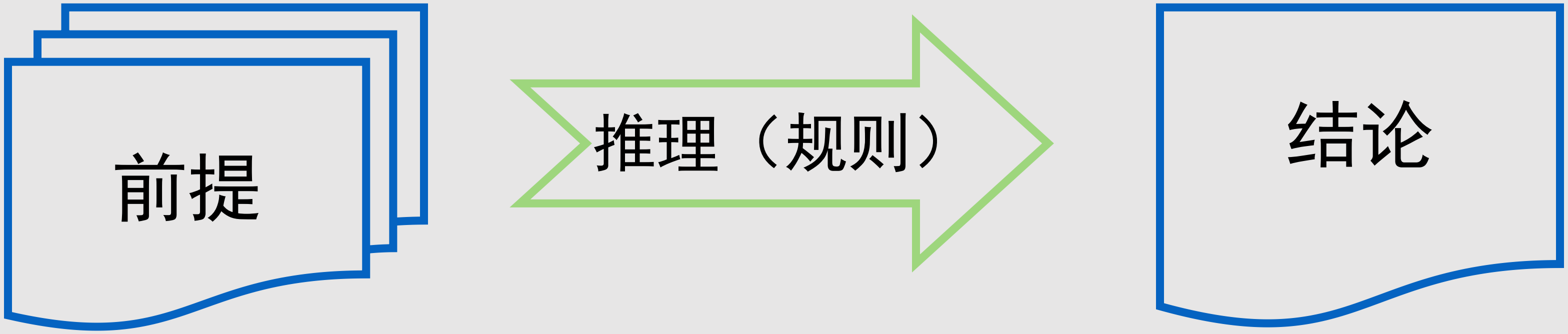
第1部分

数理逻辑

数理逻辑简介

- 数理逻辑——用数学方法来研究推理的规律。
- 这里所指的数学方法，就是引进一套符号体系的方法，在其中表达和研究推理的规律。

一套符号体系 + 一组规则



数理逻辑的知识体系

1.1 命题与联结词

1.2 命题公式及其赋值

2.1 等值式

2.2 析取范式与合取范式

2.3 联结词的完备集

3.1 推理的形式结构

3.2 自然推理系统

3.3 消解证明法

4.1 一阶逻辑命题符号化

4.2 一阶逻辑公式及解释

5.1 一阶逻辑等值式与置换规则

5.2 一阶逻辑前束范式

第一章

命题逻辑的基本概念

目录

Catalogue

1.1 命题与联结词

命题：判断结果惟一的陈述句。

命题的真值：判断的结果
真值的取值：真与假
真命题：真值为真的命题
假命题：真值为假的命题

注意：
- 判断结果不惟一不是命题。
- 感叹句、祈使句、疑问句都不是命题。
- 悖论(既不能为真也不能为假)不是命题。

例 下列句子中那些是命题？是命题并判断真假。

(1) $\sqrt{2}$是无理数. 真命题

(2) $2+5=8$. 假命题

(3) $x+5>3$. 真值不确定

(4) 你有铅笔吗？ 疑问句

(5) 这只兔子跑得真快呀！ 感叹句

(6) 我正在说谎话. 悖论

(3)~(6)都不是命题

1.1 命题与联结词

简单命题(原子命题)：

简单陈述句构成的命题 。

在命题逻辑中，简单命题是最小的基本单位，不能再细分。

复合命题：

由**简单命题**与联结词按一定规则复合而成的命题 。

简单命题符号化

用**小写英文字母** $p, q, r, \ldots, p_i, q_i, r_i\,(i\geq 1)$ 表示。

用“**1**”表示真值“**真**”，用“**0**”表示真值“**假**”。

例 令

$\boldsymbol{p}$: $\sqrt{2}$ 是有理数，则 p 的真值为 **0**

$\boldsymbol{q}$: $2+5=7$，则 q 的真值为 **1**

1.否定式与否定联结词“$\neg$”

定义 设p为命题，复合命题“非p”(或 “p的否定”)称为p的否定式，记作$\neg p$. 符号$\neg$称作否定联结词，

并规定$\neg p$为真当且仅当p为假。

2.合取式与合取联结词“$\wedge$”

定义 设p, q为二命题, 复合命题“$\boldsymbol{p}$**并且**$\boldsymbol{q}$”(或“p与q”)称为p与q的合取式，记作$p\wedge q$. $\wedge$称作合取联结词，

并规定 $\boldsymbol{p\wedge q}$**为真当且仅当**$\boldsymbol{p}$**与**$\boldsymbol{q}$**同时为真**。

例 将下列命题符号化.

(1) 王晓既用功又聪明.

(2) 王晓不仅聪明，而且用功.

(3) 王晓虽然聪明，但不用功.

(4) 张辉与王丽都是三好生.

(5) 张辉与王丽是同学.

解 令 p：王晓用功，q：王晓聪明，则

(1) $p \wedge q$

(2) $p \wedge q$

(3) $\neg p \wedge q$.

1.1 命题与联结词

(4) 张辉与王丽都是三好生.

