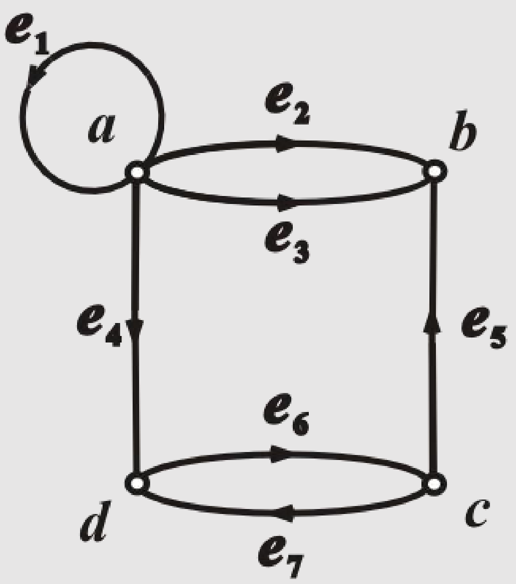
悬挂边: 与悬挂顶点关联的边 e_7



14.1 图

定义 对有向图有类似定义. 设$e=\langle u,v\rangle$是有向图的一条边,称u是e的始点, v是e的终点，并称e与$u(v)$关联。若$u=v$，则e称为环。

e_1是环



设$D=<V,E>$为有向图, $v\in V$,

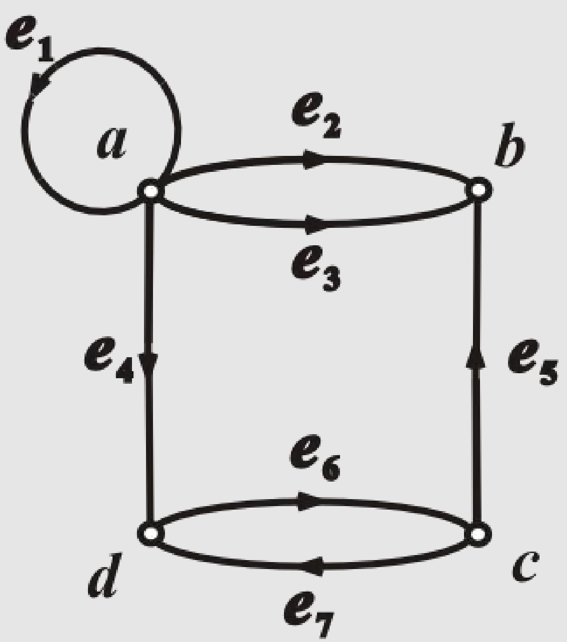
v的出度$d^+(v)$：v作为边的始点次数之和

v的入度$d^-(v)$：v作为边的终点次数之和

v的度数(度) $d(v)$: v作为边的端点次数之和

$$d(v)= d^+(v)+ d^-(v)$$

例 求出图中每个顶点v的出度、入度、度，



解： $d^+(a)=4$, $d^-(a)=1$, $d(a)=5$,

$d^+(b)=0$, $d^-(b)=3$, $d(b)=3$,

$d^+(c)=2$, $d^-(c)=1$, $d(c)=3$,

$d^+(d)=1$, $d^-(d)=2$, $d(d)=3$.

