

《大学物理 AII》作业 No.10 平衡态的气体动理论

班级 _____ 学号 _____ 姓名 _____ 成绩 _____

*****本章教学要求*****

- 1、理解热力学系统、热力学平衡态、热力学温标的概念。
- 2、理解理想气体状态方程的意义并能用它求解有关气体状态的问题。
- 3、理解理想气体的微观模型和统计假设，掌握理想气体压强微观公式的推导。
- 4、理解理想气体压强和温度的微观统计意义。
- 5、理解能量均分定理的意义及物理基础，并能由它导出理想气体内能公式。
- 6、理解速率分布函数及麦克斯韦速率分布定律的意义，理解并会计算三种速率（最概然速率、平均速率、方均根速率）的统计值。
- 7、理解玻耳兹曼分布定律的意义和粒子在重力场中按高度分布的公式。
- 8、理解平均自由程、平均碰撞频率的概念并掌握其相关计算。

一、填空题

1、热运动指的是 大量微观粒子永不停息的无规则运动；热力学系统指的是 由大量微观粒子构成的有限的宏观物质体系；根据系统与外界是否有 物质 和 能量 的交换，热力学系统可分为 开放系统、封闭系统 和 孤立系统。

2、热力学平衡态是指 系统的各种宏观性质不随时间发生变化的稳定状态。处于平衡态时，反映系统整体特征的宏观量如 体积、温度、压强 等具有稳定值；描述单个粒子运动状态的微观量，如 单个粒子的动量、单个粒子的瞬时速度、单个粒子的动能 等却是不断变化的。因此热力学平衡态是一种 动态 平衡（填：动态或静态）。按照统计物理的思想，描述系统的宏观量是组成系统单个粒子微观量的 统计平均值。

3、理想气体的物态方程可表示为 $pV = \frac{m_{\text{气}}}{M} RT$ 或者 $p = nkT$ 两种形式，式中 T 是采用 热力学 温标下的温度。

4、理想气体的压强大小与 气体分子数密度 n 和 分子平均平动动能 $\bar{\epsilon}_t$ 因素有关，其定量表达式为 $p = \frac{2}{3} n \bar{\epsilon}_t$ 。理想气体温度与 分子平均平动动能 $\bar{\epsilon}_t$ 有关，其定量表达式为

$\bar{\epsilon}_t = \frac{3}{2} kT$ 。由此式可知，从微观上看，温度是 分子热运动剧烈程度 的标志；同时该式也

表明温度是 大量分子热运动 的集体表现，具有统计意义，对少数或单个分子而言，谈论其温度是 没有意义的。在推导理想气体压强公式中，体现统计意义的两条假设是 平衡态下，系统内分子处于容器内任一位置的概率相同 和 平衡态下，气体分子沿各个方向运动的概率相同。

5、速率分布函数 $f(v) = \frac{dN_v}{N dv}$ 的意义是指 速率在 v 附近单位速率区间内的分子数与总分子数之比 或者 一个分子的速率在 $v \sim v+dv$ 区间内的概率密度。速率分布函数要满足 归一化 条件。

6、根据麦克斯韦速率分布规律，得出气体分子最概然速率 $v_p = \sqrt{\frac{2kT}{m}} = \sqrt{\frac{2RT}{M}}$ 、平均

速率 $\bar{v} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}$ 、方均根速率 $\sqrt{v^2} = \sqrt{\frac{3kT}{m}} = \sqrt{\frac{3RT}{M}}$ 。

7、重力场中，气体分子数密度按高度分布的规律为 $n = n_0 e^{-\frac{mgh}{kT}}$ ，或者 $n = n_0 e^{-\frac{Mgh}{RT}}$ ；根据此式可推出压强按高度分布的公式 $p = n_0 k T e^{-\frac{mgh}{kT}} = p_0 e^{-\frac{mgh}{kT}}$ 或者 $p = p_0 e^{-\frac{Mgh}{RT}}$ 。

