第十七章

平面图

目录
Catalogue

PART 01
平面图的基本概念

PART 02
平面图的对偶图

17.1 平面图的基本概念

- ■平面图与平面嵌入
- ■平面图的面、有限面、无限面
- ■面的次数
- ■极大平面图
- ■极小非平面图

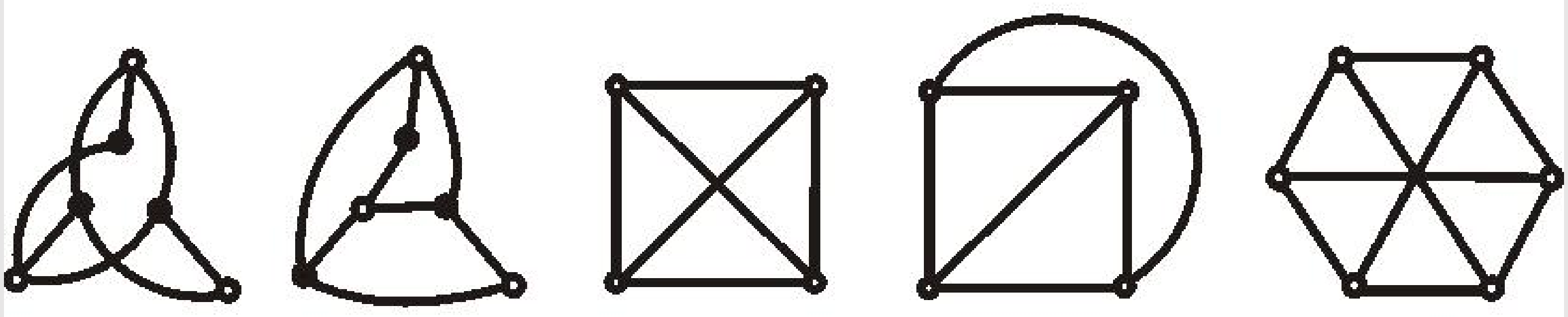
17.1 平面图的基本概念

定义17.1 如果能将图G除顶点外边不相交地画在平面上,则称G是平面图.

这个画出的无边相交的图称作G的平面嵌入.

没有平面嵌入的图称作非平面图.

例



(1) (2) (3) (4) (5)

上图中(1)~(4)是平面图, (2)是(1)的平面嵌入，(4)是(3)的平面嵌入. (5)是非平面图.

17.1 平面图的基本概念

定理17.1 平面图的子图都是平面图，

非平面图的母图都是非平面图。

定理17.2 设G是平面图，则在G中加平行边或环后所得的图还是平面图。

定义17.3 给定平面图G的平面嵌入，G的边将平面划分成若干个区域，每个区域都称作G的一个面。

无限面(外部面): 面积无限的面, 用R_0表示

有限面(内部面): 面积有限的面, 用$R_1, R_2, \ldots, R_k$表示

面R_i的边界: 包围R_i的所有边构成的回路组

面R_i的次数: R_i边界的长度，用$\deg(R_i)$表示

例 分析右平面图的划分。

右图有4个面,

R_1的边界：a

$\deg(R_1)=1$;

R_2的边界：bce

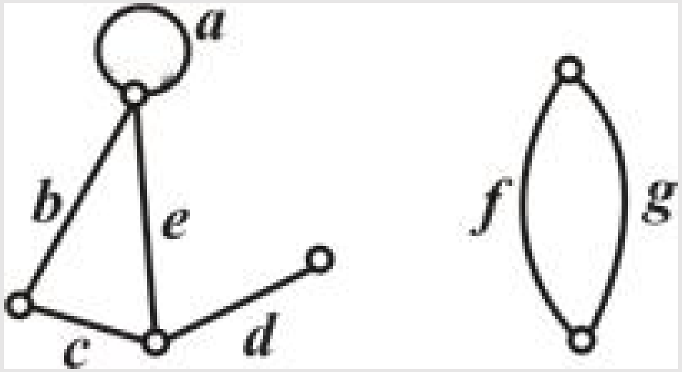
$\deg(R_2)=3$;

