

MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS E IMÁGENES BORROSAS

ANÁLISIS NUMÉRICO II

INTRODUCCIÓN

Durante el proceso de captura de una imagen pueden ocurrir percances que la alteran. Algunos de los factores que producen esto son:

1. Factores ambientales (nubosidad, humedad).
2. Defectos del dispositivo de captura (lentes, sensores).
3. La escena si misma, por ejemplo, lo que se desea capturar está en movimiento.

El fenómeno de degradado borroso puede ser modelado mediante una ecuación de difusión. En este caso, la imagen puede verse como una placa de metal que es calentada. El efecto de degradación de la imagen es visto como el proceso de difusión de calor en la placa.

MODELO DE DEGRADACIÓN

El objetivo es encontrar $u : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - \nabla \cdot (k(x) \nabla u) &= 0 \\ u(x, 0) &= I(x), \quad \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0 \text{ en } \partial\Omega. \end{aligned} \quad (1)$$

Donde:

- u es la imagen degradándose en el transcurso del tiempo.
- $k(x)$ es el coeficiente de difusión y controla intensidad y dirección de la degradación.
- $I(x)$ es la imagen original, sin degradar.
- $\frac{\partial u}{\partial \eta}$ es el flujo. En este caso, indica que la suma de los valores de intensidad de la imagen no cambia.
- $\Omega = [0, a] \times [0, b]$ es el conjunto donde están los valores de intensidad de la imagen.

REFERENCIAS



FORMULACIÓN DÉBIL

La formulación débil de (1) agregando el método de Euler implícito es encontrar $u \in H^1(\Omega \times [0, T])$ tal que

$$\iint_{\Omega} u_n v \, dA + \Delta t_n \iint_{\Omega} k \nabla u_n \cdot \nabla v \, dA = \iint_{\Omega} u_{n-1} v \, dA.$$

Donde t_0, \dots, t_M es una partición de $[0, T]$, $u_n = u(x, t_n)$, $\Delta t_n = t_n - t_{n-1}$ para $n = 1, \dots, M$ y v una función de prueba de $H^1(\Omega)$.

FORMULACIÓN DE GARLEKIN

La forma rectangular de Ω y la división de la imagen en pixeles sugiere el uso de los elementos bilineales cuadrados cuyos nodos están en las aristas:

