Institut für Festkörpertheorie und -optik
Friedrich-Schiller-Universität Jena

Klausur zur Vorlesung: Grundkonzepte der Optik - WS 2010/11

Sie müssen nicht alle Aufgaben rechnen.
(67 Punkte sind zu erreichen, 61 Punkte entsprechen 100%)

1. Maxwell-Gleichungen ($\sum$19)

a) Geben Sie die makroskopischen Maxwell-Gleichungen im Frequenzraum unter der Annahme an, dass keine freien Ströme und keine freien Ladungen vorhanden sind!

(4)

b) Führen Sie die Polarisation $\mathbf{P}(\mathbf{r},\omega)$ sowie die Magnetisierung $\mathbf{M}(\mathbf{r},\omega)$ ein und geben Sie die allgemeinen Relationen zwischen den Feldern $\mathbf{D}(\mathbf{r},\omega)$ bzw. $\mathbf{H}(\mathbf{r},\omega)$ und $\mathbf{E}(\mathbf{r},\omega)$ bzw. $\mathbf{B}(\mathbf{r},\omega)$ an.

Was lässt sich über die Magnetisierung $\mathbf{M}(\mathbf{r},\omega)$ im optischen Spektralbereich aussagen?

(3)

c) Nutzen Sie die Suszeptibilität χ sowie die Responsefunktion R und geben Sie für ein homogenes, lineares, lokales, **isotropes** und **dispersives** Medium die allgemeine Abhängigkeit der Polarisation $\mathbf{P}(\omega)$ von der elektrischen Feldstärke $\mathbf{E}(\omega)$ im Zeit- sowie im Frequenzraum an. Welcher Zusammenhang besteht zwischen χ und R?

(3)

d) Benennen Sie die Normalmoden des homogenen, isotropen Mediums! Wie sind diese polarisiert! Geben Sie deren (vektorielle) Dispersionsrelation (gegenseitige Abhängigkeit der Vektorkomponenten des Wellenzahlvektors und der Frequenz) an!

(4)

e) Zeigen Sie durch explizites Anwenden der Maxwell-Gleichungen, dass für ebene Wellen (Wellenvektor $\mathbf{k}$, Frequenz ω) folgende Relation gilt: $\mathbf{E} \perp \mathbf{H} \perp \mathbf{k}$.

(4)

f) Geben Sie einen Ausdruck für den zeitlich gemittelten Poynting-Vektor einer ebenen Welle im isotropen Medium an

(1)

2. Materialgleichungen ($\Sigma 6$)

a) Gegeben sei ein homogenes, isotropes Medium mit einer Einzelresonanz bei der Frequenz ω_0 mit extrem scharfer Absorptionslinie (δ-förmig). Geben Sie einen analytischen Ausdruck für die spektrale Abhängigkeit des Realteils der dielektrischen Funktion $\varepsilon(\omega)$ an! Skizzieren Sie den prinzipiellen Funktionsverlauf!

Hinweis: Nutzen Sie ihr Wissen ***oder*** *wenden Sie die Kramers-Kronig-Relationen explizit an!*

(3)

b) Gegeben sei ein homogenes, isotropes Material mit der Suszeptibilität $\chi(\omega) = -\omega_P^2 / \omega^2$. In welchem Frequenzbereich ist ungedämpfte Ausbreitung möglich? Bei welcher Frequenz können longitudinale Wellen existieren?

(3)

3. Fourieroptik ($\Sigma 8$)

Gegeben sei ein ideales 4f-Setup zur optischen Filterung. In der Eingangsebene z=0 ist ein unendlich ausgedehntes quadratisches Lochgitter der Periode *DxD* plaziert. Die Beleuchtung erfolgt durch eine ebene Welle. In der Brennebene *z=2f* der ersten Linse ist die Lichtverteilung dann durch eine diskrete Verteilung gegeben. Der Abstand der einzelnen Spots sei *FxF*.

In der Brennebene der ersten Linse werden im Folgenden verschiedene Aperturen installiert. Benennen Sie die resultierende Feldverteilung bei *z=4f* und begründen Sie ihre Antwort kurz!

a) Eine Lochblende auf der optischen Achse, welche nur die *(0,0)*-Fourierordnung bzgl. *x*- und *y*-Richtung passieren lässt.

(2)

b) Eine Spaltblende entlang der *x*-Richtung, welche alle *(m,0)*-Fourierordnungen passieren lässt.

(2)

c) Eine Spaltblende entlang der *x-y*-Richtung, welche alle *(m,m)*-Fourierordnungen passieren lässt. Was können Sie über die Periode der resultierenden Bildverteilung aussagen?

(4)

4. Raumzeitliche Lichtausbreitung ($\Sigma 14$)

Die raumzeitliche Ausbreitung eines Lichtpulses mit Feldverteilung *u*(x,y,*z*,*t*) in einem dispersiven, absorptionsfreien Medium ist allgemein gegeben durch

$$u(x,y,z,t) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} U_0(\alpha,\beta,\omega)\exp\left[i\gamma z\right]\exp[i(\alpha x + \beta y - \omega t)]\ d\alpha d\beta d\omega$$

wobei $U_0(\alpha,\beta,\omega)$ das raumzeitliche Spektrum des Pulses am Ort *z*=0 darstellt.

a) Wie ist der Term γ definiert? Geben Sie γ als Funktion der Frequenz ω, sowie der Fourierkomponenten α und β an!