设$D=\langle V,E\rangle$为有向图, $v\in V$,

v的出度$d^+(v)$：v作为边的始点次数之和

v的入度$d^-(v)$：v作为边的终点次数之和

v的度数(度) $d(v)$: v作为边的端点次数之和

$$d(v)= d^+(v)+ d^-(v)$$

D的最大出度$\Delta^+(D)=\max\{d^+(v)|v\in V\}$

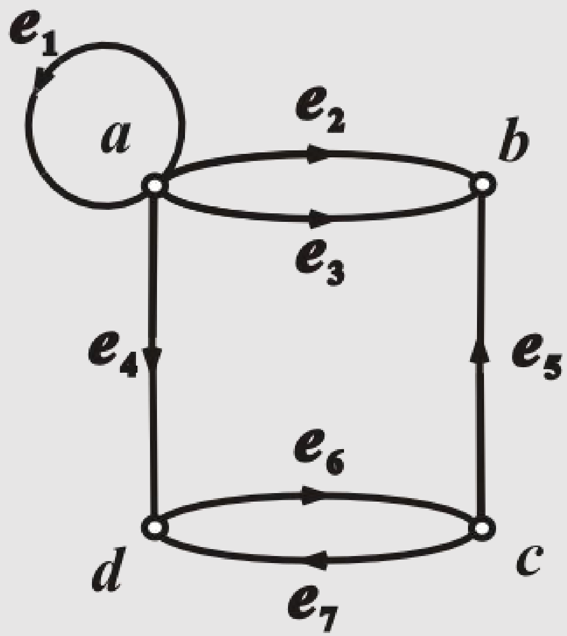
最小出度$\delta^+(D)=\min\{d^+(v)|v\in V\}$

最大入度$\Delta^-(D)=\max\{d^-(v)|v\in V\}$

最小入度$\delta^-(D)=\min\{d^-(v)|v\in V\}$

最大度$\Delta(D)=\max\{d(v)|v\in V\}$

最小度$\delta(D)=\min\{d(v)|v\in V\}$



例 求出图的最大/小出度、最大/小入度、最大/小度。

解：$d^+(a)=4$, $d^-(a)=1$, $d(a)=5$,

$d^+(b)=0$, $d^-(b)=3$, $d(b)=3$,

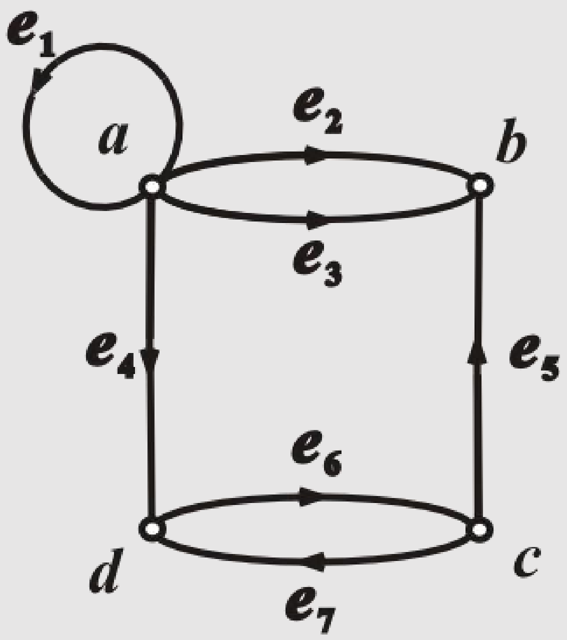
$d^+(c)=2$, $d^-(c)=1$, $d(c)=3$,

$d^+(d)=1$, $d^-(d)=2$, $d(d)=3$,

$\Delta^+(D)=4$, $\delta^+(D)=0$,

$\Delta^-(D)=3$, $\delta^-(D)=1$,

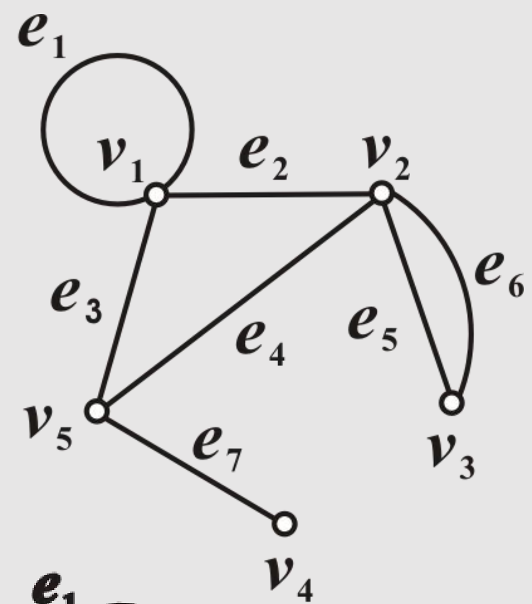
$\Delta(D)=5$, $\delta(D)=3$.



14.1 图

设无向图G的顶点集$V=\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$

G的度数列: $d(v_1), d(v_2), \ldots, d(v_n)$

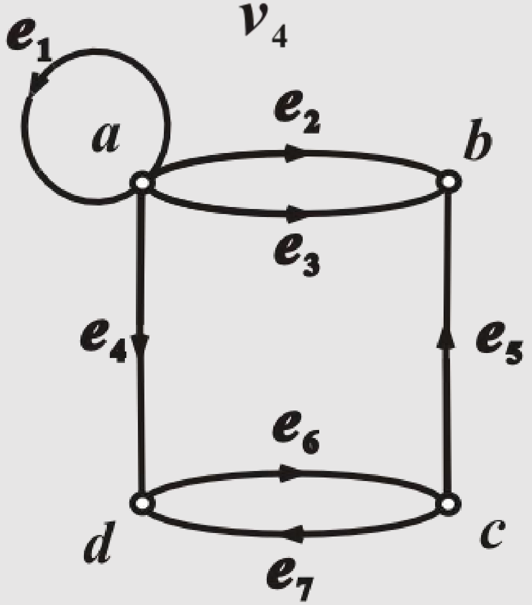


设有向图D的顶点集$V=\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$

D的出度列: $d^+(v_1), d^+(v_2), \ldots, d^+(v_n)$

D的入度列: $d^-(v_1), d^-(v_2), \ldots, d^-(v_n)$

D的度数列: $d(v_1), d(v_2), \ldots, d(v_n)$



图论基本定理——握手定理

定理14.1 任意无向图和有向图的所有顶点度数之和都等于边数的2倍;

定理14.1 有向图的所有顶点入度之和等于出度之和等于边数.

推论 任意无向图和有向图的奇度顶点个数必为偶数.

例 (3,3,3,4), (2,3,4,6,8)能成为图的度数列吗?

解 不可能. 它们顶点度数之和是奇数.

练 已知图G有10条边, 4个3度顶点, 其余顶点的度数均小于等于2, 问G至少有多少个顶点?

解 设G有n个顶点. 由握手定理,

$$4\times 3+2\times (n-4)\geq 2\times 10$$

解得 $n\geq 8$

定义 1） 在无向图中，如果有2条或2条以上的边关联同一对顶点，则称这些边为平行边，平行边的条数称为重数.

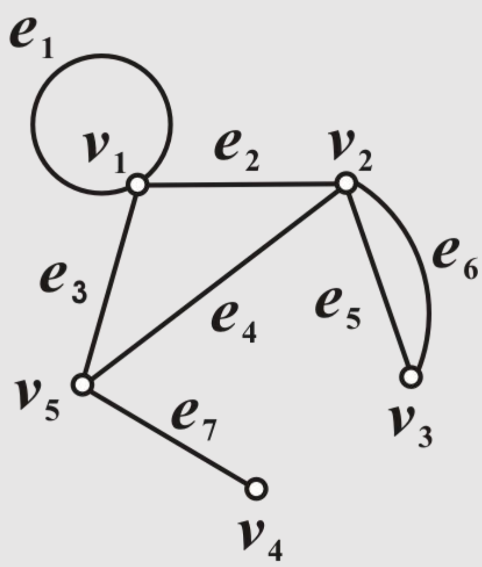
2)在有向图中，如果有2条或2条以上的边具有相同的始点和终点，则称这些边为有向平行边，简称平行边，平行边的条数称为重数.

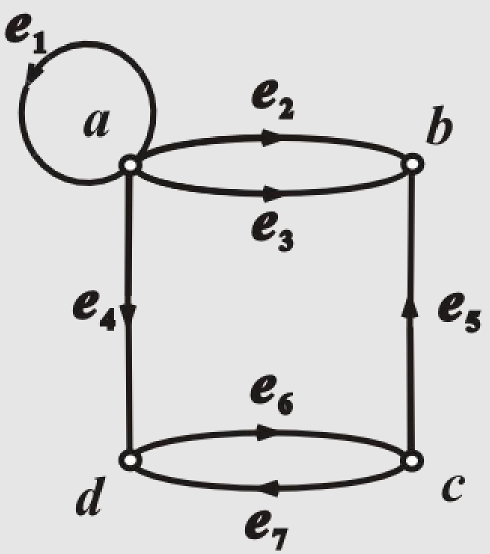
3） 含平行边的图称为多重图.