(5) 张辉与王丽是同学.

令 r : 张辉是三好学生，s :王丽是三好学生

(4) $r \wedge s$.

(5) 令 t : 张辉与王丽是同学，t 是简单命题 .

说明:

(1)~(4)说明描述合取式的灵活性与多样性.

(5) 中“与”联结的是两个名词，整个句子是一个简单命题.

3.析取式与析取联结词“∨”

定义 设 p,q为二命题，复合命题“p或q”称作p和q的**析取式**，记作$p\vee q$. ∨称作**析取联结词**，并规定$p\vee q$为假当且仅当p与q同时为假.

1）相容或：联结的两个命题可以同时为真；

2）相斥或：联结的两个命题只有一个为真一个为假时才为真.

例 将下列命题符号化

(1) 2或4是素数.

(2) 张晓静只能挑选202或者203房间.

(3) 张晓静是江西人或者安徽人.

解 令 p:2是素数, q:4是素数

则 (1)为相容或，符号化为：$p \vee q$,

它的真值为 0.

例 将下列命题符号化

(1) 2或4是素数.

(2) 张晓静只能挑选202或者203房间.

(3) 张晓静是江西人或者安徽人.

(2), (3) 为排斥或.

令 t :张晓静选202房间，u:张晓静选203房间

则 (2) 符号化为 $(t\wedge\neg u)\vee(\neg t\wedge u)$.

又可符号化为 $t\vee u$.

令v :张晓静是江西人, w:张晓静是安徽人,

则 (3) 既可符号化为 $(v\wedge\neg w)\vee(\neg v\wedge w)$,

又可符号化为 $v\vee w$.

4.蕴涵式与蕴涵联结词“$\rightarrow$”

定义 设 p, q为二命题，复合命题 “如果p, 则q”称作p与q的**蕴涵式**，记作$p\rightarrow q$，并称p是蕴涵式的**前件**，q为蕴涵式的**后件**. $\rightarrow$称作**蕴涵联结词**，

并规定，**$p\rightarrow q$为假当且仅当 p 为真 q 为假。**

$p \to q$ 的逻辑关系：q 为 p 的必要条件

“如果 p，则 q”的不同表述法很多：

若 p，就 q
只要 p，就 q
p 仅当 q
只有 q 才 p
除非 q, 才 p
除非 q, 否则非 p.

例 将下列命题符号化，并指出它们的真值

设 p:3+3=6，q:雪是白色的，

(1) 如果3+3=6，则雪是白色的. $p \to q$

(2) 如果3+3≠6，则雪是白色的. $\neg p \to q$

(3) 如果3+3=6，则雪不是白色的. $p \to \neg q$

(4) 如果3+3≠6，则雪不是白色的. $\neg p \to \neg q$

注意： $q \to p$ 与 $\neg p \to \neg q$ 等值（真值相同）

练 将下列命题符号化，并指出它们的真值

设 r: a能被4整除，s: a能被2整除，

(1) 只要a能被4整除，则a一定能被2整除. $r \to s$ 1

(2) a能被4整除，仅当a能被2整除. $r \to s$ 1

(3) 除非a能被2整除，a才能被4整除 $r \to s$ 1

(4) 除非a能被2整除，否则a不能被4整除. $r \to s$ 1

(5) 只有a能被2整除，a才能被4整除. $r \to s$ 1

(6) 只有a能被4整除，a能被2整除. $s \to r$

其中，a是一个给定的正整数。

5. 等价式与等价联结词“$\leftrightarrow$”

定义 设p，q为二命题，复合命题“p当且仅当q”称作p与q的等价式，记作$p\leftrightarrow q$. $\leftrightarrow$称作等价联结词.并规定

$p\leftrightarrow q$为真当且仅当p与q同时为真或同时为假。

说明:

$p\leftrightarrow q$ 的逻辑关系:p与q互为充分必要条件

例 求下列复合命题的真值

(1) $2+2=4$ 当且仅当 $3+3=6$. 1

(2) $2+2=4$ 当且仅当 3 是偶数. 0

(3) $2+2=4$ 当且仅当 太阳从东方升起. 1

(4) $2+2=4$ 当且仅当 美国位于非洲. 0

(5) 函数 $f(x)$ 在x_0 可导的充要条件是它在 x_0 连续. 0

以上给出了5个联结词：$\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$，组成一个联结词集合$\{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$，

- 联结词的优先顺序为：$\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$;
- 如果出现的联结词同级，又无括号时，则按从左到右的顺序运算;
- 若遇有括号时，应该先进行括号中的运算.

