

Kursvorlesung

Theoretische Optik

WS 1999/2000

Falk Lederer

Institut für Festkörpertheorie und Theoretische Optik  
Friedrich-Schiller-Universität Jena

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einführung</b>	<b>8</b>
<b>2</b>	<b>Optische Felder in dispersiven und isotropen Medien</b>	<b>9</b>
2.1	Die Maxwellschen Gleichungen . . . . .	9
2.1.1	Übergang zu Gleichungen in der Optik . . . . .	9
2.1.2	Das Zeitverhalten der Felder - Mono- und Polychromasie . . . . .	10
2.1.3	Die Maxwellschen Gleichungen im Fourierraum . . . . .	11
2.1.4	Übergang von den Maxwellgleichungen zur Wellengleichung . . . . .	11
2.1.5	Bemerkungen zur Polarisierung . . . . .	12
2.2	Beschreibung der Medien - die Materialgleichungen . . . . .	13
2.2.1	Grundsätzliches . . . . .	13
2.2.2	Die dielektrische Polarisierung und die dielektrische Funktion . . . . .	16
2.2.3	Der Konduktionsstrom und die Leitfähigkeit . . . . .	17
2.2.4	Die komplexe dielektrische Funktion . . . . .	18
2.2.5	Dispersion im Glas . . . . .	22
2.2.6	Die Materialgleichungen im Zeitbereich . . . . .	23
2.3	Die Energiestromdichte und Energiebilanz . . . . .	24
2.3.1	Der zeitlich gemittelte Poyntingvektor . . . . .	24
2.3.2	Die zeitlich gemittelte Energiebilanz . . . . .	26
2.4	Die Kramers-Kronigsche Dispersionsrelation . . . . .	26
2.5	Die Normalmoden des homogenen isotropen Mediums . . . . .	29
2.5.1	Longitudinale Wellen . . . . .	30
2.5.2	Transversale Wellen . . . . .	31
2.5.3	Energiestromdichte und Intensität ebener Wellen . . . . .	36
2.6	Gebündelte Wellenfelder (Strahlen) und Impulse - Analogie von Beugung und Pulsverbreiterung (Dispersion) . . . . .	37
2.6.1	Ausbreitung gebündelter Wellenfelder im homogenen Raum . . . . .	39
2.6.2	Ausbreitung eines Gauß-Bündels . . . . .	47
2.6.3	Gaußsche Optik . . . . .	53
2.6.4	Gaußsche Moden in einem Resonator . . . . .	56
2.6.5	Ausbreitung von Impulsen . . . . .	62
<b>3</b>	<b>Beugungstheorie</b>	<b>76</b>
3.1	Wechselwirkung mit ebenen Schirmen . . . . .	76
3.2	Beschreibung der Ausbreitung in verschiedenen Näherungen . . . . .	77
3.2.1	Der allgemeine Fall - kleine Öffnungen, große Öffnungswinkel . . . . .	77
3.2.2	Fresnelnäherung - paraxial . . . . .	78

3.2.3	Fraunhofernäherung - paraxial und Fernfeld . . . . .	78
3.3	Fraunhoferbeugung an ebenen Schirmen . . . . .	82
3.3.1	Bemerkungen zur Fresnelbeugung am Spalt . . . . .	87
<b>4</b>	<b>Fourieroptik → Optische Filterung</b>	<b>88</b>
4.1	Die Abbildung eines beliebigen Feldes mit einer dünnen Linse . . . . .	88
4.1.1	Transferfunktion einer dünnen Linse . . . . .	88
4.1.2	Die Beschreibung der Abbildung . . . . .	89
4.2	Optische Filterung bzw. Bildbearbeitung . . . . .	92
4.2.1	Die $4f$ - Geometrie . . . . .	92
4.2.2	Beispiele: . . . . .	95
4.3	Das Prinzip der holographischen Abbildung . . . . .	99
<b>5</b>	<b>Die Polarisierung elektromagnetischer Wellen</b>	<b>102</b>
5.1	Einführung . . . . .	102
5.2	Die Polarisierung einer Normalmode im isotropen, dispersiven Medium . .	102
5.2.1	Polarisationszustände . . . . .	104
5.3	Alternative Darstellung des Polarisationszustandes . . . . .	107
5.3.1	Poincaré-Kugel, Stokes-Parameter . . . . .	107
5.3.2	Jones-Kalkül . . . . .	108
<b>6</b>	<b>Grundzüge der Kristalloptik - Normalmoden in homogenen, anisotropen Medien</b>	<b>110</b>
6.1	Suszeptibilitäts- und Dielektrizitätstensor . . . . .	110
6.2	Die optische Klassifikation von Kristallen . . . . .	113
6.3	Das Indexellipsoid . . . . .	113
6.4	Normalmoden im anisotropen Medium . . . . .	114
6.4.1	Normalmoden bei Ausbreitung in Hauptachsen . . . . .	115
6.4.2	Normalmoden bei beliebiger Ausbreitungsrichtung → Dispersionsrelation . . . . .	116
6.4.3	Einachsige Kristalle . . . . .	121
<b>7</b>	<b>Optische Felder in isotropen, dispersiven und stückweise homogenen Medien</b>	<b>127</b>
7.1	Grundsätzliches . . . . .	127
7.1.1	Definition des Problems . . . . .	127
7.1.2	Grenzflächen und Symmetrien . . . . .	128
7.1.3	Die Übergangsbedingungen . . . . .	129
7.2	Das Feld im Schichtsystem → die Matrixmethode . . . . .	129
7.2.1	Das Feld in einer homogenen Schicht . . . . .	129
7.2.2	Das Feld im Schichtsystem . . . . .	131
7.3	Reflexions - Transmissionsproblem an Schichtsystemen . . . . .	132

7.3.1	Allgemeines Schichtsystem . . . . .	132
7.3.2	Die einfache Grenzfläche . . . . .	139
7.3.3	Die optische Schicht . . . . .	148
7.3.4	Periodische Vielschichtsysteme - Bragg-Spiegel . . . . .	151
7.3.5	Fabry-Perot-Resonatoren . . . . .	155
7.4	Geführte Wellen in Schichtsystemen . . . . .	163
7.4.1	Feldstruktur geführter Wellen . . . . .	163
7.4.2	Die Dispersionsrelation geführter Wellen . . . . .	164
7.4.3	Geführte Wellen an einer Grenzfläche - Oberflächenpolaritonen . .	166
7.4.4	Geführte Wellen in einer Schicht - Schichtwellenleiter . . . . .	170
7.4.5	Anregung geführter Moden . . . . .	177
7.4.6	Einige Bemerkungen zu Streifen- und Faserwellenleitern . . . . .	179
<b>8</b>	<b>Statistische Optik – Kohärenztheorie</b>	<b>184</b>
8.1	Grundlagen . . . . .	184
8.2	Statistische Eigenschaften des Lichtes . . . . .	185
8.2.1	Definitionen . . . . .	185
8.3	Interferenz mit partiell kohärentem Licht . . . . .	190
8.3.1	Interferenz zweier partiell kohärenter Wellen . . . . .	190
8.3.2	Interferenz und zeitliche Kohärenz . . . . .	191
8.3.3	Interferenz und räumliche Kohärenz . . . . .	192
8.3.4	Räumliche Kohärenz und Ausbreitung . . . . .	193

# Kapitel 1

## Einführung

Optik(grie. optique - Lehre vom Licht)

# Kapitel 2

## Optische Felder in dispersiven und isotropen Medien

### 2.1 Die Maxwell'schen Gleichungen

#### 2.1.1 Übergang zu Gleichungen in der Optik

Die Maxwell'schen Gleichungen in ihrer allgemeinsten Form lauten

$$\begin{aligned}\operatorname{rot} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= -\frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\partial t}, & \operatorname{div} \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) &= \rho_{\text{ext}}(\mathbf{r}, t) \\ \operatorname{rot} \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) &= \mathbf{j}_{\text{makr}}(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial \mathbf{D}(\mathbf{r}, t)}{\partial t}, & \operatorname{div} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) &= 0\end{aligned}\tag{2.1}$$

Die dielektrische Verschiebung  $\mathbf{D}(\mathbf{r}, t)$  und das Magnetfeld  $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$  unterscheiden sich in *Medien* vom elektrischen Feld  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$  und der Induktion  $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$  folgendermaßen

$$\begin{aligned}\mathbf{D}(\mathbf{r}, t) &= \varepsilon_0 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{P}(\mathbf{r}, t) \\ \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{\mu_0} [\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) - \mathbf{M}(\mathbf{r}, t)]\end{aligned}\tag{2.2}$$

Dabei beschreiben die dielektrische Polarisierung  $\mathbf{P}(\mathbf{r}, t)$  und die Magnetisierung  $\mathbf{M}(\mathbf{r}, t)$  den Einfluß der Materie. Sie hängen mit den Feldern  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$  und  $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$  über die *Materialeigenschaften* zusammen. Dieser Zusammenhang ist im allgemeinen recht kompliziert und folgt aus anderen Theorien (Festkörpertheorie). In der Optik hat man es in der Regel mit unmagnetischen Medien zu tun und kann deshalb  $\mathbf{M}(\mathbf{r}, t) = 0$  setzen.

Die *Quellen* der Felder sind die frei verschiebbaren Ladungsdichten  $\rho_{\text{ext}}(\mathbf{r}, t)$  und die makroskopischen Stromdichten  $\mathbf{j}_{\text{makr}}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{j}_{\text{cond}}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{j}_{\text{conv}}(\mathbf{r}, t)$ . Der *konduktive* Strom hängt in noch zu spezifizierender Weise vom elektrischen Feld ab,  $\mathbf{j}_{\text{cond}}(\mathbf{r}, t) = f(\mathbf{E})$ . Für

den konvektiven Strom gilt:  $\mathbf{j}_{\text{conv}}(\mathbf{r}, t) = \rho_{\text{ext}}(\mathbf{r}, t)\mathbf{v}$ . In der Optik gibt es in der Regel keine externen Ladungen ( $\rho_{\text{ext}}(\mathbf{r}, t) = 0$ ,  $\mathbf{j}_{\text{conv}}(\mathbf{r}, t) = 0$ ).

Damit lassen sich die Maxwellschen Gleichungen in der für die Optik relevanten Form schreiben

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}(\mathbf{r}, t)}{\partial t}, & \varepsilon_0 \text{div } \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= -\text{div } \mathbf{P}(\mathbf{r}, t) \\ \text{rot } \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) &= \mathbf{j}_{\text{cond}}(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial \mathbf{P}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{\partial t}, & \text{div } \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) &= 0 \end{aligned} \quad (2.3)$$

Die Polarisationsladungen  $\rho_{\text{pol}}(\mathbf{r}, t) = -\text{div } \mathbf{P}(\mathbf{r}, t)$  und -ströme  $\mathbf{j}_{\text{pol}}(\mathbf{r}, t) = \frac{\partial \mathbf{P}(\mathbf{r}, t)}{\partial t}$  sind nicht vorgebar.

Die Grundaufgabe der Optik besteht darin, bei vorgegebenem Zusammenhang  $\mathbf{P}(\mathbf{E})$  und  $\mathbf{j}(\mathbf{E})$  die Gleichungen (2.3) konsistent zu lösen.

Obwohl physikalische Größen reell sind, kann man sie in linearen Theorien ins Komplexe fortsetzen, muß jedoch letztendlich wieder zum Realteil übergehen. Bei Produktbildungen ist *immer* mit den reellen Größen zu rechnen. Die Gleichungen (2.3) gelten also für komplexe Größen, wobei für den Realteil gilt  $\mathbf{E}_r(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2} [\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{E}^*(\mathbf{r}, t)] = \text{Re}[\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)]$

## 2.1.2 Das Zeitverhalten der Felder - Mono- und Polychromasie

### A) Monochromasie $\longleftrightarrow$ stationäre Felder

Alle Felder weisen eine harmonische Zeitabhängigkeit auf  $\sim \exp(-i\omega t) \rightarrow$  feste Phasenlage, vollständige Kohärenz, unendliche Wellenzüge. Wir geben das für alle Felder typische Zeitverhalten für das elektrische Feld an

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \bar{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega) \exp(-i\omega t)$$

### B) Polychromasie $\longleftrightarrow$ nichtstationäre Felder

Alle Wellenzüge sind endlich. Das Feld wird in seine Fourierkomponenten zerlegt  $\longleftrightarrow$  Zerlegung in unendliche, harmonische Wellenzüge

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega) \exp(-i\omega t) d\omega \quad (2.4)$$

$$\bar{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \exp(i\omega t) dt \quad (2.5)$$

### 2.1.3 Die Maxwell'schen Gleichungen im Fourierraum

Setzt man die Fourierzerlegung (2.4) in die Gleichungen (2.3) ein und beachtet dabei, daß die Zeitableitungen wegen

$$\frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega) \exp(-i\omega t) d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} (-i\omega) \bar{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega) \exp(-i\omega t) d\omega$$

im Fourierraum in die Multiplikation mit  $(-i\omega)$  übergehen, erhält man

$$\mathbf{rot} \bar{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega) = i\omega\mu_0 \bar{\mathbf{H}}(\mathbf{r}, \omega), \quad \varepsilon_0 \mathbf{div} \bar{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega) = -\mathbf{div} \bar{\mathbf{P}}(\mathbf{r}, \omega) \quad (2.6)$$

$$\mathbf{rot} \bar{\mathbf{H}}(\mathbf{r}, \omega) = \bar{\mathbf{j}}(\mathbf{r}, \omega) - i\omega \bar{\mathbf{P}}(\mathbf{r}, \omega) - i\omega\varepsilon_0 \bar{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega), \quad \mathbf{div} \bar{\mathbf{H}}(\mathbf{r}, \omega) = 0$$

### 2.1.4 Übergang von den Maxwellgleichungen zur Wellengleichung

#### A) Zeitraum

Aus den Gleichungen (2.3) erhält man

$$\begin{aligned} \mathbf{rot rot} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= -\mu_0 \mathbf{rot} \frac{\partial \mathbf{H}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \left[ \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial \mathbf{P}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \right] \\ \mathbf{rot rot} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{j}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} - \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{P}(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (2.7)$$

Weiterhin gilt für das elektrische Feld

$$\varepsilon_0 \mathbf{div} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\mathbf{div} \mathbf{P}(\mathbf{r}, t)$$

und das Magnetfeld erhält man aus

$$\frac{\partial \mathbf{H}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = -\frac{1}{\mu_0} \mathbf{rot} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$$



## B) Frequenzraum

Durch Fouriertransformation von (2.7) oder direkt aus (2.6) erhält man

$$\mathbf{rot} \mathbf{rot} \bar{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega) - \frac{\omega^2}{c^2} \bar{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega) = i\omega\mu_0 \bar{\mathbf{j}}(\mathbf{r}, \omega) + \mu_0\omega^2 \bar{\mathbf{P}}(\mathbf{r}, \omega) \quad (2.8)$$

Entsprechend gilt

$$\varepsilon_0 \mathbf{div} \bar{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega) = -\mathbf{div} \bar{\mathbf{P}}(\mathbf{r}, \omega) \quad (2.9)$$

und

$$\bar{\mathbf{H}}(\mathbf{r}, \omega) = -\frac{i}{\omega\mu_0} \mathbf{rot} \bar{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega) \quad (2.10)$$

Im stationären Fall erhält man die Lösung des Problems durch die Lösung der obigen Gleichungen und einfache Multiplikation mit  $\exp(-i\omega t)$ . Für nichtstationäre Felder hat man die Fourier-Rücktransformation (2.4) auszuführen, um die zeitabhängigen Felder zu erhalten.

### 2.1.5 Bemerkungen zur Polarisation

In beliebigen isotropen Medien sind im allgemeinen alle Feldkomponenten verkoppelt. Die Situation vereinfacht sich, wenn in einer Richtung (z.B.  $y$ ) Translationsinvarianz vorliegt ( $\rightarrow \partial/\partial y = 0$ ). Das gilt in homogenen unendlichen Medien, Schichten und an unendlichen Grenzflächen. Der Differentialoperator der Wellengleichung (2.8) schreibt sich dann

$$\mathbf{rot} \mathbf{rot} \bar{\mathbf{E}} = \mathbf{grad} \mathbf{div} \bar{\mathbf{E}} - \Delta \bar{\mathbf{E}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \bar{E}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{E}_z}{\partial z} \right) \\ 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial \bar{E}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{E}_z}{\partial z} \right) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \Delta^{(2)} \bar{E}_x \\ \Delta^{(2)} \bar{E}_y \\ \Delta^{(2)} \bar{E}_z \end{bmatrix}$$

Die Zerlegung  $\bar{\mathbf{E}} = \bar{\mathbf{E}}_{\perp} + \bar{\mathbf{E}}_{\parallel}$  mit

$$\bar{\mathbf{E}}_{\perp} = \begin{pmatrix} 0 \\ \bar{E}_y \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{\mathbf{E}}_{\parallel} = \begin{pmatrix} \bar{E}_x \\ 0 \\ \bar{E}_z \end{pmatrix}$$

ergibt mit (2.8)

$$\Delta^{(2)} \bar{\mathbf{E}}_{\perp} + \frac{\omega^2}{c^2} \bar{\mathbf{E}}_{\perp}(\mathbf{r}, \omega) = -i\omega\mu_0 \bar{\mathbf{j}}_{\perp}(\mathbf{r}, \omega) - \mu_0\omega^2 \bar{\mathbf{P}}_{\perp}(\mathbf{r}, \omega)$$

$$\Delta^{(2)} \bar{\mathbf{E}}_{\parallel} + \frac{\omega^2}{c^2} \bar{\mathbf{E}}_{\parallel}(\mathbf{r}, \omega) - \mathbf{grad}^{(2)} \mathbf{div}^{(2)} \bar{\mathbf{E}}_{\parallel} = -i\omega\mu_0 \bar{\mathbf{j}}_{\parallel}(\mathbf{r}, \omega) - \mu_0\omega^2 \bar{\mathbf{P}}_{\parallel}(\mathbf{r}, \omega)$$

Bei Vorliegen von Translationsinvarianz in einer Richtung können die verkoppelten vektoriellen Wellengleichungen (2.8) entkoppelt werden. Die Ausbreitung der senkrecht zueinander polarisierten Felder kann unabhängig berechnet werden. Die entsprechenden Polarisationen kürzt man mit ( $\parallel$  oder  $p$  oder TM) und ( $\perp$  oder  $s$  oder TE) ab.

## 2.2 Beschreibung der Medien - die Materialgleichungen

### 2.2.1 Grundsätzliches

Die Bestimmung der Zusammenhänge  $\mathbf{P}(\mathbf{E})$  und  $\mathbf{j}(\mathbf{E})$  erfordert i.a. die Lösung eines komplizierten Vielteilchenproblems in der Festkörpertheorie. Oftmals beschreiben jedoch phänomenologische Modelle diesen Zusammenhang ausreichend. Wir werden hier als einfaches Modell das Drude-Modell für freie und gebundene Ladungsträger kennenlernen. Freie Ladungsträger treten in Metallen und angeregten Halbleitern (Intrabandeffekte), gebundene Ladungsträger in Dielektrika und Halbleitern (Interbandeffekte) auf. Der Zusammenhang zwischen Ursache (elektrisches Feld) und Wirkung (induzierte Polarisation bzw. Strom) wird im Rahmen der linearen Resonanztheorie beschrieben. Wir klassifizieren die Materialeigenschaften am Beispiel der Polarisation. Die lineare Reaktion des Mediums kann im Zeit- oder im Frequenzraum beschrieben werden. Die die Reaktion vermittelnde Größe heißt im Zeitraum *Responsefunktion* und in Frequenzraum *Übertragungsfunktion*.

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &\longrightarrow \text{Medium (Responsefunktion)} \longrightarrow \mathbf{P}(\mathbf{r}, t) \\ \bar{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega) &\longrightarrow \text{Medium (Übertragungsfunktion)} \longrightarrow \bar{\mathbf{P}}(\mathbf{r}, \omega)\end{aligned}$$

#### 2.2.1.1 Definition der Begriffe

- linear:

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}, t) = \varepsilon_0 R(\mathbf{r}, t) \boxtimes \mathbf{E}(\mathbf{r}, t), \quad R(\mathbf{r}, t) - \text{Responsefunktion, } \boxtimes - \text{Operator}$$

$$\bar{\mathbf{P}}(\mathbf{r}, \omega) = \varepsilon_0 \chi(\mathbf{r}, \omega) \boxplus \bar{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega), \quad \chi(\mathbf{r}, \omega) - \text{Suszeptibilität, } \boxplus - \text{Operator}$$

$$\chi(\mathbf{r}, \omega) \xleftrightarrow{\text{FT}} R(\mathbf{r}, t)$$

- dispersiv (nichtinstantan)  $\longleftrightarrow$  nichtdispersiv (instantan):

$$\begin{aligned}\text{dispersiv} &\longrightarrow \chi(\mathbf{r}, \omega) \longleftrightarrow \mathbf{P}(\mathbf{r}, t) = f[\mathbf{E}(\mathbf{r}, t, t')] \\ \text{nichtdispersiv} &\longrightarrow \chi(\mathbf{r}) \longleftrightarrow \mathbf{P}(\mathbf{r}, t) = f[\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)]\end{aligned}$$

- homogen  $\longleftrightarrow$  inhomogen

$$\text{homogen} \longrightarrow \chi(\omega), R(t)$$

- isotrop  $\longleftrightarrow$  anisotrop

$$\text{anisotrop} \longrightarrow \chi_{ij}(\mathbf{r}, \omega) \quad R_{ij}(\mathbf{r}, t)$$

- lokal  $\longleftrightarrow$  nichtlokal

$$\text{nichtlokal} \longrightarrow \mathbf{P}(\mathbf{r}, t) = f[\mathbf{E}(\underline{\mathbf{r}}, t, t')]$$

### 2.2.1.2 Folgerungen für die Wellengleichungen aus den unterschiedlichen Materialgleichungen

Wir setzen die relevante Polarisation  $\bar{\mathbf{P}}(\mathbf{r}, \omega)$  in die Wellengleichung (ohne Stromterm)

$$\text{rot rot } \bar{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega) - \frac{\omega^2}{c^2} \bar{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega) = \mu_0 \omega^2 \bar{\mathbf{P}}(\mathbf{r}, \omega)$$

und in  $\bar{\mathbf{D}}(\mathbf{r}, \omega) = \varepsilon_0 \bar{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega) + \bar{\mathbf{P}}(\mathbf{r}, \omega)$  ein.

