九章算法班2022版直播第9章

最难的算法

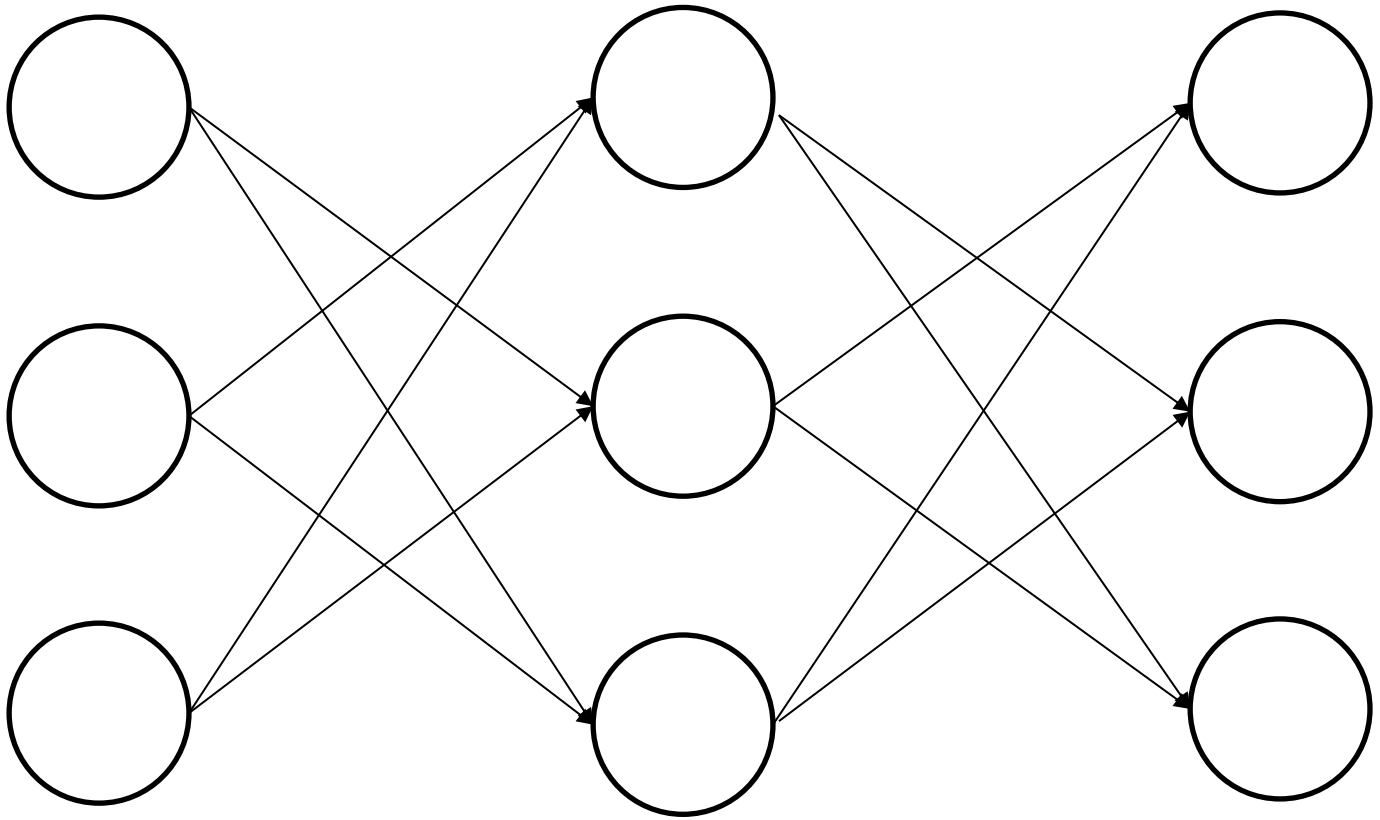
—— 动态规划 Dynamic Programing

主讲：夏天

动态规划的核心思想

由大化小

动态规划的算法思想：大规模问题的依赖于小规模问题的计算结果



动态规划的两种实现方式

1. **递归方式**，即记忆化搜索
2. **迭代方式**，即多重循环

动态规划为什么难？

动态规划是一种算法范式（算法思想，Algorithmic Paradigm），而不是很具体的算法（Algorithm）

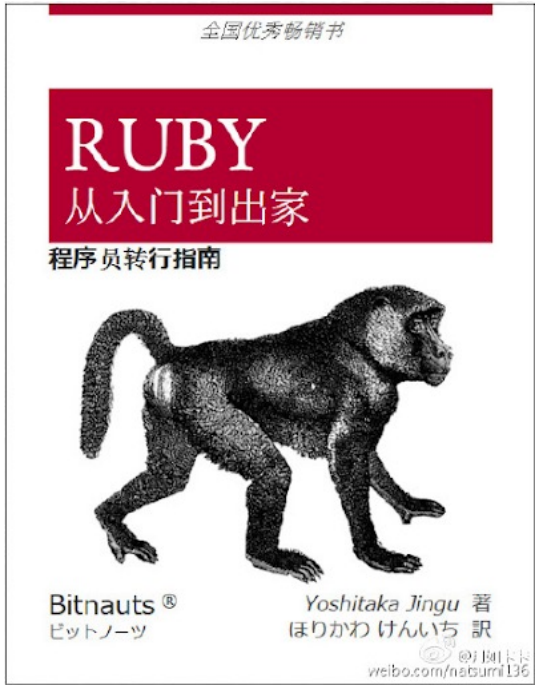
每个子类型都是一个新的算法

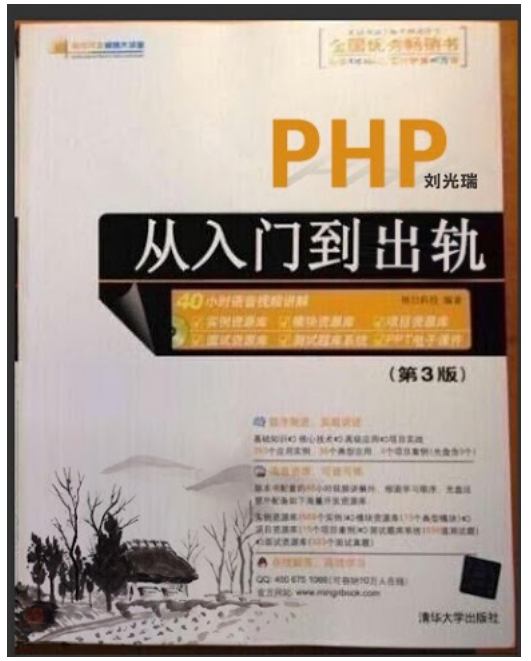
学习周期很长，一月入门，两月上手

我可以放弃么？

北美求职者：如果你不想去Google等某些炙手可热的公司，可以

国内求职者：如果你不去大厂，可以（国内大厂面试题超过 50% 的题都是动态规划）





三种适用动规的场景

动态规划的三种适用场景	
求可行性	• dp[] 的值是 true / false • dp[大问题] = dp[小问题1] or dp[小问题2] or ... • 代码通常用 for 小问题 if dp[小问题] == true then break 的形式实现
求方案数	• dp[] 的值的类型是方案数 • dp[大问题] = ∑(dp[小问题1], dp[小问题2], ...)
求最值	• dp[] 的值的类型是最优值的类型 • dp[大问题] = max{dp[小问题1], dp[小问题2], ...} • dp[大问题] = min{dp[小问题1], dp[小问题2], ...}

三种不适用 DP 的场景

求所有的具体方案

- http://www.lintcode.com/problem/palindrome-partitioning/
- 只求出一个具体方案还是可以用 DP 来做的（下节课）
- 该判断标准成功率 99%

输入数据是无序的

- http://www.lintcode.com/problem/longest-consecutive-sequence/
- 背包类动态规划不适用此判断条件，除去背包问题后方向：逐行生成数据
- 该判断标准成功率 60-70%，有一些题可以先排序之后按序处理

暴力算法的复杂度已经是多项式级别

- http://www.lintcode.com/problem/largest-rectangle-in-histogram/
- 动态规划擅长与优化指数级别复杂度(2^n,n!)到多项式级别复杂度(n^2,n^3)
- 不擅长优化n^3到n^2
- 该判断标准成功率 80%