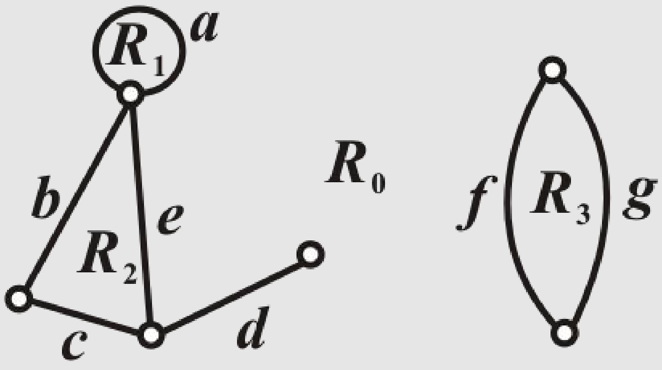
R_3的边界：fg

$\deg(R_3)=2$;

R_0的边界：$dcbaed,fg$

$\deg(R_0)=8$.



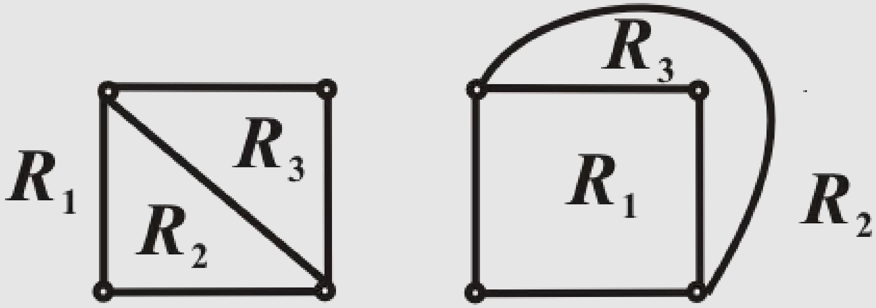


例 下面2个图是同一个平面图的平面嵌入.

R_1在(1)中是外部面, 在(2)中是内部面;

R_2在(1)中是内部面, 在(2)中是外部面.

其实, 在平面嵌入中可把任何面作为外部面.



(1) (2)

17.1 平面图的基本概念

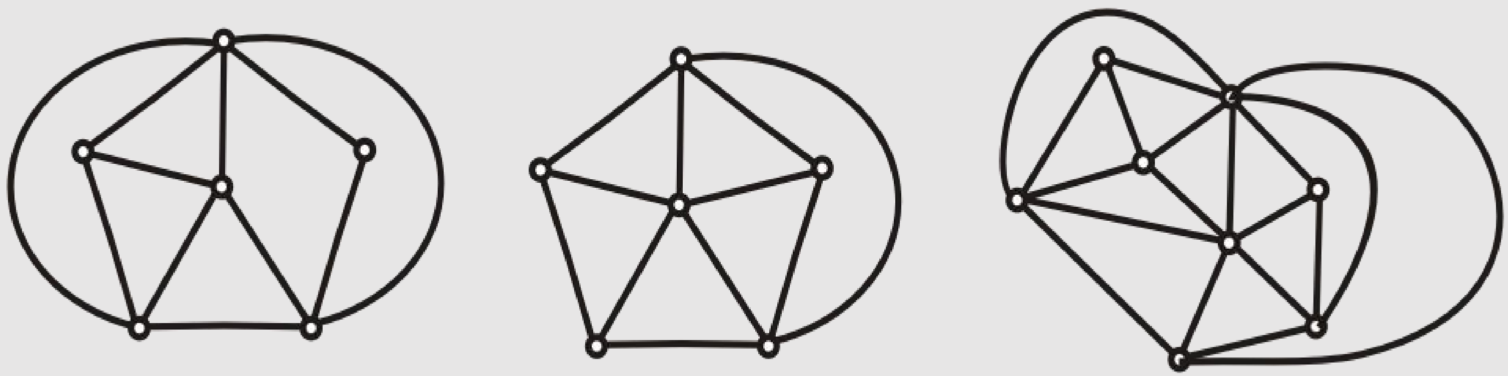
定理17.3 平面图各面的次数之和等于边数的2倍.