**a) linear, homogen, isotrop, nichtdispersiv**

$\chi(\mathbf{r}, \omega) = \chi$  skalare Konstante

$$\bar{\mathbf{P}}(\mathbf{r}, \omega) = \varepsilon_0 \chi \bar{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega) \quad \longleftrightarrow \quad \mathbf{P}(\mathbf{r}, t) = \varepsilon_0 \chi \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$$

$$\bar{\mathbf{D}}(\mathbf{r}, \omega) = \varepsilon_0 \varepsilon \bar{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega) \quad \longleftrightarrow \quad \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \varepsilon_0 \varepsilon \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \quad \rightarrow \varepsilon = 1 + \chi$$

$$R(t) = \int \chi(\omega) \exp(-i\omega t) d\omega = 2\pi \chi \delta(t) \quad \rightarrow \quad \text{instantan}$$

damit wird wegen  $\text{div } \bar{\mathbf{D}}(\mathbf{r}, \omega) = 0 \quad \text{div } \bar{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega) = 0$  und damit

$$\Delta \bar{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega) + \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon \bar{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega) = 0$$

$$\Delta \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) - \frac{\varepsilon}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = 0$$

Das Ergebnis ist 'unphysikalisch', da jedes Medium dispersiv ist. Gilt näherungsweise in einem Frequenzbereich, in dem Dispersion zu vernachlässigen ist.

**b) linear, homogen, isotrop, *dispersiv*  $\rightarrow \chi(\omega)$**

$$\bar{\mathbf{P}}(\mathbf{r}, \omega) = \varepsilon_0 \chi(\omega) \bar{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega),$$

$$\bar{\mathbf{D}}(\mathbf{r}, \omega) = \varepsilon_0 \varepsilon(\omega) \bar{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega)$$

$$\text{div } \bar{\mathbf{D}}(\mathbf{r}, \omega) = 0 \leadsto \text{div } \bar{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega) = 0 \text{ für } \varepsilon(\omega) \neq 0.$$

Daraus folgt die Helmholtzgleichung

$$\Delta \bar{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega) + \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon(\omega) \bar{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega) = 0$$

$\rightarrow$  Response hängt von Frequenz ab.

**c) linear, *inhomogen*, isotrop, dispersiv  $\rightarrow \chi(\mathbf{r}, \omega)$**

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{P}}(\mathbf{r}, \omega) &= \varepsilon_0 \chi(\mathbf{r}, \omega) \bar{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega), \\ \bar{\mathbf{D}}(\mathbf{r}, \omega) &= \varepsilon_0 \varepsilon(\mathbf{r}, \omega) \bar{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \bar{\mathbf{D}}(\mathbf{r}, \omega) &= \varepsilon_0 \varepsilon(\mathbf{r}, \omega) \operatorname{div} \bar{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega) + \varepsilon_0 \bar{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega) \operatorname{grad} \varepsilon(\mathbf{r}, \omega), \\ \operatorname{div} \bar{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega) &= -\frac{\operatorname{grad} \varepsilon(\mathbf{r}, \omega)}{\varepsilon(\mathbf{r}, \omega)} \bar{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega).\end{aligned}$$

Damit erhält man

$$\Delta \bar{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega) + \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon(\omega) \bar{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega) = -\operatorname{grad} \left\{ \frac{\operatorname{grad} \varepsilon(\mathbf{r}, \omega)}{\varepsilon(\mathbf{r}, \omega)} \bar{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega) \right\}$$

→ Kopplung der Feldkomponenten.

d) **linear, homogen, *anisotrop*, dispersiv** →  $\chi_{ij}(\omega)$

$$\begin{aligned}\bar{P}_i(\mathbf{r}, \omega) &= \varepsilon_0 \chi_{ij}(\omega) \bar{E}_j(\mathbf{r}, \omega) \\ \bar{D}_i(\mathbf{r}, \omega) &= \varepsilon_0 \varepsilon_{ij}(\omega) \bar{E}_j(\mathbf{r}, \omega).\end{aligned}$$

e) ***nichtlinear*, homogen, isotrop, dispersiv** →  $\chi(\omega, \bar{\mathbf{E}})$

$$\bar{\mathbf{P}}(\mathbf{r}, \omega) = \varepsilon_0 \chi(\mathbf{r}, \omega) \bar{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega) + \bar{\mathbf{P}}_{\text{NL}}(\bar{\mathbf{E}})$$

→ tritt auf für hohe Intensitäten.

Ähnliche Überlegungen lassen sich für den Strom  $\bar{\mathbf{j}}(\mathbf{r}, \omega)$  anstellen.

Im wesentlichen lassen sich zwei Fälle unterscheiden:

1. Beiträge gebundener Elektronen und Gitterschwingungen → typisch für Dielektrika und Halbleiter

- Gitterschwingungen oder Phononen

ionischer Teil (geladene Teilchen) der Materialresponse, große Massen ( $10^3 \times$  Elektronenmasse), kleine Schwingungen, verantwortlich für thermische Eigenschaften, einige spezielle Gitterschwingungen (Phononenmoden) tragen zu optischen Eigenschaften bei, optische und akustische Phononen, optische relevant, aber geringe Dispersion → constant, longitudinal und transversal, nur transversale koppeln mit Licht, longitudinale WW stärker → höhere Frequenzen

in Resonanznähe werden die Teilchen aus der Ruhelage bewegt → durch Verschiebung der Ladungsschwerpunkte entsteht ein Dipolmoment (Polarisationsdichte), das mit der Feldfrequenz schwingt → Abstrahlung eines Feldes → Überlagerung mit einfallendem Feld → Amplituden hängen vom Verhältnis der anregenden Frequenz zur Eigenfrequenz ab, Dispersion (unterschiedliche Reaktion) →  $\chi(\omega)$

- Elektronenübergänge

eigentlich quantentheoretisch, Teilchen von Valenzband in Leitungsband, Übergangsfrequenz, Vielteilcheneffekte, kann klassisch durch eine Schwingung gebundener Elektronen beschrieben werden, (Eigenfrequenzen der Ionen  $\omega_{0\text{ion}} \ll$  Eigenfrequenzen der Elektronen  $\omega_{0\text{el}}$ )  $\rightarrow \chi(\omega)$

2. Beiträge freier Elektronen  $\rightarrow$  typisch für Metalle und angeregte Halbleiter

relativ freie Elektronen  $\rightarrow$  Modell des freien Elektronengases (keine gegenseitige WW), Ladungsbalance durch Untergrund der Ionen, Stöße nur mit ruhenden Ionen  $\rightarrow \sigma(\omega)$

$\rightarrow$  die beiden Fälle werden einzeln behandelt und später zusammengeführt.

## 2.2.2 Die dielektrische Polarisation und die dielektrische Funktion

$\rightarrow$  Beiträge gebundener Teilchen (Ionen, Elektronen)  $\rightarrow$  Drude-Modell

zeitabhängiges Feld  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$  ruft eine Verschiebung  $\mathbf{s}(\mathbf{r}, t)$  für eine bestimmte Sorte von Atomen hervor  $\rightarrow$  Beschreibung als *Oszillator mit äußerer, treibender Kraft*

$$\ddot{\mathbf{s}}(\mathbf{r}, t) + g\dot{\mathbf{s}}(\mathbf{r}, t) + \omega_0^2 \mathbf{s}(\mathbf{r}, t) = -\frac{e}{m} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$$

mit der Resonanzfrequenz (elektronischer Übergang oder optische Gitterschwingung)  $\omega_0$  und der Dämpfung  $g$ . Das induzierte Dipolmoment ist

$$\mathbf{p}(\mathbf{r}, t) = -e\mathbf{s}(\mathbf{r}, t),$$

was auf die Dipoldichte oder dielektrische Polarisation

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}, t) = N\mathbf{p}(\mathbf{r}, t)$$

führt. Damit ergibt sich

$$\ddot{\mathbf{P}}(\mathbf{r}, t) + g\dot{\mathbf{P}}(\mathbf{r}, t) + \omega_0^2 \mathbf{P}(\mathbf{r}, t) = \frac{e^2 N}{m} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \varepsilon_0 f \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$$

mit der Oszillatorstärke

$$f = \frac{1}{\varepsilon_0} \frac{e^2 N}{m}.$$

Wir lösen die Gleichung im Fourierraum

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega) \exp(-i\omega t) d\omega, \quad \mathbf{P}(\mathbf{r}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\mathbf{P}}(\mathbf{r}, \omega) \exp(-i\omega t) d\omega$$

und erhalten

$$-\omega^2 \bar{\mathbf{P}}(\mathbf{r}, \omega) - ig\omega \bar{\mathbf{P}}(\mathbf{r}, \omega) + \omega_0^2 \bar{\mathbf{P}}(\mathbf{r}, \omega) = \varepsilon_0 f \bar{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega)$$

$$\bar{\mathbf{P}}(\mathbf{r}, \omega) = \frac{\varepsilon_0 f}{(\omega_0^2 - \omega^2) - ig\omega} \bar{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega).$$

Im Falle mehrerer Resonanzen ergibt sich

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{P}}(\mathbf{r}, \omega) &= \varepsilon_0 \sum_j \left\{ \frac{f_j}{(\omega_{0j}^2 - \omega^2) - ig_j \omega} \right\} \bar{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega) \\ &= \varepsilon_0 \chi(\omega) \bar{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega)\end{aligned}$$

mit der komplexen, frequenzabhängigen Suszeptibilität

$$\chi(\omega) = \sum_j \left\{ \frac{f_j}{(\omega_{0j}^2 - \omega^2) - ig_j \omega} \right\} = \chi_{\text{Phon}}(\omega) + \chi_{\text{Elek}}(\omega).$$

Für die dielektrische Verschiebung kann man dann schreiben

$$\bar{\mathbf{D}}(\mathbf{r}, \omega) = \varepsilon_0 \bar{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega) + \varepsilon_0 \chi(\omega) \bar{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega) = \varepsilon_0 \varepsilon(\omega) \bar{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega),$$

wobei  $\varepsilon(\omega)$  die komplexe dielektrische Funktion darstellt. Das wichtigste Ergebnis besteht darin, daß die dielektrische Response im Frequenzraum (Übertragungsfunktion) komplex und frequenzabhängig ist. Die Auswirkungen auf das zeitliche Verhalten diskutieren wir später, geben jedoch die zeitliche Responsefunktion  $R(t)$  an

$$\begin{aligned}R(t) &\doteq \frac{1}{2\pi} \text{FT} [\chi(\omega)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \chi(\omega) \exp(-i\omega t) d\omega \\ &= \frac{f}{\nu_0} \exp\left(-\frac{g}{2}t\right) \sin \nu_0 t, \quad \nu_0^2 = \omega_0^2 - \frac{g^2}{4}.\end{aligned}$$

### 2.2.3 Der Konduktionsstrom und die Leitfähigkeit

→ Beitrag freier Ladungsträger (wechselwirkungsfreies Elektronengas über positiv geladenem Hintergrund), getriebener Oszillator mit Resonanzfrequenz  $\omega_0 = 0$  (keine rücktreibende Kraft)

$$\ddot{\mathbf{s}}(\mathbf{r}, t) + g\dot{\mathbf{s}}(\mathbf{r}, t) = -\frac{e}{m} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t),$$

wobei die Elektronenmasse  $m$  im Halbleiter durch die effektive Masse  $m_{\text{eff}}$  zu ersetzen ist. Die Dämpfung  $g$  hängt mit Stößen der Elektronen mit den Rumpfen zusammen. Der induzierte Strom ergibt sich zu

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = -Ne\dot{\mathbf{s}}(\mathbf{r}, t)$$

und damit

$$\dot{\mathbf{j}}(\mathbf{r}, t) + g\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = \frac{e^2 N}{m} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \varepsilon_0 f \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \varepsilon_0 \omega_p^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$$

mit der Plasmafrequenz

$$\omega_p^2 = f = \frac{1}{\varepsilon_0} \frac{e^2 N}{m}.$$

Im Fourierraum ergibt sich

$$-i\omega \bar{\mathbf{j}}(\mathbf{r}, \omega) + g\bar{\mathbf{j}}(\mathbf{r}, \omega) = \varepsilon_0 \omega_p^2 \bar{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega)$$

$$\bar{\mathbf{j}}(\mathbf{r}, \omega) = \frac{\varepsilon_0 \omega_p^2}{g - i\omega} \bar{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega) = \sigma(\omega) \bar{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega).$$

mit der komplexen Leitfähigkeit

$$\sigma(\omega) = \frac{\varepsilon_0 \omega_p^2}{g - i\omega} = -i \frac{\varepsilon_0 \omega \omega_p^2}{-\omega^2 - ig\omega}.$$

### Bemerkung zur Plasmafrequenz:

Wir berechnen die Bewegung einer externen Ladungswolke  $\rho_{\text{ext}}$  in ihrem eigenen Feld:

$$\dot{\mathbf{j}}(\mathbf{r}, t) + g\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = \varepsilon_0 \omega_p^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$$

und

$$\varepsilon_0 \mathbf{div} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \rho_{\text{ext}}.$$

Divergenzbildung ergibt

$$\mathbf{div} \dot{\mathbf{j}}(\mathbf{r}, t) + g \mathbf{div} \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = \varepsilon_0 \omega_p^2 \mathbf{div} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \omega_p^2 \rho_{\text{ext}}.$$

Benutzt man die Kontinuitätsgleichung

$$\dot{\rho}_{\text{ext}} + \mathbf{div} \mathbf{j} = 0,$$

ergibt sich

$$\begin{aligned} -\ddot{\rho}_{\text{ext}} - g\dot{\rho}_{\text{ext}} &= \omega_p^2 \rho_{\text{ext}} \\ \ddot{\rho}_{\text{ext}} + g\dot{\rho}_{\text{ext}} + \omega_p^2 \rho_{\text{ext}} &= 0, \end{aligned}$$

d.h. die Plasmafrequenz  $\omega_p^2$  ist die Eigenfrequenz der im eigenen Feld schwingenden Ladungswolke.

## 2.2.4 Die komplexe dielektrische Funktion

Wir setzen die Materialgleichungen  $\bar{\mathbf{j}}(\mathbf{r}, \omega)$  und  $\bar{\mathbf{P}}(\mathbf{r}, \omega)$  in die Wellengleichung (2.8) ein und erhalten

$$\begin{aligned} \mathbf{rot} \mathbf{rot} \bar{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega) - \frac{\omega^2}{c^2} \bar{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega) &= i\omega \mu_0 \bar{\mathbf{j}}(\mathbf{r}, \omega) + \mu_0 \omega^2 \bar{\mathbf{P}}(\mathbf{r}, \omega) \\ &= [\mu_0 \varepsilon_0 \omega^2 \chi(\omega) + i\omega \mu_0 \sigma(\omega)] \bar{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{rot} \mathbf{rot} \bar{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega) &= \frac{\omega^2}{c^2} \left\{ 1 + \chi(\omega) + \frac{i}{\omega \varepsilon_0} \sigma(\omega) \right\} \bar{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega) \\ &= \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon(\omega) \bar{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega) \end{aligned}$$

mit der komplexen dielektrischen Funktion

$$\begin{aligned} \varepsilon(\omega) &= 1 + \chi(\omega) + \frac{i}{\omega \varepsilon_0} \sigma(\omega) = \varepsilon'(\omega) + i\varepsilon''(\omega) \\ &= 1 + \sum_j \left\{ \frac{f_j}{(\omega_{0j}^2 - \omega^2) - ig_j \omega} \right\} + \frac{\omega_p^2}{-\omega^2 - ig\omega}, \end{aligned}$$

die die Beiträge des Vakuums, der Gitterschwingungen, der gebundenen und freien Elektronen enthält.

Speziell gilt für die relevanten Materialien im IR und sichtbaren Spektralbereich:

- Dielektrika, Isolatoren in der Nähe einer Gitterresonanz (IR-Spektralbereich)

$$\begin{aligned}\varepsilon(\omega) &= 1 + \sum_j \left\{ \frac{f_j}{(\omega_{0j}^2 - \omega^2) - ig_j\omega} \right\} + \frac{f}{(\omega_0^2 - \omega^2) - ig\omega} \\ &= \varepsilon_\infty + \frac{f}{(\omega_0^2 - \omega^2) - ig\omega},\end{aligned}$$

wobei  $\varepsilon_\infty$  den Beitrag des Vakuums und aller elektronischen Übergänge beschreibt.

Damit erhält man

$$\varepsilon(\omega) = \Re\varepsilon(\omega) + i \Im\varepsilon(\omega) = \varepsilon'(\omega) + i \varepsilon''(\omega)$$

$$\varepsilon'(\omega) = \varepsilon_\infty + \frac{f}{\omega_0^2 - \omega^2} \frac{(\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + g^2\omega^2},$$

$$\varepsilon''(\omega) = \frac{gf\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + g^2\omega^2}.$$

Die Lage der Resonanzen wird durch  $\omega_0$  und die Resonanzbreite durch  $g$  bestimmt. Die Resonanz trägt auch zu statischer Dielektrizitätskonstante

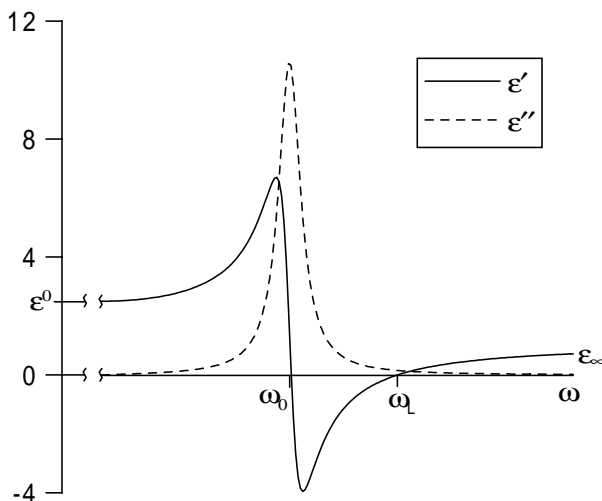
$$\varepsilon^0 \doteq \varepsilon(0) = \varepsilon_\infty + \frac{f}{\omega_0^2}$$

bei. Die Oszillatorstärke kann damit in den Formeln entsprechend

$$f = (\varepsilon^0 - \varepsilon_\infty) \omega_0^2$$

ersetzt werden. Bei der sog. longitudinalen Frequenz ( $\omega = \omega_L$ ) verschwindet der Realteil der dielektrischen Funktion, d.h.  $\varepsilon'(\omega_L) = 0$ .  $\varepsilon''(\omega) \neq 0$  ist immer mit einer Absorption verbunden, d.h. Absorption und Dispersion treten immer gemeinsam auf.

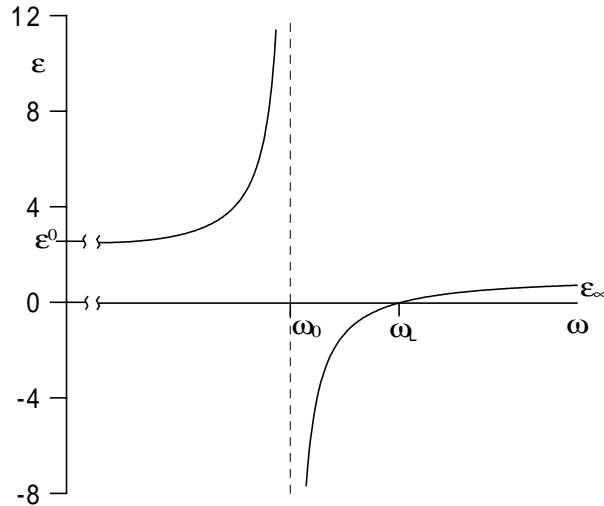
Isolierte Resonanz





Man beachte, daß in Resonanznähe  $\varepsilon'(\omega) < 0$  (führt auf Dämpfung ohne Absorption) sein kann. Normale Dispersion liegt für  $\partial\varepsilon'(\omega)/\partial\omega > 0$ , anormale für  $\partial\varepsilon'(\omega)/\partial\omega > 0 < 0$  vor. Für eine extrem scharfe 'Resonanz' gilt  $g \rightarrow 0$ .

Scharfe Resonanz



Hier kann man einen Zusammenhang zwischen den beiden charakteristischen Frequenzen  $\omega_0$  und  $\omega_L$ , die sog. *Lyddane-Sachs-Teller* Relation, angeben

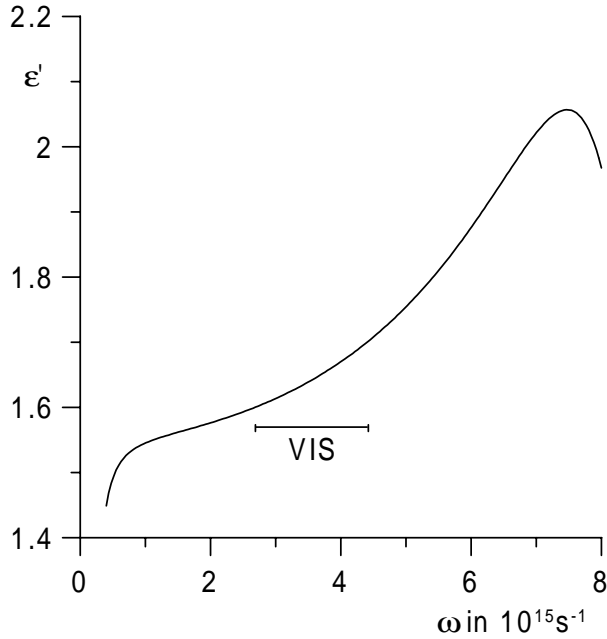
$$\omega_L = \omega_0 \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_\infty}}.$$

- Dielektrische Medien im sichtbaren Spektralbereich kann man vorteilhaft mit einem sog. Doppelresonanzmodell beschreiben, wobei jeweils eine Gitterschwingung im IR und ein elektronischer 'Übergang' berücksichtigt werden

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon_\infty + \frac{f_G}{(\omega_{0G}^2 - \omega^2) - ig_G\omega} + \frac{f_e}{(\omega_{0e}^2 - \omega^2) - ig_e\omega},$$

wobei typische Werte für ein Fluoridglas sind:  $\sqrt{f_G} = 1.22 \times 10^{14} s^{-1}$ ,  $g_G = 0.9 \times 10^{14} s^{-1}$ ,  $\omega_{0G} = 1.74 \times 10^{14} s^{-1}$ ,  $\sqrt{f_e} = 6.7 \times 10^{15} s^{-1}$ ,  $g_e = 2.8 \times 10^{15} s^{-1}$ ,  $\omega_{0e} = 0.9 \times 10^{16} s^{-1}$ . In  $\varepsilon_\infty$  sind mögliche andere weit entfernte Resonanzen enthalten, u.U. kann hier  $\varepsilon_\infty = 1$  sein.