8、完全确定一个物体的空间位置所需要的相互独立的坐标数称为该物体的自由度。对于刚性气体分子而言，单原子分子有 3 个自由度，双原子分子有 5 个自由度，多原子分子有 6 个自由度。在温度为 T 的平衡态下，分子的每一个可能的自由度都有相同的平均动能

$\frac{1}{2}kT$ ，称之为能均分定理。

9、理想气体分子间的相互作用势能可以忽略不计，因此理想气体的内能就是 所有分子热运动动能之和，其定量的表达式为 $E = \frac{m_{\text{气}}}{M} \cdot \frac{i}{2} RT$ 。对于实际气体，在没有特别要求的情况下，都可将其视为刚性的理想气体。

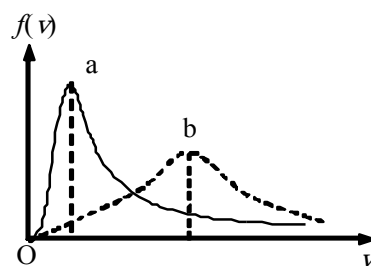
10、平衡态时分子速率的稳定分布，以及分子平均动能按自由度均分都是因为 (分子间频繁碰撞) 的结果。一个分子在单位时间内与其它分子的平均碰撞频率 $\bar{Z} = \sqrt{2}n\pi d^2 \bar{v}$ ；分子在连续两次碰撞间通过的路程的平均值 $\bar{\lambda}$ 称为平均自由程，其表达式

$\bar{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{2}n\pi d^2} = \frac{kT}{\sqrt{2}n\pi d^2 p}$ 。

11、设图示的两条曲线分别表示在相同温度下氧气和氢气分子的速率分布曲线，其中代表氧气分子速率分布的曲线是 a (填：a 或 b)

解：理想气体分子的最概然速率为

$v_p = \sqrt{\frac{2kT}{m}} = \sqrt{\frac{2RT}{M}}$



若温度一定，气体分子质量增大时，最概然速率减小。显然氧气分子的质量大于氢气分子，所以氧气分子的最概然速率小于氢气分子的最概然速率。

12、理想气体分子模型在气体动理论中讨论不同问题时有所不同，说明如下情况中使用的气体分子模型。

在压强和温度公式的推导中 弹性自由质点；

在能均分定理中 有内部结构的质点组；

在分子平均碰撞自由程的推导中 直径为 d 的刚性小球。

13、摩尔数相同的氢气和氦气，如果它们的温度相同，则两气体的内能 不相同，平均动能 不相同，平均平动动能 相同，平均转动动能 不相同。（选填：相同或不相同）

解：氢气的自由度为 5，氦气的自由度为 3。

①气体的内能为 $E = \frac{m_{\text{气}}}{M} \cdot \frac{i}{2} RT$ ，当二者温度相同时，由于自由度不同，所以内能并不相同；

②分子的平均动能为 $\bar{\varepsilon}_k = \frac{i}{2} kT$ ，当二者温度相同时，由于自由度不同，所以平均动能并不相同；

③二者的平动自由度均为 3，则根据能均分定理，两种分子的平均平动动能均为

$\bar{\varepsilon}_t = \frac{3}{2} kT$ 。或者从温度的统计公式 $\bar{\varepsilon}_t = \frac{3}{2} kT$ 出发，由于其值完全由温度单值决定，所以二者的平均平动动能必然相等；

④当温度一定时，分子的平均转动动能 $\bar{\varepsilon}_k = \frac{r}{2} kT$ 由转动自由度决定。由于氦气是单原子，没有转动自由度，其平均转动动能为零，刚性氢分子的转动自由度为 2，其平均转动动能为 $\bar{\varepsilon}_k = kT$

14、用总分子数 N 、气体分子速率 v 和速率分布函数 $f(v)$ 写出相应表示式，表示下列各量：

(1) 速率大于 v_0 的分子数 = $N \int_{v_0}^{+\infty} f(v) dv$

(2) 速率大于 v_0 的那些分子的平均速率 = $\frac{\int_{v_0}^{+\infty} v f(v) dv}{\int_{v_0}^{+\infty} f(v) dv}$