定义17.3 若G是简单平面图, 并且在任意两个不相邻的顶点之间加一条新边所得图为非平面图, 则称G为极大平面图.

例 K_5若删去一条边是极大平面图.

K_1, K_2, K_3, K_4都是极大平面图(它们已无不相邻顶点).

练 判断下列图是否是极大平面图?



不是　　不是　　是

17.1 平面图的基本概念

定理17.4 $n(n\geq 3)$阶简单连通平面图是极大平面图当且仅当它每个面的次数都为3.

定理17.5 若在非平面图G中任意删除一条边，所得的图为平面图则称G为极小非平面图。

说明：极小非平面图必为简单图

例 K_5是极小非平面图

作业

习题 17 （P353）

3

目录

Catalogue

PART 01

平面图的基本概念

PART 02

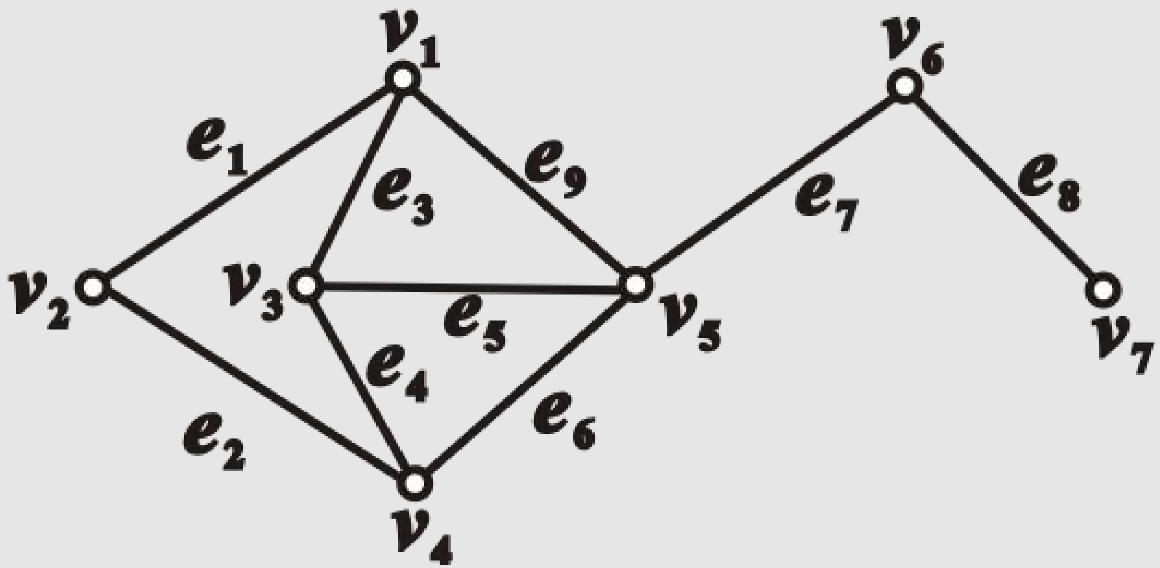
平面图的对偶图

17.4 平面图的对偶图

定义14.16 设无向图$G=<V,E>$, $E'\subseteq E$, 若$p(G-E')>p(G)$且$\forall E''\subset E'$, $p(G-E'')=p(G)$, 则称E'为G的**边割集**.

若$\{e\}$为边割集, 则称e为**割边**或**桥**.