Zwei Resonanzen



- Halbleiter

$$\begin{aligned}\varepsilon(\omega) &= 1 + \sum_j \left\{ \frac{f_j}{(\omega_{0j}^2 - \omega^2) - ig_j\omega} \right\} + \frac{f}{(\omega_0^2 - \omega^2) - ig\omega} + \frac{\omega_{\text{phl}}^2}{-\omega^2 - ig\omega}, \\ &= \varepsilon_\infty + \frac{f}{(\omega_0^2 - \omega^2) - ig\omega} + \frac{\omega_{\text{phl}}^2}{-\omega^2 - ig\omega}\end{aligned}$$

d.h. im Halbleiter treten neben den Gitterschwingungsbeiträgen im fernen IR, elektronische Übergänge im nahen IR oder im Sichtbaren (wide-gap Halbleiter) auf. Daneben sind im angeregten HL die Beiträge der Elektronen im Leitungsband zu beachten.  $\omega_{\text{phl}}$  ist im allgemeinen wesentlich kleiner als  $\omega_{\text{pmet}} \approx 10^{16} \text{ s}^{-1} > \omega$  und ist im IR angesiedelt ( $\omega_{\text{phl}} = 10^{14} \text{ s}^{-1} < \omega$ ).

- Metalle

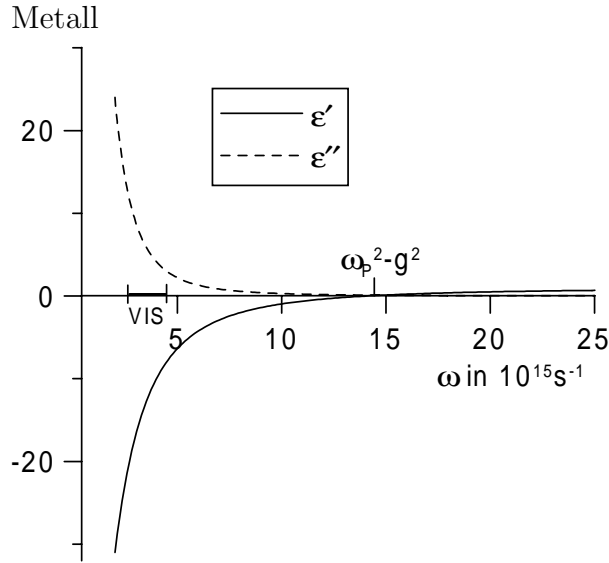
$$\varepsilon(\omega) = 1 - \frac{\omega_{\text{pmet}}^2}{\omega^2 + ig\omega}.$$

Hier ist ( $\omega_{\text{pmet}} \gg \omega$ ). Damit weist die dielektrische Funktion einen großen negativen Realteil auf. Als Beispiel möge Aluminium dienen:

1.  $\lambda = 500 \text{ nm}$ ,  $\varepsilon' = -32$ ,  $\varepsilon'' = 7.3$
2.  $\lambda = 700 \text{ nm}$ ,  $\varepsilon' = -46$ ,  $\varepsilon'' = 20$

Die Beiträge freier Elektronen (sowohl im Halbleiter als auch im Metall) führen auf

$$\varepsilon'(\omega) = 1 - \frac{\omega_{\text{p}}^2}{\omega^2 + g^2}, \quad \varepsilon''(\omega) = \frac{g\omega_{\text{p}}^2}{\omega(\omega^2 + g^2)}.$$



### 2.2.5 Dispersion im Glas

Glas spielt als optisches Material eine herausragende Rolle. Im Gegensatz zu kristallinen Medien ist Glas amorph. Man unterscheidet zwischen *Kronglas*, das im wesentlichen aus Soda, Kalk und Siliziumdioxid besteht, niedrigbrechend ist ( $n = 1.42 \dots 1.53$ ) und eine geringe Dispersion aufweist und *Flintglas*, das aus Bleioxid und Siliziumdioxid besteht, hochbrechend ist ( $n = 1.5 \dots 1.76$ ) und eine starke Dispersion aufweist. Zur Dispersion des Glases tragen phononische und elektronische Anteile bei, deren Resonanzfrequenzen jedoch weit von den optischen Frequenzen entfernt sind ( $\omega_{0p} \ll \omega \ll \omega_{0e}$ ), d.h. Absorptionseffekte können vernachlässigt werden ( $\varepsilon'' = 0$ ). Es gilt damit im Doppelresonanzmodell

$$\varepsilon'(\omega) - 1 = \sum_j \frac{f_j}{(\omega_{0j}^2 - \omega^2)}, j = p, e$$

mit  $\omega = 2\pi c/\lambda$  folgt

$$\varepsilon'(\lambda) - 1 = \sum_j \frac{s_j \lambda^2}{(\lambda^2 - \lambda_j^2)}, \quad s_j = \frac{f_j \lambda_j^2}{4\pi^2 c^2}$$

- elektronischer Beitrag  $\rightarrow \lambda_e^2 \ll \lambda^2$

$$[\varepsilon'(\lambda) - 1]_e = \frac{s_e}{\left(1 - \frac{\lambda_e^2}{\lambda^2}\right)} \approx s_e \left(1 + \frac{\lambda_e^2}{\lambda^2} + \frac{\lambda_e^4}{\lambda^4} + \dots\right).$$

- phononischer Beitrag  $\rightarrow \lambda_p^2 \gg \lambda^2$

$$[\varepsilon'(\lambda) - 1]_p = \frac{s_p \lambda^2}{(\lambda^2 - \lambda_p^2)} = -\frac{s_p \lambda^2}{\lambda_p^2} \left(1 - \frac{\lambda^2}{\lambda_p^2}\right)^{-1} \approx -\frac{s_p \lambda^2}{\lambda_p^2}.$$

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned}\varepsilon'(\lambda) - 1 &= [\varepsilon'(\lambda) - 1]_p + [\varepsilon'(\lambda) - 1]_e \\ &\approx -\frac{s_p \lambda^2}{\lambda_p^2} + s_e \left( 1 + \frac{\lambda_e^2}{\lambda^2} + \frac{\lambda_e^4}{\lambda^4} + \dots \right) \\ &\approx A - B\lambda^2 + \frac{C}{\lambda^2} + \frac{D}{\lambda^4}.\end{aligned}$$

oder

$$n \approx \tilde{A} + \frac{\tilde{B}}{\lambda^2}, \quad \frac{dn}{d\lambda} \approx -\frac{2\tilde{B}}{\lambda^3}.$$

## 2.2.6 Die Materialgleichungen im Zeitbereich

→ die Responsefunktion oder Greensche Funktion

Im Frequenzraum gilt:

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{D}}(\mathbf{r}, \omega) &= \varepsilon_0 \varepsilon(\omega) \bar{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega) \\ \bar{\mathbf{P}}(\mathbf{r}, \omega) &= \varepsilon_0 \chi(\omega) \bar{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega).\end{aligned}$$

Wir beschränken uns hier auf den Zusammenhang zwischen Polarisation und elektrischem Feld im Zeitraum. Wir führen die Responsefunktion (Greensche Funktion)  $R(t)$  folgendermaßen ein

$$R(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \chi(\omega) \exp(-i\omega t) d\omega.$$

(Man beachte den zur FT zusätzlichen Faktor  $\frac{1}{2\pi}$ ). Mit

$$\begin{aligned}\chi(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} R(t) \exp(i\omega t) dt \\ \bar{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \exp(i\omega t) dt\end{aligned}$$

erhält man

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{P}(\mathbf{r}, t) \exp(i\omega t) dt = \varepsilon_0 \frac{1}{2\pi} \int \int_{-\infty}^{\infty} R(t') \exp(i\omega t') \mathbf{E}(\mathbf{r}, t'') \exp(i\omega t'') dt' dt''$$

und mit der Transformation  $t' = t - t''$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\omega t) dt \left[ \mathbf{P}(\mathbf{r}, t) - \varepsilon_0 \int_{-\infty}^{\infty} R(t - t'') \mathbf{E}(\mathbf{r}, t'') dt'' \right] = 0$$

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}, t) = \varepsilon_0 \int_{-\infty}^t R(t - t'') \mathbf{E}(\mathbf{r}, t'') dt''.$$

Für  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t'') = \delta(t'' - t_0)$  ergibt sich  $\mathbf{P}(\mathbf{r}, t) = \varepsilon_0 R(t - t_0)$ , d.h. die Response- oder Greensche Funktion.

**Beispiele:**

- Dielektrika

$$R(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f}{\omega_0^2 - \omega^2 - ig\omega} \exp(-i\omega t) d\omega,$$

Anwendung des Residuensatzes ergibt

$$R(t) \sim \exp\left(-\frac{g}{2}t\right) \frac{1}{\Omega} \sin \Omega t, \quad \Omega = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{g^2}{4}}.$$

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}, t) \sim \int_{-\infty}^t \exp\left[-\frac{g}{2}(t-t')\right] \sin[\Omega(t-t')] \mathbf{E}(\mathbf{r}, t') dt'$$

- Metall

$$R(t) \sim \exp(-gt)$$

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}, t) \sim \int_{-\infty}^t \exp[-g(t-t')] \mathbf{E}(\mathbf{r}, t') dt'$$

Die Dispersionstheorie ist ein Beispiel für eine lineare Übertragungstheorie. Eine lineare Differentialgleichung mit dem Differentialoperator  $\hat{\mathbf{L}}_D$

$$\hat{\mathbf{L}}_D W(t) = U(t)$$

hat im Zeitraum die Lösung

$$W(t) = \int_{-\infty}^t h(t-t') U(t') dt',$$

wobei  $U$  das Ursachenfeld,  $W$  Wirkungsfeld und  $R$  die Response- oder Greensche Funktion darstellen, wobei gilt

$$\hat{\mathbf{L}}_D h(t-t') = -\delta(t-t').$$

Im Fourierraum gilt

$$\hat{\mathbf{L}}_a \bar{W}(\omega) = \bar{U}(\omega),$$

$$\bar{W}(\omega) = \bar{h}(\omega) \bar{U}(\omega) \doteq H(\omega) \bar{U}(\omega)$$

wobei  $\hat{\mathbf{L}}_a$  ein algebraischer Operator und  $H(\omega)$  die Übertragungsfunktion des Systems ist. Es gilt

$$h = \frac{1}{2\pi} \text{FT}[H].$$

## 2.3 Die Energiestromdichte und Energiebilanz

### 2.3.1 Der zeitlich gemittelte Poyntingvektor

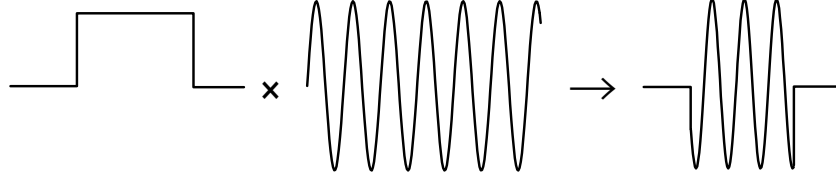
Der Energiefluß eines elektromagnetischen Feldes wird durch den Poyntingvektor  $\mathbf{S}$ , der Energiefluß durch eine Fläche (Detektor) durch  $\mathbf{S} \cdot \mathbf{n}$  beschrieben, wobei  $\mathbf{n}$  der Normalenvektor zur Fläche ist. Der momentane Energiefluß ist definiert als

$$\mathbf{S}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_r(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{H}_r(\mathbf{r}, t).$$

Folgende Zeitskalen treten auf:

- Die Schwingungsdauer ist gegeben durch  $T_0 = 2\pi/\omega_0 \leq 10^{-14}$  s.
- Für die Impulsdauer  $T_p$  gilt i.a.  $T_p \gg T_0$ .
- Für die Meßzeit  $T_m$  gilt i.a.  $T_m \gg T_0, T_m \geq T_p$

→ der Detektor kann im allgemeinen den schnellen Oszillationen nicht folgen und mißt den zeitlichen Mittelwert. Man schreibt die Felder als Produkt aus langsam veränderlichen Amplituden (Einhüllende) und schnellen Oszillationen



$$\mathbf{E}_r(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2} \left[ \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) \exp(-i\omega_0 t) + c.c. \right].$$

Damit ergibt sich für den Energiefluß (instantaner Poyntingvektor)

$$\begin{aligned} \mathbf{S}(\mathbf{r}, t) &= \mathbf{E}_r(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{H}_r(\mathbf{r}, t) \\ &= \frac{1}{4} \left[ \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) \times \tilde{\mathbf{H}}^*(\mathbf{r}, t) + \tilde{\mathbf{E}}^*(\mathbf{r}, t) \times \tilde{\mathbf{H}}(\mathbf{r}, t) \right] \\ &\quad + \frac{1}{4} \left[ \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) \times \tilde{\mathbf{H}}(\mathbf{r}, t) \exp(-2i\omega_0 t) + \tilde{\mathbf{E}}^*(\mathbf{r}, t) \times \tilde{\mathbf{H}}^*(\mathbf{r}, t) \exp(2i\omega_0 t) \right] \\ &= \frac{1}{2} \Re \left[ \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) \times \tilde{\mathbf{H}}^*(\mathbf{r}, t) \right] + \frac{1}{2} \Re \left[ \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) \times \tilde{\mathbf{H}}(\mathbf{r}, t) \right] \cos 2\omega_0 t \\ &\quad + \frac{1}{2} \Im \left[ \tilde{\mathbf{E}}^*(\mathbf{r}, t) \times \tilde{\mathbf{H}}^*(\mathbf{r}, t) \right] \sin 2\omega_0 t. \end{aligned}$$

Der Meßprozeß stellt eine zeitliche Mittelung von  $\mathbf{S}(\mathbf{r}, t)$  dar

$$\langle \mathbf{S}(\mathbf{r}, t) \rangle = \frac{1}{2T_m} \int_{-T_m}^{T_m} \mathbf{S}(\mathbf{r}, t) dt.$$

Die Integration führt zum Verschwinden der schnell oszillierenden Anteile

$$\langle \mathbf{S}(\mathbf{r}, t) \rangle = \frac{1}{2} \frac{1}{2T_m} \int_{-T_m}^{T_m} \Re \left[ \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) \times \tilde{\mathbf{H}}^*(\mathbf{r}, t) \right] dt.$$

Für stationäre (monochromatische) Felder

$$\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) = \bar{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega), \tilde{\mathbf{H}}(\mathbf{r}, t) = \bar{\mathbf{H}}(\mathbf{r}, \omega)$$

vereinfacht sich die Beziehung zu

$$\langle \mathbf{S}(\mathbf{r}, t) \rangle = \frac{1}{2} \Re \left[ \bar{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega) \times \bar{\mathbf{H}}^*(\mathbf{r}, \omega) \right].$$

Im allgemeinen bezeichnet man

$$I = |\langle \mathbf{S}(\mathbf{r}, t) \rangle|$$

als die optische Intensität. Bei der Messung wird i.a. die Phaseninformation zerstört.

### 2.3.2 Die zeitlich gemittelte Energiebilanz

→ hier nur stationäre Felder

Aus den Maxwell-Gleichungen erhält man

$$\frac{\partial}{\partial t} \varepsilon_0 \mathbf{E}_r^2(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial}{\partial t} \mu_0 \mathbf{H}_r^2(\mathbf{r}, t) + \mathbf{div} [\mathbf{E}_r(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{H}_r(\mathbf{r}, t)] = - [\mathbf{j}_r(\mathbf{r}, t) + \dot{\mathbf{P}}_r(\mathbf{r}, t)] \cdot \mathbf{E}_r(\mathbf{r}, t).$$

Zeitliche Mittelung ergibt für die linke Seite

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle \varepsilon_0 \mathbf{E}_r^2(\mathbf{r}, t) + \mu_0 \mathbf{H}_r^2(\mathbf{r}, t) \rangle + \mathbf{div} [\langle \mathbf{E}_r(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{H}_r(\mathbf{r}, t) \rangle] = \frac{1}{2} \mathbf{div} \{ \Re [\bar{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega) \times \bar{\mathbf{H}}^*(\mathbf{r}, \omega)] \}.$$

Für die rechte Seite erhalten wir

$$\begin{aligned} & - \langle [\mathbf{j}_r(\mathbf{r}, t) + \dot{\mathbf{P}}_r(\mathbf{r}, t)] \cdot \mathbf{E}_r(\mathbf{r}, t) \rangle \\ &= - \frac{1}{4} \langle [\sigma \bar{\mathbf{E}} \exp(-i\omega t) - i\omega \varepsilon_0 \chi \bar{\mathbf{E}} \exp(-i\omega t) + c.c.] [\bar{\mathbf{E}} \exp(-i\omega t) + c.c.] \rangle \\ &= - \frac{1}{4} \left\langle \left[ -i\omega \varepsilon_0 \left( \chi + i \frac{\sigma}{\omega \varepsilon_0} \right) \bar{\mathbf{E}} \exp(-i\omega t) + c.c. \right] [\bar{\mathbf{E}} \exp(-i\omega t) + c.c.] \right\rangle \\ &= \frac{1}{4} i\omega \varepsilon_0 [\varepsilon(\omega) - 1] \bar{\mathbf{E}} \bar{\mathbf{E}}^* + c.c. = \frac{1}{4} i\omega \varepsilon_0 [\varepsilon'(\omega) - 1 + i\varepsilon''(\omega)] \bar{\mathbf{E}} \bar{\mathbf{E}}^* + c.c. \\ &= - \frac{1}{2} \omega \varepsilon_0 \varepsilon''(\omega) \bar{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega) \bar{\mathbf{E}}^*(\mathbf{r}, \omega). \end{aligned}$$

Es gilt also

$$\mathbf{div} \langle \mathbf{S} \rangle = - \frac{1}{2} \omega \varepsilon_0 \varepsilon''(\omega) \bar{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega) \bar{\mathbf{E}}^*(\mathbf{r}, \omega).$$

Senken des Energieflusses ergeben sich damit für nichtverschwindenden Imaginärteil der dielektrischen Funktion, also in der Nähe von Materialresonanzen, d.h. Materialresonanzen sind immer mit einem Energieverlust des elektromagnetischen Feldes verbunden → Absorption.

## 2.4 Die Kramers–Kronigsche Dispersionsrelation

Wir zeigen, daß in einem linearen System unter bestimmten Bedingungen Real- und Imaginärteil der Übertragungsfunktion durch eine Intergraltransformation verbunden sind. Insbesondere wird das für die dielektrische Suszeptibilität (oder die dielektrische Funktion) gelten.

lineares Übertragungssystem:

$U(t')$	$\rightarrow$	$h(t, t')$	$\rightarrow$	$W(t)$
URSACHE		RESPONSEFUNKTION		WIRKUNG
$\mathbf{E}(t')$	$\rightarrow$	$R(t, t')$	$\rightarrow$	$\mathbf{P}(t)$
$\mathbf{E}(t')$	$\rightarrow$	$\tilde{R}(t, t')$	$\rightarrow$	$\mathbf{D}(t)$

speziell:

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(t) &= \varepsilon_0 \int_{-\infty}^t R(t-t') \mathbf{E}(t') dt', \\ \mathbf{D}(t) &= \varepsilon_0 \int_{-\infty}^t \tilde{R}(t-t') \mathbf{E}(t') dt'\end{aligned}$$

mit

$$\tilde{R}(t-t') = \delta(t-t') + R(t-t').$$

Definition der Voraussetzungen:

$$\begin{aligned}W(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(t, t') U(t') dt' && \rightarrow \text{linear} \\ &= \int_{-\infty}^t h(t, t') U(t') dt' && \rightarrow \text{kausal} \\ &= \int_{-\infty}^t h(t-t') U(t') dt' && t' = t - \tau \\ &= \int_0^{\infty} h(\tau) U(t-\tau) d\tau && \rightarrow \text{zeitinvariant}\end{aligned}$$

mit  $h(\tau)$  als Response- und  $H(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) \exp(i\omega\tau) d\tau$  als Übertragungsfunktion. Für die (reelle) dielektrische Polarisierung gilt dann

$$\mathbf{P}_r(\mathbf{r}, t) = \varepsilon_0 \int_{-\infty}^t R(\tau) \mathbf{E}_r(\mathbf{r}, t-\tau) d\tau,$$

damit ist  $R(\tau)$  reell. Die K.-K.-Dispersionsrelation besagt nun, daß es eine Beziehung zwischen Real- und Imaginärteil von  $H(\omega)$  (oder hier:  $\chi(\omega)$ ) gibt, wenn diese vier Bedingungen erfüllt sind.

Folgerungen aus diesen Voraussetzungen:

- Realität

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega) \exp(-i\omega t) d\omega$$

aus

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}^*(\mathbf{r}, t)$$

folgt

$$\bar{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega) = \bar{\mathbf{E}}^*(\mathbf{r}, -\omega),$$

d.h. nur positive Frequenzen sind relevant.

- Linearität

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{P}}(\mathbf{r}, \omega) &= \varepsilon_0 \chi(\omega) \bar{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega), \\ \bar{\mathbf{P}}^*(\mathbf{r}, \omega) &= \varepsilon_0 \chi^*(\omega) \bar{\mathbf{E}}^*(\mathbf{r}, \omega), \\ \bar{\mathbf{P}}(\mathbf{r}, \omega) &= \varepsilon_0 \chi^*(-\omega) \bar{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega),\end{aligned}$$



damit

$$\chi(\omega) = \chi^*(-\omega)$$

oder

$$\begin{aligned}\Re \chi(\omega) &= \Re \chi(-\omega) \\ \Im \chi(\omega) &= -\Im \chi(-\omega).\end{aligned}$$

→ konsistent mit Drude-Formeln.