4） 既无平行边也无环的图称为简单图.

注意:简单图是极其重要的概念

例 找出以下图中的平行边，判断平行边的重数，判断是简单图还是多重图。





e_5和e_6是平行边

重数为2

不是简单图,是多重图

e_2和e_3是平行边,重数为2

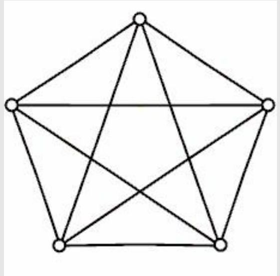
e_6和e_7不是平行边

不是简单图,是多重图

14.1 图

n阶无向完全图K_n: 每个顶点都与其余顶点相邻的n阶无向简单图.

简单性质: 边数$m=n(n-1)/2$, $\Delta=\delta=n-1$

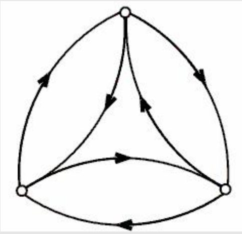


K_5

n阶有向完全图: 每对顶点之间均有两条方向相反的有向边的n阶有向简单图.

简单性质: 边数$m=n(n-1)$, $\Delta=\delta=2(n-1)$,

$$\Delta^+=\delta^+=\Delta^-=\delta^-=n-1$$



3阶有向完全图

定义14.8 设$G=\langle V,E\rangle$, $G'=\langle V',E'\rangle$是两个图

1) 若$V'\subseteq V$且$E'\subseteq E$, 则称G'为G的子图, G为G'的母图，记作$G'\subseteq G$

2) 若$V'\subset V$ 或$E'\subset E$，称G'为G的真子图

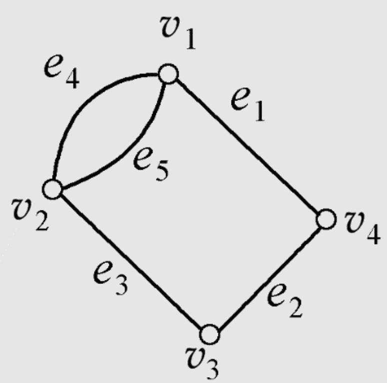
3)若$G'\subseteq G$ 且$V'=V$，则称G'为G的生成子图

定义14.8 设$G=\langle V,E\rangle$, $G'=\langle V',E'\rangle$是两个图

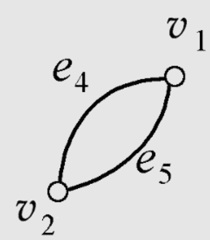
4) 设$V'\subseteq V$且$V'\neq\varnothing$, 以V'为顶点集, 以两端点都在V'中的所有边为边集的G的子图称作V'**的导出子图**，记作 $G[V']$

5) 设$E'\subseteq E$且$E'\neq\varnothing$, 以E'为边集, 以E'中边关联的所有顶点为顶点集的G的子图称作E'**的导出子图**, 记作 $G[E']$