1.1 命题与联结词

例 令p:北京比天津人口多

q:2+2=4

r:乌鸦是白色的

求下列复合命题的真值

(1) $((\neg p\wedge q)\vee(p\wedge\neg q))\rightarrow$r. 1

(2) $(q\vee r)\rightarrow(p\rightarrow\neg r)$. 1

练 (3) $(p\vee\neg r)\leftrightarrow(p\wedge\neg r)$. 1

(4) $(\neg p\vee r)\leftrightarrow(p\rightarrow\neg r)$. 0

作业

习题1

1（1, 4, 9, 13）

15（1, 4）

目录

Catalogue

1.2 命题公式及其赋值

简单命题是命题逻辑中最基本的研究单位，其真值是确定的，又称为命题常项或命题常元。

命题变项：真值不确定的陈述句（不是命题）

将命题变项用联结词和圆括号按照一定的逻辑关系联结起来的符号串称作合式公式。

1.2 命题公式及其赋值

定义：合式公式 (命题公式, 公式) 递归定义如下：

(1) 单个命题常项或变项 $p,q,r,\ldots,p_i,q_i,r_i,\ldots,0,1$ 是合式公式，并称为原子命题公式

(2) 若 A 是合式公式，则 $(\neg A)$ 也是合式公式

(3) 若 A, B 是合式公式，则 $(A\wedge B)$, $(A\vee B)$, $(A\rightarrow B)$, $(A\leftrightarrow B)$ 也是合式公式

(4) 只有有限次地应用(1)~(3)形成的符号串是合式公式

定义 合式公式的层次

(1) 若公式A是单个的命题变项, 则称A为0层公式.

(2) 称A是n+1(n≥0)层公式是指下面情况之一:

(*a*) $A=\neg B$, B是n层公式;

(*b*) $A=B\wedge C$, 其中B,C分别为i层和j层公式，且 $n=\max(i, j)$;

(*c*) $A=B\vee C$, 其中B,C的层次及n同(*b*);

(*d*) $A=B\rightarrow C$, 其中B,C的层次及n同(*b*);

(*e*) $A=B\leftrightarrow C$, 其中B,C的层次及n同(*b*).

1.2 命题公式及其赋值

例 求以下合式公式的层次

p	0层
$\neg p$	1层
$\neg p \to q$	2层
$\neg(p \to q) \leftrightarrow r$	3层
$((\neg p \wedge q) \to r) \leftrightarrow (\neg r \vee s)$	4层

练 求以下合式公式的层次

$(p \leftrightarrow r) \wedge (\neg q \vee s)$　　3层

$(\neg r \vee s) \rightarrow (\neg p \wedge q)$　　3层

定义 给公式A中的命题变项 $p_1, p_2, \ldots, p_n$指定一组真值称为对A的一个**赋值**或**解释**。

成真赋值: 使公式为**真**的赋值

成假赋值: 使公式为**假**的赋值

说明:

- 赋值$\alpha=\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n$之间不加标点符号，$\alpha_i=0$或1.
- A中仅出现 $p_1, p_2, \ldots, p_n$，给A赋值$\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n$是指 $p_1=\alpha_1, p_2=\alpha_2, \ldots, p_n=\alpha_n$
- A中仅出现 $p, q, r, \ldots$, 给A赋值$\alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots$是指 $p=\alpha_1, q=\alpha_2, r=\alpha_3 \ldots$
- 含n个变项的公式有2^n个赋值.

1.2 命题公式及其赋值

真值表: 公式A在所有赋值下的取值情况列成的表。

真值表的构造步骤:

1）找出公式中的全体命题变项(n)，列出2^n个赋值，按照二进制从0到2^n-1;

2）按照从低到高的顺序写出公式的各个层次;

3）对应各个赋值计算出各层次的真值，直到计算出公式的真值。

例 求出合式公式 $A=(q\to p)\wedge q\to p$ 的真值表。

p q	$q\to p$	$(q\to p)\wedge q$	$(q\to p)\wedge q\to p$
0 0	1	0	1
0 1	0	0	1
1 0	1	0	1
1 1	1	1	1

测验1

求出合式公式 $B = \neg(\neg p \vee q) \wedge q$ 的真值表。

1.2 命题公式及其赋值

根据公式在各种赋值下的取值情况，将命题公式进行分类。

定义 设A为一个命题公式

(1) 若A无成假赋值，则称A为**重言式**(也称**永真式**)

(2) 若A无成真赋值，则称A为**矛盾式**(也称**永假式**)

(3) 若A不是矛盾式，则称A为**可满足式**

注意：(1)A是可满足式当且仅当A至少存在一个成真赋值；

(2)重言式是可满足式，但反之不真；

(3)真值表可用来判断公式的类型。

例 判断命题公式 $A=(q\to p)\wedge q\to p$ 的类型。

解： 命题公式 $A=(q\to p)\wedge q\to p$ 的真值表为

p q	$q\to p$	$(q\to p)\wedge q$	$(q\to p)\wedge q\to p$
0 0	1	0	1
0 1	0	0	1
1 0	1	0	1
1 1	1	1	1

命题公式 $A=(q\to p)\wedge q\to p$ 为重言式（永真式）

设公式A，B中共含有命题变项p_1，$p_2,\ldots,p_n$,而A或B不全含这些命题变项。

例 A中不含有p_i，$p_{i+1},\ldots,p_n$，$i\geq 2$，这些命题变项为A的哑元。

作业

习题1

19（1, 5）