解：
$$\frac{\int_{v_0}^{+\infty} v dN}{\Delta N_{v_0 \rightarrow +\infty}} = \frac{N \int_{v_0}^{+\infty} v f(v) dv}{N \int_{v_0}^{+\infty} f(v) dv} = \frac{\int_{v_0}^{+\infty} v f(v) dv}{\int_{v_0}^{+\infty} f(v) dv}$$

(3)多次观察某一分子的速率，发现其速率大于 v_0 的概率 = $\frac{\int_{v_0}^{+\infty} f(v)dv}{\int_0^{+\infty} f(v)dv}$ 。

15、氮气在标准状态下的分子平均碰撞次数为 $1.3 \times 10^3 \text{ s}^{-1}$ ，分子平均自由程为 $6 \times 10^{-6} \text{ cm}$ ，若温度不变，气压降为 0.1 atm ，则分子平均碰撞次数变为 $1.3 \times 10^2 \text{ s}^{-1}$ ；分子平均自由程变为 $6 \times 10^{-5} \text{ cm}$ 。

解：①根据理想气体的状态方程 $p = nkT$ ，

$$\text{当温度不变时，可得 } n_2 = \frac{P_2 n_1}{P_1} = n_1 \frac{0.1 \text{ atm}}{1 \text{ atm}} = 0.1 n_1$$

理想气体的平均速率为 $\bar{v} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}$ ，当温度不变时，其不会改变。

根据气体的平均碰撞频率 $\bar{Z} = \sqrt{2} n \pi d^2 \bar{v}$

$$\text{可得 } \bar{Z}_2 = \frac{n_2 \bar{Z}_1}{n_1} = 0.1 \bar{Z}_1 = 1.3 \times 10^2 \text{ s}^{-1}$$

②根据理想气体的状态方程 $p = nkT$ ，可得分子平均自由程为 $\bar{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{2} n \pi d^2} = \frac{kT}{\sqrt{2} \pi d^2 p}$

$$\text{所以当温度不变时，可得 } \bar{\lambda}_2 = \frac{P_1 \bar{\lambda}_1}{P_2} = 10 \bar{\lambda}_1 = 6 \times 10^{-5} \text{ cm}$$

二、简答题

1、北方的冬天寒风凛冽，风大表示空气分子的速度大；寒表示温度低，即空气分子速度小。这是否矛盾？为什么？

答：前后谈及的速度含义不同，相互比较没有意义。

前者谈及的风大即风的速度大，风速是空气流动的宏观速度，不包括分子的无规则运动的速度。这种宏观速度是由空气分子定向运动表现出来的，即所有分子在做无规则运动的同时都朝同一方向运动或按照某一规则运动。这种规则运动的强度与温度无关。

后者谈及的速度是大量分子无规则热运动的速度，温度就是物体中大量分子无规则热运动平均平动动能的量度。只要温度相等，风速再大或再小，也不会影响分子的无规则运动的剧烈程度，不影响空气分子的平均速率。

2、说明下列各式的物理意义：

$$(1) f(v)dv; \quad (2) Nf(v)dv; \quad (3) \int_{v_1}^{v_2} f(v)dv; \quad (4) \frac{i}{2} kT; \quad (5) \frac{i}{2} RT$$

答：(1) $f(v)dv$ ：在温度为 T 的平衡态下，分子速率在 $v-v+dv$ 区间内的概率，或者速率在 $v-v+dv$ 区间的分子数占总分子数的比值；

(2) $Nf(v)dv$ ：在温度为 T 的平衡态下，速率在 $v-v+dv$ 区间内的分子数；

$$\int_{v_1}^{v_2} f(v) dv$$

(3) $\int_{v_1}^{v_2} f(v) dv$: 在温度为 T 的平衡态下, 分子速率在 $v_1 \rightarrow v_2$ 区间内的概率, 或者速率在 $v_1 \rightarrow v_2$ 区间的分子数占总分子数的比值;

(4) $\frac{i}{2} kT$: 在温度为 T 的平衡态下, 物质分子的平均总动能;