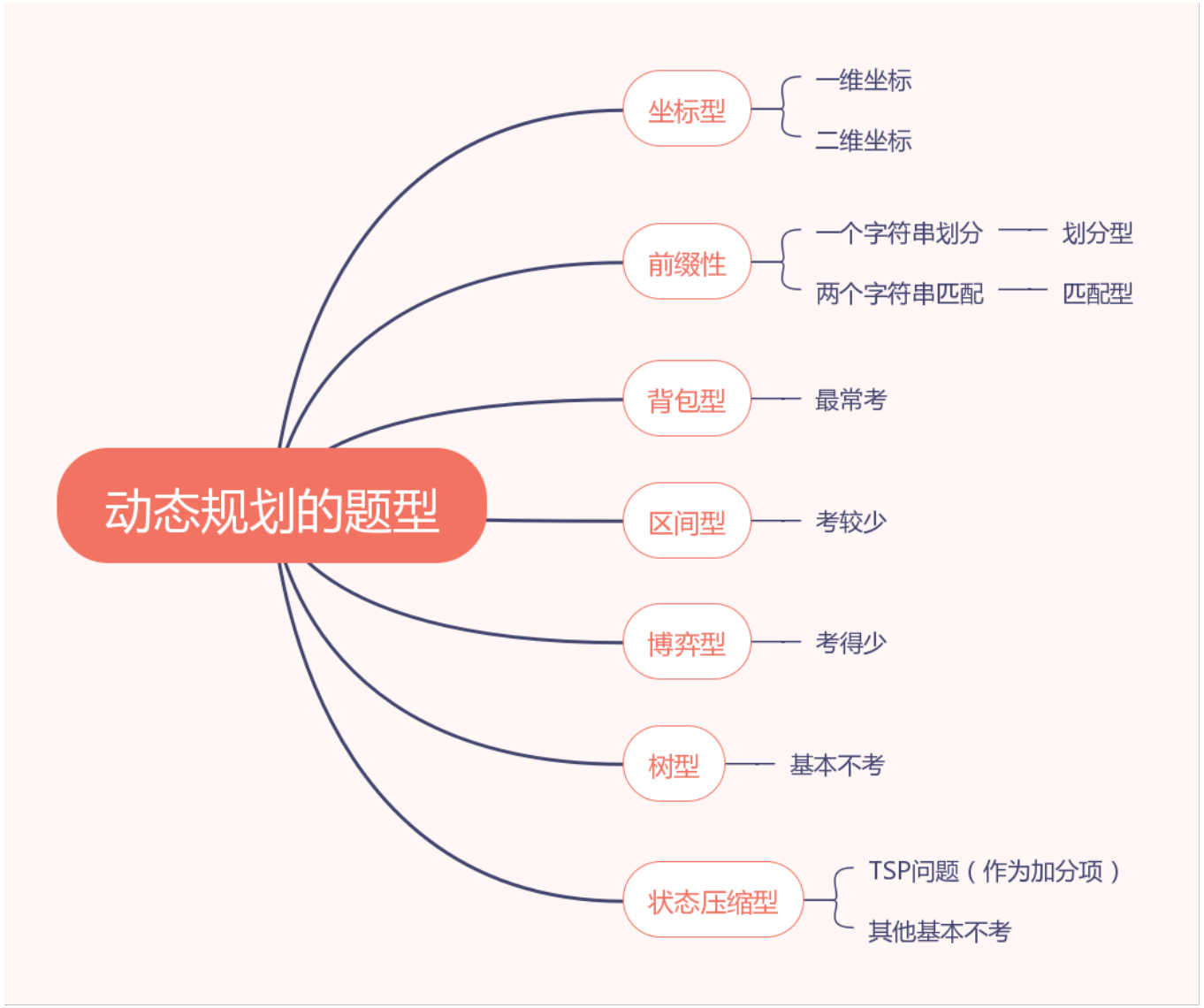
则极不可能使用动态规划求解

则极不可能使用动态规划求解

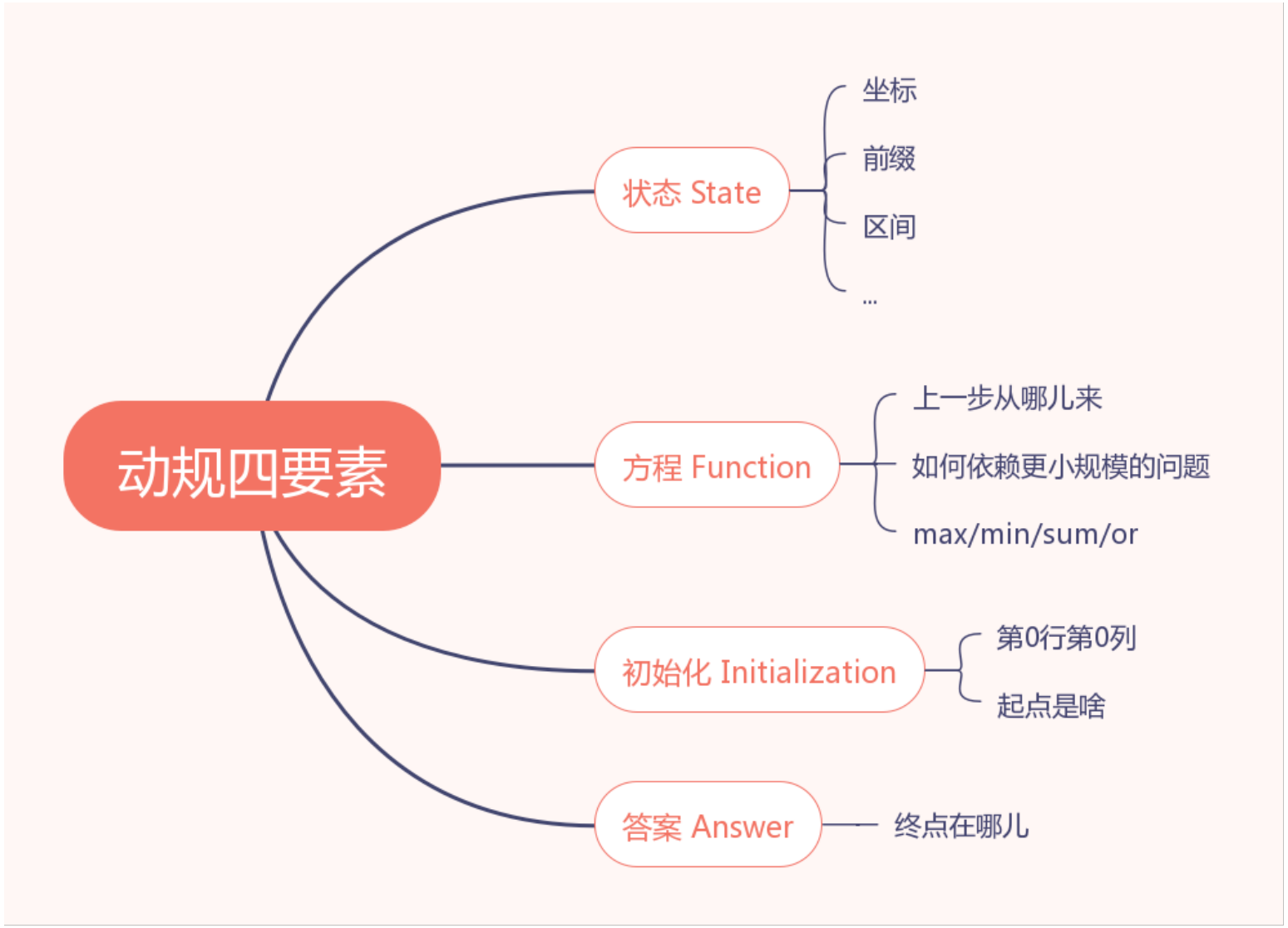
动态规划的解题步骤

第一步	判断是否能够使用动态规划算法
第二步	判断动态规划的题型
第三步	使用动规四要素进行解题

动态规划题型分类



动规四要素



动态规划的空间优化技巧

滚动数组 Rolling Array

滚动数组 Rolling Array

如果状态依赖关系只在相邻的几层之间

则可以使用滚动数组进行优化

滚动数组可以让空间复杂度降维

109 Triangle 数字三角形

Given a triangle, find the minimum path sum from top to bottom. Each step you may move to adjacent numbers on the row below.

