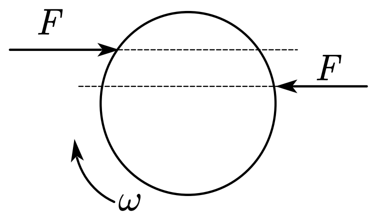
【知识点四】

基础篇

4.1（清华习题）一圆盘绕过盘心且与盘面垂直的光滑固定轴 O 以角速度按图示方向转动.若如图所示的情况那样，将两个大小相等方向相反但不在同一条直线的力 F 沿盘面同时作用到圆盘上，则圆盘的角速度：（　　）

A.必然增大　　　　B.必然减少

C.不会改变.　　　　D.如何变化，不能确定



习题 4.1 图

4.2（清华习题）有一半径为R的水平圆转台，可绕通过其中心的竖直固定光滑轴转动，转动惯量为J，开始时转台以匀角速度ω转动，此时有一质量为m的人站在转台中心．随后人沿半径向外跑去，当人到达转台边缘时，转台的角速度为:（　　）

A. $\dfrac{J}{J+mR^2}\omega$　　B. $\dfrac{J}{(J+m)R^2}\omega$　　C. $\dfrac{J}{mR^2}\omega$　　D.ω

4.3（清华习题）两个匀质圆盘A和B的密度分别为ρ_A和ρ_B，若$\rho_A>\rho_B$，但两圆盘的质量与厚度相同，如两盘对通过盘心垂直于盘面轴的转动惯量各为J_A和J_B，则（　　）

A.$J_A>J_B$　　B.$J_A<J_B$　　C.$J_A=J_B$　　D.不能确定

4.4 一长为l的均匀直棒可绕过其一端且与棒垂直的水平光滑固定轴转动．抬起另一端使棒向上与水平面成60°，然后无初转速地将棒释放．已知棒对轴的转动惯量为$\dfrac{1}{3}ml^2$，其中m和l分别为棒的质量和长度．求：

（1）放手时棒的角加速度；　（2）棒转到水平位置时的角加速度.

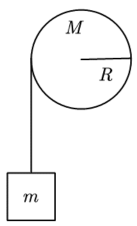
4.5（北化 2014）一质量均匀分布的圆盘，质量为 M，半径为 R，放在一粗糙的水平面上（圆盘与水平面之间的摩擦系数为μ），圆盘可绕通过其中心 O 的竖直固定光滑轴转动。开始时，圆盘静止，一质量为 m 的子弹以水平速度v_0垂直于圆盘半径打入圆盘边缘并嵌在盘边上，求：

（1）子弹击中圆盘后，盘所获得的角速度；

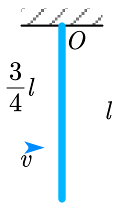
（2）经过多长时间后，圆盘停止转动。

（圆盘绕通过 O 的竖直轴的转动惯量为$\dfrac{1}{2}MR^2$，忽略子弹重力造成的摩擦力矩）

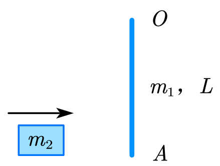
4.6（武大 2016）如图所示，一个质量为 m 的物体与绕在定滑轮上的绳子相联，绳子质量可以忽略，它与定滑轮之间无滑动，假设定滑轮质量为 M、半径为 R，其转动惯量为$\dfrac{1}{2}MR^2$，滑轮轴光滑，试求该物体由静止开始下落的过程中，下落速度与时间的关系。



习题 4.6 图



习题 4.7 图



习题 4.8 图

4.7（西交习题）一匀质细杆，长$l=1m$，可绕通过一端的水平光滑轴 O 在竖直面内自由转动，如图所示。开始时杆处于竖直位置，今有一粒子弹沿水平方向以$v=10$ m/s 的速度射入细杆。设入射点离 O 点的距离为$\dfrac{3}{4}l$，子弹的质量为杆的$\dfrac{1}{9}$，求：

（1）子弹和杆开始共同运动的角速度；

（2）子弹和杆共同摆动能达到的最大角度。

4.8（武大 2015）如图所示，在水平桌面上有一质量为m_1、长为 L 的均质细棒，细棒可绕通过其端点的光滑固定轴 O 在桌面上转动（转动惯量为$J=\dfrac{1}{3}m_1L^2$），棒与桌面间的滑动摩擦系数为μ。质量为m_2的滑块沿垂直于棒的方向水平撞向细棒的 A 端（假设碰撞时间极短），碰撞前后滑块的速度为v_1和v_2。试求碰撞后细棒开始转动到停止所需的时间。

