【知识点三】

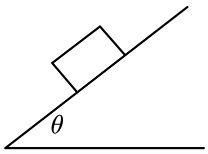
基础篇

3.1（西交 2005）某质点在力 $\boldsymbol{F}=(4+5x)\boldsymbol{i}$ 的作用下沿着 x 轴作直线运动，试求在从 $x=0$ 到 $x=10$ m 的过程中，力 F 对其做的功是多少：（　　）

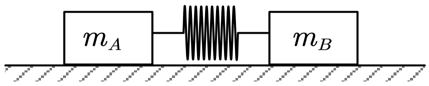
A.290 J　　B.-290 J　　C.50 J　　D.-50 J

3.2（清华习题）如图所示，木块 m 沿固定的光滑斜面下滑，当下降 h 高度时，重力作功的瞬时功率是：（　　）

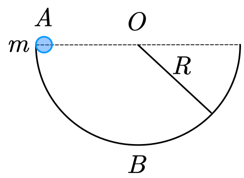
A.$mg\sqrt{2gh}$　　B.$mg\cos\ \theta\sqrt{2gh}$　　C.$mg\sin\ \theta\sqrt{\frac{1}{2}gh}$　　D.$mg\sin\ \theta\sqrt{2gh}$



习题 3.2 图



习题 3.3 图



习题 3.4 图

3.3（清华习题）A、B 两木块质量分别为 m_A 和 m_B，且 $m_B=2m_A$，两者用一轻弹簧连接后静止于光滑水平桌面上，如图所示．若用外力将两木块压近使弹簧被压缩，后将外力撤去，此后两木块运动动能之比 E_{KA}/E_{KB} 为：（　　）

A.$\frac{1}{2}$　　B.$\frac{\sqrt{2}}{2}$　　C.$\sqrt{2}$　　D.2

3.4（西交 2005）一质量为m的质点，在半径为R的半球形容器中，由静止开始自边缘上 A 点下滑，到达最低点 B 时，它对容器的正压力为N，则质点自 A 到 B 的过程中，摩擦力对其做功为：（　　）

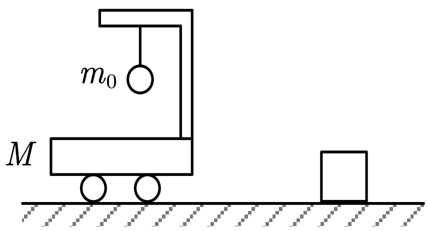
A.$\frac{1}{2}R(N-3mg)$　　B.RN　　C.$\frac{1}{2}R(N-mg)$　　D.$\frac{1}{2}R(N-2mg)$

3.5（清华习题）质量分别为m_A和$m_B$$(m_A>m_B)$速度分别为$v_A$和$v_B$$(v_A>v_B)$的两质点 A 和 B，受到相同的冲量作用，则（　　）

A.A 的动量增量的绝对值比 B 的小　　B.A 的动量增量的绝对值比 B 的大

C.A、B 的动量增量相等　　D.A、B 的速度增量相等

3.6 在质量为M 的小车中挂有一单摆，摆球的质量为m_0，小车和单摆以恒定的速度v沿光滑水平地面运动，与位于远处的质量为m的静止的木块发生碰撞，碰撞的时间极短，在此碰撞过程中，下列哪些情况是可能发生的：（　　）



A.小车、木块、摆球的速度都发生变化，分别变为v_1,v_2,v_3，满足$(M+m_0)v=Mv_1+mv_2+m_0v_3$

B.摆球的速度不变，小车和木块的速度变化为v_1和v_2，满足$Mv=Mv_1+mv_2$

C.摆球的速度不变，小车和木块的速度都变为v_1，满足$Mv=(M-m)v_1$

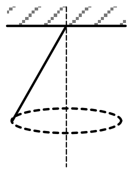
D.小车和摆球的速度都变为v_1，木块的速度变为v_2，满足$(M+m_0)v=(M+m_0)v_1+mv_2$

3.7（哈工大 2013）有一劲度系数为k的轻弹簧，下端悬一质量为m的小球，先使弹簧为原长，而小球恰好与地接触。再将弹簧上端缓缓地提起，直到小球能脱离地面为止，在此过程中外力做的功为_________。