(5) $\frac{i}{2} RT$: 在温度为 T 的平衡态下, 1mol 理想气体的内能。

3、关于温度的意义, 有下列几种说法是否正确? 如果不正确请说明理由。

- (1) 气体的温度是分子平均平动动能的量度;
- (2) 气体的温度是大量气体分子热运动的集体表现, 具有统计意义;
- (3) 温度的高低反映物质内部分子运动剧烈程度的不同;
- (4) 从微观上看, 气体的温度表示每个气体分子的冷热程度;

解: (1)、(2)、(3) 说法正确。(4) 说法错误, 因为温度是个统计概念, 是大量分子热运动的集体表现。不能把一个具有统计意义的概念同单个分子的运动对应起来。

计算题

1、容器内有某种理想气体, 气体温度为 273K, 压强为 0.01atm ($1\text{atm} = 1.013 \times 10^5 \text{Pa}$), 密度为 $1.24 \times 10^{-2} \text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$, 试求:

- (1) 气体分子的方均根速率;
- (2) 气体的摩尔质量, 并确定它是什么气体;
- (3) 单位体积内分子的平动动能是多少;
- (4) 若气体的摩尔数为 0.4mol, 其内能是多少。

解: 由理想气体状态方程: $pV = \frac{m_{\text{气}}}{M} RT$ 可得: $\frac{pV}{m_{\text{气}}} = \frac{p}{\rho} = \frac{RT}{M}$, 所以:

(1) 方均根速率

$$\sqrt{v^2} = \sqrt{\frac{3RT}{M}} = \sqrt{\frac{3P}{\rho}} = \sqrt{\frac{3 \times 0.01 \times 1.013 \times 10^5}{1.24 \times 10^{-2}}} = 495 \text{ m/s}$$

(2) 根据第一问的结果 $\sqrt{v^2} = \sqrt{\frac{3RT}{M}} = 495 \text{ m/s}$

$$\text{可得摩尔质量 } M = \frac{3RT}{495^2} = \frac{3 \times 8.314 \times 273}{495^2} = 0.028 \text{ kg} = 28\text{g}$$

气体可能是 N_2 或 CO 。

(3) 由压强公式: $p = nKT$, 可得气体分子数密度 $n = p/KT$ 。所以单位体积内气体分子的总平动能为

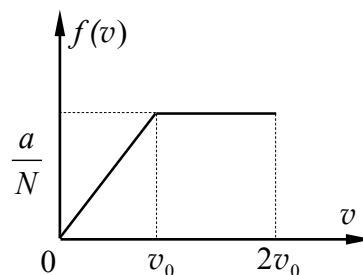
$$\varepsilon_i = n \frac{3}{2} kT = \frac{3}{2} P = \frac{3 \times 0.01 \times 1.013 \times 10^5}{2} = 1.52 \times 10^3 \text{ J/m}^2。$$

(4) 刚性气体 N_2 或 CO 自由度 $i=5$ ，则其内能为：

$$E = \frac{m_{\text{气}}}{M} \frac{i}{2} RT = 0.4 \times \frac{5}{2} \times 8.314 \times 273 = 2.269 \times 10^3 \text{ J}$$

2. 有 N 个气体分子，其速率分布如图所示。当 $v > 2v_0$ 时，粒子的数目为零。

- (1) 求常数 a ；
- (2) 求速率在 $1.5v_0 \sim 2.0v_0$ 之间的分子数；
- (3) 求分子的平均速率 \bar{v} 。



计算题 2 图

解：(1) 根据已知可得分子速率分布函数为

$$f(v) = \begin{cases} \frac{a}{Nv_0} v & (0 \leq v \leq v_0) \\ \frac{a}{N} & (v_0 < v \leq 2v_0) \\ 0 & (2v_0 < v \leq \infty) \end{cases}$$

利用归一化条件 $\int_0^{\infty} f(v) dv = 1$

$$\int_0^{\infty} f(v) dv = \int_0^{2v_0} f(v) dv = \frac{1}{2} \frac{a}{N} v_0 + \frac{a}{N} (2v_0 - v_0) = 1$$