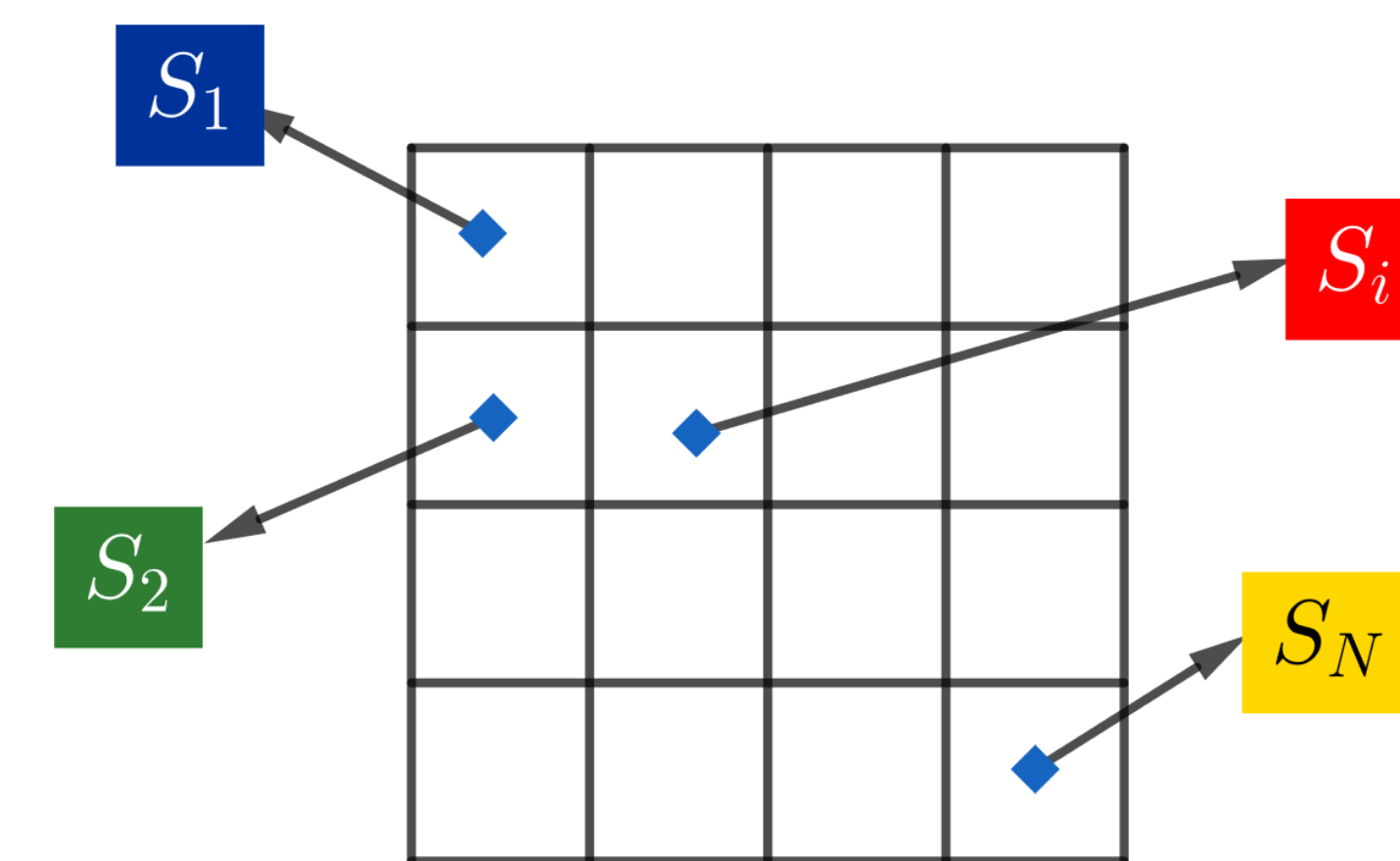


Figura 4: Malla y elementos

$$\begin{aligned} V &= \left\{ f \in H^1(\Omega) : \exists a_i, b_i, c_i \text{ y } d_i \in \mathbb{R}, \right. \\ &\quad \left. f|_{S_i}(x, y) = a_i x + b_i y + c_i xy + d_i, \right. \\ &\quad \left. \forall i = 1, \dots, N \right\} \quad (2) \end{aligned}$$

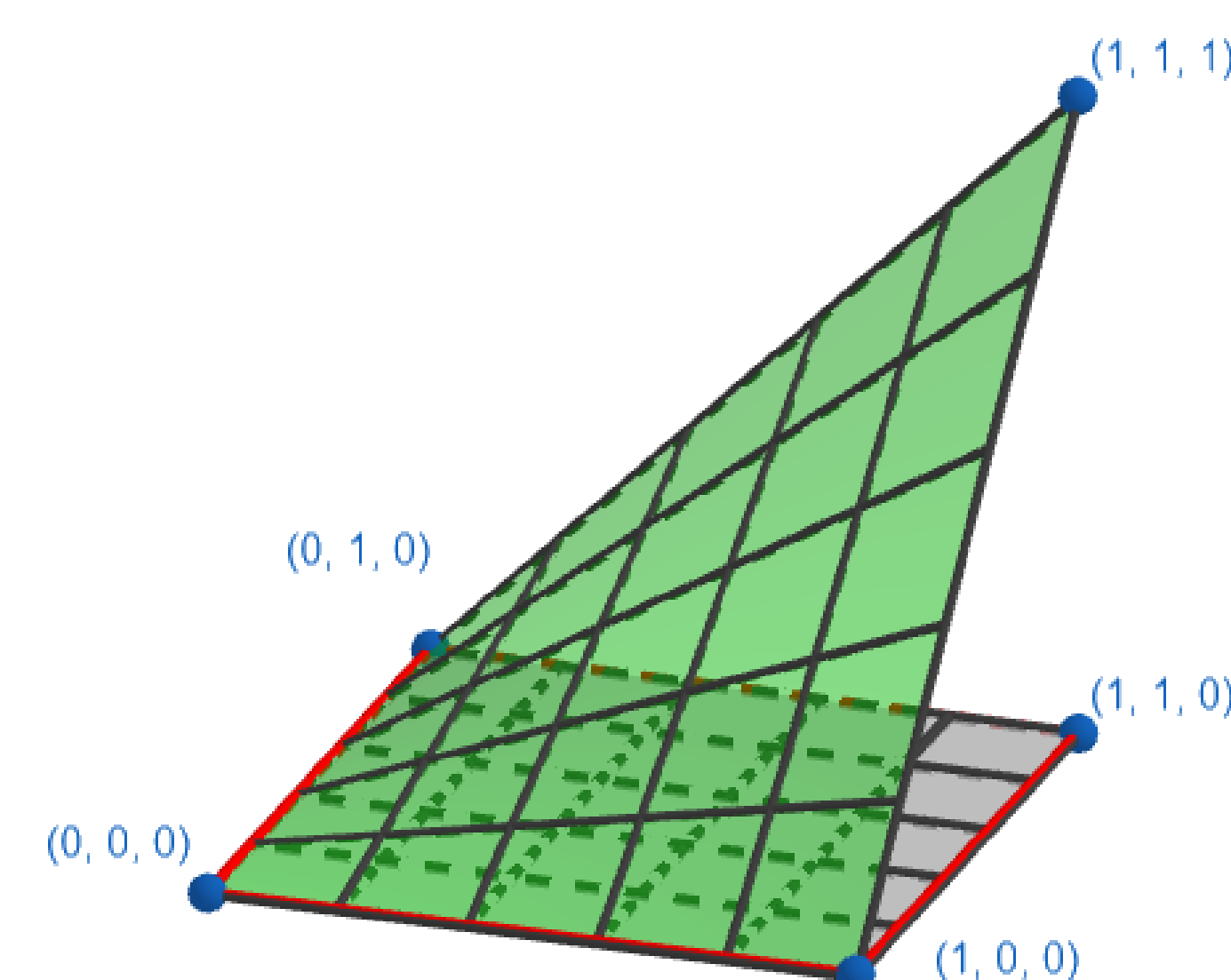


Figura 5: Función base en un elemento

u y v se escogen en el espacio vectorial V .