例 e_7是桥



17.4 平面图的对偶图

定义17.6 设平面图G, 有n个顶点, m条边和r个面, G的**对偶图**

$$G^*=\langle V^*,E^*\rangle \text{如下：}$$

在G的每一个面R_i中任取一个点v_i^*作为G^*的顶点,

$$V^*=\{ v_i^* \mid i=1,2,\ldots,r \}.$$

对G每一条边e_k,

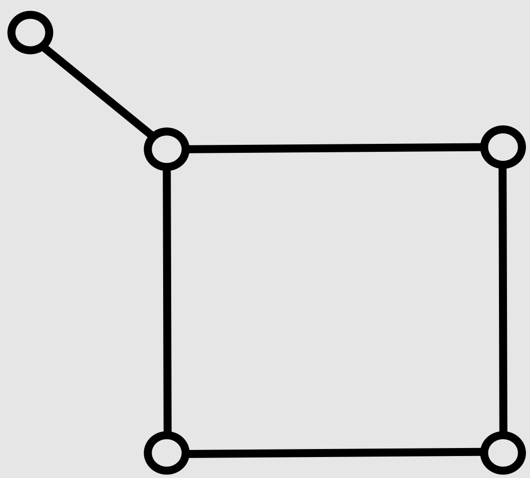
若e_k在面R_i与R_j的公共边界上, 则作边$e_k^*=(v_i^*,v_j^*)$, 且与e_k相交;

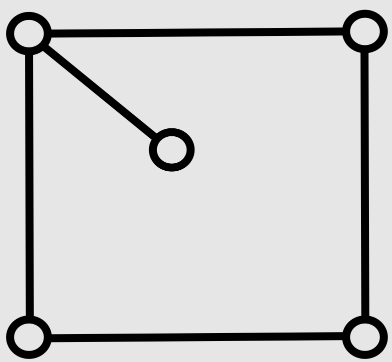
若e_k为G中的桥且在面R_i的边界上, 则作环$e_k^*=(v_i^*,v_i^*)$，且与e_k相交.