给定一个数字三角形，找到从顶部到底部的最小路径和。每一步可以移动到下面一行的相邻数字上。

输入：

```
triangle = [
     [2],
    [3, 4],
   [6, 5, 7],
  [4, 1, 8, 3]
]
```

实际输入数据

```
triangle = [
[2],
[3, 4],
[6, 5, 7],
[4, 1, 8, 3]
]
```

输出：

11

解释：

从顶到底部的最小路径和为11 = 2 + 3 + 5 + 1 = 11。

具有有序性，求最优解，有可能使用动态规划

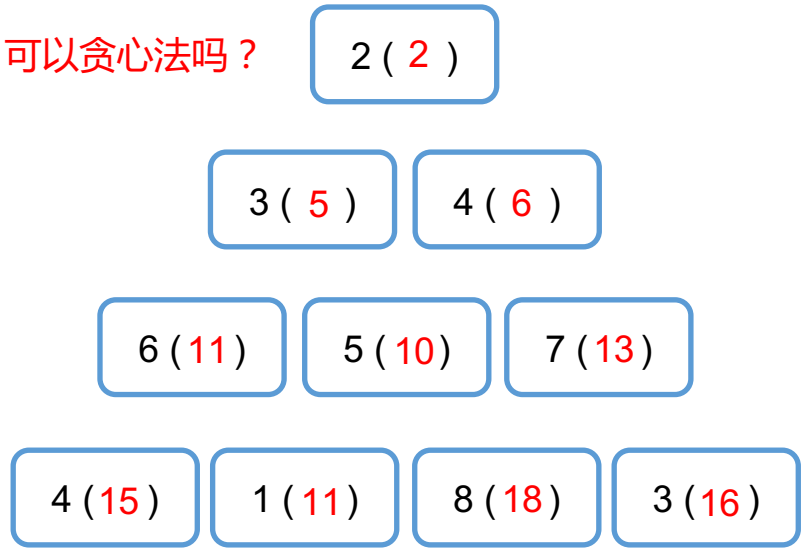
坐标型动态规划

状态的转移需要考虑：从哪儿走到 (i, j) 这个坐标的

思路分析 & 代码解析

dp[i][j]代表以(0, 0)为起点，以(i, j)为终点的最小路径和

可以贪心法吗？



在行上进行滚动

非滚动 → 行 % 2 → 滚动

index	index%2
0	0
1	1
2	0
3	1

2 (2)			
3 (5)	4 (6)		
6 (11)	5 (10)	7 (13)	
4 (15)	1 (11)	8 (18)	3 (16)

空间复杂度： O(N*N) = O(N^2)

滚动数组

2	10	13	
5	6	18	16

空间复杂度：O(2*N) = O(N)

时间复杂度： O(N^2)，两层嵌套for循环

```java
public int minimumTotal(int[][] triangle) {
    // 特殊情况处理
    if (triangle == null || triangle.length == 0 ||
        triangle[0] == null || triangle[0].length == 0) {
        return -1;
    }

    // 三角形边长为n，存储在n行n列矩阵
    int n = triangle.length;

    // 状态 (State) : dp[x][y] = 从三角形顶点(0, 0)到(x, y)的最小路径和
    int[][] dp = new int[2][n];

    // 初始化 (Initialization)
    // dp[0][0]点的最短路径和为三角形中(0, 0)点的值
    dp[0][0] = triangle[0][0];

    // 自顶向下的方式的多重循环动态规划
    for (int i = 1; i < n; i++) {
        // 初始化本行的最左点与最右点
        dp[i % 2][0] = dp[(i - 1) % 2][0] + triangle[i][0];
        dp[i % 2][i] = dp[(i - 1) % 2][i - 1] + triangle[i][i];
        for (int j = 1; j < i; j++) {
            // 方程 (Function):
            // dp[i][j] = min(dp[i-1][j - 1], dp[i-1][j]) + triangle[i][j]
            // 通过上层左右两点推得当前点的最小路径
            dp[i % 2][j] = Math.min(dp[(i - 1) % 2][j - 1], dp[(i - 1) % 2][j])
            + triangle[i][j];
        }
    }

    // 答案 (Answer) : 三角形底层任意一个节点都有可能是最小路径的终点
    // 遍历所有路径终点，返回最小值
    int best = dp[(n - 1) % 2][0];
    for (int j = 1; j < n; j++) {
        best = Math.min(best, dp[(n - 1) % 2][j]);
    }
    return best;
}
```

思路分析 & 代码解析


```python
    def minimumTotal(self, triangle):
        # 特殊情况处理
        if not triangle or not triangle[0]:
            return -1

        # 三角形边长为n，存储在n行n列矩阵
        n = len(triangle)

        # 状态（State）：dp[x][y] = 从三角形顶点(0, 0)到(x, y)的最小路径和
        dp = [[0] * n, [0] * n]

        # 初始化（Initialization）
        # dp[0][0]点的最短路径和为三角形中(0, 0)点的值
        dp[0][0] = triangle[0][0]

        # 自顶向下的方式的多重循环动态规划
        for i in range(1, n):
            # 初始化本行的最左点与最右点
            dp[i % 2][0] = dp[(i - 1) % 2][0] + triangle[i][0]
            dp[i % 2][i] = dp[(i - 1) % 2][i - 1] + triangle[i][i]
            # 方程（Function）:
            # dp[i][j] = min(dp[i-1][j - 1], dp[i-1][j]) + triangle[i][j]
            # 通过上层左右两点推得当前点的最小路径
            for j in range(1, i):
                dp[i % 2][j] = min(dp[(i - 1) % 2][j], dp[(i - 1) % 2][j - 1]) + triangle[i][j]

        # 答案（Answer）：三角形底层行任意一个节点都有可能是最小路径的终点
        # 遍历所有路径终点，返回最小值
        return min(dp[(n - 1) % 2])
```

朝哪个方向滚？

方向：逐行生成数据

当前格子 = 上面格子 + 左面格子，dp[i][j] = dp[i - 1][j] + dp[i][j - 1]

0	1	2	3
0	1	3	6

方向：逐行生成数据

当前格子 = 上面格子 + 右面格子，dp[i][j] = dp[i - 1][j] + dp[i][j + 1]

0	1	2	3
6	6	5	3

方向：逐列生成数据

当前格子 = 上面格子 + 左面格子，dp[i][j] = dp[i - 1][j] + dp[i][j - 1]

0	0
1	1
2	3
3	6

方向：逐列生成数据

当前格子 = 下面格子 + 左面格子，dp[i][j] = dp[i + 1][j] + dp[i][j - 1]

0	6
1	6
2	5
3	3

套路

逐行（列）生成数据，就在行（列）上滚动

逐行滚动可能从左至右，或者从右至左；逐列滚动可能从上至下，或者从下至上

从非滚动变成滚动，只需要：在行（列）上滚动，行（列）index % 滚动行（列）数

可以继续压缩吗？

方向：逐行生成数据

当前格子 = 上面格子 + 左面格子，dp[i][j] = dp[i - 1][j] + dp[i][j - 1]

0	1	2	3
0	1	3	6

可以两行变一行吗？

0	1	2	3
0	1	3	6

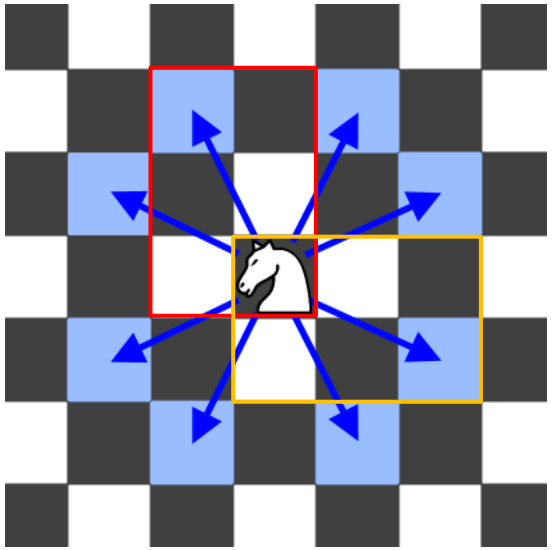
0	1	3	6

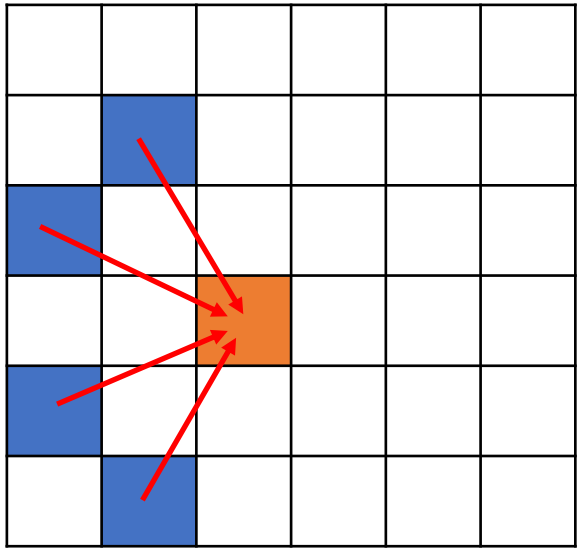
可以行和列都滚动吗？

630 Knight Shortest Path II

Given a knight in a chessboard n * m (a binary matrix with 0 as empty and 1 as barrier). the knight initialze position is (0, 0) and he wants to reach position (n - 1, m - 1), Knight can only be from left to right. Find the shortest path to the destination position, return the length of the route. Return -1 if knight can not reach.