RESULTADOS PARA DIFERENTES COEFICIENTES DE DIFUSIÓN

- Coeficiente de difusión constante: $k = 1$, simula una imagen desenfocada. La imagen tiene dimensiones 400×400 pixeles y $T = 5$.



Figura 1: Imágenes real y borrosa

- Coeficiente de difusión variable: $k(x, y) = f(r)$, donde $f(r)$ es una función que depende de la distancia r del punto (x, y) al centro de la imagen. Esto simula el desenfoque de del fondo cuando una cámara toma una foto. Donde

$$f(r) = \left(\frac{r}{\eta} \right)^3 \quad \text{y} \quad \eta = \frac{1}{2} \max\{a, b\},$$

con a, b las dimensiones de la imagen. La imagen tiene dimensiones 498×391 pixeles y $T = 5$.

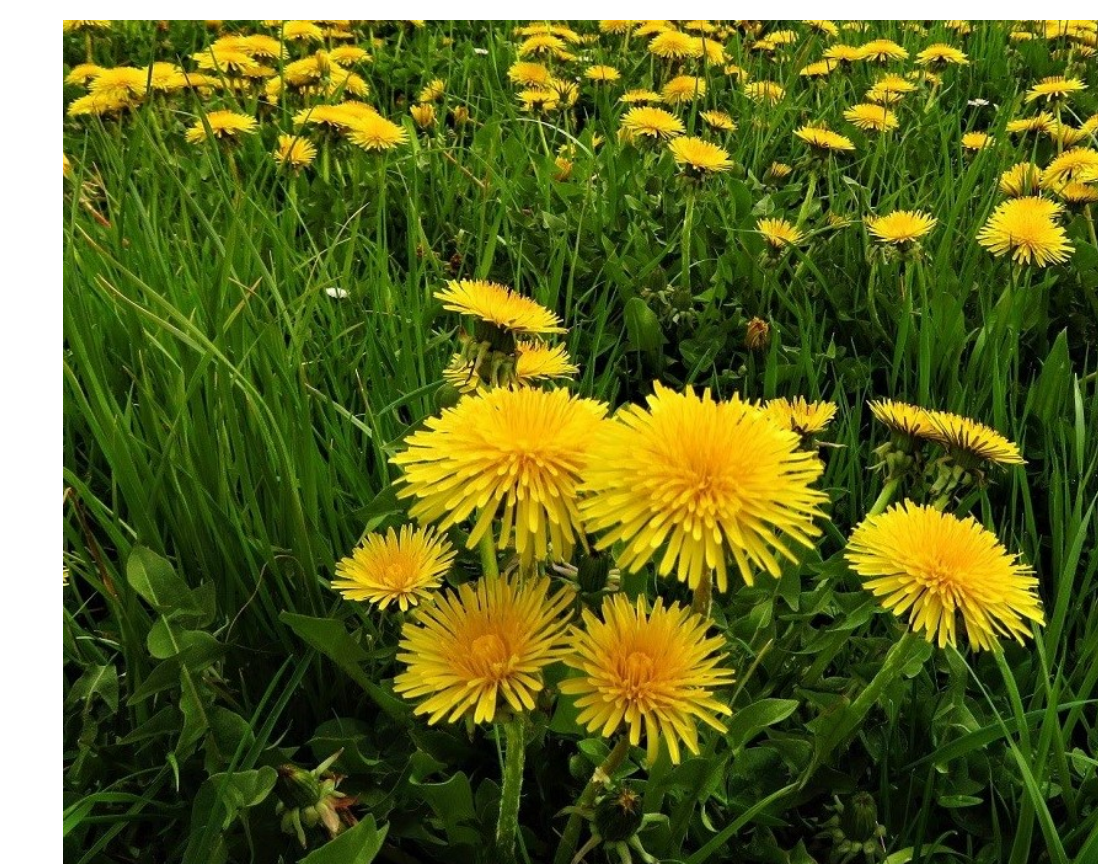


Figura 2: Imágenes real y borrosa

- Coeficiente de difusión matricial constante: k . En este caso

$$k(x) = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 65 & -63 \\ -63 & 65 \end{bmatrix}$$

y simula el efecto borroso de un objeto en movimiento. El difuminado tiene direcciones preferenciales: los vectores propios de k . La imagen tiene dimensiones 700×525 pixeles y $T = 20$.



Figura 3: Imágenes real y borrosa

CONCLUSIONES

El método de los elementos finitos permite simular diversas imágenes borrosas de manera eficiente y realista en cada uno de sus canales de color.

No obstante, la cantidad de elementos es aprox-

imadamente igual que el número de pixeles; por ejemplo en la Figura 3 hay 366.276 elementos. Por lo tanto, deben considerarse menos elementos con más grados de libertad o recurrir a técnicas en las que se usan elementos multiescala.