- Kausalität

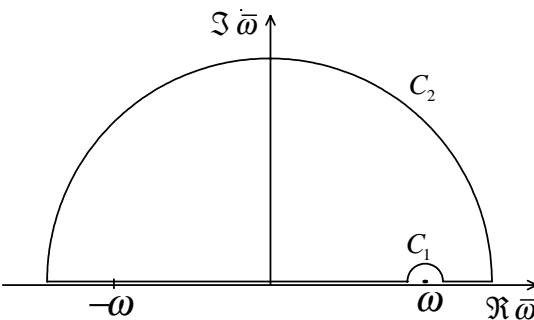
$$\chi(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau) \exp(i\omega\tau) d\tau = \int_0^{\infty} R(\tau) \exp(i\omega\tau) d\tau,$$

da  $R(\tau) = 0$  für  $\tau < 0$ .

analytische Fortsetzung:  $\omega = \omega' + i\omega'' \rightarrow$  da  $\tau > 0$  und  $R(\tau)$  endlich  $\curvearrowright \chi(\omega)$  ist in der oberen Halbebene analytisch.

$$\chi(\omega) = \int_0^{\infty} R(\tau) \exp(i\omega'\tau) \exp(-\omega''\tau) d\tau.$$

**Ableitung:** Man berechne das Integral

$$\int_C \frac{\chi(\bar{\omega})}{\bar{\omega} - \omega} d\bar{\omega},$$


wobei  $C$  den in der Abbildung dargestellten Integrationsweg entspricht. Für reelles  $\omega$  ist der Intergrand analytisch und für  $\bar{\omega} \rightarrow i\omega''$  verschwindet der Beitrag zum Integral. Wir haben also:

$$\begin{aligned}0 &= \int_C \frac{\chi(\bar{\omega})}{\bar{\omega} - \omega} d\bar{\omega} \\ &= \oint \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\chi(\bar{\omega})}{\bar{\omega} - \omega} d\bar{\omega} + \int_{C_1} \frac{\chi(\bar{\omega})}{\bar{\omega} - \omega} d\bar{\omega} + \int_{C_2} \frac{\chi(\bar{\omega})}{\bar{\omega} - \omega} d\bar{\omega} \\ &= \oint \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\chi(\bar{\omega})}{\bar{\omega} - \omega} d\bar{\omega} + \lim_{\rho \rightarrow 0} [i\chi(\omega)] \int_{-\pi}^0 \frac{\rho \exp(i\varphi)}{\rho \exp(i\varphi)} d\varphi + 0 \\ &= \oint \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\chi(\bar{\omega})}{\bar{\omega} - \omega} d\bar{\omega} - i\pi\chi(\omega) + 0\end{aligned}$$

und damit die vorläufige Form der Dispersionsrelation

$$\chi(\omega) = -\frac{i}{\pi} \oint \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\chi(\bar{\omega})}{\bar{\omega} - \omega} d\bar{\omega},$$

d.h. eine Beziehung zwischen Real- und Imaginärteil. Mit  $\Re\chi(\omega) = \chi'(\omega)$  und  $\Im\chi(\omega) = \chi''(\omega)$  folgt

$$\chi'(\omega) = \frac{1}{\pi} \wp \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\chi''(\bar{\omega})}{\bar{\omega} - \omega} d\bar{\omega},$$

$$\chi''(\omega) = -\frac{1}{\pi} \wp \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\chi'(\bar{\omega})}{\bar{\omega} - \omega} d\bar{\omega}.$$

Die endgültige Form erhält man, wenn man  $\chi'(\omega) = \chi'(-\omega)$  und  $\chi''(\omega) = -\chi''(-\omega)$  ausnutzt und die dielektrische Funktion  $\chi(\omega) = \varepsilon(\omega) - 1 = [\varepsilon'(\omega) - 1] + i\varepsilon''(\omega)$  einführt

$$\varepsilon'(\omega) - 1 = \frac{2}{\pi} \wp \int_0^{\infty} \frac{\bar{\omega} \varepsilon''(\bar{\omega})}{\bar{\omega}^2 - \omega^2} d\bar{\omega},$$

$$\varepsilon''(\omega) = -\frac{2}{\pi} \omega \wp \int_0^{\infty} \frac{[\varepsilon'(\bar{\omega}) - 1]}{\bar{\omega}^2 - \omega^2} d\bar{\omega}.$$

$\wp \int_{-\infty}^{\infty}$  bezeichnet ein Hauptwertintegral. Physikalisch sagen die KKD aus, daß die Dispersion eines Mediums durch die Absorption hervorgerufen wird, d.h., die Kenntnis des *vollständigen* Absorptionsspektrums ist zur Bestimmung der dielektrischen Funktion bei *einer* Frequenz erforderlich. Oftmals reicht jedoch das Spektrum in der Nähe der interessierenden Frequenz aus.

Für eine unendlich schmale Absorptionslinie  $\varepsilon''(\omega) = A\delta(\omega - \omega_0)$  erhält man

$$\varepsilon'(\omega) - 1 = \frac{A\omega_0}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

und bestätigt damit das Drude-Modell.

## 2.5 Die Normalmoden des homogenen isotropen Mediums

→ Suche nach einfachsten Lösungen der Wellengleichung im Fourierraum → Normalmoden oder Elementaranregungen, mit denen dann jede beliebige Lösung konstruiert werden kann. Normalmoden in der Optik zeichnen sich im allgemeinen dadurch aus, daß bei der Propagation

- die Amplitudenverteilung unveränderlich ist,
- der Polarisationszustand erhalten bleibt,
- die Phase eine harmonische Abhängigkeit aufweist und
- eine Dispersionsrelation verbindet Frequenz und Wellenzahl.

Ausgangspunkt ist die Wellengleichung

$$\mathbf{rot} \mathbf{rot} \bar{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega) = \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon(\omega) \bar{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega)$$

mit der Bedingung der Divergenzfreiheit

$$\varepsilon_0 \varepsilon(\omega) \mathbf{div} \bar{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega) = 0$$

und der komplexen dielektrischen Funktion

$$\varepsilon(\omega) = 1 + \chi(\omega) + \frac{i}{\omega \varepsilon_0} \sigma(\omega) = \varepsilon'(\omega) + i\varepsilon''(\omega).$$

Wegen  $\varepsilon_0 \varepsilon(\omega) \mathbf{div} \bar{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega) = 0$  hat man zunächst zwei Fälle zu unterscheiden:

- longitudinale Wellen bei  $\omega = \omega_L \rightarrow \varepsilon(\omega) = 0$ ,
- transversale Wellen für  $\omega \neq \omega_L \rightarrow \mathbf{div} \bar{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega) = 0$ .

Wir vermuten als einfachste Lösungen *ebene Wellen*

$$\bar{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega) = \mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega) \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r}),$$

wobei  $\mathbf{k}$  vorerst unbestimmt ist und die Amplitude für festes  $(\mathbf{k}, \omega)$  konstant ist. Damit ergibt sich das Gesamtfeld zu

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega) \exp[i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)] d\omega.$$

Der sog. komplexe Wellenzahlvektor  $\mathbf{k} = \mathbf{k}' + i\mathbf{k}''$  definiert die Flächen konstanter Phase  $\mathbf{k}'\mathbf{r} = \text{const.}$  und konstanter Amplitude  $\mathbf{k}''\mathbf{r} = \text{const.} \rightarrow$  Ebenengleichungen. Stimmen beide Flächen überein, spricht man von *homogenen Wellen*, ansonsten von *inhomogenen Wellen*. Stehen die Flächen senkrecht aufeinander, handelt es sich um *evaneszente Wellen*.

### 2.5.1 Longitudinale Wellen

Longitudinale Wellen können nur im dielektrischen Medium für  $\varepsilon(\omega) = 0$  bei der longitudinalen Frequenz  $\omega = \omega_L$  auftreten. Aus

$$\mathbf{rot} \mathbf{rot} \bar{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega_L) = 0$$

folgt mit dem ebenen-Wellen-Ansatz und den Bezeichnungen  $\bar{\mathbf{E}}_{\perp, \parallel}$  für die zum  $\mathbf{k}$ -Vektor senkrechte und parallele Feldkomponente

$$\begin{aligned} \mathbf{k} \times [\mathbf{k} \times \bar{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega_L)] &= 0, \\ \mathbf{k} \times [\mathbf{k} \times (\bar{\mathbf{E}}_{\perp} + \bar{\mathbf{E}}_{\parallel})] &= 0, \\ \mathbf{k} \times [\mathbf{k} \times \bar{\mathbf{E}}_{\perp}] + \mathbf{k} \times [\mathbf{k} \times \bar{\mathbf{E}}_{\parallel}] &= 0, \\ k^2 \bar{\mathbf{E}}_{\perp} = 0 \rightarrow \bar{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega_L) &= \bar{\mathbf{E}}_{\parallel}(\mathbf{r}, \omega_L). \end{aligned}$$

## 2.5.2 Transversale Wellen

Die für uns interessanten Lösungen sind die divergenzfreien transversalen Wellen. Für  $\omega \neq \omega_L$  gilt

$$\operatorname{div} \bar{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega) = 0$$

und damit erhält man aus der Wellengleichung die Helmholtzgleichung

$$\Delta \bar{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega) + \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon(\omega) \bar{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega) = 0.$$

Damit wird  $\bar{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega)$  durch drei skalare Gleichungen bei einer Nebenbedingung bestimmt  $\rightarrow$  zwei unabhängige komplexe Feldkomponenten. Mit dem EW-Ansatz erhalten wir

$$\left[ -\mathbf{k}^2 + \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon(\omega) \right] \bar{\mathbf{E}}(\mathbf{k}, \omega) = 0$$

und

$$\mathbf{k} \bar{\mathbf{E}}(\mathbf{k}, \omega) = 0.$$

Daraus folgt

- die Dispersionsrelation

$$\mathbf{k}^2 = k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon(\omega),$$

die die Länge des Wellenzahlvektors in Abhängigkeit von der Frequenz bestimmt und

- die Transversalität

$$\mathbf{k} \perp \bar{\mathbf{E}}(\mathbf{k}, \omega).$$

*Ebenen Wellen sind Lösungen der Maxwellgleichungen im homogenen, isotropen Medium, wenn die Dispersionsrelation  $k(\omega)$  erfüllt ist und die Wellen transversal sind.*

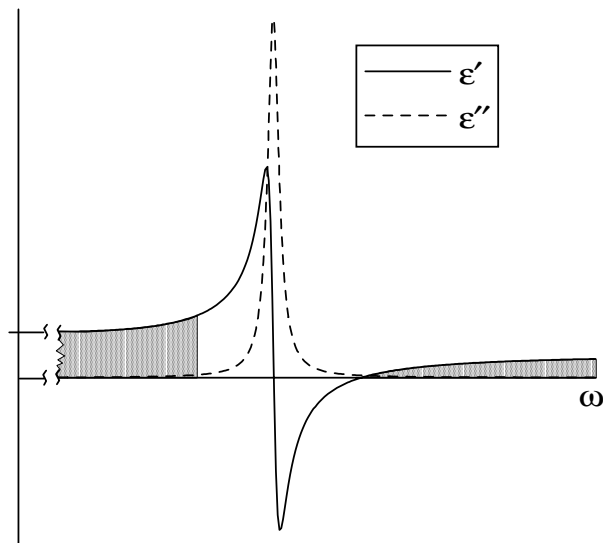
Im allgemeinen ist  $\mathbf{k}$  komplex und damit die EW keine Normalmode (Amplitude verändert sich bei der Ausbreitung). Man führt dann in der Optik oftmals eine komplexe Brechzahl ein

$$k = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon(\omega)} = \frac{\omega}{c} \hat{n}(\omega) = \frac{\omega}{c} [n(\omega) + i\kappa(\omega)].$$

Da die Dispersionsrelation gilt, kann man  $\bar{\mathbf{E}}(\mathbf{k}, \omega) = \bar{\mathbf{E}}(\omega)$  schreiben.

### 2.5.2.1 Diskussion der Lösung in den verschiedenen Frequenzbereichen

1.  $\varepsilon(\omega) = \varepsilon'(\omega) > 0 \rightarrow$  Transparenzgebiet, weit weg von Resonanzen  $\rightarrow$  bevorzugtes Gebiet der Optik



$$k^2 = \mathbf{k}'^2 - \mathbf{k}''^2 + 2i\mathbf{k}'\mathbf{k}'' = \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon'(\omega) = \frac{\omega^2}{c^2}n^2(\omega).$$

- $\mathbf{k}'' = 0 \rightarrow$  reeller Wellenzahlvektor

$$\bar{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega) = \mathbf{E}(\omega) \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r}),$$

$$\bar{\mathbf{H}}(\mathbf{r}, \omega) = \mathbf{H}(\omega) \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r})$$

mit

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{H}}(\mathbf{r}, \omega) &= -\frac{i}{\omega\mu_0} \text{rot } \bar{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega) = \frac{1}{\omega\mu_0} [\mathbf{k} \times \mathbf{E}(\omega)] \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r}) \\ \mathbf{H}(\omega) &= \frac{1}{\omega\mu_0} [\mathbf{k} \times \mathbf{E}(\omega)] \rightarrow |\mathbf{H}|^2 = \frac{\varepsilon_0}{\mu_0} n^2(\omega) |\mathbf{E}|^2\end{aligned}$$

mit

$$\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = Z = 377 \text{ Ohm}$$

als Wellenwiderstand. Die Dispersionsrelation kann als

$$k = k(\omega) = \frac{\omega}{c} n(\omega) = \frac{\omega}{c_n} = \frac{2\pi}{\lambda} n(\omega)$$

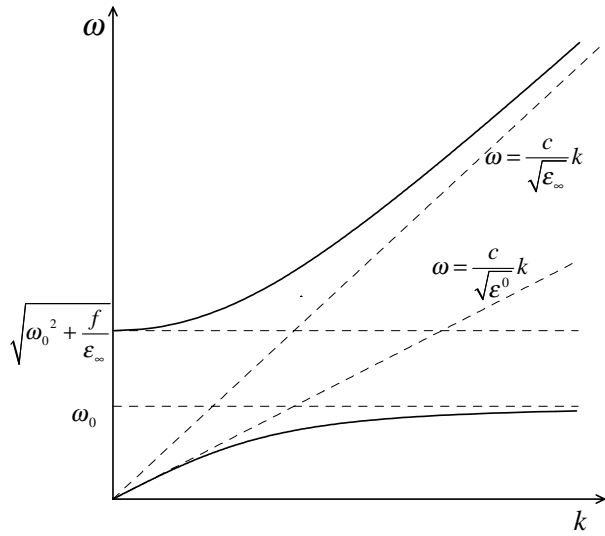
oder

$$\omega = \omega(k) = \frac{c}{n(\omega)} k$$

geschrieben werden.

Beispiele:

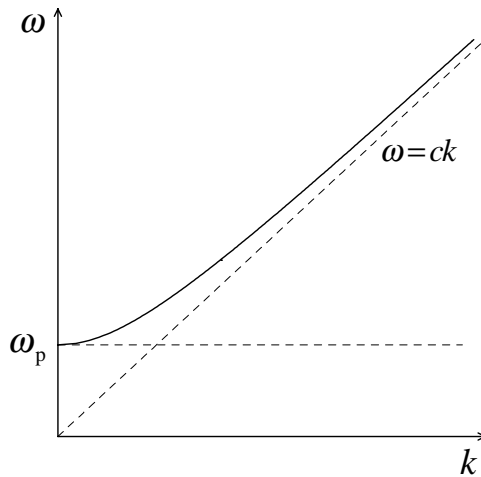
$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon'(\omega) = \varepsilon_\infty + \frac{f}{\omega_0^2 - \omega^2} \rightarrow \text{Gitterschwingungen (Phononen)}$$



(Phonon-Polariton)

oder

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon'(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \rightarrow \text{freie Elektronen (Plasma)}$$



(Plasmon-Polariton)

**Schlußfolgerungen:** Ebene, monochromatische, transversale, elliptisch polarisierte Wellen

$$\bar{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega) = \mathbf{E}(\omega) \exp \{i [\mathbf{k}(\omega) \mathbf{r} - \omega t]\}$$

sind Normalmoden des homogenen isotropen Mediums für  $\varepsilon(\omega) = \varepsilon'(\omega) > 0$ , d.h.  $0 < \omega < \omega_0, \omega > \omega_L$ , wenn die Dispersionsrelation  $k(\omega) = \frac{\omega}{c} n(\omega)$  erfüllt ist.

- $\mathbf{k}' \mathbf{k}'' = 0 \rightarrow \mathbf{k}' \perp \mathbf{k}'' \rightarrow$  komplexer Wellenzahlvektor  $\rightarrow$  inhomogene, speziell evaneszente Wellen

$$k^2 = \mathbf{k}'^2 - \mathbf{k}''^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon(\omega),$$

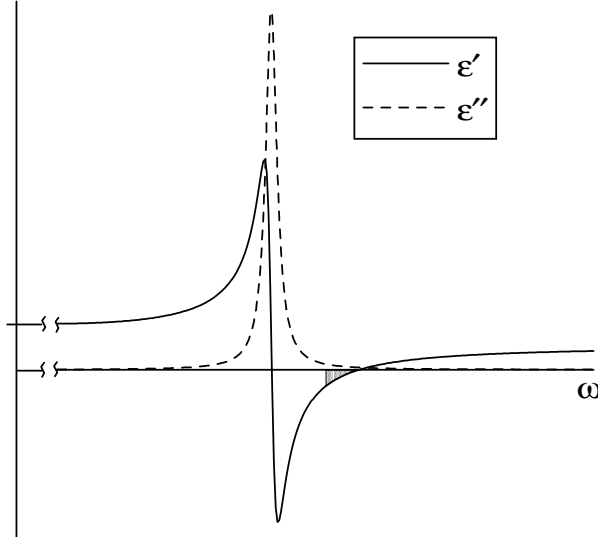
$$\mathbf{k}''^2 = \mathbf{k}'^2 - k^2.$$

Das heißt,  $\mathbf{k}''^2 \neq 0$  für  $\mathbf{k}'^2 > k^2$  und die evaneszenten Wellen haben die Form

$$\bar{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega) = \mathbf{E}(\omega) \exp \{i [\mathbf{k}'(\omega) \mathbf{r}]\} \exp (-\mathbf{k}'' \mathbf{r}),$$

d.h. Flächen konstanter Phase stehen senkrecht auf Flächen konstanter Amplitude  $\rightarrow$  keine Normalmoden, da exponentielles Wachstum im homogenen Raum. Evaneszente Wellen können nur an Grenzflächen existieren.

2.  $\varepsilon(\omega) = \varepsilon'(\omega) < 0$ , Reststrahlgebiet, in der Nähe von Resonanzen,  $\omega_0 < \omega < \omega_L$  (Dielektrika),  $\omega < \omega_p$  (Metalle)



$$k^2 = \mathbf{k}'^2 - \mathbf{k}''^2 + 2i\mathbf{k}'\mathbf{k}'' = \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon'(\omega) < 0$$

- $\mathbf{k}' = 0$

$$\mathbf{k}''^2 = \frac{\omega^2}{c^2} |\varepsilon'(\omega)|$$

$$\bar{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega) \sim \exp(-\mathbf{k}''\mathbf{r}) \rightarrow \text{starke Dämpfung}$$

$\rightarrow$  keine Ausbreitung, wenn  $\varepsilon'' = 0$

- $\mathbf{k}'\mathbf{k}'' = 0 \rightarrow \mathbf{k}' \perp \mathbf{k}'' \rightarrow$  evaneszente Wellen

$$k^2 = \mathbf{k}'^2 - \mathbf{k}''^2 = -\frac{\omega^2}{c^2} |\varepsilon'(\omega)|$$

$$\mathbf{k}''^2 = \frac{\omega^2}{c^2} |\varepsilon'(\omega)| + \mathbf{k}'^2.$$

Evaneszente Wellen  $\rightarrow$  nur an Grenzflächen wie bei 1) aber für alle  $\mathbf{k}'^2$ .

3.  $\varepsilon(\omega)$  komplex  $\rightarrow$  in Resonanznähe, aber später schwache Absorption  $\varepsilon''(\omega) \ll |\varepsilon'(\omega)|$  voraussetzen

$$\mathbf{k}^2 = k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon(\omega) = \frac{\omega^2}{c^2} [n(\omega) + i\kappa(\omega)]^2$$

mit  $\varepsilon'(\omega) \lesssim 0$  und  $\mathbf{k}$  komplex.

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon'(\omega) + i\varepsilon''(\omega) = n^2(\omega) - \kappa^2(\omega) + 2in(\omega)\kappa(\omega)$$

daraus folgt

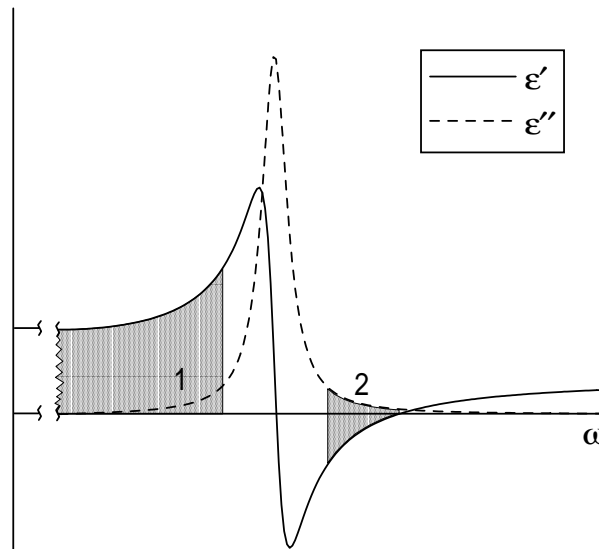
$$\begin{aligned}\varepsilon'(\omega) &= n^2(\omega) - \kappa^2(\omega) \\ \varepsilon''(\omega) &= 2n(\omega)\kappa(\omega)\end{aligned}$$

und damit für beliebiges  $\varepsilon''$

$$n^2(\omega) = \frac{\varepsilon'}{2} \left[ \operatorname{sgn}(\varepsilon') \sqrt{1 + (\varepsilon''/\varepsilon')^2} + 1 \right],$$

$$\kappa^2(\omega) = \frac{\varepsilon'}{2} \left[ \operatorname{sgn}(\varepsilon') \sqrt{1 + (\varepsilon''/\varepsilon')^2} - 1 \right].$$

Man kann zwei Grenzfälle unterscheiden:



1. Dielektrikum  $\varepsilon', \varepsilon'' > 0, \varepsilon'' \ll \varepsilon', \omega < \omega_0$

$$n(\omega) \approx \sqrt{\varepsilon'(\omega)}, \quad \kappa(\omega) \approx \frac{1}{2} \frac{\varepsilon''(\omega)}{\sqrt{\varepsilon'(\omega)}}$$

d.h. die Ausbreitung dominiert die Absorption.

2. Metalle, Reststrahlgebiet  $\varepsilon' < 0, \varepsilon'' > 0, \varepsilon'' \ll |\varepsilon'|, \omega_0 < \omega < \omega_L$

$$n(\omega) \approx \frac{1}{2} \frac{\varepsilon''(\omega)}{\sqrt{|\varepsilon'(\omega)|}}, \quad \kappa(\omega) \approx \sqrt{|\varepsilon'(\omega)|},$$

d.h. Dämpfung dominiert Ausbreitung.

Beispiel: Aluminium @ 500 nm  $\rightarrow \varepsilon = -32 + i7.3 \leadsto n \approx 0.65, \kappa \approx 5.6 \rightarrow 1/e$ -Dämpfung nach 56 nm

**Struktur der Lösungen für schwache Dämpfung (Fall1):**



Sind die ebenen Wellen homogen?

$$\mathbf{k}'^2 - \mathbf{k}''^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon'(\omega),$$

$$2\mathbf{k}'\mathbf{k}'' = \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon''(\omega).$$

→ Von vorn gilt:

$$|\mathbf{k}'| \approx \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon'(\omega)}, \quad |\mathbf{k}''| \approx \frac{1}{2} \frac{\omega}{c} \frac{\varepsilon''(\omega)}{\sqrt{\varepsilon'(\omega)}}$$

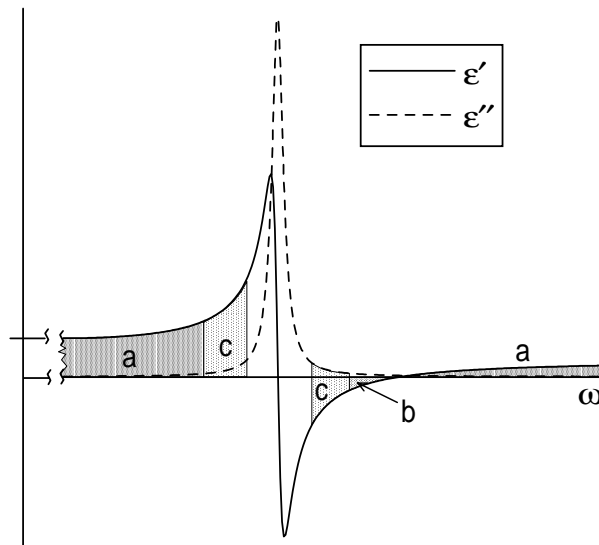
↪

$$\mathbf{k}'\mathbf{k}'' \approx |\mathbf{k}'| |\mathbf{k}''|,$$

d.h. Real- und Imaginärteil des Wellenzahlvektors sind annähernd parallel → homogene Wellen.