在一个 n * m 的棋盘中(二维矩阵中 0 表示空 1 表示有障碍物)，骑士的初始位置是 (0, 0) ，他想要达到 (n - 1, m - 1) 这个位置，骑士只能从左边走到右边。找出骑士到目标位置所需要走的最短路径并返回其长度，如果骑士无法达到则返回 -1.





行滚动还是列滚动？

行滚动需要模几？

输入:

[[0,0,0,0],[0,0,0,0],[0,0,0,0]]

输出:

3

解释:

[0,0]->[2,1]->[0,2]->[2,3]

输入:

[[0,1,0],[0,0,1],[0,0,0]]

输出:

-1

具有有序性，求最优解，有可能使用动态规划

坐标型动态规划

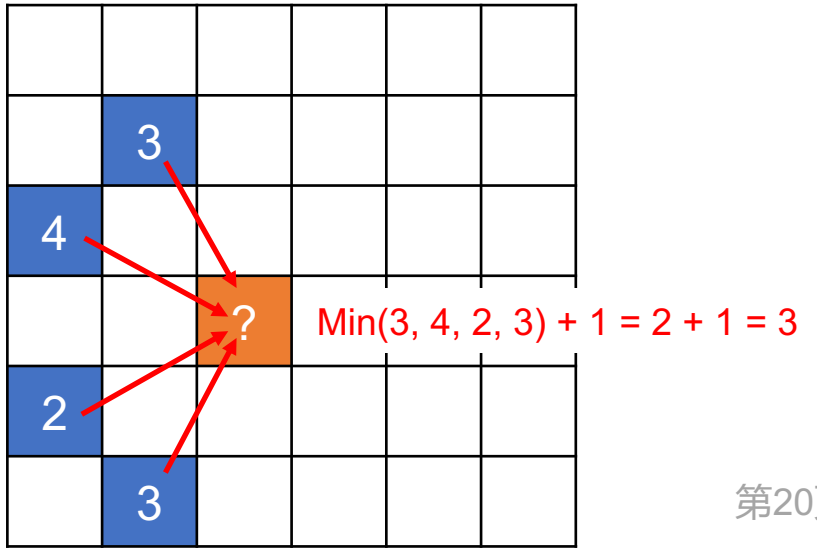
状态的转移需要考虑：从哪儿走到 (i, j) 这个坐标的

思路分析 & 代码解析

求从左上角到右下角的最短路径

0	max	2	max
max	max	1	2
max	1	max	3

```python
# 四个"之前点"的偏移量
# 可以看到，所有deltaY都是负数，保证从左到右的顺序
DIRECTIONS = [
    (-1, -2),
    (1, -2),
    (-2, -1),
    (2, -1),
]

class Solution:
    # @param {boolean[][]} grid a chessboard included 0 and 1
    # @return {int} the shortest path
    def shortestPath2(self, grid):
        # 特殊情况处理
        if not grid or not grid[0]:
            return -1

        # 棋盘的行数和列数
        n, m = len(grid), len(grid[0])

        # 状态 (State) : dp[i][j % 3] 代表从起点走到 i,j 的最短路径长度
        # 初始化 (Initialization)
        # 第0列除 (0, 0) 点，其他点均不可达，第最短路径初始值为最大值
        dp = [[float('inf')] * 3 for _ in range(n)]

        # (0,0)的最短路径为0
        dp[0][0] = 0

        # 方程 (Function): dp[i][j % 3] = min(dp[x][y % 3]) + 1, (x,y)是i,j的上一步
        # 因为是从左到右走的，所以外层循环是列，内层循环是行
        for j in range(1, m):
            for i in range(n):
                dp[i][j % 3] = float('inf')
                # 1为障碍物，不可到达
                if grid[i][j]:
                    continue

                # 从四个方向上，遍历 (i, j) 的上一步
                for delta_x, delta_y in DIRECTIONS:
                    x, y = i + delta_x, j + delta_y
                    # 如果(x, y)在界内，则状态转移推导，在所有的路径中选择最小值
                    if 0 <= x < n and 0 <= y < m:
                        dp[i][j] = min(dp[i][j], dp[x][y] + 1)

        # 答案 (Answer) : dp[n - 1][(m - 1) % 3]
        # 如果右下角可以到达，返回右下角
        if dp[n - 1][(m - 1)] == float('inf'):
            return -1
        return dp[n - 1][(m - 1)]
```

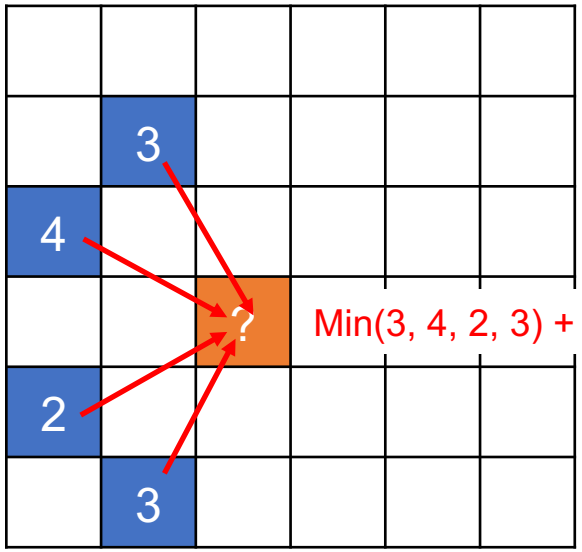


逐列生成数据，就在列上滚动

从非滚动变成滚动，只需要：在列上滚动，列index % 滚动行（列）数

思路分析 & 代码解析

0	max	2	max
max	max	1	2
max	1	max	3



Min(3, 4, 2, 3) + 1 = 2 + 1 = 3

```java
public class Solution {
    // 四个"之前点"的偏移量
    // 可以看到，所有deltaY都是负数，保证从左到右的顺序
    public static int[] deltaX = {-2, -1, 1, 2};
    public static int[] deltaY = {-1, -2, -2, -1};

    /**
     * @param grid: a chessboard included 0 and 1
     * @return: the shortest path
     */
    public int shortestPath2(boolean[][] grid) {
        // 特殊情况处理
        if (grid == null || grid.length == 0) {
            return -1;
        }
        if (grid[0] == null || grid[0].length == 0) {
            return -1;
        }

        // 棋盘的行数与列数
        int n = grid.length, m = grid[0].length;

        // 状态 (State) : dp[i][j % 3] 代表从起点走到 i,j 的最短路径长度
        int[][] dp = new int[n][3];

        // 初始化 (Initialization)
        // 第0列除 (0, 0) 点，其他点均不可达，第最短路径初始值为最大值
        for (int i = 1; i < n; i++) {
            dp[i][0] = Integer.MAX_VALUE;
        }
        // (0,0)的最短路径为0
        dp[0][0] = 0;

        // 方程 (Function): dp[i][j % 3] = min(dp[x][y % 3]) + 1
        // (x,y) 是 i,j 的上一步
        // 因为是从左到右走的，所以外层循环是列，内层循环是行
        for (int j = 1; j < m; j++) {
            for (int i = 0; i < n; i++) {
                dp[i][j % 3] = Integer.MAX_VALUE;
                // 1为障碍物，不可到达
                if (grid[i][j]) {
                    continue;
                }
                // 从四个方向上，遍历 (i, j) 的上一步
                for (int direction = 0; direction < 4; direction++) {
                    // 得到上一步坐标
                    int x = i + deltaX[direction];
                    int y = j + deltaY[direction];
                    // 如果出界，continue
                    if (x < 0 || x >= n || y < 0 || y >= m) {
                        continue;
                    }
                    // 如果 (x, y) 路径为最大值，不可到达，continue
                    // 为什么python没有这部分代码？因为python会自动处理数字溢出
                    if (dp[x][y % 3] == Integer.MAX_VALUE) {
                        continue;
                    }
                    // 在所有的路径中选择最小值
                    dp[i][j % 3] = Math.min(dp[i][j % 3], dp[x][y % 3] + 1);
                }
            }
        }

        // 答案 (Answer) : dp[n - 1][(m - 1) % 3]
        // 如果右下角可以到达，返回右下角
        if (dp[n - 1][(m - 1) % 3] == Integer.MAX_VALUE) {
            return -1;
        }

        return dp[n - 1][(m - 1) % 3];
    }
```