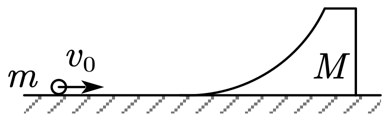
3.8（清华习题）质量为 m 的物体，置于电梯内，电梯以 $\frac{1}{2}g$ 的加速度匀加速下降 h，在此过程中，电梯对物体的作用力所做的功为__________。

3.9 起重机以恒定功率从地面上竖直提升一重物，经t时间物体开始以速度v匀速运动，此时物体离地面高度为______________。

3.10（华科 2013）圆锥摆如图所示，质量为m的小球在水平面内以角速度ω匀速转动。在小球转动一周的过程中，小球所受绳子拉力的冲量大小等于___________。



习题 3.10 图



习题 3.11 图

3.11 如图所示，质量为M的滑块静止在光滑的水平桌面上，滑块的光滑弧面底部与桌面相切，一个质量为m的小球以速度v_0向滑块滚来，设小球不会越过滑块，则小球到达最高点时，速度的大小为_____________，小球滚回水平面时的速度大小为_______________。

3.12（西交 2009）一物体沿 x 轴方向的运动方程为$x=bt^2$，物体在运动中所受的阻力f与速度v的关系式为$f=-kv^2$，其中b、k为常量，求：

（1）物体在任意时候的速度和加速度；

（2）物体从$x=0$处运动到$x=1$处，在该过程中阻力所做的功。

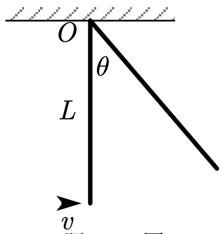
3.13（武大 2012）质量为 $m=5.6$ g 的子弹 A，以 $v_0=501$ m/s 的速率水平地射入一静止在水平面上的质量为 M=2 kg 的木块 B 内，A 射入 B 后，B 向前移动了 S=50 cm 后而停止，求：

（1）B 与水平面间的摩擦系数．（2）木块对子弹所作的功 W_1.

（3）子弹对木块所作的功 W_2．（4）W_1 与 W_2 的大小是否相等？为什么？

3.14（华科 2012）如图所示，长为 L 的均匀直杆其质量为 3m，上端用光滑水平轴吊起而静止下垂。今有一质量为 m 的子弹沿水平方向射入杆的下端且留在杆内，并使杆摆动。若杆的最大摆角$\theta=60°$，试求：

（1）子弹入射前的速率v；（2）在最大摆角处，杆转动的角加速度。

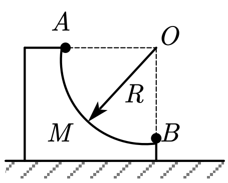


习题 3.14 图

3.15（上交 2013）如图所示，光滑水平面上有一质量为 M，半径为 R 的 $\frac{1}{4}$ 圆弧形物块处于静止状态，圆弧表面光滑，另有一质量为 m 的小球从其顶端 A 由静止开始沿圆弧自由滑到底端 B（B 位于圆弧圆心的正下方）。求：

（1）小球滑到底端 B 时小球与圆弧形物块相对地面的速度的大小；

（2）小球滑到底端 B 时小球对圆弧形物块的压力；



习题 3.15 图

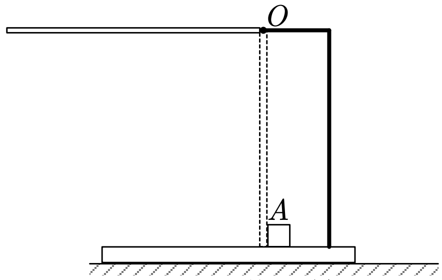
（3）在地面参考系中，小球从 A 沿圆弧自由滑到底端 B 过程中，圆弧形物块的支撑力对小球所做的功。

3.16（上交 2014）如图所示，刚性支架固连在底面积足够大的木板上，木板放在水平桌面上，其与桌面间的摩擦系数为μ，木板与支架的总质量为 M。长度为l质量为 m 的匀质刚性细杆可以绕支架顶端轴 O 自由旋转。现将细杆拉到水平位置后静止释放，在细杆下摆过程中假设木板不移动，当细杆摆至竖直位置时，与固连在木板上的不计质量的小木块 A 发生完全弹性碰撞。求：