例 导出子图

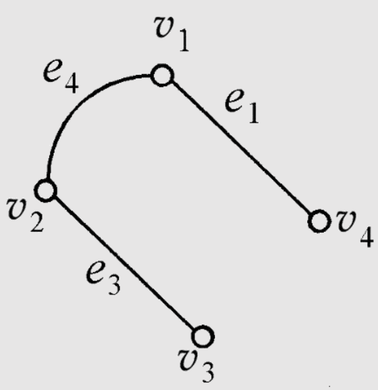


G

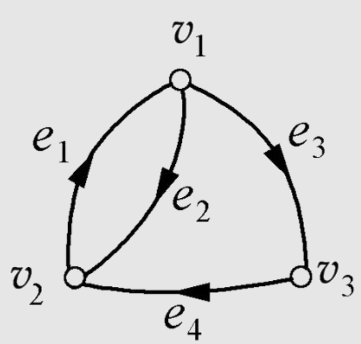


$G[\{v_1,v_2\}]$

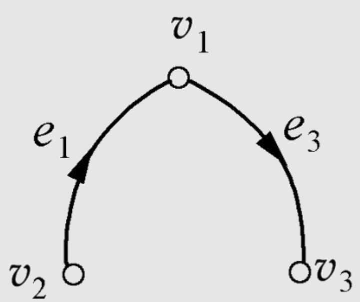
$G[\{e_4,e_5\}]$



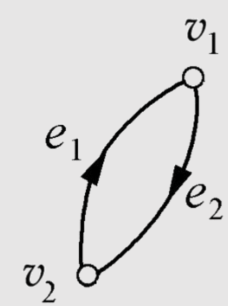
$G[\{e_1,e_3,e_4\}]$



D



$D[\{e_1,e_3\}]$

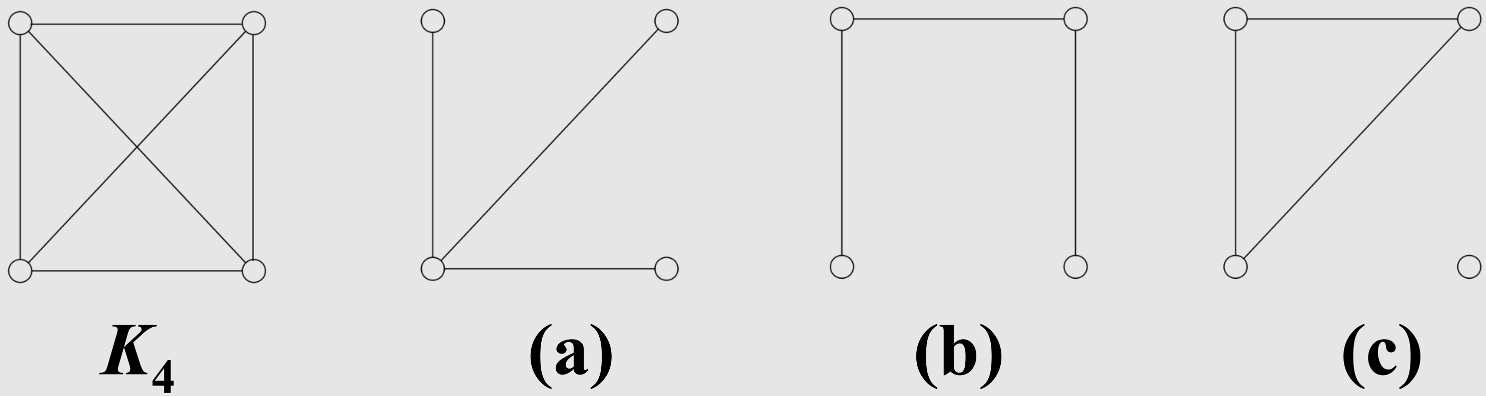


$D[\{v_1,v_2\}]$

$D[\{e_1,e_2\}]$

定义14.9 设$G=<V,E>$为n阶无向简单图，以V为顶点集,所有使G成为完全图K_n的添加边组成的集合为边集的图，称为G的补图，记作$\overline{G}$.

例 求出图a，b，c的补图。



解：(a)与(c)互为补图

(b)是自补图

定义14.10 设 $G=<V,E>$为**无向图**.

1）设$e\in E$, 用$G-e$表示从G中去掉边e，称作**删除边**e.又设$E'\subset E$，用$G-E'$表示从G中删除E'中的所有边，称作删除E'.

2）设$v\in V$，用$G-v$表示从G中去掉v及所关联的一切边，称作**删除顶点**v.又设$V'\subset V$，用$G-V'$表示从G中删除V'中所有的顶点，称作删除V'.

3）设$e=(u,v)\in E$，用$G\backslash e$表示从G中删除e后，将e的两个端点u,v用一个新的顶点（可以用u或v充当w）代替，并使w关联除e以外u,v关联的所有边，称作**边e的收缩**.

4）设$u,v\in V$（u,v可能相邻，也可能不相邻），用$G\cup(u,v)$（或$G+(u,v)$）表示在u,v之间加一条边(u,v)，称作**加新边**.

作业

习题 14 （P311 ）

1(G_1,D_1)

3(b,c)

目录

Catalogue

14.2 通路与回路

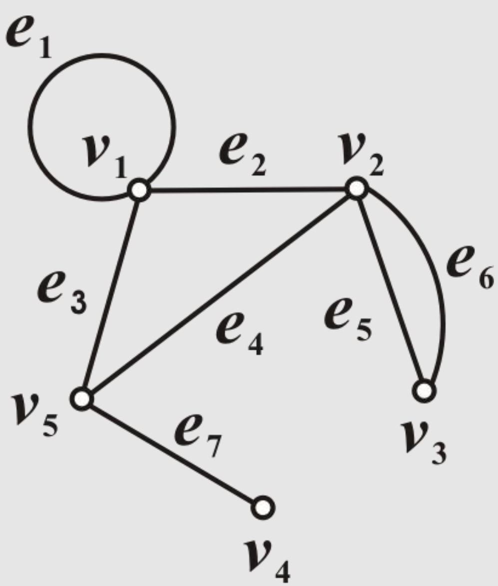
- 简单通(回)路, 初级通(回)路, 复杂通(回)路
- 无向图的连通性

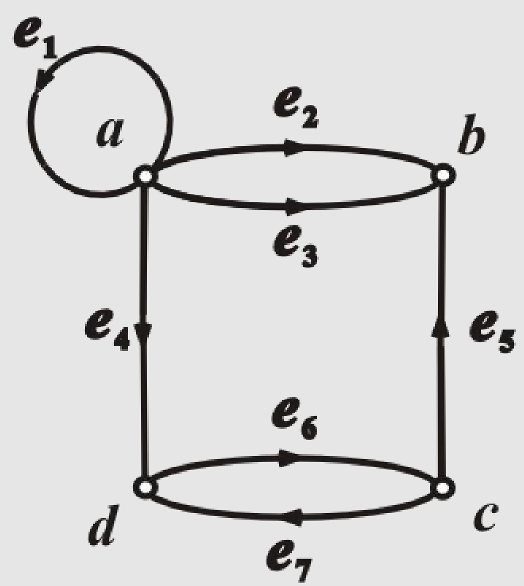
  无向连通图, 连通分支
- 有向连通图

  弱连通图, 单向连通图, 强连通图

定义14.11 给定图$G=<V,E>$（无向或有向的），G中顶点与边的交替序列$\Gamma=v_0e_1v_1e_2\ldots e_lv_l$,

1) 若$\forall i(1\le i\le l)$, v_{i-1}和 v_i是e_i的端点(对于有向图, 要求v_{i-1}是始点, v_i是终点), 则称Γ为**通路**, v_0是**通路的起点**, v_l是**通路的终点**, l为**通路的长度**. 又若$v_0=v_l$，则称Γ为**回路**.