可得常数 $a = \frac{2N}{3v_0}$

(2) 由 (1) 可知速率分布函数为

$$f(v) = \begin{cases} \frac{2}{3v_0^2} v & (0 \leq v \leq v_0) \\ \frac{2}{3v_0} & (v_0 < v \leq 2v_0) \\ 0 & (2v_0 < v \leq \infty) \end{cases}$$

所以速率在 $1.5v_0 \sim 2v_0$ 之间的分子数为

$$\int_{1.5v_0}^{2v_0} N f(v) dv = \int_{1.5v_0}^{2v_0} N \frac{2}{3v_0} dv = \frac{N}{3}$$

(3)分子的平均速率为 $\bar{v} = \int_0^{\infty} v f(v) dv = \int_0^{v_0} v^2 \cdot \frac{2}{3v_0^2} dv + \int_{v_0}^{2v_0} v \cdot \frac{2}{3v_0} dv = \frac{11}{9} v_0$

*3、木星表面大气中 78%都是 H_2 ，而火星表面大气中却没有 H_2 存在。试分析， H_2 为什么能存在于木星表面，却不能存在于火星表面？已知火星的质量是地球的 0.108 倍，半径是地球的 0.531 倍，火星表面平均温度为 240K；木星的质量是地球的 318 倍，半径是地球的 11.2 倍，木星表面平均温度为 130K。（提示，考虑不同星球上的分子逃逸速率与分子平均速率不同）

解：理想气体分子的平均速率 $\bar{v} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi \mu}}$ ，

分子的逃逸速度 $v_{\text{逃}}$ 即第二宇宙速度，分子的动能等于该分子的重力势能的大小时的该分子的速率。逃逸速度一般描述为摆脱一重力场的引力束缚飞离那重力场所需的最低速率。

$$\frac{1}{2} m v_{\text{逃}}^2 = \frac{GMm}{r}, \text{ 所以 } v_{\text{逃}} = \sqrt{\frac{2GM}{r}}, \text{ (} M \text{ 和 } r \text{ 分别是该星体的质量和半径)}。$$

在火星上，

$$\bar{v}_{\text{火}} = \sqrt{\frac{8KT}{\pi m}} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi \mu}} = \sqrt{\frac{8 \times 8.31 \times 240}{3.14 \times 2 \times 10^{-3}}} = 1.59 \times 10^3 \text{ m/s}$$

$$v_{\text{火逃}} = \sqrt{\frac{2GM}{r}} = \sqrt{\frac{2G \times 0.108 M_{\text{地}}}{0.531 r_{\text{地}}}} = \sqrt{\frac{2 \times 6.67 \times 10^{-11} \times 0.108 \times 5.98 \times 10^{24}}{0.531 \times 6378 \times 10^3}} = 5.04 \times 10^3 \text{ m/s}$$

在木星上，

$$\bar{v}_{\text{木}} = \sqrt{\frac{8KT}{\pi m}} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi \mu}} = \sqrt{\frac{8 \times 8.31 \times 130}{3.14 \times 2 \times 10^{-3}}} = 1.17 \times 10^3 \text{ m/s}$$

$$v_{\text{木逃}} = \sqrt{\frac{2GM}{r}} = \sqrt{\frac{2G \times 318 M_{\text{地}}}{11.2 r_{\text{地}}}} = \sqrt{\frac{2 \times 6.67 \times 10^{-11} \times 318 \times 5.98 \times 10^{24}}{11.2 \times 6378 \times 10^3}} = 5.96 \times 10^4 \text{ m/s}$$

在一个星球上，大气分子的热运动促使他们逸散，而万有引力则阻止它们逃逸，若热运动动能大，分子更容易逃脱。根据上述计算数据可看出，火星上氢气分子的热运动平均速率与逃逸速率是同一数量级，分子容易逃脱。而木星上氢气分子热运动平均速率比逃逸速率小一个数量级，显然木星上万有引力更能束缚氢气分子，使得其难以逃离。