（1）细杆摆至竖直位置时角速度的大小；

（2）释放细杆瞬间地面的压力；

（3）碰撞后系统相对地面移动的最大距离。



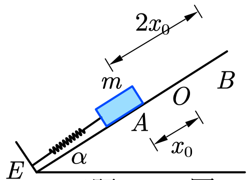
习题 3.16 图

提高篇

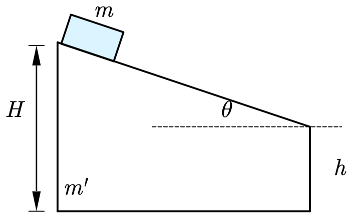
3.17（华科 2011）力$\vec{F} = x\vec{i} + 3y\vec{j}$（SI）作用于运动方程为$x = 2t$（SI）的作直线运动的物体上，则 0~1s内力$\vec{F}$做的功为 A=______$J$

3.18（清华习题）如图所示，轻弹簧的一端固定在倾角为α的光滑斜面的底端 E，另一端与质量为m的物体 C 相连，O 点为弹簧原长处，A 点为物体 C 的平衡位置，x_0为弹簧被压缩的长度．如果在一外力作用下，物体由 A 点沿斜面向上缓慢移动了 $2x_0$ 距离而到达 B 点，则该外力所作功为__________________。

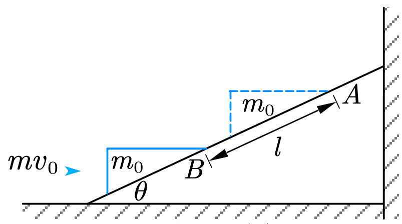
3.19（西交习题）如图所示，一个质量为m'的劈形物体置于水平面上，另一个质量为m的物体自斜面顶端由静止开始下滑，接触面间的摩擦均忽略不计，图中H、h、θ均已知，试求当m将要离开m'时，m相对于m'的速度。



习题 3.18 图



习题 3.19 图



习题 3.20 图

3.20（武大习题）如图所示，质量为m_0的木块在光滑的固定斜面上，由 A 点从静止开始下滑，当经过路程l运动到 B 点时，木块被一颗水平飞来的子弹射中，子弹立即陷入木块内。设子弹的质量为m，速度为 v，求子弹射入木块后，子弹与木块的共同速度。

3.21（武大 2014）水面上有一质量为 M 的木船，开始时静止不动，从岸上以水平速度v_0将一质量为 m 的砂袋抛到船上，然后二者一起运动．设运动过程中船受的阻力与速率成正比，比例系数为 k，砂袋与船的作用时间极短，试求：

（1）砂袋抛到船上后，船和砂袋一起开始运动的速率；

（2）砂袋与木船从开始一起运动直到静止时所走过的距离。

3.22*质量分别为m_1,m_2的两个小球，系在长为 l 的伸长的轻绳两端，放置在光滑的水平面上。初始时绳是拉直的。在桌面上另有一个质量为m_3的光滑小球，以垂直于绳的速度 u 与小球m_1对心碰撞。若恢复系数为 e，求碰后瞬时绳子中的张力。

【知识点三参考答案】

基础篇

3.1【正解】A

【解析】$W=\int_0^{10}(4+5x)dx=290\ \text{J}$

3.2【正解】D

【解析】$P=mgv\sin\ \theta=mg\sqrt{2gh}\sin\ \theta$

3.3【正解】D

【解析】动量守恒：$m_Av_A=m_Bv_B$，所以$\dfrac{E_{KA}}{E_{KB}}=\dfrac{\frac{1}{2}m_Av_A{}^2}{\frac{1}{2}m_Bv_B{}^2}=\dfrac{v_A}{v_B}=\dfrac{m_B}{m_A}=2$

3.4【正解】A

【解析】在 B 处：$N-mg=\dfrac{mv^2}{R}$，从 A 到 B：$mgR-W=\dfrac{1}{2}mv^2$，

所以：$W=mgR-\dfrac{1}{2}mv^2=\dfrac{3}{2}mgR-\dfrac{1}{2}NR$，因为摩擦力做的是负功，所以选 A。

3.5【正解】C

【解析】根据动量定理：冲量相同，则动量增量相同。

3.6【正解】B

【解析】小球在水平方向不受力，所以没有动量改变量。而另外两个物体之间根据动量守恒得出 B 正确。

3.7【正解】$\dfrac{m^2g^2}{2k}$

【解析】此时对小球：$mg=kx$；所以$W=\varDelta E_p=\dfrac{1}{2}kx^2=\dfrac{m^2g^2}{2k}$。

3.8【正解】$-\dfrac{1}{2}mgh$

【解析】电梯对小球作用力为$\dfrac{1}{2}mg$，方向向上，所以$W=-\dfrac{1}{2}mgh$。

3.9【正解】$vt-\dfrac{v^2}{2g}$

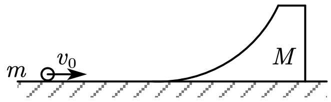
【解析】根据动能定理：$Pt-mgh=\dfrac{1}{2}mv^2$，再根据能量守恒：$P=mgv$，联立可得：$h=vt-\dfrac{v^2}{2g}$。