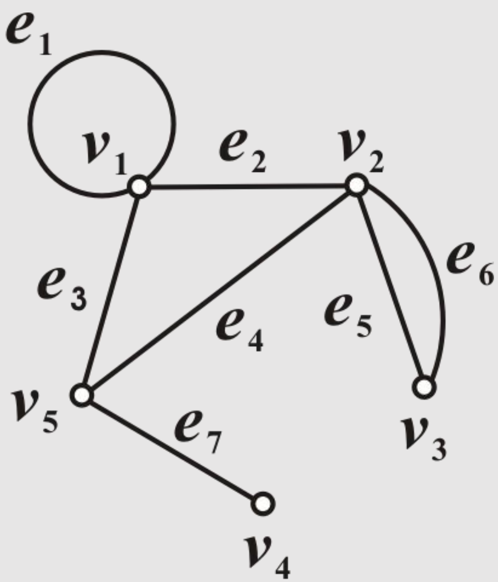


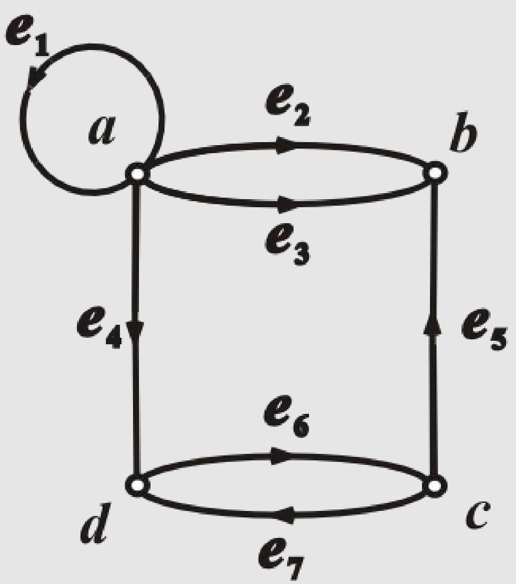
14.2 通路与回路

定义14.11 给定图$G=<V,E>$（无向或有向的），G中顶点与边的交替序列$\Gamma=v_0e_1v_1e_2\ldots e_lv_l$,

2) 若通路(回路)中所有顶点(对于回路, 除$v_0=v_l$)各异，则称为初级通路(初级回路).

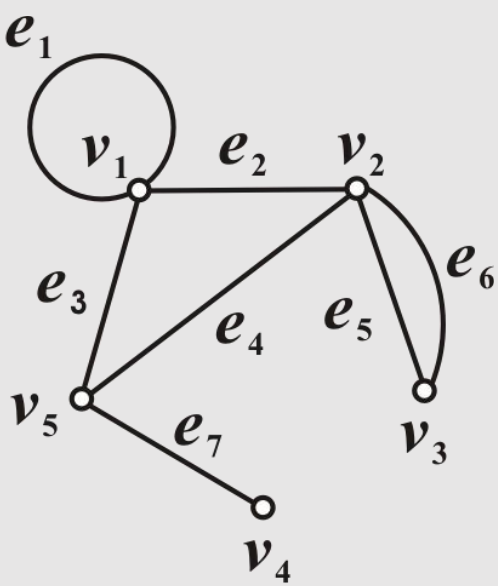
初级通路又称作路径, 初级回路又称作圈.

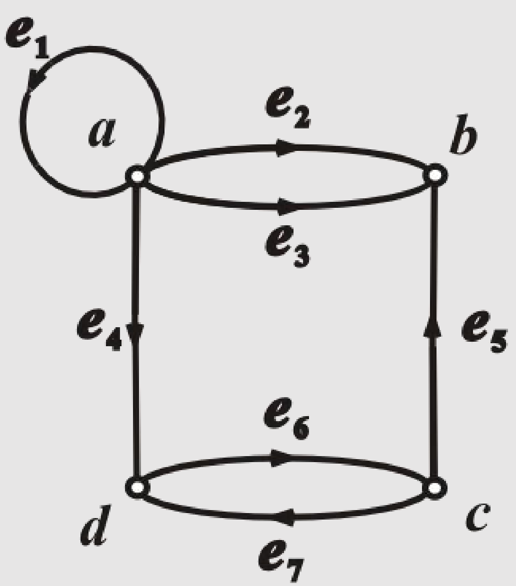




定义14.11 给定图$G=<V,E>$（无向或有向的），G中顶点与边的交替序列$\Gamma=v_0e_1v_1e_2\ldots e_lv_l$,

3) 若通路(回路)中所有边各异, 则称为简单通路(简单回路), 否则称为复杂通路(复杂回路).





14.2 通路与回路

说明:

1）通路表示方法

① 用顶点和边的交替序列(定义), 如$\Gamma=v_0e_1v_1e_2\ldots e_lv_l$

② 用边的序列, 如$\Gamma=e_1e_2\ldots e_l$

③ 简单图中, 用顶点的序列, 如$\Gamma=v_0v_1\ldots v_l$

2）环是长度为1的圈, 两条平行边构成长度为2的圈.

3）在无向简单图中, 所有圈的长度≥3;

4）在有向简单图中, 所有圈的长度≥2.

目录

Catalogue

14.3 图的连通性

定义14.12 设无向图$G=<V,E>$,若顶点u与v之间有通路，则称顶点u与v是连通的，记作$u\sim v$。

规定：$\forall v\in V$，$v\sim v$。

定义14.12 若无向图G是平凡图（一阶零图）或图中任何两个顶点都是连通的，则称G为连通图，否则称G为非连通图。

14.3 图的连通性

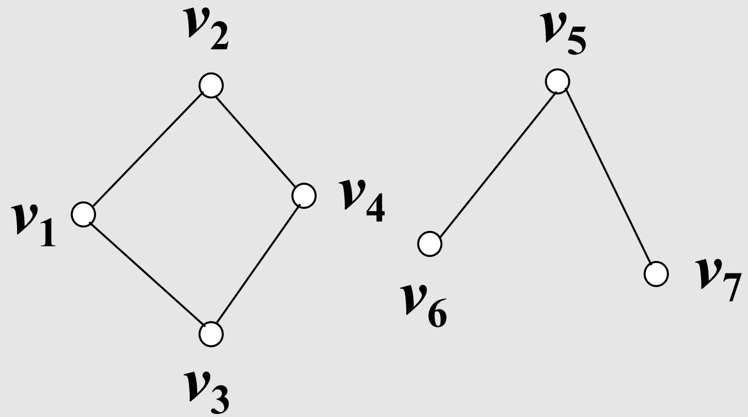
定义14.13 设无向图$G=<V,E>$，V_i是V关于顶点之间的连通关系～的一个等价类，称导出子图$G[V_i]$为G的一个连通分支。

$R=\{<u,v>|\ u,v \in V$且$u\sim v\}$是V上的等价关系

连通分支: V关于连通关系R的等价类的导出子图

设$V/R=\{V_1,V_2,\ldots,V_k\}$, $G[V_1]$, $G[V_2]$, …,$G[V_k]$是G的连通分支, 其个数记作$p(G)=k$.

