自动驾驶中的 slam 技术-第一章作业

Xinyu Ji

2023.05.21

1 计算题

左扰动:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial\left(\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{p}\right)}{\partial\phi} &= \lim_{\phi\to 0}\frac{\left(\exp\left(\boldsymbol{\phi}^{\wedge}\right)\boldsymbol{R}\right)^{-1}\boldsymbol{p}-\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{p}}{\boldsymbol{\phi}} \\
&= \lim_{\phi\to 0}\frac{\boldsymbol{R}^{-1}\exp\left(\phi^{\wedge}\right)^{-1}\boldsymbol{p}-\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{p}}{\phi} \\
&= \lim_{\phi\to 0}\frac{\boldsymbol{R}^{-1}\exp\left(-\boldsymbol{\phi}^{\wedge}\right)\boldsymbol{p}-\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{p}}{\boldsymbol{\phi}} \\
&= \lim_{\phi\to 0}\frac{\boldsymbol{R}^{-1}\left(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{\phi}^{\wedge}\right)\boldsymbol{p}-\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{p}}{\phi} \\
&= \lim_{\phi\to 0}\frac{-\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{\phi}^{\wedge}\boldsymbol{p}}{\boldsymbol{\phi}} \\
&= \lim_{\phi\to 0}\frac{\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{p}^{\wedge}}{\phi} \\
&= \boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{p}^{\wedge}
\end{aligned}
$$

右扰动:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial\left(R^{-1} p\right)}{\partial \phi} &= \lim_{\phi \to 0} \frac{\left(R \exp\left(\phi^{\wedge}\right)\right)^{-1} P - R^{-1} p}{\phi} \\
&= \lim_{\phi \to 0} \frac{\exp\left(\phi^{\wedge}\right)^{-1} \cdot R^{-1} p - R^{-1} p}{\phi} \\
&= \lim_{\phi \to 0} \frac{\exp\left(-\phi^{\wedge}\right) \cdot R^{-1} p - R^{-1} p}{\phi} \\
&= \lim_{\phi \to 0} \frac{\left(I - \phi^{\wedge}\right) \cdot R^{-1} P - R^{-1} p}{\phi} \\
&= \lim_{\phi \to 0} \frac{-\phi^{\wedge} R^{-1} p}{\phi} \\
&= \lim_{\phi \to 0} \frac{\left(R^{-1} p\right)^{\wedge} \phi}{\phi} \\
&= \left(R^{-1} P\right)^{\wedge}
\end{aligned}
$$

2 计算题

左扰动:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial\left(\boldsymbol{R}_1 \boldsymbol{R}_2^{-1}\right)}{\partial \boldsymbol{R}_2} &= \lim_{\phi \to 0} \frac{\log\left(R_1\left[\exp(\phi) R_2\right]^{-1}\right) - \log\left(R_1 R_2^{-1}\right)}{\phi} \\
&= \lim_{\phi \to 0} \frac{\log\left(R_1 \cdot R_2^{-1} \cdot \exp\left(\phi\right)^{-1}\right) - \log\left(R_1 R_2^{-1}\right)\Big)}{\phi} \\
&= \lim_{\phi \to 0} \frac{\log\left(R_1 R_2^{-1}\right) + J_l^{-1}\left(R_1 R_2^{-1}\right) \cdot \log\left(\exp(-\phi)\right) - \log\left(R_1 R_2^{-1}\right)}{\phi} \\
&= \lim_{\phi \to 0} \frac{J_l^{-1}\left(R_1 R_2^{-1}\right) \cdot \log(\exp(-\phi))}{\phi} \\
&= \lim_{\phi \to 0} \frac{J_l^{-1}\left(R_1 R_2^{-1}\right)}{\phi} \cdot -\phi \\
&= -J_l^{-1}\left(R_1 R_2^{-1}\right)
\end{aligned}
$$