3.10【正解】$mg\dfrac{2\pi}{\omega}$

【解析】拉力求不出，只能换个思路：整个过程动量变化量为 0，而产生动量的只有重力和拉力，所以重力和拉力的冲量大小相等，等于$mg\dfrac{2\pi}{\omega}$。

3.11【正解】$\dfrac{m}{m+M}v_0$　　$\dfrac{|M-m|}{M+m}v_0$

【解析】此时两者速度相等，根据动量守恒$mv_0=(m+M)v\Rightarrow v=\dfrac{m}{m+M}v_0$；此时根据动量守恒和能量守恒：$\begin{cases}mv_0=mv_1+Mv_2\\ \dfrac{1}{2}mv_0{}^2=\dfrac{1}{2}mv_1{}^2+\dfrac{1}{2}Mv_2{}^2\end{cases}$，所以$v_1=\dfrac{|M-m|}{M+m}v_0$（这其实相当于完成了一次碰撞）。



习题 3.11 图

3.12【解析】（1）由速度和加速度的定义得：$v=\dfrac{dx}{dt}=2bt$，$a=\dfrac{dv}{dt}=2b$

（2）因为$v=2bt$，所以$f=-kv^2=-2kbx$，$W=\int_0^1 fdx=\int_0^1 -2kbxdx=-kb$。

3.13【解析】（1）射入 B 后，根据动量守恒$mv_0=(M+m)v\Rightarrow v=1.4\ m/s$，

根据动能定理：$\mu(M+m)gS=\dfrac{1}{2}(M+m)v^2\Rightarrow\mu=0.2$

（2）$W_1=\dfrac{1}{2}m(v^2-v_0{}^2)=-702.8\ \mathrm{J}$

（3）$W_2=\dfrac{1}{2}Mv^2=1.96\ \mathrm{J}$

（4）两者大小不相等，因为有很大一部分能量通过摩擦产生了内能。

3.14【解析】（1）射入后，到达到最大角度，根据能量守恒：

$$mgL(1-\cos 60°)+3mg\cdot\frac{1}{2}L(1-\cos 60°)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\cdot 3mL^2+mL^2\right)\omega^2$$

射入前后根据角动量守恒：$mvL=\left(\dfrac{1}{3}\cdot 3mL^2+mL^2\right)\omega$

所以：$v=\sqrt{5gL}$

（2）受力分析，所受力矩为：$M=3mg\cdot\dfrac{1}{2}L\cdot\sin 60°+mgL\sin 60°$

由转动定理：$M=J\alpha\ \Rightarrow\ \alpha=\dfrac{5\sqrt{3}g}{8L}$

3.15【解析】（1）设小球与圆弧形物块相对地面的速度的大小分别为v_1,v_2，

根据能量守恒和动量守恒：$\begin{cases}mgR=\dfrac{1}{2}mv_1{}^2+\dfrac{1}{2}Mv_2{}^2\\ mv_1=Mv_2\end{cases}$，所以$\begin{cases}v_1=\sqrt{\dfrac{2MgR}{M+m}}\\ v_2=\sqrt{\dfrac{2m^2gR}{Mm+M^2}}\end{cases}$

（2）此时圆弧形物块匀速运动，是惯性系，所以在圆弧形物块参考系中：

$N-mg=\dfrac{m(v_1+v_2)^2}{R}$，所以$N=3mg+\dfrac{2m^2g}{M}$

（3）对小球：$mgR+W=\dfrac{1}{2}mv_1{}^2-0\Rightarrow W=-\dfrac{m^2}{M+m}gR$

3.16【解析】（1）根据动能定理：$\frac{1}{2}mgl=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}ml^2\omega^2 \Rightarrow \omega=\sqrt{\frac{3g}{l}}$