G是连通图$\Leftrightarrow p(G)=1$



14.3 图的连通性

记 $G-v$: 从G中删除顶点v及关联的边

$G-V'$: 从G中删除V'中所有的顶点及关联的边

$G-e$: 从G中删除边e

$G-E'$: 从G中删除E'中所有边

14.3 图的连通性

定义14.19 设有向图$D=<V,E>$，$\forall u,v\in V$，若从u到v有通路，则称u可达v，记为$u\to v$。

规定u到自身总是可达的，即$u\to u$。

若$u\to v$且$v\to u$，则称u与v是相互可达的，记作$u\leftrightarrow v$。规定$u\leftrightarrow u$。

D弱连通(连通): 基图为无向连通图

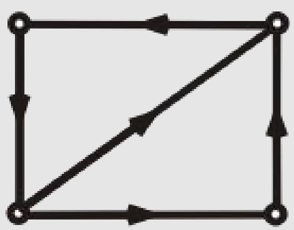
D单向连通: $\forall u,v\in V$，u可达v 或v可达u 至少成立其一

D强连通: $\forall u,v\in V$，u与v相互可达

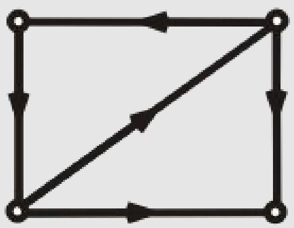
强连通$\Rightarrow$单向连通$\Rightarrow$弱连通

定理(强连通判别法) D强连通当且仅当D中存在经过每个顶点至少一次的回路

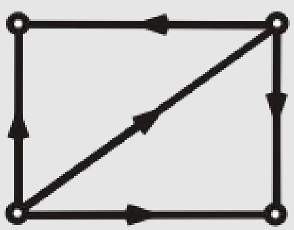
定理(单向连通判别法) D单向连通当且仅当D中存在经过每个顶点至少一次的通路



强联通



单向联通



弱连通

目录
Catalogue

14.4 图的矩阵表示

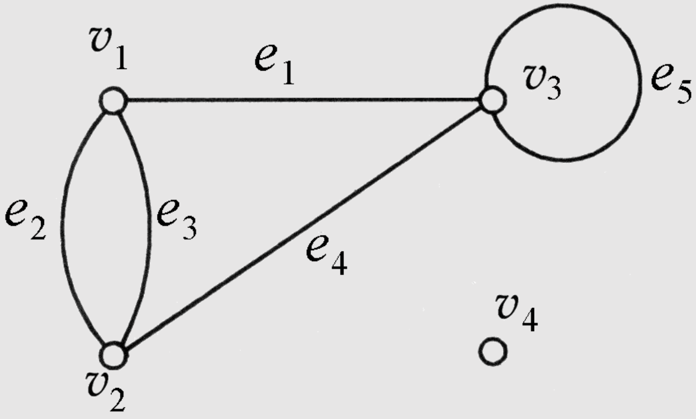
- 无向图的关联矩阵
- 有向图的关联矩阵
- 有向图的邻接矩阵
- 有向图的可达矩阵

14.4 图的矩阵表示

定义14.23 设无向图$G=\langle V,E\rangle$, $V=\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, $E=\{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$, 令$m_{ij}$为$v_i$与$e_j$的关联次数，称$(m_{ij})_{n\times m}$为$G$的关联矩阵，记为$M(G)$.

例 写出右图的关联矩阵。

$$M(G)=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



关联矩阵$M(G)$的性质

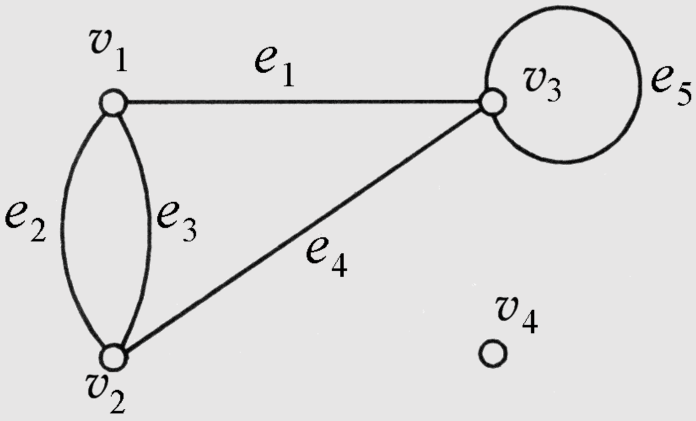
(1) 每一列恰好有两个1或一个2

(2) $\sum_{j=1}^{m} m_{ij} = d(v_i) \quad (i = 1,2,\ldots,n)$

(3) $\sum_{i,j} m_{ij} = 2m$（度数之和为边数2倍）

例

$$M(G)=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



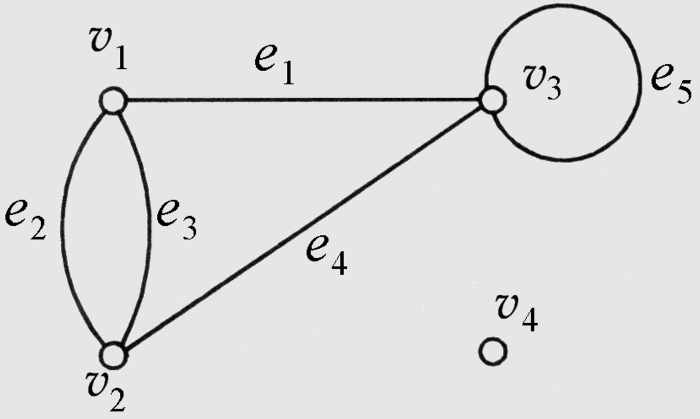
关联矩阵$M(G)$的性质

(4) v_i为孤立点当且仅当第i行全为0

(5) 平行边的列相同

例

$$M(G)=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



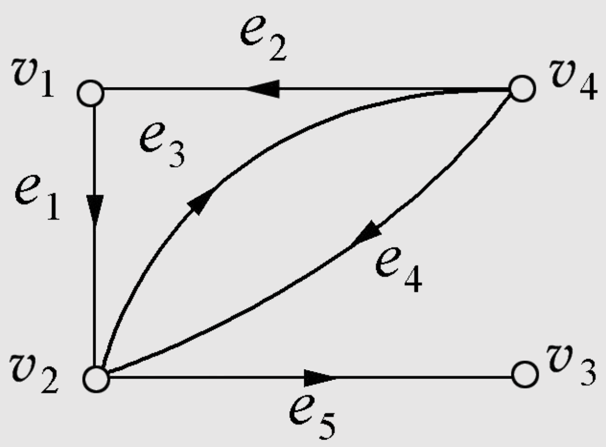
定义14.24 设无环有向图$D=<V,E>$, $V=\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, $E=\{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$, 令

$$m_{ij}=\begin{cases}1, & v_i\text{为}e_j\text{的始点}\\ 0, & v_i\text{与}e_j\text{不关联}\\ -1, & v_i\text{为}e_j\text{的终点}\end{cases}$$

则称$(m_{ij})_{n\times m}$为D的关联矩阵，记为$M(D)$.