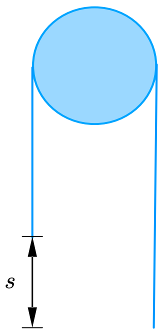
提高篇

4.9（山大习题）质量为 m 的小孩站在半径为 R 的水平平台边缘上．平台可以绕通过其中心的竖直光滑固定轴自由转动，转动惯量为 J，平台和小孩开始时均静止．当小孩突然以相对于地面为 v 的速率在台边缘沿逆时针转向走动时，则此平台相对地面旋转的角速度和旋转方向分别为（　　）

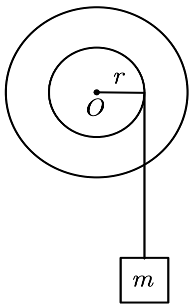
A.$\omega=\dfrac{mR^2}{J}\left(\dfrac{v}{R}\right)$，顺时针　　B.$\omega=\dfrac{mR^2}{J}\left(\dfrac{v}{R}\right)$，逆时针

C.$\omega=\dfrac{mR^2}{J+mR^2}\left(\dfrac{v}{R}\right)$，顺时针　　D.$\omega=\dfrac{mR^2}{J+mR^2}\left(\dfrac{v}{R}\right)$，逆时针

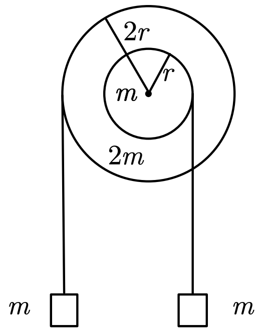
4.10（华科 2015）质量为 M 的匀质圆盘，可绕通过盘心并垂直于盘的固定光滑轴转动，绕过盘的边缘，挂有质量为 m，长为 l 的匀质柔软绳索，如图，设绳子不能伸长且与圆盘无相对滑动，则当圆盘两侧的绳长之差为 s 时，绳子的加速度大小为_________.



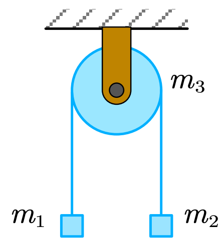
习题 4.10 图



习题 4.11 图



习题 4.12 图



习题 4.13 图

4.11（清华习题）一质量为 m 的物体悬于一条轻绳的一端，绳另一端绕在一轮轴的轴上，如图所示．轴水平且垂直于轮轴面，其半径为 r，整个装置架在光滑的固定轴承之上．当物体从静止释放后，在时间 t 内下降了一段距离 S．试求整个轮轴的转动惯量(用 m、r、t 和 S 表示)。

4.12（山大习题）质量分别为 m 和 $2m$，半径分别为 r 和 $2r$ 的两个均匀圆盘，同轴地粘在一起，可以绕通过盘心且垂直于盘面的水平光滑固定轴转动，对转轴的转动惯量是 $\dfrac{9}{2}mr^2$，大小盘的边缘都绕有绳子，绳子下端都挂一个质量为 m 的重物，如图所示。求盘的角加速度的大小。

4.13（北化 2014）如图所示的阿特伍德机装置中，滑轮和绳子间没有滑动且绳子不可伸长，轴与轮间有阻力矩，求滑轮两边绳子中的张力。已知$m_1=20\ kg, m_2=10kg$，滑轮质量为$m_3=5\ kg$，滑轮半径为 r=0.2 m。滑轮可视为均匀圆盘，阻力矩$M_f=6.6\ N\cdot m$，已知圆盘的转动惯量为$\dfrac{1}{2}m_3r^2$。

【知识点四参考答案】

基础篇

4.1【正解】A

【解析】根据力矩的定义可知：向右的力的力矩是更大的，而这个力矩产生的角加速度方向是垂直于纸面向里，和角速度的方向一样，所以角速度必然增大。

4.2【正解】A

【解析】根据角动量守恒定理：$J\omega+0=J\omega'+m\omega'R\cdot R\Rightarrow\omega'=\dfrac{J\omega}{J+mR^2}$

4.3【正解】B

【解析】易知圆盘的转动惯量是：$J=\dfrac{1}{2}mR^2$，两圆盘的质量相等，所以就取决于半径。因为 A 的密度大于 B 的，所以 A 的体积小，又因为厚度相等，所以 A 的半径小，所以 A 的转动惯量小。

4.4【解析】（1）此时棒受到的力矩：$M=mg\cdot\dfrac{1}{2}l\cos 60°=\dfrac{1}{4}mgl$，所以 $M=J\alpha\Rightarrow\alpha=\dfrac{3g}{4l}$

（2）受力分析可得：$M=mg\cdot\dfrac{1}{2}l=\dfrac{1}{2}mgl$，$M=J\alpha\Rightarrow\alpha=\dfrac{3g}{2l}$