（2）此时细杆的加速度：$\frac{1}{2}mgl=\frac{1}{3}ml^2\alpha \Rightarrow \alpha=\frac{3g}{2l}$，杆的质心的加速度：$a=\alpha\cdot\frac{1}{2}l=\frac{3}{4}g$

根据质心运动定理：$(M+m)g-N=ma \Rightarrow N=\frac{1}{4}mg+Mg$

（3）系统水平方向动量守恒 $m\frac{1}{2}l\omega=(m+M)V \Rightarrow V=\frac{m}{2(m+M)}\sqrt{3gl}$

动能定理：$-(m+M)g\mu x_{max}=0-\frac{1}{2}(m+M)V^2 \Rightarrow x_{max}=\frac{3l}{8\mu}\frac{m^2}{(m+M)^2}$

提高篇

3.17【正解】2

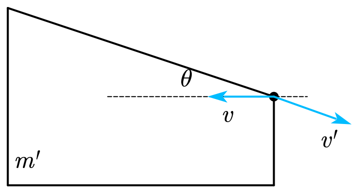
【解析】显然 y=0，所以$F=x\vec{i}=2t\vec{i}$，所以$\int_0^1 Fdx=\int_0^1 2t\cdot 2dt=2\ J$。

3.18【正解】$2mgx_0\sin\alpha$

【解析】此过程中弹簧的弹性势能没有变化，弹力做功为 0，
所以外力做功全部增加了物体的重力势能：$W=2mgx_0\sin\alpha$

3.19【解析】因为忽略一切摩擦，所以劈形物体会向左移动。设此时其移动的速度为v,相对速度为v'，则 m 的绝对速度如下图：

对 m：$\begin{cases} v_x=v'\cos\theta-v \\ v_y=v'\sin\theta \end{cases}$



习题3.19图

整体动量守恒，能量守恒

$$\begin{cases} mg(H-h)=\frac{1}{2}m'v^2+\frac{1}{2}m(v_x{}^2+v_y{}^2) \\ m'v=mv_x \end{cases}$$

联立可解得：$v'=\sqrt{\frac{2g(H-h)(m'+m)}{m'+m\sin^2\theta}}$

3.20【解析】下降过程：$m_0gl\sin\theta=\frac{1}{2}m_0v^2-0 \Rightarrow v=\sqrt{2gl\sin\theta}$，分解这个速度：

$v_x=v\cos\theta=\sqrt{2gl\sin\theta}\cos\theta, v_y=\sqrt{2gl\sin\theta}\sin\theta$，子弹和木块发生碰撞，只有 x 方向产生作用，根据水平方向动量守恒：

$$mv_0-m_0v_x=(m+m_0)v' \Rightarrow v'=\frac{mv_0-m_0\sqrt{2gl\sin\theta}\cos\theta}{m+m_0}$$

然后两者有垂直于斜面的速度，这个分速度将会被斜面给的冲量所抵消，只剩下沿斜面的速度：

$$v'\cos\theta-v_y\sin\theta=\frac{mv_0-m_0\sqrt{2gl\sin\theta}\cos\theta}{m_0+m}\cos\theta-\sqrt{2gl\sin\theta}\sin\theta\cdot\sin\theta$$

$$=\frac{mv_0\cos\theta-m_0\sqrt{2gl\sin\theta}-m\sqrt{2gl\sin\theta}\sin^2\theta}{m+m_0}$$

3.21【解析】（1）根据动量守恒：$mv_0=(M+m)v \Rightarrow v=\frac{mv_0}{M+m}$

（2）根据题意：$f=-kv=(M+m)\dfrac{dv}{dt}\Rightarrow -kvdt=(M+m)dv$，

所以：$-kdx=(M+m)dv\Rightarrow -kx=-mv_0\Rightarrow x=\dfrac{mv_0}{k}$

3.22*【解析】碰撞过程：$\begin{cases} m_3u=m_1v_1+m_3v_3 \\ eu=v_1-v_3 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} v_1=\dfrac{m_3u+em_3u}{m_1+m_3} \\ v_3=\dfrac{m_3u-em_1u}{m_1+m_3} \end{cases}$

设张力为 T，以 2 物体为参考系（非惯性系）：$T=m_2a$

对m_1:$T+m_1a=\dfrac{m_1{v_1}^2}{l}$，所以：$T=\dfrac{m_1m_2{m_3}^2u^2}{l(m_1+m_3)^2(m_1+m_2)}(1+e)^2$