例 写出右图的关联矩阵 $M(D)$。

$$M(D)=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$



性质

(1) 每一列恰好有一个1和一个-1

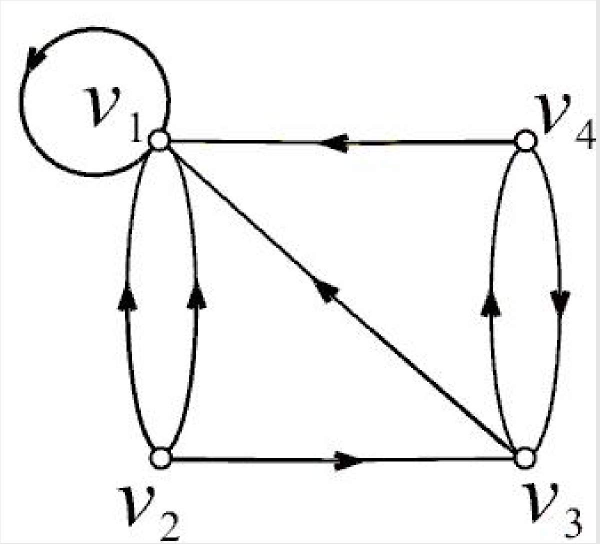
(2) 第i行1 的个数等于$d^+(v_i)$, -1 的个数等于$d^-(v_i)$

(3) 1的总个数等于-1的总个数, 且都等于m(边数量)

(4) 平行边对应的列相同

定义14.25 设有向图$D=\langle V,E\rangle$, $V=\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, $E=\{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$, 令 $a_{ij}^{(1)}$为顶点v_i邻接到顶点v_j边的条数，称$(a_{ij}^{(1)})_{n\times n}$为**D的邻接矩阵**, 记作$A(D)$, 简记为$A$.

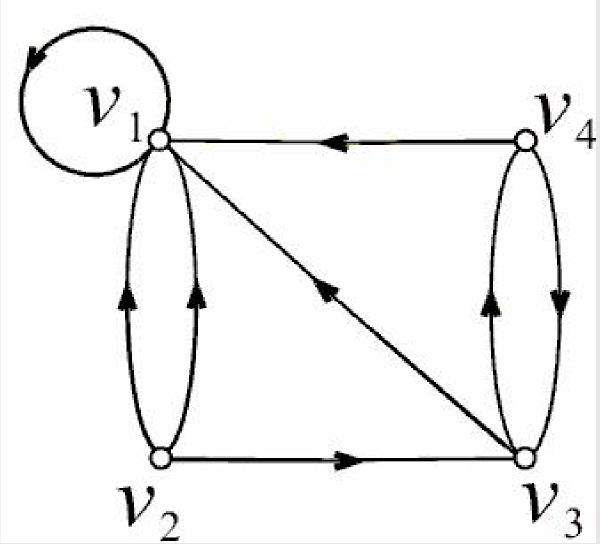
例 有向图的邻接矩阵实例



$$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

14.4 图的矩阵表示

例 有向图的邻接矩阵实例



$$A=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\2&0&1&0\\1&0&0&1\\1&0&1&0\end{bmatrix}$$

性质

(1) $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{(1)} = d^{+}(v_i),\quad i=1,2,\ldots,n$

(2) $\sum_{i=1}^{n} a_{ij}^{(1)} = d^{-}(v_j),\quad j=1,2,\ldots,n$

(3) $\sum\limits_{i,j} a_{ij}^{(1)} = m$（边的数量）

14.4 图的矩阵表示

定理14.11 设A为n阶有向图D的邻接矩阵, 则A^l $(l\geq 1)$中元素

$a_{ij}^{(l)}$为D中v_i到v_j长度为 l 的通路数,

$a_{ii}^{(l)}$为v_i到自身长度为 l 的回路数,

$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}^{(l)}$ 为D中长度为 l 的通路总数,

$\sum_{i=1}^{n}a_{ii}^{(l)}$ 为D中长度为 l 的回路总数.

14.4 图的矩阵表示

推论 设$B_l=A+A^2+\ldots+A^l(l\geq 1)$, 则$B_l$中元素

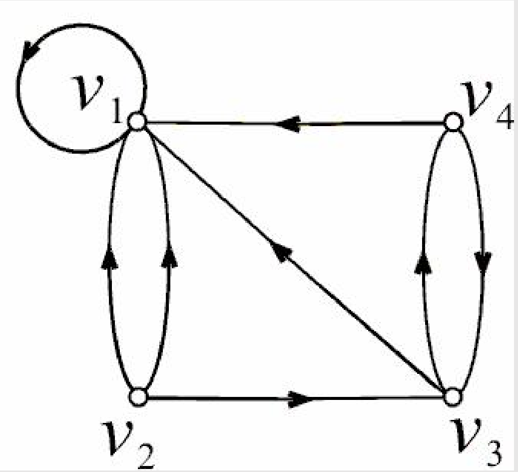
$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} b_{ij}^{(l)}$为$D$中长度小于或等于$l$的通路数,

$\sum_{i=1}^{n} b_{ii}^{(l)}$为$D$中长度小于或等于$l$的回路数.

例 问在有向图D中

1) 长度为1, 2, 3, 4的通路各有多少条? 其中回路分别为多少条?