右扰动:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial\left(\boldsymbol{R}_1 \boldsymbol{R}_2^{-1}\right)}{\partial \boldsymbol{R}_2} &= \lim_{\phi \rightarrow 0} \frac{\log\left(\boldsymbol{R}_1\left(\boldsymbol{R}_2 \operatorname{Exp}(\phi)\right)^{-1}\right)-\log\left(\boldsymbol{R}_1 \boldsymbol{R}_2^{-1}\right)}{\phi} \\
&= \lim_{\phi \rightarrow 0} \frac{\log\left(\boldsymbol{R}_1 \operatorname{Exp}(\phi)^{-1} \boldsymbol{R}_2^{-1}\right)-\log\left(\boldsymbol{R}_1 \boldsymbol{R}_2^{-1}\right)}{\phi} \\
&= \lim_{\phi \rightarrow 0} \frac{\log\left(\boldsymbol{R}_1 \boldsymbol{R}_2^{\top} \operatorname{Exp}\left(-\boldsymbol{R}_2 \boldsymbol{\phi}\right)\right)-\log\left(\boldsymbol{R}_1 \boldsymbol{R}_2^{-1}\right)}{\phi} \\
&= \lim_{\phi \rightarrow 0} \frac{\log\left(\boldsymbol{R}_1 \boldsymbol{R}_2^{-1}\right)+\boldsymbol{J}_r^{-1}\left(\boldsymbol{R}_1 \boldsymbol{R}_2^{-1}\right) \log\left(\operatorname{Exp}\left(-\boldsymbol{R}_2 \phi\right)\right)-\log\left(\boldsymbol{R}_1 \boldsymbol{R}_2^{-1}\right)}{\phi} \\
&= \lim_{\phi \rightarrow 0} \frac{\boldsymbol{J}_r^{-1}\left(\boldsymbol{R}_1 \boldsymbol{R}_2^{-1}\right)\left(-\boldsymbol{R}_2 \boldsymbol{\phi}\right)}{\phi} \\
&= -\boldsymbol{J}_r^{-1}\left(\boldsymbol{R}_1 \boldsymbol{R}_2^{-1}\right) \boldsymbol{R}_2 \\
&= -\boldsymbol{J}_r^{-1}\left(\log\left(\boldsymbol{R}_1 \boldsymbol{R}_2^{-1}\right)\right) \boldsymbol{R}_2
\end{aligned}
$$

3 代码题

由于 Z 轴存在向下的重力加速度，所以 while 循环中循环添加重力加速度矢量（0，0，-9.8）。

4 问答题

1、LM 算法对高斯牛顿的改进是把一个正定对角阵加入 hessian 中，保证 hessian 满足正定条件。高斯牛顿法存在缺陷，就是它要求我们所用的矩阵是可逆的（而且是正定的），但实际数据中计算得到的却只有半正定性。也就是说，在使用 Gauss Newton 方法时，可能出现奇异矩阵或者病态的情况，此时增量的稳定性较差，导致算法不收敛。更严重的是，就算我们假设 H 非奇异也非病态，如果我们求出来的步长 x 太大，也会导致我们采用的局部近似不够准确，这样一来我们甚至都无法保证它的迭代收敛，哪怕是让目标函数变得更大都是可能的。

由于 Gauss-Newton 方法中采用的近似二阶泰勒展开只能在展开点附近有较好的近似效果，所以我们很自然地想到应该给 x 添加一个信赖区域，不能让它太大而使得近似不准确。在信赖区域里边，我们认为近似是有效的；出了这个区域，近似可能会出问题。$\rho=\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{J(x)\Delta x}$ 通过公式来判断泰勒近似是否够好。 的分子是实际函数下降的值，分母是近似模型下降的

值。如果 接近于 1，则近似是好的。如果 太小，说明实际减小的值远少于近似减小的值，则认为近似比较差，需要缩小近似范围。反之，如果 比较大，则说明实际下降的比预计的更大，我们可以放大近似范围。