(1)

b) Nehmen Sie nun monochromatische Felder der Frequenz ω_0 an. Führen Sie eine Taylorentwicklung von γ um $(\alpha,\beta)=(0,0)$ bis zur quadratischen Ordnung durch und leiten Sie aus obiger Formel den Ausdruck für die sogenannte Fresnel-Näherung ab!

(3)

c) Nehmen Sie im Folgenden Ebene-Welle-Pulse an $[U_0(\alpha,\beta,\omega) = U_0(\omega)]$, welche sich in z-Richtung ausbreiten! Entwickeln Sie $\gamma(\omega)$ um ω_0 bis zur zweiten Ordnung in ω. Benennen Sie die einzelnen Entwicklungsterme!

(2)

d) Diskutieren Sie **kurz** die physikalische Bedeutung der einzelnen Entwicklungsterme.

(3)

e) Zwei Pulse propagieren in einem Plasma der Länge L deren Permittivität

$$\varepsilon(\omega) = 1 - \frac{\chi_0}{\omega^2}$$

sei. Die zugehörigen Trägerfrequenzen seien ω_1 und ω_2. Berechnen Sie den Zeitunterschied mit dem beide Signale nach einer Lauflänge L detektiert werden!

(5)

5. Optischer Film (∑6)

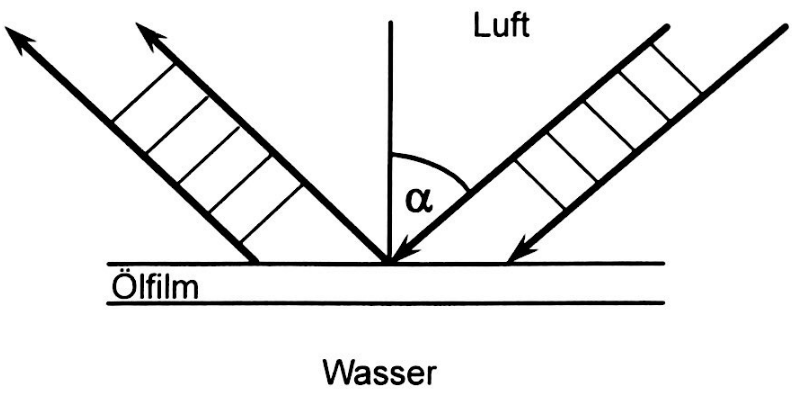
Ein Student blickt auf eine Wasserpfütze, welche mit einem dünnen Ölfilm ($n_f > n_{H20}$) der Dicke d bedeckt ist. Des Weiteren wird die Pfütze mit einer kollimierten Weißlichtlampe schräg beleuchtet. Das Beleuchtungsfeld wird als ebene Wellenfront angenommen!

a) Unter welchem Winkel ist die Intensität des reflektierten Lichts der Wellenlänge λ maximal?

(4)

b) Der Ölfilm verdunstet langsam. Vergrößert oder verkleinert sich dabei der zuvor berechnete Winkel zur Wellenlänge λ. Begründen Sie Ihre Antwort!

(2)



6. Gaußbündel (∑6)

In einem Experiment ist ein Gaußbündel der Breite W_{in} und unendlichem Phasenkrümmungsradius R gegeben. Ihre Aufgabe ist es dieses Bündel nach einer Länge L exakt zu reproduzieren! Sie können dafür allerdings nur eine Linse einsetzen. Berechnen Sie die Brennweite sowie die Position der Linse!

Hinweis: Die ABCD-Matrix des Freiraums sowie einer dünnen Linse lauten:

$$M_d = \begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad M_L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix}$$

7. Oberflächen-Plasmon-Polaritonen (∑8)

Gegeben sei eine einfache Grenzfläche zwischen Luft und einem homogenen, isotropen und dispersiven Metamaterial (charakterisiert durch $\varepsilon(\omega) \neq 1$ und $\mu(\omega) \neq 1$).

a) Leiten Sie eine notwendige Bedingung für die Existenz eines gebundenen Oberflächenzustandes in TE-Polarisation her! *(3)*

b) Leiten Sie die Dispersionsrelation $k_z(\omega)$ dieser Zustände ab! *(5)*

Hinweis #1: Die Dispersionsrelation ebener Wellen lautet: $k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon(\omega)\mu(\omega)$.

Hinweis #2: Der Transmissionskoeffizient an einer einzelnen Grenzfläche in TE-Polarisation ist gegeben durch die nachfolgende Formel.

$$T_{\mathrm{TE}} = \frac{2\alpha_s k_{sx}}{\alpha_s k_{sx} + \alpha_c k_{cx}}$$

$\alpha_{s/c} = 1/\mu_{s/c}$

$k_{sx/cx}$ ... Wellenvektorkomponenten senkrecht zur Grenzfläche