↪ im homogenen, isotropen Medium breiten sich in Resonanznähe gedämpfte, homogene ebene Wellen aus → keine Normalmoden

$$\bar{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega) = \mathbf{E}(\omega) \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r}) = \mathbf{E}(\omega) \exp\left\{i\left[\frac{\omega}{c}n(\omega)(\mathbf{er})\right]\right\} \exp\left[-\frac{\omega}{c}\kappa(\omega)(\mathbf{er})\right].$$



- (a) ungedämpfte Wellen → Normalmoden → Plasmon-Polaritonen, Phonon-Polaritonen; zusätzlich → evaneszente QWellen an Grenzflächen
- (b) evaneszente Wellen
- (c) gedämpfte, fast homogene Wellen für schwache Dämpfung ( $\varepsilon' > 0$ ); stark gedämpfte Wellen für  $\varepsilon' < 0$ .

### 2.5.3 Energiestromdichte und Intensität ebener Wellen

Die Energiestromdichte hängt mit der Intensität wie folgt zusammen

$$\langle \mathbf{S}(\mathbf{r}, t) \rangle = I(\mathbf{r}, t) \mathbf{n} = \frac{1}{2} \frac{1}{2T_m} \int_{-T_m}^{T_m} \Re \left[ \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) \times \tilde{\mathbf{H}}^*(\mathbf{r}, t) \right] dt,$$

dabei sind die  $\tilde{\phantom{x}}$ -Größen langsam veränderlich. Für ebene Wellen erhalten wir

$$\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(t) \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r}) = \mathbf{E}(t) \exp(i\mathbf{k}'\mathbf{r}) \exp(-\mathbf{k}''\mathbf{r})$$

$$\tilde{\mathbf{H}}^*(\mathbf{r}, t) = \mathbf{H}^*(t) \exp(i\mathbf{k}'\mathbf{r}) \exp(-\mathbf{k}''\mathbf{r}).$$

Wir bemerken, daß im stationären Fall gilt:  $\mathbf{E}(t) = \mathbf{E}(\omega)$ .

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{S}(\mathbf{r}, t) \rangle &= \frac{1}{\omega\mu_0} \frac{1}{4T_m} \int_{-T_m}^{T_m} \Re \left[ \mathbf{k}^* |\mathbf{E}(t)|^2 - \tilde{\mathbf{E}}^*(t) (\mathbf{k}^* \mathbf{E}) \right] dt \exp(-2\mathbf{k}''\mathbf{r}) \\ &= \frac{k'}{\omega\mu_0} \frac{1}{4T_m} \mathbf{n}_{k'} \exp(-2\mathbf{k}''\mathbf{r}) \int_{-T_m}^{T_m} |\mathbf{E}(t)|^2 dt \\ &= n \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \mathbf{n}_{k'} \exp \left[ -2\frac{\omega}{c} \kappa(\mathbf{n}_{k''}\mathbf{r}) \right] \frac{1}{4T_m} \int_{-T_m}^{T_m} |\mathbf{E}(t)|^2 dt. \end{aligned}$$

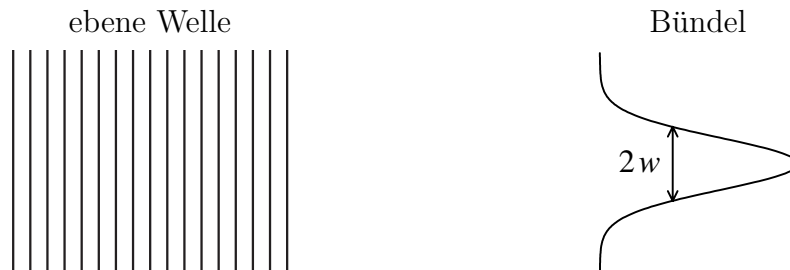
Für stationäre Wellen gilt dann:

$$\langle \mathbf{S}(\mathbf{r}, t) \rangle = \frac{1}{2} n \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \mathbf{n}_{k'} \exp \left[ -2\frac{\omega}{c} \kappa(\mathbf{n}_{k''}\mathbf{r}) \right] |\mathbf{E}(\omega)|^2.$$

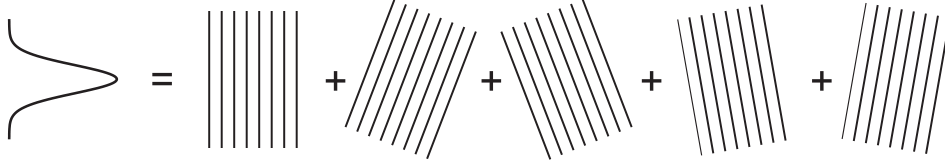
## 2.6 Gebündelte Wellenfelder (Strahlen) und Impulse - Analogie von Beugung und Pulsverbreiterung (Dispersion)

Wir wollen zeigen, daß sich Pulse mit endlicher transversaler Breite (gepulste Bündel) als eine Superposition (im Frequenz- und Ortsfrequenzraum) von Normalmoden darstellen lassen. Es wird sich herausstellen, daß sich die raum-zeitlich lokalisierten optischen Anregungen sowohl zeitlich als auch räumlich durch die unterschiedliche Phasenentwicklung in Ausbreitungsrichtung für verschiedene Frequenzen (wegen der Dispersion) und Ortsfrequenzen (wegen der unterschiedlichen Ausbreitungsrichtungen der einzelnen Normalmoden) verbreitern werden. Im räumlichen Bereich spricht man von Beugung, im zeitlichen einfach von Pulsverbreiterung. Wir behandeln den räumlichen Fall, gehen dann zum allgemeinen Fall über und diskutieren zum Schluß den zeitlichen Fall.

Bündel werden charakterisiert durch ihre endliche Breite.

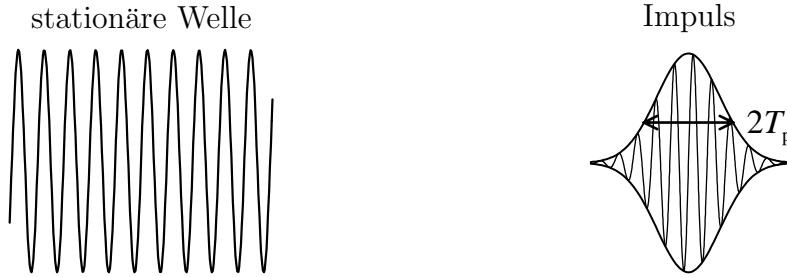


Ein Bündel stellt eine kontinuierliche Überlagerung stationärer, ebener Wellen *verschiedener Ausbreitungsrichtung* dar.

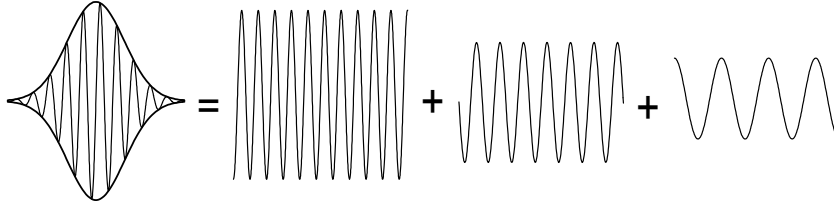


$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\mathbf{E}}(\mathbf{k}) \exp [i (\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)] d^3 k.$$

Impulse werden charakterisiert durch ihre endliche Länge.



Ein Impuls stellt eine kontinuierliche Überlagerung stationärer, ebener Wellen *verschiedener Frequenz* dar.



$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\mathbf{E}}(\omega) \exp [i (\mathbf{k}(\omega)\mathbf{r} - \omega t)] d\omega.$$

Ein Impuls endlicher Breite (Bündel) stellt eine kontinuierliche Überlagerung stationärer, ebener Wellen *verschiedener Frequenz und Ausbreitungsrichtung* dar.

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\mathbf{E}}(\mathbf{k}, \omega) \exp [i (\mathbf{k}(\omega)\mathbf{r} - \omega t)] d^3 k d\omega.$$

In der Literatur wird die Ausbreitung solch lokalisierter Anregung oftmals auch alternativ beschrieben. Man separiert zeitlich und räumlich schnell oszillierende Anteile von langsam veränderlichen ('slowly varying envelope approximation'-SVEA). Dieses Vorgehen bietet sich immer dann an, wenn die spektralen Breiten im Frequenz und Ortsfrequenzbereich wesentlich kleiner als die entsprechenden Mittenfrequenzen sind. Man schreibt z.B. für ein gepulstes Bündel, das die Mittenfrequenz  $\omega_0$  besitzt und sich in  $z$ -Richtung ausbreitet

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) \exp [i (\mathbf{k}(\omega_0)z - \omega_0 t)].$$

$\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t)$  folgt dann i.a. einer aus der Wellengleichung abgeleiteten parabolischen Differentialgleichung (1. Ordnung in Ausbreitungsrichtung). Wir kommen später auf diese Methode zurück.

## 2.6.1 Ausbreitung gebündelter Wellenfelder im homogenen Raum

Das Verständnis dieses Effektes (Beugung) ist wichtig für das Verständnis der optischen Abbildung, der optischen Filterung, der Mikroskopie, der Beugung an Gittern, der optischen Nahfeldmikroskopie etc.

Wir beginnen mit dem stationären Fall ( $\omega = \text{const.}$ ) Unser Vorgehen lehnt sich stark an die lineare Übertragungstheorie an (integrale Formulierung). Am Ende zeigen wir die Äquivalenz zu einer differentiellen Formulierung.

Wir nehmen an, daß wir uns im optischen Transparenzgebiet befinden, d.h.,

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon'(\omega) > 0,$$

d.h. es existieren Normalmoden in Form von stationären homogenen und evaneszenten ebenen Wellen. Wir beschränken uns hier auf die skalare Näherung, die im Fall eindimensionaler Bündel den Fall linear polarisierten Lichtes exakt beschreibt. Im zweidimensionalen Fall stellt sie eine Näherung dar, ist jedoch auch hier exakt, wenn man die skalare Größe mit einer Komponente des Vektorpotentials identifiziert (siehe Zusatzkapitel).

Wir schreiben für das stationäre optische Feld

$$\bar{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega) \rightarrow \bar{E}_y(\mathbf{r}, \omega) \mathbf{e}_y \rightarrow \bar{E}_y(\mathbf{r}, \omega) \rightarrow u(\mathbf{r}, \omega).$$

Damit folgt aus der Helmholtzgleichung

$$\Delta \bar{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega) + \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon(\omega) \bar{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega) = 0,$$

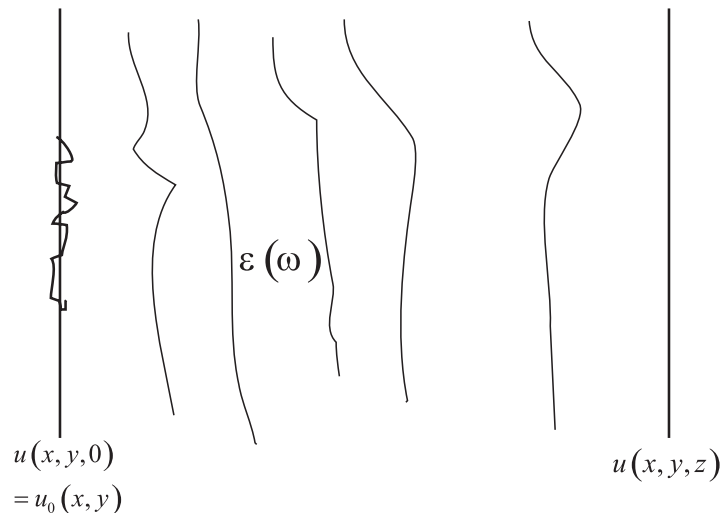
in skalarer Näherung bei fester Frequenz  $\omega$

$$\begin{aligned} \Delta u(\mathbf{r}, \omega) + \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon(\omega) u(\mathbf{r}, \omega) &= 0, \\ \Delta u(\mathbf{r}, \omega) + k^2(\omega) u(\mathbf{r}, \omega) &= 0. \end{aligned}$$

Wir werden im folgenden die feste Frequenz  $\omega$  oftmals weglassen.

### 2.6.1.1 Beliebige enge Bündel $\rightarrow$ der allgemeine Fall

Die Aufgabe besteht darin, bei vorgegebener Feldverteilung in einer Ebenen (z.B.  $z = 0$ ) die Feldverteilung im Halbraum  $z > 0$  zu bestimmen.



Fouriertransformation ergibt

$$u(\mathbf{r}, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} U(\mathbf{k}, \omega) \exp[i\mathbf{k}(\omega)\mathbf{r}] d^3k$$

und stellt eine Überlagerung der NM mit unterschiedlicher Ausbreitungsrichtung (gegeben durch  $\mathbf{k}$ ) dar. Wir haben jedoch zu beachten, daß die NM der Dispersionsrelation

$$\mathbf{k}^2 = k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon(\omega)$$

genügen müssen, nur zwei Komponenten von  $\mathbf{k}$  können unabhängig gewählt werden, z. B.  $k_x, k_y$ . Aus Gründen der einfacheren Schreibweise setzen wir

$$k_x = \alpha, \quad k_y = \beta, \quad k_z = \gamma.$$

Damit schreiben wir anstelle der 3D Fouriertransformation (wir lassen jetzt  $\omega$  weg)

$$u(\mathbf{r}) = \int \int_{-\infty}^{\infty} U(\alpha, \beta; z) \exp[i(\alpha x + \beta y)] d\alpha d\beta.$$

Einsetzen in die skalare Helmholtzgleichung

$$\Delta u(\mathbf{r}) + k^2(\omega) u(\mathbf{r}) = 0$$

ergibt

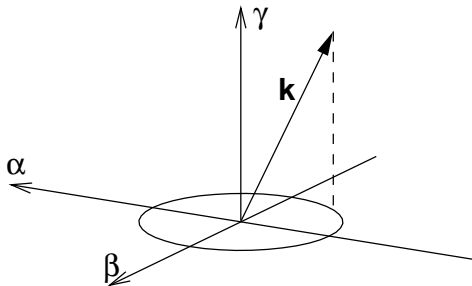
$$\begin{aligned} \left( \frac{d^2}{dz^2} + k^2(\omega) - \alpha^2 - \beta^2 \right) U(\alpha, \beta; z) &= 0, \\ \left( \frac{d^2}{dz^2} + \gamma^2(\omega) \right) U(\alpha, \beta; z) &= 0, \end{aligned}$$

mit der Lösung

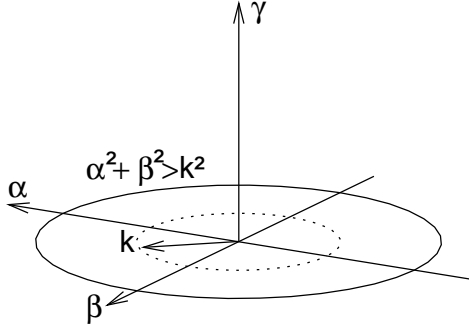
$$U(\alpha, \beta; z) = U_1(\alpha, \beta) \exp(i\gamma z) + U_2(\alpha, \beta) \exp(-i\gamma z).$$

Offensichtlich gibt es zwei Typen von Lösungen:

1.  $\gamma^2 \geq 0$ , und damit  $\alpha^2 + \beta^2 \leq k^2$ , d.h. homogene Wellen



2.  $\gamma^2 < 0$ , und damit  $\alpha^2 + \beta^2 > k^2$ , d.h. evaneszente Wellen, da  $\gamma = k_z$  imaginär ist.



Damit entfällt der zweite Teil der Lösung, da eine unendlich anwachsende Amplitude im Halbraum unphysikalisch ist. Wir erhalten also

$$U(\alpha, \beta; z) = U_1(\alpha, \beta) \exp(i\gamma z) = U(\alpha, \beta; 0) \exp(i\gamma z) \doteq U_0(\alpha, \beta) \exp(i\gamma z)$$

mit der Randbedingung  $U(\alpha, \beta; 0) = U_0(\alpha, \beta)$ . Das Gesamtfeld im Halbraum  $z > 0$  ergibt sich somit zu

$$u(\mathbf{r}) = \int \int_{-\infty}^{\infty} U_0(\alpha, \beta) \exp[i\gamma(\alpha, \beta)z] \exp[i(\alpha x + \beta y)] d\alpha d\beta. \quad (2.11)$$

Die Ursache der Beugung ist die unterschiedliche Phasenverschiebung in Propagationsrichtung für verschiedene  $\alpha, \beta$ . Es ist klar, daß sich die Randbedingung  $U_0(\alpha, \beta)$  aus der Feldverteilung auf dem Rand  $z = 0$  ergibt, da gilt

$$U_0(\alpha, \beta) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \int \int_{-\infty}^{\infty} u_0(x, y) \exp[-i(\alpha x + \beta y)] dx dy,$$

wobei  $u_0(x, y) = u(x, y, 0)$ .  $U_0(\alpha, \beta)$  stellt damit die räumliche spektrale Verteilung bei  $z = 0$  dar und wird *Ortsfrequenzspektrum* oder *Winkelspektrum* von  $u_0(x, y)$  genannt (im Sinne der FT sind  $\alpha, \beta$  Ortsfrequenzen, im Sinne der Optik ebener Wellen sind  $\alpha/k, \beta/k$  Richtungskosinusse und repräsentieren deshalb Winkel).

Die Anfangsverteilung  $u_0(x, y)$  bestimmt damit das Spektrum, Ausbreitung bedeutet nur Multiplikation mit dem Phasenfaktor  $\exp[i\gamma(\alpha, \beta)z]$  und ergibt ein neues Spektrum  $U(\alpha, \beta; z) = U_0(\alpha, \beta) \exp[i\gamma(\alpha, \beta)z]$  und damit eine neue Verteilung  $u(x, y, z)$ . Damit ist das Wesen der Beugung beschrieben.

Man kann Gl.(2.11) also folgendermaßen interpretieren:

- 1. Das resultierende Feld ergibt sich aus der Rücktransformation des neuen Spektrums:

$$u(\mathbf{r}) = \int \int_{-\infty}^{\infty} U(\alpha, \beta; z) \exp[i(\alpha x + \beta y)] d\alpha d\beta.$$

- 2. Das resultierende Feld ergibt sich aus der Überlagerung homogener und inhomogener ebener Wellen ('plane-wave spectrum'), die der Dispersionsrelation genügen

$$u(\mathbf{r}) = \int \int_{-\infty}^{\infty} U_0(\alpha, \beta) \exp\{i[\alpha x + \beta y + \gamma(\alpha, \beta)z]\} d\alpha d\beta.$$

Im Sinne der linearen Übertragungstheorie können die Ergebnisse folgendermaßen interpretiert werden:

Die lineare Gleichung

$$\Delta u + k^2 u = 0$$

hat im Fourierraum die Lösung

$$U(\alpha, \beta; z) = H(\alpha, \beta; z) U_0(\alpha, \beta),$$

wobei  $U_0(\alpha, \beta)$  die Ursache,  $U(\alpha, \beta; z)$  die Wirkung und  $H(\alpha, \beta; z) = \exp[i\gamma(\alpha, \beta)z]$  (mit  $\gamma(\alpha, \beta) = \sqrt{k^2 - \alpha^2 - \beta^2}$ ) die Übertragungsfunktion darstellen. Entsprechend ergibt sich im Ortsraum

$$u(x, y, z) = \int \int_{-\infty}^{\infty} h(x - x', y - y'; z) u_0(x', y') dx' dy'$$

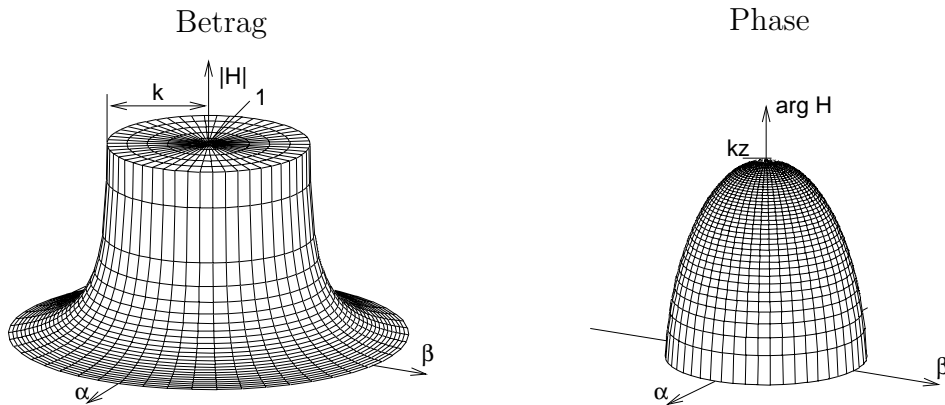
mit der Responsefunktion

$$h(x, y, z) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \int \int_{-\infty}^{\infty} H(\alpha, \beta; z) \exp[i(\alpha x + \beta y)] d\alpha d\beta.$$

### Diskussion der Übertragungsfunktion Die ÜF

$$H(\alpha, \beta; z) = \exp[i\gamma(\alpha, \beta)z]$$

ist im allgemeinen komplex. Für ein festes  $z$  kann man Betrag und Argument einfach graphisch darstellen:



Man hat zwischen dem Beitrag homogener und evaneszenter Wellen zu unterscheiden.

1. homogene Wellen  $\rightarrow \alpha^2 + \beta^2 \leq k^2 \curvearrowright |H| = 1, \arg H \neq 0$ , d.h. jede homogene ebene Welle wird bei der Ausbreitung mit einem Phasenfaktor  $\exp[i\sqrt{k^2 - \alpha^2 - \beta^2}z]$  belegt.
2. evaneszente Wellen  $\rightarrow \alpha^2 + \beta^2 > k^2 \curvearrowright |H| = \exp[-\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - k^2}z], \arg H = 0$ , d.h. jede evaneszente Welle wird bei der Ausbreitung mit einem Amplitudenfaktor  $< 1$  belegt  $\rightarrow$  Beiträge werden für wachsende  $z$  gedämpft.