2) 长度小于或等于4的通路为多少条? 其中有多少条回路?



14.4 图的矩阵表示

$$A=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\2&0&1&0\\1&0&0&1\\1&0&1&0\end{bmatrix}\qquad A^2=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\3&0&0&1\\2&0&1&0\\2&0&0&1\end{bmatrix}$$

$$A^3=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\4&0&1&0\\3&0&0&1\\3&0&1&0\end{bmatrix}\qquad A^4=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\5&0&0&1\\4&0&1&0\\4&0&0&1\end{bmatrix}$$

长度	通路	回路
1	**8**	**1**
2	**11**	**3**
3	**14**	**1**
4	**17**	**3**
合计	**50**	**8**

14.4 图的矩阵表示

定义14.26 设$D=<V,E>$为有向图, $V=\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, 令

$$p_{ij}=\begin{cases}1, & v_i\text{可达}v_j\\ 0, & \text{否则}\end{cases}$$

称$(p_{ij})_{n\times n}$为**D的可达矩阵**, 记作$P(D)$, 简记为P.

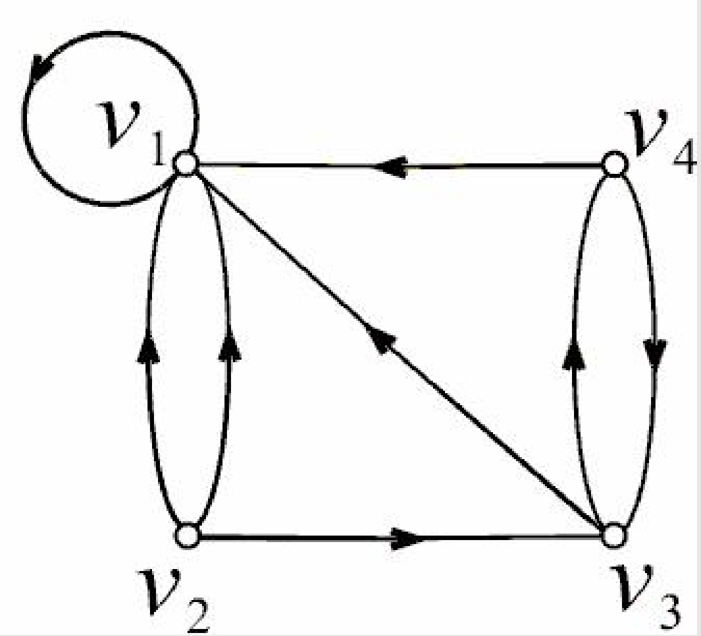
性质:

$P(D)$主对角线上的元素全为1.

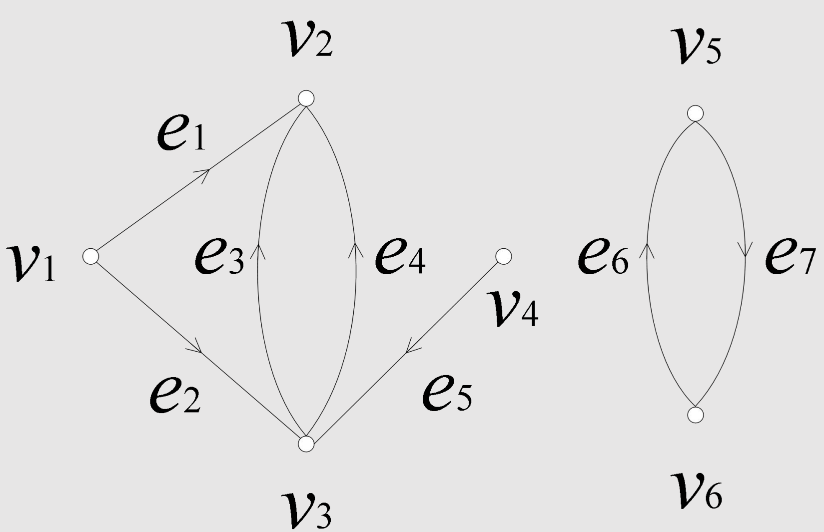
D强连通当且仅当$P(D)$的元素全为1.

例 有向图的可达矩阵

$$P=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1 & 1\end{bmatrix}$$



测验11 设有向图$D=<V,E>$，写出关联矩阵、邻接矩阵、可达矩阵。



作业

习题 14（P 311）

44， 46

目录
Catalogue

14.5 图的运算

定义 设图G_1=<V_1,E_1>，G_2=<V_2,E_2>，若$V_1 \cap V_2 = \varnothing$，则称$G_1$与$G_2$是不交的.若$E_1 \cap E_2 = \varnothing$，则称$G_1$与$G_2$是边不交的或边不重的.

定义 设G_1=<V_1,E_1>，G_2=<V_2,E_2>，为不含孤立点的两个图（它们同为无向图或同为有向图）

1）称以$V_1 \cup V_2$为顶点集，以$E_1 \cup E_2$为边集的图为G_1与G_2的并图，记作$G_1 \cup G_2$，即$G_1 \cup G_2 = \langle V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2 \rangle$.

2）称以$E_1 - E_2$为边集，以$E_1 - E_2$中边关联的顶点组成的集合为顶点集的图为G_1与G_2的差图，记作$G_1 - G_2$.

14.5 图的运算

定义 设图$G_1=<V_1,E_1>$，$G_2=<V_2,E_2>$，若$V_1\cap V_2=\varnothing$，则称G_1与G_2是不交的.若$E_1\cap E_2=\varnothing$，则称G_1与G_2是边不交的或边不重的.

定义 设$G_1=<V_1,E_1>$，$G_2=<V_2,E_2>$，为不含孤立点的两个图（它们同为无向图或同为有向图）

3）称以$E_1\cap E_2$为边集，以$E_1\cap E_2$中边关联的顶点组成的集合为顶点集的图为G_1与G_2的交图，记作$G_1\cap G_2$.

4）称以$E_1\oplus E_2$为边集，以$E_1\oplus E_2$中边关联的顶点组成的集合为顶点集的图为G_1与G_2的环和，记作$G_1\oplus G_2$.