滚动数组小结

滚动数组滚动的是第一重循环的变量，而不是第二重甚至第三重

外层循环决定了是逐行还是逐列。如果外层循环是列，就是逐列；如果外层循环是行，就是逐行。

滚动数组也只能滚一个维度，不能两个维度一起滚动

逐行（列）生成数据，就在行（列）上滚动

逐行滚动可能从左至右，或者从右至左；逐列滚动可能从上至下，或者从下至上

从非滚动变成滚动，只需要：

1. 取模
   - 在行上滚动，行index % 滚动行数
   - 在列上滚动，列index % 滚动列数
2. 注意通过初始化清除掉历史数据

课间休息

76 Longest Increasing Subsequence 最长上升子序列

Given a sequence of integers, find the longest increasing subsequence (LIS).

You code should return the length of the LIS.

给定一个整数序列，找到最长上升子序列（LIS），返回LIS的长度。

要求时间复杂度为O(n^2)或者 O(nlogn)

输入:

nums = [5,4,1,2,3]

输出:

3

解释:

LIS 是 [1,2,3]

输入:

[4,2,4,5,3,7]

输出:

4

解释:

LIS 是 [2,4,5,7]

具有有序性，求最优解，有可能使用动态规划

坐标型动态规划

状态的转移需要考虑：从哪儿走到 (i, j) 这个坐标的

思路分析 & 代码解析

下标	0	1	2	3	4	5
数值	4	2	4	5	3	7
dp	1	1	2	3	2	4

dp[2] = max(dp[1]) + 1 = 1 + 1 = 2

dp[3] = max(dp[0], dp[1], dp[2]) + 1 = 2 + 1 = 3

dp[4] = max(dp[1]) + 1 = 1 + 1 = 2

dp[5] = max(dp[0], dp[1], dp[2], dp[3], dp[4]) + 1 = 3 + 1 = 4

```python
def longestIncreasingSubsequence(self, nums):
    # 特殊情况处理
    if nums is None or not nums:
        return 0

    # 状态 (State) : dp[i] 表示以第i个数结尾的LIS
    # 初始化 (Initialization) : dp[0..n-1] = 1
    # 所有点的LIS初始长度为1，仅包含自身
    dp = [1] * len(nums)

    # 方程 (Function): max{dp[j] + 1}, j < i && nums[j] < nums[i]
    # 如果j在i的前面，并且nums[j] < nums[i]，那么j点和点可以拼凑成上升序列
    # 在所有的上升序列中找到最长的，就是从起点到i点的最长子序列
    for i in range(len(nums)):
        for j in range(i):
            if nums[j] < nums[i]:
                dp[i] = max(dp[i], dp[j] + 1)

    # 答案 (Answer) : max{dp[0..n-1]}
    # 最长子序列可能以任意一点为终点，
    # 在所有Increasing Subsequence中寻找最大值
    return max(dp)
```

```java
public int longestIncreasingSubsequence(int[] nums) {
    // 特殊情况处理
    if (nums == null || nums.length == 0) {
        return 0;
    }

    // 数列长度
    int n = nums.length;

    // 状态 (State) : dp[i] 表示以第i个数结尾的LIS
    int[] dp = new int[n];

    // 初始化 (Initialization) : dp[0..n-1] = 1
    // 所有点的LIS初始长度为1，仅包含自身
    for (int i = 0; i < n; i++) {
        dp[i] = 1;
    }

    // 方程 (Function): max{dp[j] + 1}, j < i && nums[j] < nums[i]
    // 如果j在i的前面，并且nums[j] < nums[i]，那么j点和点可以拼凑成上升序列
    // 在所有的上升序列中找到最长的，就是从起点到i点的最长子序列
    for (int i = 0; i < n; i++) {
        for (int j = 0; j < i; j++) {
            if (nums[i] > nums[j]) {
                dp[i] = Math.max(dp[i], dp[j] + 1);
            }
        }
    }

    // 答案 (Answer) : max{dp[0..n-1]}
    // 最长子序列可能以任意一点为终点，
    // 在所有子序列中寻找最大值
    int max = 0;
    for (int end = 0; end < n; end++) {
        max = Math.max(max, dp[end]);
    }
    return max;
}
```

Follow up

如何获得Longest Increasing Subsequence的具体方案？

动态规划算法虽然不擅于找所有方案, 但是找最优值的具体方案还是可以的

倒推法

记录每个状态的最优值是从哪个前继状态来的

通常需要一个和状态数组同样维度的数组

prev[i] 记录使得 dp[i] 获得最优值的那个 j 是谁

j是方程 dp[i] = max{dp[j] + 1} 里的 j

思路分析 & 代码解析

下标	0	1	2	3	4	5
数值	4	2	4	5	3	7
dp	1	1	2	3	2	4
prev	-1	-1	1	2	1	3

dp[2] = max(dp[1]) + 1 = 1 + 1 = 2

dp[3] = max(dp[0], dp[1], dp[2]) + 1 = 2 + 1 = 3

dp[4] = max(dp[1]) + 1 = 1 + 1 = 2

dp[5] = max(dp[0], dp[1], dp[2], dp[3], dp[4]) + 1 = 3 + 1 = 4

```
6     def longestIncreasingSubsequence(self, nums):
7         # 特殊情况处理
8         if nums is None or not nums:
9             return 0
10
11        # 状态 (State) : dp[i]表示从最左开始，到第i个数结尾的LIS
12        # 初始化 (Initialization) : dp[0..n-1] = 1
13        # 所有点的LIS初始长度为1，仅包含自身
14        dp = [1] * len(nums)
15
16        # prev[i]代表dp[i]的最优值是从哪个dp[j]推导过来的
17        # (也就是i的前一个点是哪个点)
18        prev = [-1] * len(nums)
```

```
20        # 方程 (Function): max{dp[j] + 1}, j < i && nums[j] < nums[i]
21        # 如果j在i的前面，并且nums[j] < nums[i]，那么j点和点可以拼凑成上升序列
22        # 在所有的上升序列中找到最长的，就是从起点到i点的最长子序列
23        for i in range(len(nums)):
24            for j in range(i):
25                if nums[j] < nums[i] and dp[i] < dp[j] + 1:
26                    dp[i] = dp[j] + 1
27                    prev[i] = j
28
29        # 答案 (Answer) : max{dp[0..n-1]}
30        # 最长子序列可能以任意一点为终点，
31        # 在所有Increasing Subsequence中寻找最大值，并记录最大值所对应的下标last
32        longest, last = 0, -1
33        # 倒推最优解路径
34        for i in range(len(nums)):
35            if dp[i] > longest:
36                longest = dp[i]
37                last = i
38
39        path = []
40        # 如果last为-1，则没有先导点了，已经到了路径的最开端
41        while last != -1:
42            path.append(nums[last])
43            last = prev[last]
44        # 通过python的切片操作，翻转得到正序路径，打印输出
45        print(path[::-1])
46
47        return longest
```