$$E^*=\{ e_k^* \mid k=1,2, \ldots,m \}.$$

17.4 平面图的对偶图

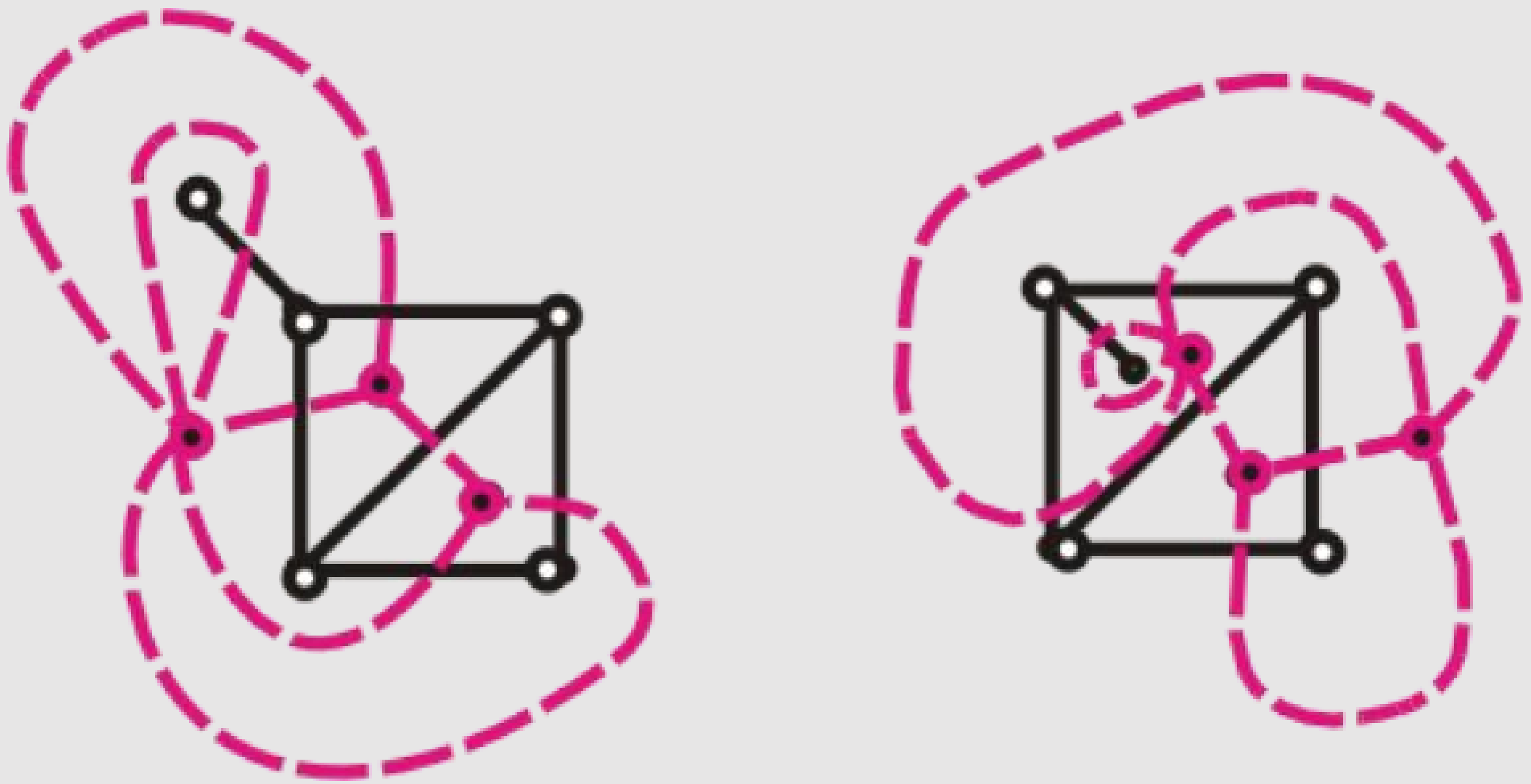
例 画出下面两张图的对偶图。





17.4 平面图的对偶图

解：



黑色实线为原平面图，红色虚线为其对偶图

17.4 平面图的对偶图

平面图G的对偶图G^*有以下性质：

1）G^*是平面图，而且是平面嵌入；

2）G^*是连通图；

3）若边e为G中的环，则G^*与e对应的边e^*为桥；

若边e为G中的桥，则G^*中与e对应的边e^*为环；

4）多数情况下，G^*为多重图（含平行边的图）。

定理17.14 设平面图G是连通的，G^*是G的对偶图，n，m，r和n^*，m^*，r^*分别为G和G^*的顶点数、边数和面数，则

1）$n^*=r$；

2）$m^*=m$；

3）$r^*=n$；

4）设G^*的顶点v_i^*位于G的面R_i中，则$d_{G^*}(v_i^*)=deg(R_i)$。

定理17.15 设平面图G有$k(k\geq 1)$个连通分支，G^*是G的对偶图，n，m，r和n^*，m^*，r^*分别为G和G^*的顶点数、边数和面数，则

1） $n^*=r$；

2） $m^*=m$；

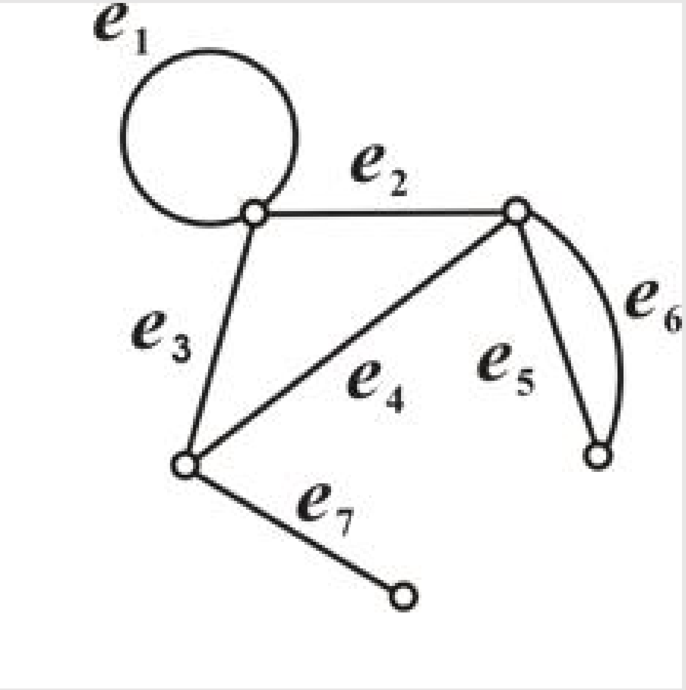
3） $r^*=n-k+1$；

4） 设G^*的顶点v_i^*位于G的面R_i中，则$d_{G^*}(v_i^*)=deg(R_i)$。

测验15

（1）求出平面图中各面的边界及次数；

（2）求出平面图的对偶图。



作业

习题 17（P353）

20