4.5【解析】（1）根据角动量守恒：$mv_0R=\left(mR^2+\dfrac{1}{2}MR^2\right)\omega\Rightarrow\omega=\dfrac{mv_0}{mR+\frac{1}{2}MR}$

（2）摩擦力矩：$M=\displaystyle\int_0^R\mu\frac{2\pi rdr}{\pi R^2}Mgr=\frac{2}{3}\mu MgR$，根据转动定定理：

$$M=J\alpha\Rightarrow\alpha=\frac{M}{J}=\frac{\frac{2}{3}\mu MgR}{mR+\frac{1}{2}MR}，所以：t=\frac{\omega}{\alpha}=\frac{mv_0}{\frac{2}{3}\mu MgR}=\frac{3mv_0}{2\mu MgR}$$

4.6【解析】设绳子张力为 T，则对物体：$\begin{cases}mg-T=ma\\v=at\end{cases}$，对滑轮：$TR=\dfrac{1}{2}MR^2\cdot\alpha$

根据物理关系：$a=\alpha R$，联立解得：$v=\dfrac{2mg}{2m+M}t$

4.7【解析】（1）根据角动量守恒：

$$\frac{1}{9}mv\cdot\frac{3}{4}l=\left(\frac{1}{9}m\cdot\left(\frac{3}{4}l\right)^2+\frac{1}{3}ml^2\right)\omega\Rightarrow\omega=\frac{4v}{19l}=\frac{40}{19}\ rad/s$$

（2）设最大角度为 θ，根据能量守恒：

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}ml^2+\frac{1}{9}m\cdot\left(\frac{3}{4}l\right)^2\right)\omega^2=\frac{1}{9}mg\cdot\frac{3}{4}l(1-\cos\theta)+mg\cdot\frac{1}{2}l(1-\cos\theta)$$

解得：$\cos\theta=1-\dfrac{6v^2}{21\times19gl}=1-\dfrac{6\times10^2}{21\times19\times10}=0.849624$

所以 $\theta=\arccos 0.849624=31.8292°$

4.8【解析】根据角动量守恒：$m_2v_1L=m_2v_2L+\dfrac{1}{3}m_1L^2\omega$

细棒所受的摩擦力矩为：$M=\displaystyle\int_0^L\mu\frac{dx}{L}m_1gx=\frac{1}{2}\mu m_1gL$

转动定律：$M=J\alpha$，所以：$t=\dfrac{\omega}{\alpha}=\dfrac{2m_2(v_1-v_2)}{\mu m_1g}$

提高篇

4.9【正解】A

【解析】根据角动量守恒可知，平台是顺时针旋转的，且：$mvR=J\omega$。

注意 v 是相对地面的速度，而不是相对圆盘的速度。

4.10【正解】$\dfrac{mgs}{\left(\frac{1}{2}M+m\right)l}$

【解析】设左右两边的力分别为：T_1,T_2，对滑轮：$T_2r-T_1r=\dfrac{1}{2}Mr^2\alpha$

对左边的绳子：$T_1-m_1g=m_1a$，对右边的绳子：$m_2g-T_2=m_2a$

且$a=\alpha r$，解得：$a=\dfrac{mgs}{\left(\frac{1}{2}M+m\right)l}$。

4.11【解析】设绳子张力为 T，对物体：$mg-T=ma$，根据物理关系：$\dfrac{1}{2}at^2=S$，

对轮轴：$Tr=J\alpha$，且$a=\alpha r$，解得：$J=\left(\dfrac{mgt^2}{2S}-m\right)r^2$。

4.12【解析】设右边的物体下降，左边的物体上升，绳子张力分别为T_1,T_2

对圆盘：$T_1r-T_2\cdot 2r=\dfrac{9}{2}mr^2\alpha$，右边物体：$\begin{cases}a_1=\alpha r\\ mg-T_1=ma_1\end{cases}$，左边物体：$\begin{cases}a_2=2\alpha r\\ T_2-mg=ma_2\end{cases}$

联立可得：$\alpha=-\dfrac{2g}{19r}$，负号表示右边的物体上升，左边的物体下降。

4.13【解析】设左边右边绳子的力分别为：T_1，T_2，

对滑轮：$T_1r-T_2r-M_f=\dfrac{1}{2}m_3r^2\alpha$，对 1 物体：$m_1g-T_1=m_1a$，对 2 物体：$T_2-m_2g=m_2a$

根据物理关系：$a=\alpha r$，解得：$\begin{cases}T_1=158\ N\\ T_2=121\ N\end{cases}$。