思路分析 & 代码解析

下标	0	1	2	3	4	5
数值	4	2	4	5	3	7
dp	1	1	2	3	2	4
prev	-1	-1	1	2	1	3

```java
public int longestIncreasingSubsequence(int[] nums) {
    // 特殊情况处理
    if (nums == null || nums.length == 0) {
        return 0;
    }
    // 数列长度
    int n = nums.length;

    // 状态 (State) : dp[i] 表示从最左开始，到第i个数结尾的LIS
    // prev[i]代表dp[i]的最优值是从哪个dp[j]推导过来
    // 的 (也就是i的前一个点是哪个点)
    int[] prev = new int[n];
    int[] dp = new int[n];

    // 初始化 (Initialization) : dp[0..n-1] = 1
    // 所有点的LIS初始长度为1，仅包含自身
    // prev[i] = -1表示i的先导点未知
    for (int i = 0; i < n; i++) {
        dp[i] = 1;
        prev[i] = -1;
    }

    // 方程 (Function): max{dp[j] + 1}, j < i && nums[j] < nums[i]
    // 如果j在i的前面，并且nums[j] < nums[i]，那么j点和点可以拼凑成上升序列
    // 在所有的上升序列中找到最长的，就是从起点到i点的最长子序列
    for (int i = 0; i < n; i++) {
        for (int j = 0; j < i; j++) {
            if (nums[j] < nums[i] && dp[j] + 1 > dp[i]) {
                dp[i] = dp[j] + 1;
                // 在更新dp[i]时，同时把i的先导点更新为j
                prev[i] = j;
            }
        }
    }

    // 答案 (Answer) : max{dp[0..n-1]}
    // 最长子序列可能以任意一点为终点，
    // 在所有Increasing Subsequence中寻找最大值，并记录最大值所对应的下标last
    int longest = 0, last = -1;
    for (int i = 0; i < n; i++) {
        if (dp[i] > longest) {
            longest = dp[i];
            last = i;
        }
    }

    // 倒推最优解路径，打印输出
    ArrayList<Integer> path = new ArrayList();
    // 如果last为-1，则没有先导点了，已经到了路径的最开端
    while (last != -1) {
        path.add(nums[last]);
        last = prev[last];
    }
    // 翻转打印正序路径，用-作为分隔符
    for (int i = path.size() - 1; i >= 0; i--) {
        System.out.print(path.get(i) + "-");
    }

    return longest;
}
```

398 Longest Continuous Increasing Subsequence II 最长上升连续子序列 II

Given an integer matrix. Find the longest increasing continuous subsequence in this matrix and return the length of it.

The longest increasing continuous subsequence here can start at any position and go up/down/left/right.

给定一个整数矩阵. 找出矩阵中的最长连续上升子序列, 返回它的长度.

最长连续上升子序列可以从任意位置开始, 向上/下/左/右移动.

输入:

1	2	3	4	5
16	17	24	23	6
15	18	25	22	7
14	19	20	21	8
13	12	11	10	9

哪些点可以跟17相连？

具有有序性，求最优解，有可能使用动态规划

坐标型动态规划

状态的转移需要考虑：从哪儿走到 (i, j) 这个坐标的

输出:

25

解释:

1 -> 2 -> 3 -> 4 -> 5 -> ... -> 25 (由外向内螺旋)

思路分析 & 代码解析

1 (1)	4 (2)	5 (3)
6 (2)	2 (1)	8 (4)
3 (1)	7 (2)	9 (5)

```java
public int longestContinuousIncreasingSubsequence2(int[][] matrix) {
    // 特殊情况处理
    if (matrix == null || matrix.length == 0 ||
        matrix[0] == null || matrix[0].length == 0) {
        return 0;
    }

    // 矩阵的行数和列数
    int n = matrix.length, m = matrix[0].length;
    int[] dx = {0, 0, 1, -1};
    int[] dy = {1, -1, 0, 0};

    // 把矩阵内的每个点转化成[行，列，值]的形式，存入list
    List<List<Integer>> points = new ArrayList<>();
    for (int i = 0; i < n; i++) {
        for (int j = 0; j < m; j++) {
            points.add(Arrays.asList(i, j, matrix[i][j]));
        }
    }

    // 按照点的值，从小到大排序
    points.sort((p1, p2) -> Integer.compare(p1.get(2), p2.get(2)));

    // 状态 (State) ：dp[i][j] 表示以坐标(i,j)点结尾的LCIS的长度
    int[][] dp = new int[n][m];

    // 按照值的从小到大排序遍历所有点
    for (int i = 0; i < points.size(); i++) {
        int x = points.get(i).get(0);
        int y = points.get(i).get(1);

        // 初始化 (Initialization) ：初始LCIS为1
        dp[x][y] = 1;

        // 遍历上下左右四个点(之前的点)
        for (int j = 0; j < 4; j++) {
            int prevX = x - dx[j];
            int prevY = y - dy[j];

            // 如果点出界，跳过
            if (prevX < 0 || prevX >= n || prevY < 0 || prevY >= m) {
                continue;
            }
            // 方程 (Function): max{上下左右LCIS + 1}
            // 如果周边点小于当前点，那么longest_hash[(x, y)] + 1为CIS
            // 在所有的CIS中选择LCIS
            if (matrix[prevX][prevY] < matrix[x][y]) {
                dp[x][y] = Math.max(dp[x][y], dp[prevX][prevY] + 1);
            }
        }
    }

    // 答案 (Answer) : max{ 所有坐标对应的LCIS长度 }
    // 最长子序列可能以任意一点为终点，
    // 在所有Increasing Subsequence中寻找最大值
    int longest = 0;
    for (int i = 0; i < n; i++) {
        for (int j = 0; j < m; j++) {
            longest = Math.max(longest, dp[i][j]);
        }
    }
    return longest;
}
```

思路分析 & 代码解析

1 (1)	4 (2)	5 (3)
6 (2)	2 (1)	8 (4)
3 (1)	7 (2)	9 (5)

```python
    def longestContinuousIncreasingSubsequence2(self, A):
        # 特殊情况处理
        if not A or not A[0]:
            return 0

        # 矩阵的行数和列数
        n, m = len(A), len(A[0])

        # 把矩阵内的每个点转化成（值，行，列）的形式，存入list
        points = []
        for i in range(n):
            for j in range(m):
                points.append((A[i][j], i, j))

        # 按照点的值，从小到大排序
        points.sort()
```

```python
        # State: dp[(i, j)]表示以坐标(i,j)点结尾的LCIS的长度
        longest_hash = {}
        #  按照值的从小到大排序遍历所有点
        for i in range(len(points)):
            # 以坐标为key
            key = (points[i][1], points[i][2])
            # 初始化（Initialization）：初始LCIS为1
            longest_hash[key] = 1
            # 遍历上下左右四个点(之前的点)
            for dx, dy in [(1, 0), (0, -1), (-1, 0), (0, 1)]:
                x, y = points[i][1] + dx, points[i][2] + dy
                # 如果点出界，跳过
                if x < 0 or x >= n or y < 0 or y >= m:
                    continue

                # 方程（Function）：max{上下左右LCIS + 1}
                # 这里(x, y) in longest_hash有必要吗？
                # 没有必要，符合A[x][y] < points[i][0]的点一定在longest_hash里面
                # 如果周边点小于当前点，那么longest_hash[(x, y)] + 1为CIS
                # 在所有的CIS中选择LCIS
                if (x, y) in longest_hash and A[x][y] < points[i][0]:
                    longest_hash[key] = \
                    max(longest_hash[key], longest_hash[(x, y)] + 1)

        # 答案（Answer）：max{ 所有坐标对应的LCIS长度 }
        # 最长子序列可能以任意一点为终点，
        # 在所有Increasing Subsequence中寻找最大值
        return max(longest_hash.values())
```

603 Largest Divisible Subset 最大整除子集

Given a set of distinct positive integers, find the largest subset which has the most elements, and every pair of two elements (Si, Sj) in this subset satisfies: Si % Sj = 0 or Sj % Si = 0.