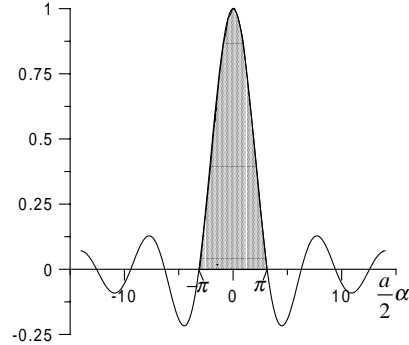
Es ist die Frage zu klären, wann evaneszente Wellen auftreten. Das hängt offensichtlich von der Struktur der Anfangsverteilung  $u_0(x, y)$  ab und erfordert die Präsenz hoher Ortsfrequenzen, d.h., es muß  $U_0(\alpha, \beta) \neq 0$  für  $\alpha^2 + \beta^2 > k^2$  gelten. Wir wollen das am eindimensionalen Beispiel untersuchen.

Es gelte:

$$u_0(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } |x| \leq \frac{a}{2} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Damit

$$U_0(\alpha) \sim \frac{\sin(\frac{a}{2}\alpha)}{(\frac{a}{2}\alpha)} = \text{sinc}\left(\frac{a}{2}\alpha\right).$$



Die wesentliche Information ist im Intervall  $|\frac{a}{2}\alpha| \leq \pi$  enthalten, d.h.  $|\alpha| = 2\pi/a$  ist die größte auftretende Ortsfrequenz für eine Struktur mit der Breite  $a$ . Evaneszente Wellen treten auf für  $|\alpha| > k$ , d.h.

$$\frac{2\pi}{a} > k = \frac{2\pi}{\lambda}n$$

also

$$a < \frac{\lambda}{n},$$

d.h. evaneszente Wellen sind mit Strukturen verbunden, die kleiner als die Wellenlänge sind. Die damit in Zusammenhang stehenden Informationen gehen bei der Ausbreitung über makroskopische Distanzen ( $z \gg \lambda$ ) verloren.

Beispiel:

Da  $\exp(-2\pi) \approx 0$ , folgt für  $\alpha^2 = 2k^2$  ( $a = \frac{\lambda}{\sqrt{2}n}$ ),  $kz = 2\pi$  oder nach einer Ausbreitungslänge  $z = \lambda/n$  ist diese Information verloren gegangen.

**Schlußfolgerung:** Im homogenen Raum werden über makroskopische Distanzen nur Informationen übertragen, die mit Strukturdetails  $|\Delta x|, |\Delta y| > \lambda/n$  zusammenhängen, d.h., der freie Raum stellt für das Licht einen Tiefpaßfilter dar.

Zusammenfassend kann also die Ausbreitung einer begrenzten Feldverteilung folgendermaßen beschrieben werden:

$$u_0(x, y) \xrightarrow{\text{FT}^{-1}} U_0(\alpha, \beta) \rightarrow U(\alpha, \beta; z) = H(\alpha, \beta; z)U_0(\alpha, \beta) \xrightarrow{\text{FT}} u(x, y, z)$$

### 2.6.1.2 Fresnel- (paraxiale) Näherung

→ wichtiger Spezialfall

Wenn das Ortsfrequenzspektrum 'schmalbandig' ist, d.h.,

$$U_0(\alpha, \beta) \neq 0 \quad \text{für} \quad \alpha^2 + \beta^2 \ll k^2$$



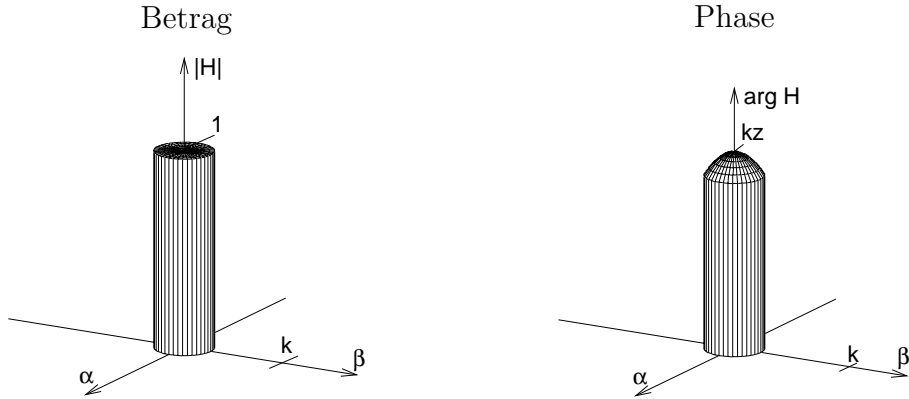
oder anders gesagt, die ebenen Wellen, die das Bündel beschreiben, nur eine kleine Neigung zur Ausbreitungsrichtung (paraxiale Näherung) aufweisen, kann die Größe  $\gamma = \sqrt{k^2 - \alpha^2 - \beta^2}$  in eine Potenzreihe

$$\gamma = \sqrt{k^2 - \alpha^2 - \beta^2} \approx k \left( 1 - \frac{\alpha^2 + \beta^2}{2k^2} \right) = k - \frac{\alpha^2 + \beta^2}{2k}$$

entwickelt werden und die Übertragungsfunktion  $H_F(\alpha, \beta; z)$  in Fresnelscher Näherung

$$H_F(\alpha, \beta; z) = \exp(ikz) \exp\left(-i \frac{\alpha^2 + \beta^2}{2k} z\right)$$

enthält nur noch homogenen Wellen. Dieser Fall tritt auf, wenn die Strukturdetails die Bedingung  $|\Delta x|, |\Delta y| \gg \lambda/n \approx 10 \lambda/n$  erfüllen.



Damit erhält man für die Ausbreitung des Spektrums

$$U_F(\alpha, \beta; z) = H_F(\alpha, \beta; z) U_0(\alpha, \beta). \quad (2.12)$$

Ist die Anfangsverteilung 'grob', sind die Spektralampplituden  $U_0(\alpha, \beta)$  nur für  $\alpha^2 + \beta^2 \ll k^2$  von Null verschieden. Es tragen nur paraxiale, ebene Wellen zur Übertragung der Information bei.

In Fresnelscher Näherung kann man die Resultate im Fourierraum einfach auf den Ortsraum übertragen. Man erhält

$$\begin{aligned} u_F(x, y, z) &= \int \int_{-\infty}^{\infty} U_F(\alpha, \beta; z) \exp[i(\alpha x + \beta y)] d\alpha d\beta \\ &= \int \int_{-\infty}^{\infty} H_F(\alpha, \beta; z) U_0(\alpha, \beta) \exp[i(\alpha x + \beta y)] d\alpha d\beta \\ &= \int \int_{-\infty}^{\infty} h_F(x - x', y - y'; z) u_0(x', y') dx' dy' \end{aligned}$$

mit der Responsefunktion

$$\begin{aligned}
h_F(x, y; z) &= \left( \frac{1}{2\pi} \right)^2 \int \int_{-\infty}^{\infty} H_F(\alpha, \beta; z) \exp [i (\alpha x + \beta y)] d\alpha d\beta \\
&= \left( \frac{1}{2\pi} \right)^2 \exp (ikz) \int \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left( -i \frac{\alpha^2 + \beta^2}{2k} z \right) \exp [i (\alpha x + \beta y)] d\alpha d\beta.
\end{aligned}$$

Quadratische Ergänzung im Exponenten und anschließende elementare Integration führt auf

$$h_F(x, y; z) = \exp (ikz) \left\{ -\frac{i}{\lambda z} \exp \left[ i \frac{k}{2z} (x^2 + y^2) \right] \right\},$$

d.h., die Responsefunktion ist eine Kugelwelle in paraxialer Näherung. Man erhält schließlich

$$u_F(x, y, z) = -\frac{i}{\lambda z} \exp (ikz) \int \int_{-\infty}^{\infty} u_0(x', y') \exp \left\{ i \frac{k}{2z} [(x - x')^2 + (y - y')^2] \right\} dx' dy'. \quad (2.13)$$

In paraxialer Näherung kann die Ausbreitung

- im Fourierraum mit Gl.(2.12) und anschließender Fouriertransformation oder
- im Ortsraum unter Benutzung von Gl.(2.13).

beschrieben werden.

### 2.6.1.3 Die paraxiale Wellengleichung

Die Wellengleichung ist eine elliptische Differentialgleichung, d.h. die Lösung des Randwertproblems erfordert die Vorgabe der Felder auf dem gesamten Rand. Im Gegensatz dazu erfordert die Lösung einer parabolischen DGL nur die Vorgabe der Anfangswerte. Für eine numerische Lösung des Problems ist also eine parabolische DGL von Vorteil. Wir zeigen, daß sich in paraxialer Näherung die Wellengleichung zu einer parabolischen Gleichung vereinfacht.

In paraxialer Näherung gilt

$$\begin{aligned}
U_F(\alpha, \beta; z) &= H_F(\alpha, \beta; z) U_0(\alpha, \beta) \\
&= \exp (ikz) \exp \left( -i \frac{\alpha^2 + \beta^2}{2k} z \right) U_0(\alpha, \beta)
\end{aligned}$$

und mit Einführung des langsam veränderlichen Spektrums  $V(\alpha, \beta; z)$

$$U_F(\alpha, \beta; z) = \exp(ikz) V(\alpha, \beta; z)$$

erhält man

$$V(\alpha, \beta; z) = \exp\left(-i\frac{\alpha^2 + \beta^2}{2k}z\right) V_0(\alpha, \beta).$$

Differentiation

$$i\frac{\partial}{\partial z}V(\alpha, \beta; z) = \frac{1}{2k}(\alpha^2 + \beta^2) V(\alpha, \beta; z)$$

und anschließende Fouriertransformation ergibt

$$i\frac{\partial}{\partial z} \int \int_{-\infty}^{\infty} V(\alpha, \beta; z) \exp[i(\alpha x + \beta y)] d\alpha d\beta = \frac{1}{2k} \int \int_{-\infty}^{\infty} (\alpha^2 + \beta^2) V(\alpha, \beta; z) \exp[i(\alpha x + \beta y)] d\alpha d\beta$$

$$i\frac{\partial}{\partial z}v(x, y, z) = -\frac{1}{2k} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \int \int_{-\infty}^{\infty} V(\alpha, \beta; z) \exp[i(\alpha x + \beta y)] d\alpha d\beta$$

$$i\frac{\partial}{\partial z}v(x, y, z) = -\frac{1}{2k} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) v(x, y, z)$$

oder in kompakter Form

$$i\frac{\partial}{\partial z}v(x, y, z) + \frac{1}{2k}\Delta^{(2)}v(x, y, z) = 0$$

$$u(x, y, z) = v(x, y, z) \exp(ikz).$$

Das gleiche Ergebnis erhält man aus der skalaren Helmholtzgleichung, die wir jedoch aus Gründen der Allgemeingültigkeit für inhomogene Medien aufschreiben wollen (siehe Übungen, numerische Lösung mit der 'beam propagation method'-BPM).

$$\Delta u(x, y, z) + k^2(\mathbf{r}, \omega)u(x, y, z) = 0 \quad \text{mit} \quad k^2(\mathbf{r}, \omega) = \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon(\mathbf{r}, \omega).$$

Wir spalten einen schnell oszillierenden Anteil ab

$$u(x, y, z) = v(x, y, z) \exp(ik_0z)$$

wobei  $k_0 \approx k$ . Damit folgt für die Dynamik der langsamen Amplitude  $v$

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}v(x, y, z) + 2ik_0\frac{\partial}{\partial z}v(x, y, z) + \Delta^{(2)}v(x, y, z) + [k^2(\mathbf{r}, \omega) - k_0^2]v(x, y, z) = 0,$$

wenn man wegen  $|kv| \gg |\partial v/\partial z|$  das erste Glied vernachlässigt.

Für homogene Medien ( $k = k_0$ ) erhalten wir das obige Ergebnis

$$i\frac{\partial}{\partial z}v(x, y, z) + \frac{1}{2k}\Delta^{(2)}v(x, y, z) = 0.$$

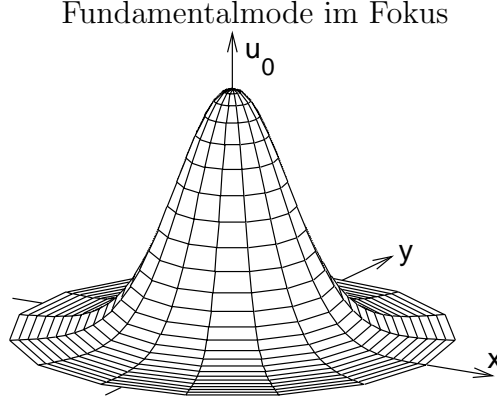
In inhomogenen Medien kann man die nun parabolische Gleichung

$$i\frac{\partial}{\partial z}v(x, y, z) + \frac{1}{2k_0}\Delta^{(2)}v(x, y, z) + \left[ \frac{k^2(\mathbf{r}, \omega) - k_0^2}{2k_0} \right] v(x, y, z) = 0$$

durch Vorgabe der Anfangsbedingung  $v(x, y, z = 0) = v_0(x, y)$  lösen. Zwei Methoden sind dabei weit verbreitet, die Fast-Fourier-Transform BPM und die Finite-Differenzen-Methode (Näheres in den Übungen).

## 2.6.2 Ausbreitung eines Gauß-Bündels

→ wichtiger Spezialfall, da die transversale Laser-Fundamentalmode diese Gestalt aufweist.



$$u_0(x, y) = v_0(x, y) = A_0 \exp \left[ - \left( \frac{x^2}{w_x^2} + \frac{y^2}{w_y^2} \right) \right] \exp [i\varphi(x, y)] .$$

Wir beschränken uns auf Rotationssymmetrie ( $w_x^2 = w_y^2 = w_0^2$ ) und setzen im Moment eine 'flache' Phase voraus ( $\varphi(x, y) = 0$ ) (Gauß im Fokus). Die Breite ist durch

$$u_0(x^2 + y^2 = w_0^2) = A_0 \exp(-1)$$

definiert.

Die Ausbreitung wird im Ortsfrequenzraum berechnet.

1. Feld bei  $z = 0$ :

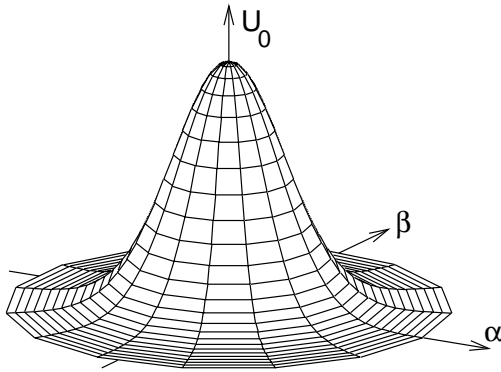
$$u_0(x, y) = v_0(x, y) = A_0 \exp \left( - \frac{x^2 + y^2}{w_0^2} \right) .$$

2. Spektrum bei  $z = 0$ :

$$\begin{aligned} U_0(\alpha, \beta) &= V_0(\alpha, \beta) = \frac{1}{(2\pi)^2} A_0 \int \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left( - \frac{x^2 + y^2}{w_0^2} \right) \exp [-i(\alpha x + \beta y)] dx dy \\ &= \frac{A_0}{4\pi} w_0^2 \exp \left( - \frac{\alpha^2 + \beta^2}{4/w_0^2} \right) = \frac{A_0}{4\pi} w_0^2 \exp \left( - \frac{\alpha^2 + \beta^2}{w_s^2} \right) , \end{aligned}$$

d.h. das Spektrum weist ebenfalls ein Gauß-Profil auf und das Produkt aus räumlicher und spektraler Breite ist konstant ( $2w_s \times 2w_0 = 8$ ).

Spektrum der Fundamentalmode im Fokus



3. Ist paraxiale Näherung erfüllt? Es gilt

$$U_0(\alpha, \beta) \approx 0$$

für  $(\alpha^2 + \beta^2) \geq 16/w_0^2 \rightarrow \exp(-4)$ . Die Bedingung für die Gültigkeit der paraxialen Näherung

$$k^2 \gg (\alpha^2 + \beta^2)$$

ergibt

$$k^2 \gg 16/w_0^2$$

↪

$$w_0^2 \gg \frac{16}{\left(\frac{2\pi}{\lambda}n\right)^2} = \left(\frac{2\lambda}{\pi n}\right)^2 \approx \left(\frac{\lambda}{n}\right)^2,$$

d.h., die paraxiale Näherung gilt für  $w_0 \gtrsim 10 \frac{\lambda}{n} = 10\lambda_n$

4. Ausbreitung des Spektrums:

$$U(\alpha, \beta; z) = V(\alpha, \beta; z) \exp(ikz)$$

$$\begin{aligned} V(\alpha, \beta; z) &= U_0(\alpha, \beta) \exp\left(-i \frac{\alpha^2 + \beta^2}{2k} z\right) \\ &= \frac{A_0}{4\pi} w_0^2 \exp\left[-w_0^2 \frac{(\alpha^2 + \beta^2)}{4}\right] \exp\left(-i \frac{\alpha^2 + \beta^2}{2k} z\right). \end{aligned}$$

5. Rücktransformation in den Ortsraum:

$$\begin{aligned} v(x, y, z) &= \frac{A_0}{4\pi} w_0^2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-(\alpha^2 + \beta^2) \left(\frac{w_0^2}{4} + \frac{i}{2k} z\right)\right] \exp[i(\alpha x + \beta y)] d\alpha d\beta \\ &= A_0 \frac{1}{1 + \frac{2iz}{kw_0^2}} \exp\left[-\frac{x^2 + y^2}{w_0^2 \left(1 + \frac{2iz}{kw_0^2}\right)}\right] = A_0 \frac{1}{1 + i \frac{z}{z_0}} \exp\left[-\frac{x^2 + y^2}{w_0^2 \left(1 + i \frac{z}{z_0}\right)}\right]. \end{aligned}$$

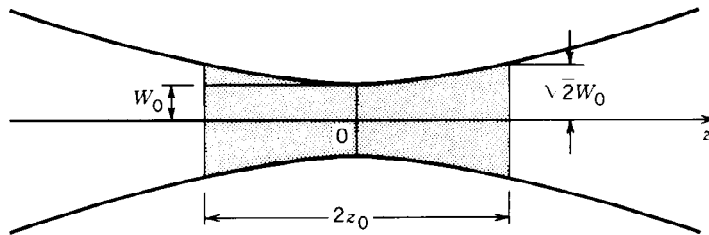
## Schlußfolgerungen:

- Gauß-Bündel behält bei der Ausbreitung Gestalt, jedoch Amplitude, Breite und Phase ändern sich.
- zwei Parameter, Ausbreitungslänge  $z$  und Beugungsparameter  $z_0$ , bestimmen die Eigenschaften, wobei

$$z_0 = \frac{kw_0^2}{2} = \frac{\pi}{\lambda_n} w_0^2.$$

Man bezeichnet die Größe  $L_B = 2z_0$  als Beugungslänge oder Rayleigh-Gebiet. Für  $w_0 \gtrsim 10\lambda_n$  ergibt sich  $L_B \gtrsim 600\lambda_n$ .

Beugungslänge



The depth of focus of a Gaussian beam.

Man kann nun schreiben:

$$\begin{aligned} v(x, y, z) &= A_0 \frac{1 - i\frac{z}{z_0}}{1 + \left(\frac{z}{z_0}\right)^2} \exp \left\{ -\frac{x^2 + y^2}{w_0^2 \left[ 1 + \left(\frac{z}{z_0}\right)^2 \right]} \right\} \exp \left\{ i\frac{\frac{z}{z_0} (x^2 + y^2)}{w_0^2 \left[ 1 + \left(\frac{z}{z_0}\right)^2 \right]} \right\} \\ &= A_0 \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{z}{z_0}\right)^2}} \exp \left\{ -\frac{x^2 + y^2}{w_0^2 \left[ 1 + \left(\frac{z}{z_0}\right)^2 \right]} \right\} \exp \left\{ i\frac{k}{2} \frac{(x^2 + y^2)}{z \left[ 1 + \left(\frac{z_0}{z}\right)^2 \right]} \right\} \exp [i\varphi(z)], \end{aligned}$$

wobei

$$w_0^2 = \frac{2z_0}{k}$$

ausgenutzt wurde und

$$\tan \varphi = -\frac{z}{z_0}$$

die Guoy-Phasenverschiebung darstellt.

Ein Gauß-Bündel läßt sich nun bequem unter Einführung von  $z$  -abhängiger Amplitude, Breite und Krümmung schreiben

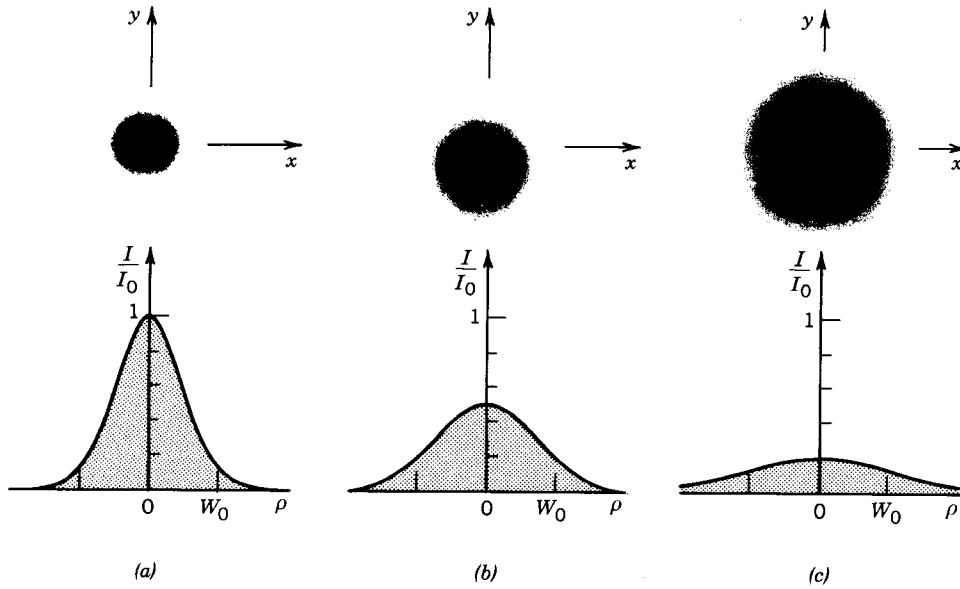
$$v(x, y, z) = A(z) \exp \left[ -\frac{x^2 + y^2}{w^2(z)} \right] \exp \left[ i\frac{k}{2} \frac{(x^2 + y^2)}{R(z)} \right] \exp [i\varphi(z)]$$

mit:

## 1. der Amplitude

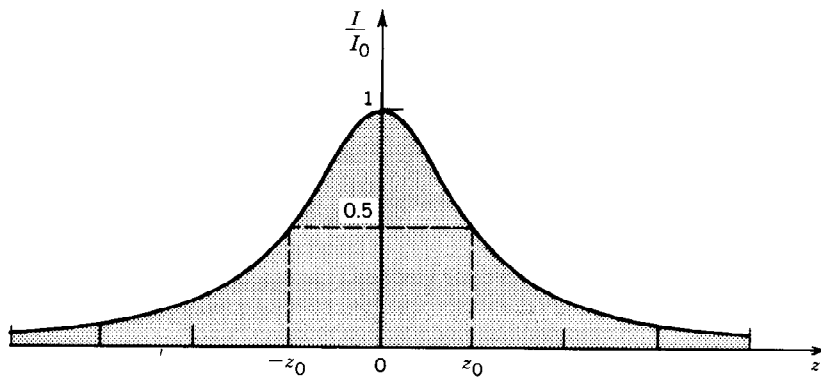
$$A(z) = A_0 \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{z}{z_0}\right)^2}} = A_0 \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{2z}{L_B}\right)^2}},$$

Intensität



The normalized beam intensity  $I/I_0$  as a function of the radial distance  $\rho$  at different axial distances: (a)  $z = 0$ ; (b)  $z = z_0$ ; (c)  $z = 2z_0$ .