给一个由 **无重复**的正整数组成的集合，找出一个元素最多的子集，满足集合中任意两个元素 (Si, Sj) 都有 Si % Sj = 0 或 Sj % Si = 0

输入:
nums = [1,2,3]
输出:
[1,2] or [1,3]

输入:
nums = [1,2,4,8]
输出:
[1,2,4,8]

具有有序性，求最优解，有可能使用动态规划

坐标型动态规划

状态的转移需要考虑：从哪儿走到 (i, j) 这个坐标的

数值	1	2	3	6	8	12

从哪里可以走到12？

思路分析 & 代码解析

数值	1	2	3	6	8	12
dp	1	2	2	3	3	4
prev	-1	1	1	2	2	6

dp[2] = max(dp[1]) + 1 = 1 + 1 = 2

dp[3] = max(dp[1]) + 1 = 1 + 1 = 2

dp[6] = max(dp[1], dp[2], dp[3]) + 1 = 2 + 1 = 3

dp[8] = max(dp[1], dp[2]) + 1 = 2 + 1 = 3

dp[12] = max(dp[1], dp[2], dp[3], dp[6]) + 1 = 3 + 1 = 4

```python
def largestDivisibleSubset(self, nums):
    # 特殊情况处理
    if not nums:
        return []

    # 所有数字从小到大排序
    #先要找到小的数字的最大整除子集，才能得到大的数字的最大整除子集
    nums = sorted(nums)
    n = len(nums)

    # 状态（State）：dp[i] 表示以第i个数结尾(最大数)的最大整除子集个数
    # 这里用dict表示状态，因为输入数字是离散的，比如1，2，4，8
    # prev来记录（当前点 => 之前点）的映射关系，用于倒推路径
    dp, prev = {}, {}

    # 初始化（Initialization）：dp[0..n-1] = 1
    # 所有点的最大整除子集初始长度为1，仅包含自身
    # 先导点为-1，表示未知
    for num in nums:
        dp[num] = 1
        prev[num] = -1

    # 最大整除子集的最后一个数字（最大数字）
    last_num = nums[0]

    # 遍历从小到大的每个数字
    for num in nums:
        # 可能的优化：找上一个接龙的数的时候，不是for循环所有比他小的数，
        # 而是直接for循环他的因子。而获取因子可以用O(√value)的时间做到。
        # 如果n（nums个数）是个特别大的值，这里是优化
        # 如果value是个特别大的值，这里不是优化
        for factor in self.get_factors(num):
            # 如果factor没有在dp/nums中，跳过
            if factor not in dp:
                continue
            # 方程（Function）：max{dp.get(factor) + 1}
            # factor为num的因子
            if dp[num] < dp[factor] + 1:
                dp[num] = dp[factor] + 1
                prev[num] = factor
        # 更新最大整除子集的最后一个数字（最大数字）
        if dp[num] > dp[last_num]:
            last_num = num

    # 答案（Answer）：
    # 通过最大整除子集的最后一个数字（最大数字）倒推路径，
    # 得到Largest Divisible Subset
    return self.get_path(prev, last_num)
```

```python
    # 倒推求路径
    def get_path(self, prev, last_num):
        path = []
        # 如果lastNum为-1，没有先导点了，已经到了路径的最开端
        while last_num != -1:
            path.append(last_num)
            last_num = prev[last_num]
        # 通过python的切片操作，翻转得到正序路径
        return path[::-1]

    # O(√num)求num的所有因子(不包括自身)
    def get_factors(self, num):
        # 不包括自身，所以1没有因子
        if num == 1:
            return []
        factor = 1
        factors = []
        while factor * factor <= num:
            if num % factor == 0:
                factors.append(factor)
                # 如果num为4，factor为1，那么4/1 = 4，不加入（不包括自身）
                # 如果加入了自身会怎样？会出现num => dp.get(num) + 1，平白
                # 无故多了一个数，答案错误
                # 如果num为4，factor为2，那么4/2 = 2，不加入（会重复）
                # 如果加入重复会怎样？会多循环一次，对答案正确性无影响
                if factor * factor != num and factor != 1:
                    # 在此使用两个斜线的除号，结果为整数，而不是浮点数
                    # 本题目一个斜线的除号，也可以通过
                    factors.append(num // factor)
            factor += 1
        return factors
```

思路分析 & 代码解析

数值	1	2	3	6	8	12
dp	1	2	2	3	3	4
prev	-1	1	1	2	2	6

dp[2] = max(dp[1]) + 1 = 1 + 1 = 2

dp[3] = max(dp[1]) + 1 = 1 + 1 = 2

dp[6] = max(dp[1], dp[2], dp[3]) + 1 = 2 + 1 = 3

dp[8] = max(dp[1], dp[2]) + 1 = 2 + 1 = 3

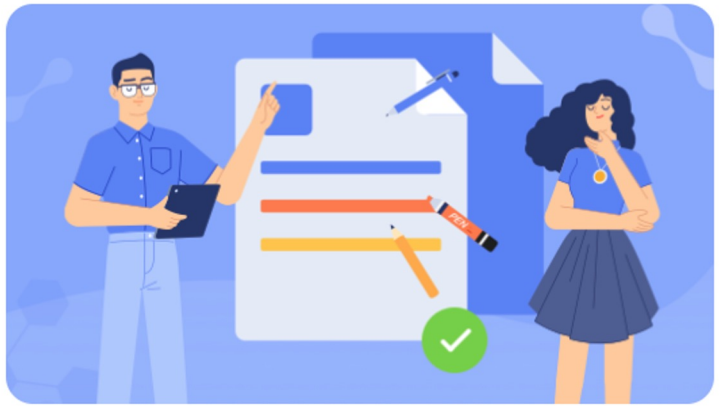
dp[12] = max(dp[1], dp[2], dp[3], dp[6]) + 1 = 3 + 1 = 4

```java
public List<Integer> largestDivisibleSubset(int[] nums) {
    // 特殊情况处理
    if (nums == null || nums.length == 0) {
        return new ArrayList();
    }

    // 所有数字从小到大排序
    // 先要找到小的数字的最大整除子集，才能得到大的数字的最大整除子集
    Arrays.sort(nums);
    int n = nums.length;

    // 状态（State）：dp.get(i) 表示以第i个数结尾(最大数)的最大整除子集个数
    // 这里用HashMap表示状态，因为输入数字是离散的，比如1，2，4，8
    // prev来记录（当前点 => 之前点）的映射关系，用于倒推路径
    HashMap<Integer, Integer> dp = new HashMap();
    HashMap<Integer, Integer> prev = new HashMap();

    // 初始化（Initialization）：dp[0..n-1] = 1
    // 所有点的最大整除子集初始长度为1，仅包含自身
    // 先导点为-1，表示未知
    for (int i = 0; i < n; i++) {
        dp.put(nums[i], 1);
        prev.put(nums[i], -1);
    }

    // 最大整除子集的最后一个数字（最大数字）
    int lastNum = nums[0];

    // 遍历从小到大的每个数字
    for (int num : nums) {
        // 可能的优化：找上一个接龙的数的时候，不是for循环所有比他小的数，
        // 而是直接for循环他的因子。而获取因子可以用O(√num)的时间做到。
        // 如果n（nums个数）是个特别大的值，这里是优化
        // 如果value是个特别大的值，这里不是优化
        for (Integer factor : getFactors(num)) {
            // 如果factor没有在dp/nums中，跳过
            if (!dp.containsKey(factor)) {
                continue;
            }
            // 方程（Function）：max{dp.get(factor) + 1}
            // factor为num的因子
            if (dp.get(num) < dp.get(factor) + 1) {
                dp.put(num, dp.get(factor) + 1);
                // 更新prev，num => factor（当前点 => 之前点）
                prev.put(num, factor);
            }
        }
        // 更新最大整除子集的最后一个数字（最大数字）
        if (dp.get(num) > dp.get(lastNum)) {
            lastNum = num;
        }
    }

    // 答案（Answer）：
    // 通过最大整除子集的最后一个数字（最大数字）倒推路径，
    // 得到Largest Divisible Subset
    return getPath(prev, lastNum);
}

// 倒推求路径
private List<Integer> getPath(HashMap<Integer, Integer> prev, int lastNum) {
    List<Integer> path = new ArrayList();
    // 如果lastNum为-1，则没有先导点了，已经到了路径的最开端
    while (lastNum != -1) {
        path.add(lastNum);
        lastNum = prev.get(lastNum);
    }
    // 翻转得到正序路径
    Collections.reverse(path);
    return path;
}

// O(√num)求num的所有因子(不包括自身)
private List<Integer> getFactors(int num) {
    List<Integer> factors = new ArrayList();
    // 不包括自身，所以1没有因子
    if (num == 1) {
        return factors;
    }
    int factor = 1;
    while (factor * factor <= num) {
        if (num % factor == 0) {
            factors.add(factor);
            // 如果num为4，factor为1，那么4/1 = 4，不加入（不包括自身）
            // 如果加入了自身会怎样？会出现num => dp.get(num) + 1，平白
            // 无故多了一个数，答案错误
            // 如果num为4，factor为2，那么4/2 = 2，不加入（会重复）
            // 如果加入重复会怎样？会多循环一次，对答案正确性无影响
            if (factor != 1 && factor * factor != num) {
                factors.add(num / factor);
            }
        }
        factor++;
    }
    return factors;
}
```

谢谢大家，夏天老师会想念你们的o(╥﹏╥)o

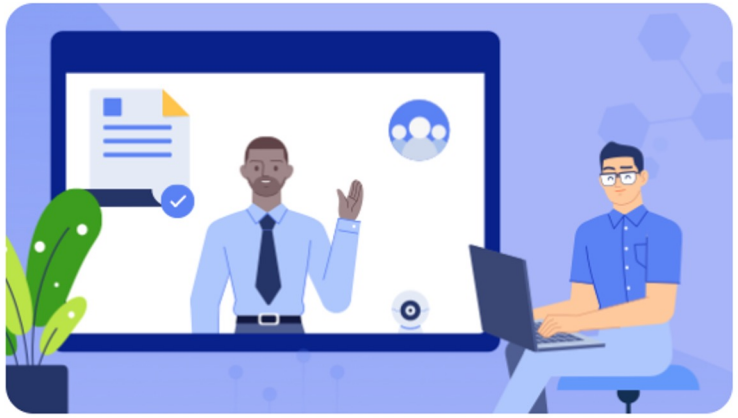
鸡血视频

秋招走了，春招还会远吗？



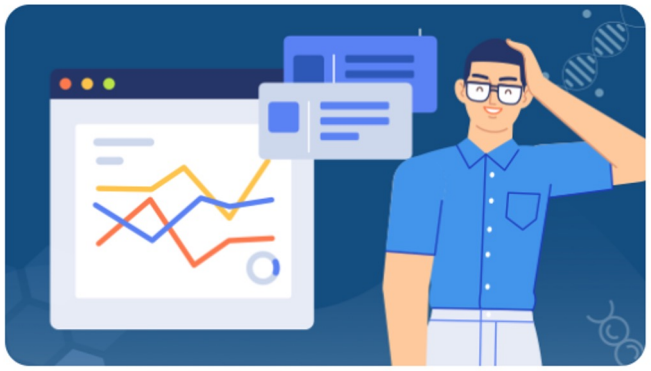
简历代笔1V1

FLAG资深工程师亲自为您代笔简历。
1对1语音沟通代笔简历，真正做到量...



模拟面试1V1

多名FLAG资深面试官，从不同的角度对您进行模拟面试。 根据您所期望的...



行为问题（Behavior Questions）指导1V1

针对面试中华人最不擅长的"行为问题（Behavior Questions）"环节，进行...

简历/项目深挖1V1(Resume/Project Deep...

针对面试中华人不擅长的环节之一，聊简历，进行1对1专业指导；多名FLA...

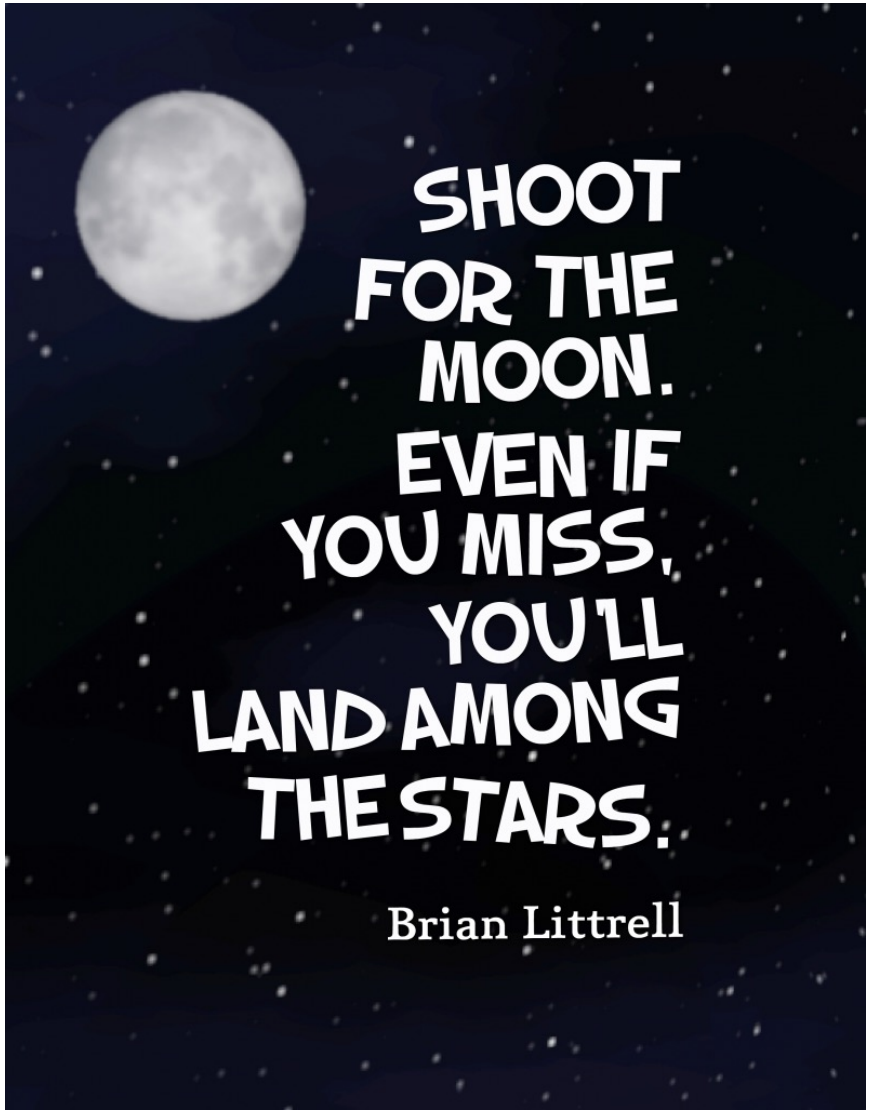
春招现在开始！

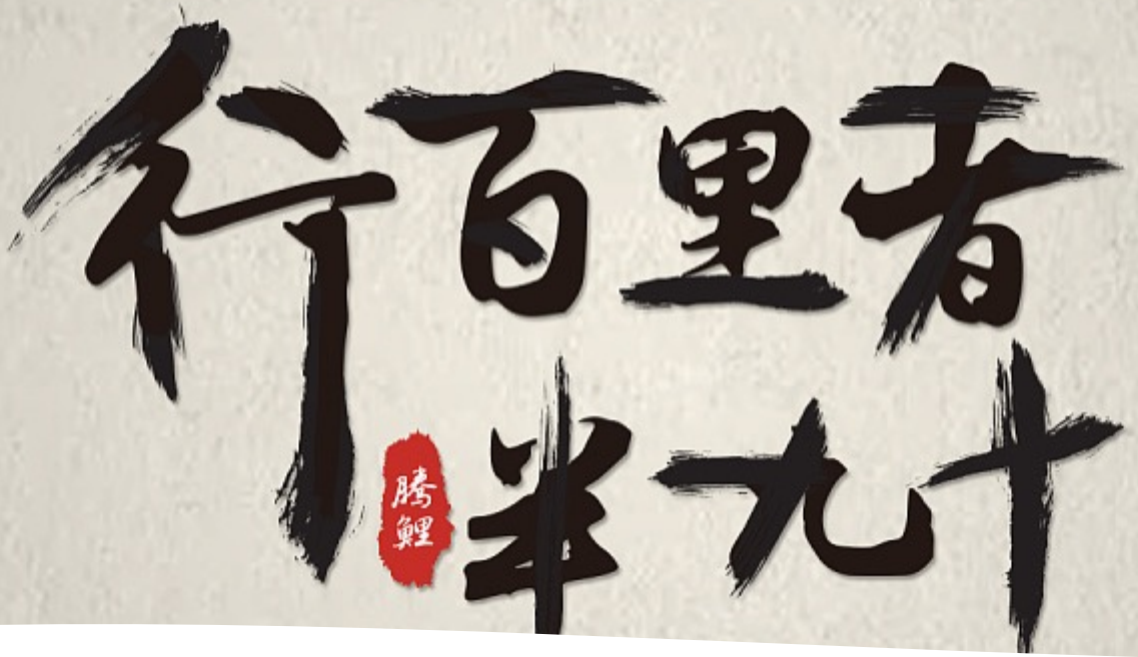
我可以拿到梦想的offer吗？

求其上者得其中

求其中者得其下

求其下者無所得





课程定位

- 帮助求职者完成算法面试准备过程中的“最后一公里”
- 解决新题/难题/高频题/知识点路/技(套)巧(路)

最后一公里（Last kilometer），原意指完成长途跋涉的最后一段里程，被引申为**完成一件事情的时候最后的而且是关键性的步骤**（通常还说明此步骤充满困难）。

做作业

做ladder

群里提问题

看回放

课前预习

课后复习

刷题

互动课