Intensität im Nullpunkt

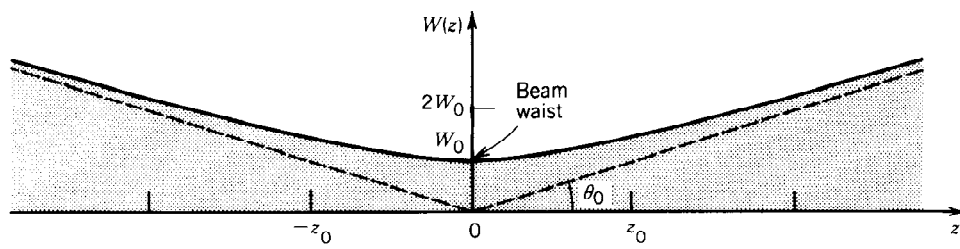


The normalized beam intensity  $I/I_0$  at points on the beam axis ( $\rho = 0$ ) as a function of  $z$ .

## 2. der Breite

$$w(z) = w_0 \sqrt{1 + \left(\frac{z}{z_0}\right)^2} = w_0 \sqrt{1 + \left(\frac{2z}{L_B}\right)^2},$$

Bündelbreite

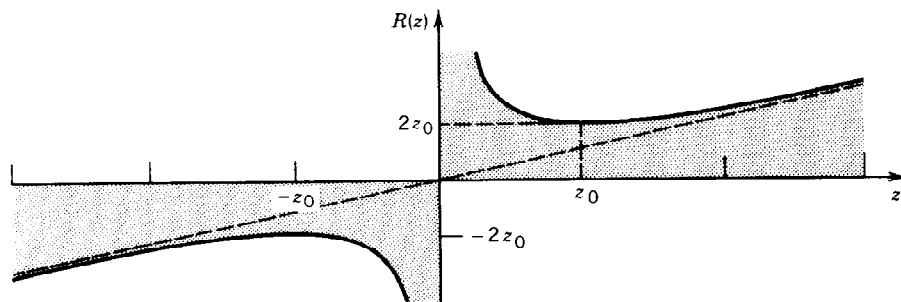


The beam radius  $W(z)$  has its minimum value  $W_0$  at the waist ( $z = 0$ ), reaches  $\sqrt{2} W_0$  at  $z = \pm z_0$ , and increases linearly with  $z$  for large  $z$ .

### 3. der Krümmung

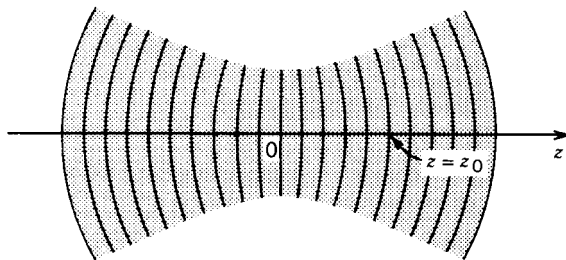
$$R(z) = z \left[ 1 + \left( \frac{z_0}{z} \right)^2 \right] = z \left[ 1 + \left( \frac{L_B}{2z} \right)^2 \right]$$

#### Krümmungsradius



The radius of curvature  $R(z)$  of the wavefronts of a Gaussian beam. The dashed line is the radius of curvature of a spherical wave.

#### Phasenfronten



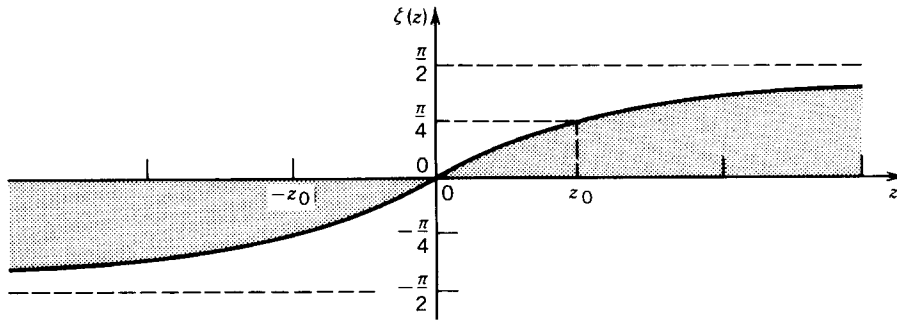
Wavefronts of a Gaussian beam.

### 4. und der Phase

$$\tan \varphi = -\frac{z}{z_0} = -\frac{2z}{L_B}$$

#### Phase





$\zeta(z)$  is the phase retardation of the Gaussian beam relative to a uniform plane wave at points on the beam axis.

### 2.6.2.1 Eigenschaften eines Gauß-Strahls bei der Ausbreitung

Das Verhältnis von Ausbreitungslänge  $z$  und Beugungsparameter  $z_0 = \frac{kw_0^2}{2} = \frac{\pi}{\lambda_n} w_0^2$  bestimmt die Ausbreitungseigenschaften.

1.  $z \ll z_0$  : Das Gauß-Bündel ändert seine Gestalt und Phase nicht.
2.  $z \gtrsim z_0$  :

a) Das Produkt aus Breite und Amplitude ist konstant.  $\rightarrow A(z)w(z) = \text{const.}$

b) Bündelbreite  $\rightarrow w(z) = w_0 \sqrt{1 + \left(\frac{z}{z_0}\right)^2} \rightarrow w(L_B) = w_0 \sqrt{5} \approx 2w_0 \rightarrow L_B$  bezeichnet die Beugungslänge oder Fokustiefe.  
speziell für  $z \gg z_0$  gilt  $w(z) \approx w_0 \frac{z}{z_0} \rightarrow w(z)/z = \tan \Theta_0 \approx w_0/z_0$

$$\Theta_0 \approx \frac{\lambda w_0}{\pi n w_0^2} = \frac{1}{w_0} \frac{\lambda}{\pi n} \rightarrow \Theta_0 w_0 \sim \frac{\lambda}{n}$$

d.h., die Strahldivergenz nimmt zu mit stärkerer Fokussierung und größerer Wellenlänge.

c) Krümmung

Fläche konstanter Phase:

$$\Phi(x, y, z) = \left\{ k \left[ z + \frac{x^2 + y^2}{2R(z)} + \varphi(z) \right] \right\} = \text{const.}$$

Krümmungsradius  $R(z)$

$$\frac{1}{k} \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right) \doteq \frac{1}{R(z)} = z \left[ 1 + \left( \frac{z_0}{z} \right)^2 \right]$$

$$\curvearrowright R(0) \rightarrow \infty ; R(z_0) = 2z_0 = R_{\min}; R(z \rightarrow \infty) = z$$

### 2.6.2.2 Zusammenhang der Parameter des Gauß-Bündels mit einem komplexen Bündelparameter $q(z)$

Es sei

$$q(z) = z - iz_0$$

↷

$$\begin{aligned} \frac{1}{q(z)} &= \frac{1}{z - iz_0} = \frac{z}{z^2 + z_0^2} + i \frac{z_0}{z^2 + z_0^2} \\ &= \frac{1}{z \left(1 + \frac{z_0^2}{z^2}\right)} + i \frac{1}{z_0 \left(1 + \frac{z^2}{z_0^2}\right)} \\ \frac{1}{q(z)} &= \frac{1}{R(z)} + i \frac{\lambda_n}{\pi w^2(z)}. \end{aligned}$$

Diese Beziehung gilt für jedes  $z$  und ordnet einer bestimmten vorgegebenen Krümmung und Bündelbreite eineindeutig einen komplexen Parameter zu, der damit das Verhalten des Bündels vollständig beschreibt.

**Beispiel: Ausbreitung im homogenen Raum um  $z = d$**

1. Vorgabe der Anfangsbedingungen:

$$\frac{1}{q(0)} = \frac{1}{R(0)} + i \frac{\lambda_n}{\pi w^2(0)}$$

2. Ausbreitung (folgt aus Definition des Parameters)

$$q(d) = q(0) + d$$

3. Bündelparameter bei  $z = d$

$$\frac{1}{q(d)} = \frac{1}{q(0) + d} \doteq \frac{1}{R(d)} + i \frac{\lambda_n}{\pi w^2(d)}$$

### 2.6.3 Gaußsche Optik

Die Fundamentalmoden vieler Laser weisen eine Gaußsche Intensitätsverteilung auf. Es ist daher zweckmäßig, auf der Grundlage des komplexen  $q$  - Parameters eine einfache Beschreibung der Ausbreitung und Wechselwirkung dieser Bündel zu versuchen. Ziel ist es für vorgegebene  $R_0, w_0$  (d.h.  $q_0$ ) die entsprechenden  $q_n$ , d.h.  $R_n, w_n$ , nach dem Durchgang durch  $n$  optische Elemente zu finden. Dabei haben wir  $q(z_i)$  durch  $q_i$  ersetzt. Obwohl wir Wellenoptik und nicht geometrische Optik betreiben, können die optischen Elemente mit den aus der geometrischen Optik bekannten 2x2 ABCD-Matrizen beschrieben werden. In der geometrischen Optik gilt:

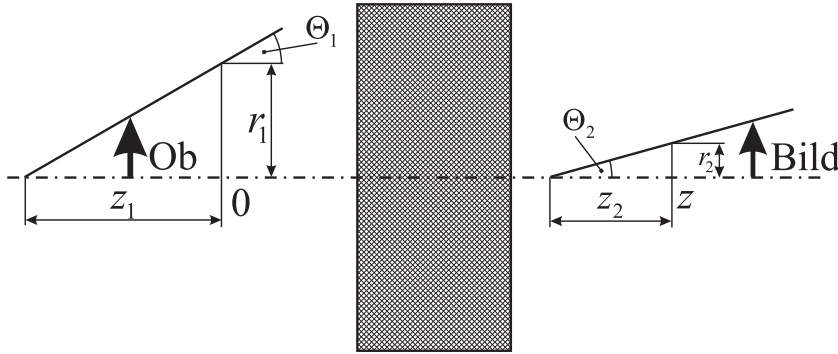
$$\hat{\mathbf{M}} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}.$$

Beim Durchgang durch mehrere Elemente multipliziert man einfach die Matrizen

$$\hat{\mathbf{M}} = \hat{\mathbf{M}}_N \hat{\mathbf{M}}_{N-1} \dots \hat{\mathbf{M}}_1 = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}. \quad (2.14)$$

Die Matrix verbindet die Strahlabstände und die Neigungswinkel vor und nach dem Element

$$\begin{pmatrix} r_2 \\ \Theta_2 \end{pmatrix} = \hat{\mathbf{M}} \begin{pmatrix} r_1 \\ \Theta_1 \end{pmatrix}.$$



Bildet man den Quotienten  $z_1 = \frac{r_1}{\Theta_1}$ , so erhält man

$$\frac{r_2}{\Theta_2} = \frac{A \frac{r_1}{\Theta_1} + B}{C \frac{r_1}{\Theta_1} + D}, \quad z_2 = \frac{Az_1 + B}{Cz_1 + D}$$

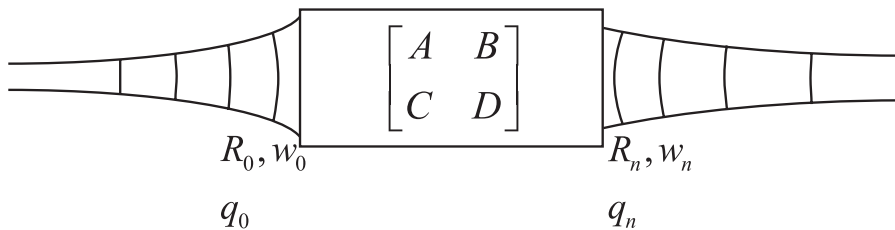
Diese Quotienten, die einem Abstand auf der optischen Achse entsprechen, sind über die Matrixelemente verbunden, jedoch nicht durch eine kanonische Matrixmultiplikation. Die Brücke zur Wellenoptik kann man jetzt schlagen, indem man folgert, daß die endliche Bündelbreite aus dem reellen Abstand einen komplexen Parameter  $q$  macht. Damit erhält man für die Entwicklung des  $q$ -Parameters beim Durchgang durch ein Element

$$q_1 = \frac{A_1 q_0 + B_1}{C_1 q_0 + D_1}$$

oder entsprechend beim Durchgang durch  $n$ -Elemente

$$q_n = \frac{A q_0 + B}{C q_0 + D}$$

mit der Matrix (2.14).

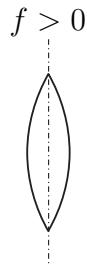
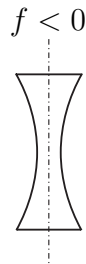


**ABCD-Matrizen für ausgewählte optische Systeme:**

1. Ausbreitung im homogenen Raum - Ausbreitungslänge  $d$

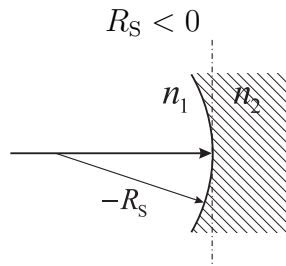
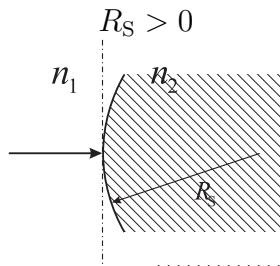
$$\hat{\mathbf{M}} = \begin{bmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2. Durchgang durch dünne Linse der Brennweite  $f$  ( $f < 0$  für Konkavlinse)



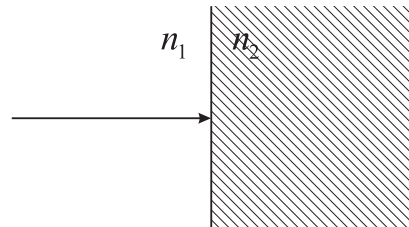
$$\hat{\mathbf{M}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{bmatrix},$$

3. Durchgang durch sphärische Fläche mit Krümmungsradius  $R_S$  (von Medium mit  $n_1$  in Medium mit  $n_2$ ), wobei  $R_S < 0$  für Konkavfläche.



$$\hat{\mathbf{M}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{(n_2 - n_1)}{n_2 R_S} & \frac{n_1}{n_2} \end{bmatrix},$$

4. Durchgang durch ebene Fläche (von Medium mit  $n_1$  in Medium mit  $n_2$ )

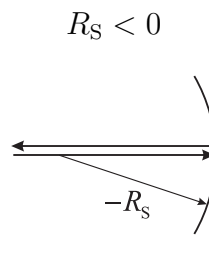
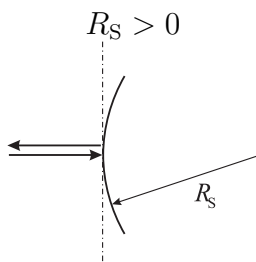


$$\hat{\mathbf{M}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{n_1}{n_2} \end{bmatrix},$$

5. Reflexion am ebenen Spiegel

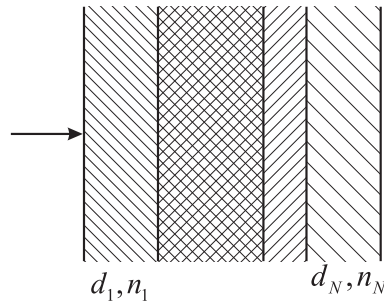
$$\hat{\mathbf{M}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

6. Reflexion am sphärischen Spiegel (Krümmungsradius  $R_S$ )



$$\hat{\mathbf{M}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{2}{R_S} & 1 \end{bmatrix},$$

7. Durchgang durch ein Schichtsystem ( $d_i, n_i$ )

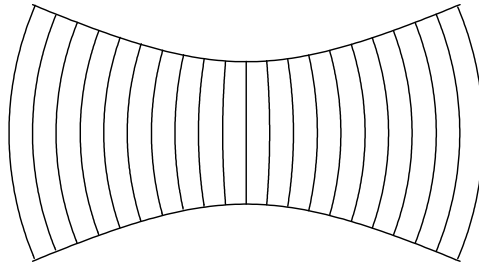


$$\hat{\mathbf{M}} = \begin{bmatrix} 1 & \sum_{i=1}^N \frac{d_i}{n_i} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Man beachte, daß nur die Entwicklung der Bündelbreite und -krümmung beschrieben wird. Amplitudenänderungen durch Reflexionen sind nicht enthalten.

## 2.6.4 Gaußsche Moden in einem Resonator

### 2.6.4.1 Transversale Fundamentalmoden (Rotationssymmetrie)



Die Idee besteht darin, daß ein Resonator stabil sein sollte, wenn die Spiegelflächen mit den Phasenflächen übereinstimmen. In paraxialer Näherung heißt das, daß die Krümmungsradien der Spiegel identisch mit den Krümmungsradien der Phasenflächen sein sollten.

**Definitionen:**

- Wegen

$$R(z) = z + \frac{z_0^2}{z}$$

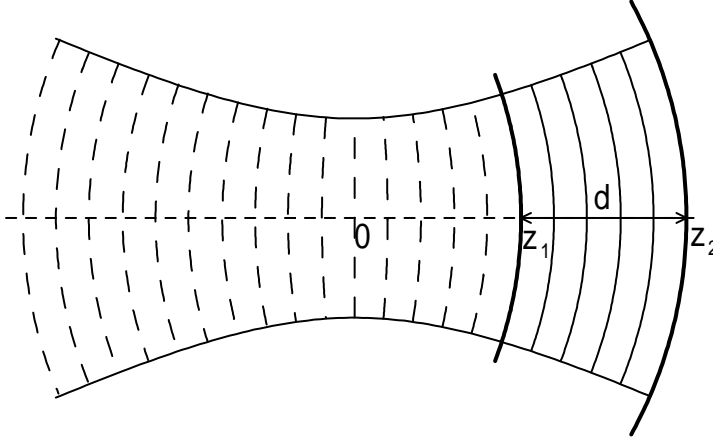
ist der Radius der Phasenfläche negativ für negative  $z$ .

- Trifft das Bündel auf eine konkave Spiegelfläche, gilt für den Spiegelradius  $R_i (i = 1, 2) < 0$ .
- $z_{1,2}$  bezeichne den Abstand von der Taille zum Spiegel '1', '2'.  $d$  sei der Abstand der Spiegel und damit

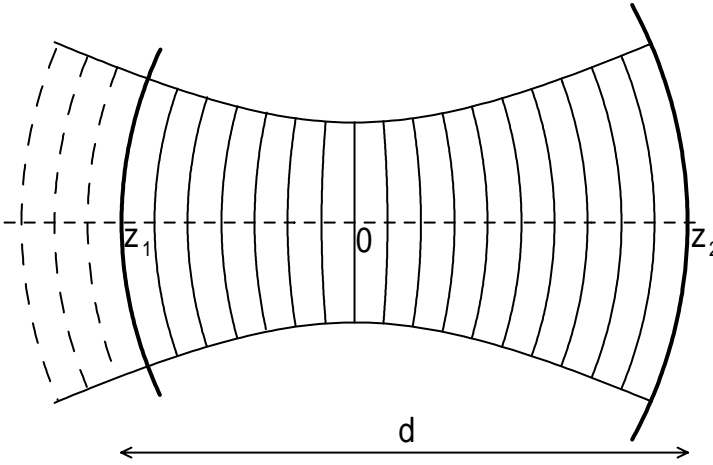
$$z_2 = z_1 + d$$

**Beispiele:**

- $R(z_1), R(z_2) > 0$ ;  $R_1 > 0, R_2 < 0$



- $R(z_1) < 0, R(z_2) > 0; R_1, R_2 < 0$



Die Konsistenzbedingungen lauten nun:

$$R_1 = R(z_1), \quad R_2 = -R(z_2)$$

↪

$$R_1 = z_1 + \frac{z_0^2}{z_1}, \quad -R_2 = z_2 + \frac{z_0^2}{z_2}.$$

Ersetzen von  $z_0^2$  ergibt

$$z_1(R_1 - z_1) = -z_2(R_2 + z_2)$$

und mit  $z_2 = z_1 + d$  erhält man

$$z_1 = -\frac{d(R_2 + d)}{R_1 + R_2 + 2d},$$

d.h. bei Vorgabe von  $R_1, R_2, d$  folgt die Lage der Moden im Resonator. Die Stabilität der Moden wird dadurch bestimmt, daß die Bedingung

$$z_0^2 = R_1 z_1 - z_1^2 = -\frac{d(R_1 + d)(R_2 + d)(R_1 + R_2 + d)}{(R_1 + R_2 + 2d)^2} \quad (2.15)$$

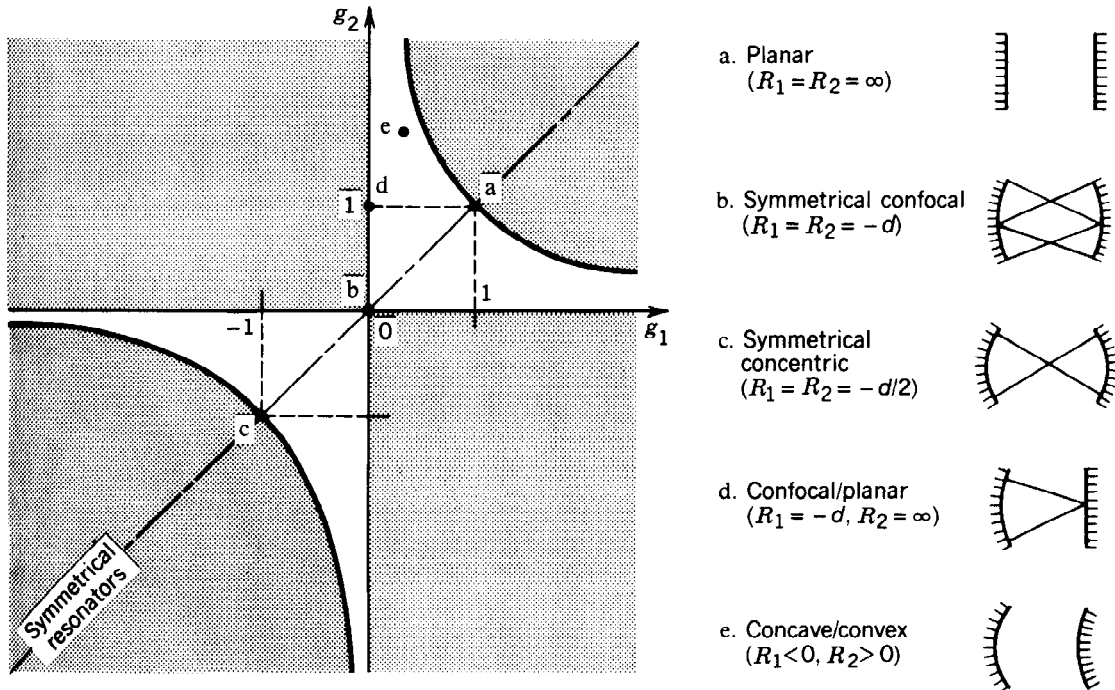
erfüllt sein muß. Gleichzeitig folgt aus  $z_0^2$  die Tailenbreite  $w_0$ . Nach einigen Umformungen folgt aus Gl.(2.15) die Stabilitätsbedingung eines Resonators

$$0 \leq \left(1 + \frac{d}{R_1}\right) \left(1 + \frac{d}{R_2}\right) \leq 1$$

oder die Hyperbelgleichung

$$0 \leq g_1 g_2 \leq 1.$$

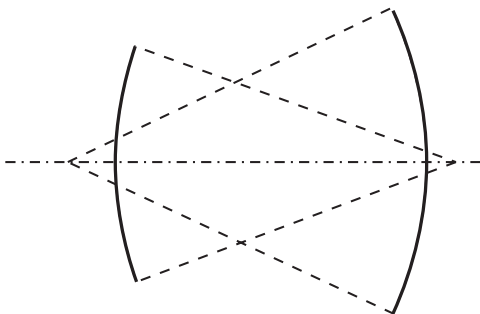
In der Abbildung sind die Gebiete zwischen den Koordinatenachsen und den Hyperbeln stabil.



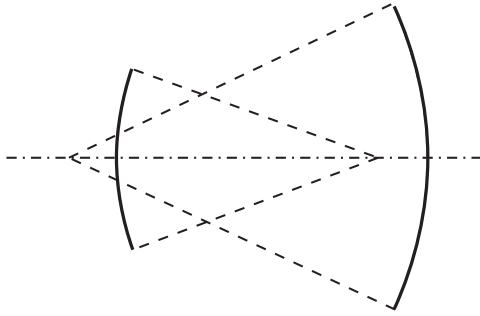
**Resonator stability diagram.** A spherical-mirror resonator is stable if the parameters  $g_1 = 1 + d/R_1$  and  $g_2 = 1 + d/R_2$  lie in the unshaded regions bounded by the lines  $g_1 = 0$  and  $g_2 = 0$ , and the hyperbola  $g_2 = 1/g_1$ .  $R$  is negative for a concave mirror and positive for a convex mirror. Various special configurations are indicated by letters. All symmetrical resonators lie along the line  $g_2 = g_1$ .

Die beiden folgenden Konfigurationen sind Beispiele für einen stabilen bzw. instabilen Resonator:

b<sub>1</sub>)  $R_1, R_2 < 0; |R_1| = d + \varepsilon_1, |R_2| = d + \varepsilon_2; 0 \leq \varepsilon_1 \varepsilon_2 \leq d^2 \leadsto \varepsilon_1 \varepsilon_2 \geq 0 \leadsto$  stabil



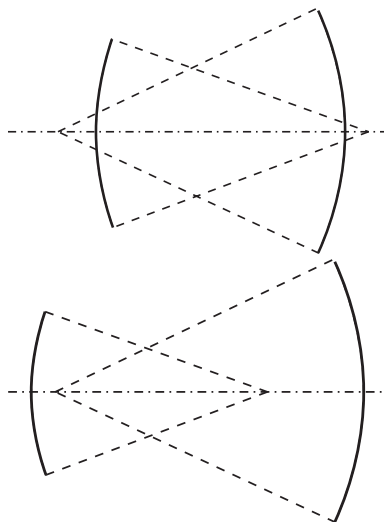
b<sub>2</sub>)  $\varepsilon_1 \varepsilon_2 < 0 \leadsto$  instabil



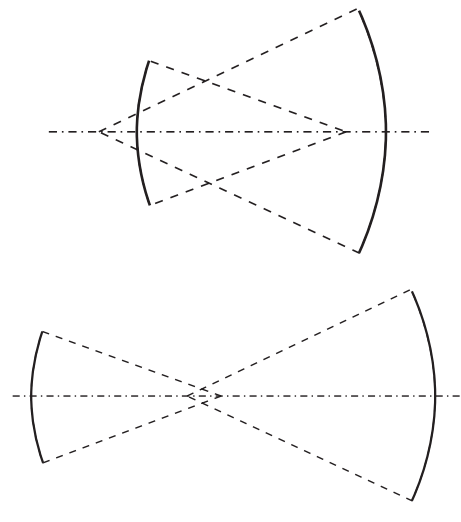
Folgende Faustregeln hinsichtlich der Dimensionierung stabiler Resonatoren lassen sich aufstellen:

- beide Spiegel sind konkav
  1. Beide Mittelpunkte der entsprechenden Kreise müssen außerhalb des Resonators liegen.
  2. Beide Mittelpunkte müssen innen und näher zum entsprechenden anderen Spiegel liegen.

stabil



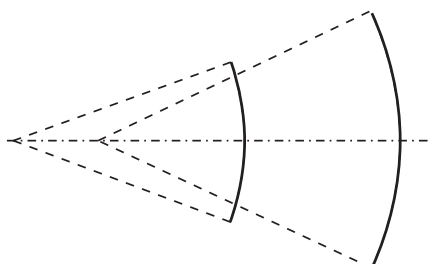
instabil



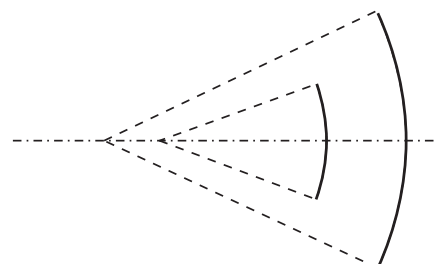
- ein Spiegel ist konvex, der andere konkav

Beide Mittelpunkte müssen jenseits eines Spiegels liegen, wobei der Mittelpunkt des Konvexspiegels weiter entfernt vom Resonator liegen muß.

stabil



instabil





Instabile Resonatoren sind für high-gain-Laser interessant, da wegen der großen Verluste das stärkste Modenfeld selektiert wird.

Gauß-Bündel sind Lösungen der paraxialen Wellengleichung. Gleichzeitig sind sie die Normalmoden von Resonatoren mit gekrümmten Spiegeln (ebene Spiegel sind Grenzfall). Damit kann ein beliebiges Feld nach einem vollständigen Satz von Resonatormoden entwickelt werden → siehe nächstes Unterkapitel.

#### 2.6.4.2 Bemerkungen zu Moden höherer Ordnung

Das Ziel besteht im Auffinden des gesamten Modensatzes. Die bisher behandelte Fundamentalmode ist forminvariant, unterliegt aber der Beugung. Trotzdem kann diese Mode als eine longitudinale Normalmode des Resonators angesehen werden, da sie unveränderlich im Resonator existiert. Die Fundamentalmode ist rotationssymmetrisch in Amplitude und Phase. Die Konsistenzbedingung bezog sich nur auf die Phasenfläche. Moden mit gleicher Phasenfläche, aber azimuthal variierender Intensitätsverteilung sollten ebenfalls diese Bedingung erfüllen. Für die Gaußsche Mode galt bisher

$$v_G(x, y, z) = A \frac{w_0}{w(z)} \exp \left[ -\frac{x^2 + y^2}{w^2(z)} \right] \exp \left[ i \frac{k}{2} \frac{x^2 + y^2}{R(z)} \right] \exp [i\varphi(z)] .$$

Wir verallgemeinern den Ansatz (  $x, y$  -Abhängigkeit der Phase bleibt erhalten)

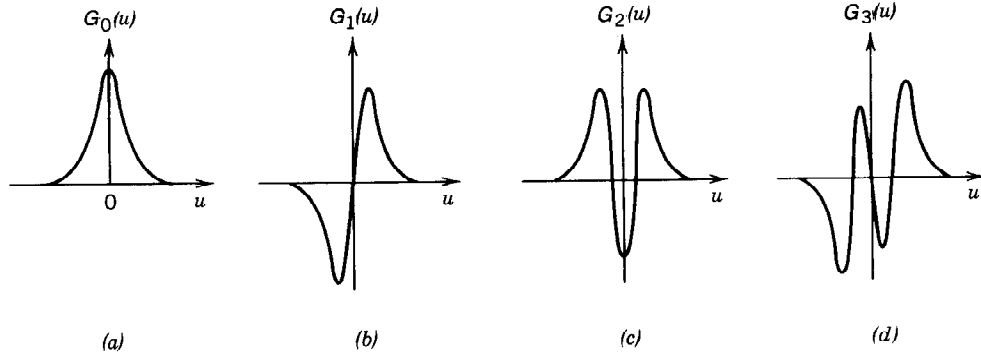
$$v(x, y, z) = X \left[ \sqrt{2} \frac{x}{w(z)} \right] Y \left[ \sqrt{2} \frac{y}{w(z)} \right] v_G(x, y, z) .$$

Einsetzen in die paraxiale Wellengleichung ergibt eine Eigenwertgleichung mit den Eigenwerten  $l$  und  $m$  und den hermiteschen Polynomen als Eigenfunktionen, wenn man berücksichtigt, daß  $v_G(x, y, z)$  Lösung der paraxialen Wellengleichung ist. Die Gesamtlösung (mit schnellen Phasenanteilen) schreibt sich dann

$$u_{l,m}(x, y, z) = A_{l,m} \frac{w_0}{w(z)} G_l \left[ \sqrt{2} \frac{x}{w(z)} \right] G_m \left[ \sqrt{2} \frac{y}{w(z)} \right] \exp \left[ i \frac{k}{2} \frac{x^2 + y^2}{R(z)} \right] \exp (ikz) \exp [i(l + m + 1)\varphi(z)] .$$

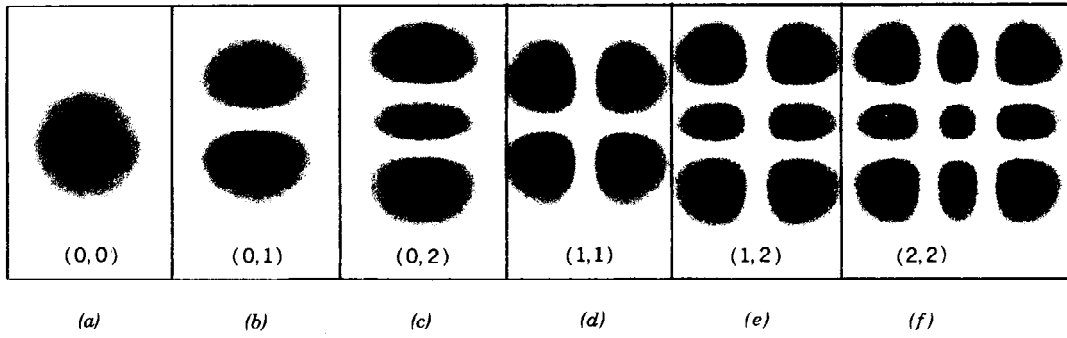
mit

$$G_l(u) = H_l(u) \exp \left( -\frac{u^2}{2} \right)$$



Several low-order Hermite-Gaussian functions: (a)  $G_0(u)$ ; (b)  $G_1(u)$ ; (c)  $G_2(u)$ ; (d)  $G_3(u)$ .

und den hermiteschen Polynomen  $H_l(u)$  ( $H_0 = 1, H_1 = 2u$  und  $H_{l+1} = 2uH_l - 2lH_{l-1}$ ).



Intensity distributions of several low-order Hermite-Gaussian beams in the transverse plane. The order  $(l, m)$  is indicated in each case.

Aus der Orthogonalität der Gauß-Hermite-Polynome

$$\int_{-\infty}^{\infty} G_l(x)G_m(x)dx = \sqrt{\pi}2^l l! \delta_{lm}$$

folgt die Orthogonalität der Resonatormoden

$$\int_{-\infty}^{\infty} u_{lm}(x, y)u_{l'm'}^*(x, y)dxdy \sim \delta_{ll'}\delta_{mm'}.$$

Damit kann ein beliebiges Feld im Resonator nach diesen Moden entwickelt werden

$$u(x, y, z) = \sum_{l,m} A_{l,m}u_{lm}(x, y, z),$$

wobei die Entwicklungskoeffizienten aus dem Eingangsfeld folgen

$$A_{l,m} \sim \int u_0(x, y)u_{lm}(x, y, 0)dxdy.$$

Durch Störungen (Spiegelinhomogenitäten, Nichtlinearitäten etc.) können diese Moden koppeln.

## 2.6.5 Ausbreitung von Impulsen

### 2.6.5.1 Pulse mit endlicher transversaler Breite (gepulste Bündel)

Bisher: transversal begrenztes Wellenfeld (Strahl), aber monochromatisch  $\rightarrow \omega$  festgelegt  $\rightarrow k(\omega)$  fest  $\rightarrow$  cw-Laser

aber: für viele Anwendungen sind Impulse im Bereich von 100 fs - 100 ps von Interesse (Spektroskopie, nichtlineare Optik)

#### Zeit- und Frequenzskalen:

Pulsenvelope:  $10^{-13}\text{s} \leq T_0 \leq 10^{-10}\text{s}$   
Mittenfrequenz:  $\omega_0 = 2\pi\nu \sim 4 \cdot 10^{15} \text{ Hz} \rightarrow$  Schwingungsdauer  $T_s = 2\pi/\omega_0 \approx 1.6 \text{ fs}$

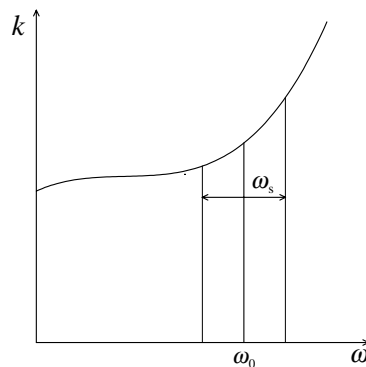
Spektrum des Pulses (z.B. Gauß):

$$f(t) = \exp(-i\omega_0 t) \exp\left(-\frac{t^2}{T_0^2}\right)$$

$$F(\omega) \sim \exp\left[-\frac{(\omega - \omega_0)^2}{4/T_0^2}\right] \rightarrow \omega_s^2 = \frac{4}{T_0^2} \rightarrow \omega_s T_0 = 2$$

$\rightarrow$  spektrale Breite:  $4 \cdot 10^{10} \text{ Hz} \leq \omega_s \leq 4 \cdot 10^{13} \text{ Hz} \rightarrow \omega_s \ll \omega_0 \rightarrow \omega - \omega_0 \ll \omega_0$

Folgerung: Statt die komplizierte, im allgemeinen nicht analytisch vorliegende, Dispersionsrelation  $k(\omega)$  zu benutzen, kann man eine Taylorentwicklung bei  $\omega = \omega_0$  vornehmen und damit die Dispersionseigenschaften in parabolischer oder kubischer Näherung beschreiben.



$$k(\omega) \approx k(\omega_0) + \left. \frac{\partial k}{\partial \omega} \right|_{\omega_0} (\omega - \omega_0) + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 k}{\partial \omega^2} \right|_{\omega_0} (\omega - \omega_0)^2 + \dots$$

$$k(\omega_0) = k_0, \rightarrow \frac{1}{v_{\text{Ph}}} = \frac{k_0}{\omega_0} = \frac{n(\omega_0)}{c} \rightarrow \text{Phasengeschwindigkeit}$$

$$\frac{1}{v_g} = \left. \frac{\partial k}{\partial \omega} \right|_{\omega_0} \rightarrow \text{Gruppengeschwindigkeit}$$

$$D_\omega = \left. \frac{\partial^2 k}{\partial \omega^2} \right|_{\omega_0} \rightarrow \text{Dispersion der Gruppengeschwindigkeit}$$

Damit ist die komplizierte Dispersionsrelation auf drei Größen zurückgeführt:

- Phasengeschwindigkeit
- Gruppengeschwindigkeit
- Dispersion der Gruppengeschwindigkeit

a) *Gruppengeschwindigkeit*  $\rightarrow$  Ausbreitungsgeschwindigkeit des Pulszentrums.  
Mit

$$k(\omega) = \frac{\omega}{c} n(\omega) \rightarrow \frac{1}{v_g} = \frac{1}{c} \left[ n(\omega_0) + \omega_0 \left. \frac{\partial n}{\partial \omega} \right|_{\omega_0} \right]$$

$$v_g = \frac{c}{\left[ n(\omega_0) + \omega_0 \left. \frac{\partial n}{\partial \omega} \right|_{\omega_0} \right]} = v_{\text{PH}} \frac{n(\omega_0)}{n_g(\omega_0)}$$

$$n_g(\omega_0) = n(\omega_0) + \omega_0 \left. \frac{\partial n}{\partial \omega} \right|_{\omega_0} \rightarrow \text{Gruppenindex}$$

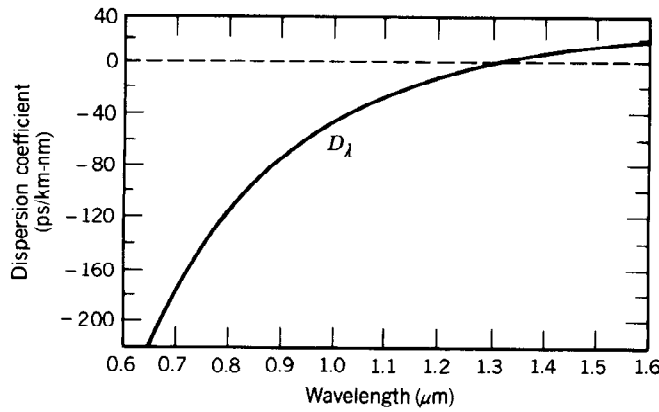
normale Dispersion:  $\partial n / \partial \omega > 0 \curvearrowright v_g < v_{\text{PH}}, n_g > n$   
anormale Dispersion:  $\partial n / \partial \omega < 0 \curvearrowright v_g > v_{\text{PH}}, n_g < n$

b) *Dispersion der Gruppengeschwindigkeit* (GVD) (manchmal einfach Dispersion)  $\rightarrow$  verantwortlich für Änderung der Pulsform bei der Ausbreitung

$$D = D_\omega = \left. \frac{\partial^2 k}{\partial \omega^2} \right|_{\omega_0} \left[ \frac{\text{ps}^2}{\text{km}} \right]$$

manchmal auch (optische Kommunikation):

$$D_\lambda = \frac{\partial}{\partial \lambda} \left( \frac{1}{v_g} \right) = -\frac{2\pi}{\lambda^2} c D_\omega$$



dispersion coefficient  $D_\lambda$ . At  $\lambda_o = 1.312 \mu\text{m}$ ,  $n$  has a point of inflection, the group velocity  $v$  is maximum, the group index  $N$  is minimum, and the dispersion coefficient  $D_\lambda$  vanishes. At this wavelength the pulse broadening is minimal.

Achtung wegen Vorzeichen!

wichtig für spätere Diskussion (bei veränderlicher Frequenz unter dem Puls)  $\rightarrow$  chirp:

$$D = \frac{\partial}{\partial \omega} \left( \frac{1}{v_g} \right) = -\frac{1}{v_g^2} \frac{\partial v_g}{\partial \omega}$$

$$\rightarrow D > 0 \curvearrowright \frac{\partial v_g}{\partial \omega} < 0$$

$$\rightarrow D < 0 \curvearrowright \frac{\partial v_g}{\partial \omega} > 0$$

Ausgangspunkt ist die skalare Helmholtzgleichung:

$$\Delta u(\mathbf{r}, \omega) + \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon(\omega) u(\mathbf{r}, \omega) = 0 \quad (2.16)$$

wobei  $\omega$  jetzt eine beliebige Fourierkomponente des Feldes darstellt. Es gilt weiterhin die Dispersionsrelation

$$k^2(\omega) = \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon(\omega).$$

Für die Entwicklung des Fourierspektrums gilt

$$U(\alpha, \beta, \omega; z) = U_0(\alpha, \beta, \omega) \exp[i\gamma(\alpha, \beta, \omega) z] \quad (2.17)$$

mit

$$\gamma(\alpha, \beta, \omega) = \sqrt{k^2(\omega) - \alpha^2 - \beta^2}$$

Das Anfangsspektrum bei  $z = 0$   $U_0(\alpha, \beta, \omega)$  ist die Fouriertransformierte der Feldverteilung

$$U_0(\alpha, \beta, \omega) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \int \int_{-\infty}^{\infty} u_0(x, y, t) \exp[-i(\alpha x + \beta y - \omega t)] dx dy dt$$

In Fresnelscher (paraxialer) Näherung ( $k^2(\omega) \gg \alpha^2 + \beta^2$ ) ergibt sich aus 2.17

$$U(\alpha, \beta, \omega; z) \approx U_0(\alpha, \beta, \omega) \exp[ik(\omega) z] \exp\left[-i \frac{\alpha^2 + \beta^2}{2k(\omega)} z\right]$$

und damit die Übertragungsfunktion für Pulse in Fresnelscher Näherung

$$H_{\text{FP}}(\alpha, \beta, \omega; z) = \exp[ik(\omega) z] \exp\left[-i \frac{\alpha^2 + \beta^2}{2k(\omega)} z\right]$$

Durch Einsetzen der Taylorentwicklung von  $k(\omega)$  in ersten Term und Ersetzen von  $k(\omega) \approx k(\omega_0) = k_0$  (gilt nicht für extrem kurze Impulse  $T_0 \lesssim 15$  fs) im zweiten Term erhält man die parabolische Näherung der Übertragungsfunktion

$$H_{\text{FP}}(\alpha, \beta, \omega; z) \approx \exp[ik_0 z] \exp\left[i \frac{1}{v_g} (\omega - \omega_0) z\right] \exp\left[i \frac{D}{2} (\omega - \omega_0)^2 z\right] \exp\left[-i \frac{\alpha^2 + \beta^2}{2k_0} z\right] \quad (2.18)$$

$$= \exp[ik_0 z] \exp\left[i z \left(\frac{\bar{\omega}}{v_g} + \frac{1}{2} D \bar{\omega}^2 - \frac{\alpha^2 + \beta^2}{2k_0}\right)\right] \quad (2.19)$$

$$= \exp[ik_0 z] \bar{H}_{\text{FP}}(\alpha, \beta, \bar{\omega}; z)$$

wobei  $\bar{H}_{\text{FP}}(\alpha, \beta, \bar{\omega}; z)$  den in  $z$  langsam variierenden Teil der Übertragungsfunktion darstellt.

Damit ergibt sich für das Gesamtfeld  $u(x, y, z, t)$

$$u(x, y, z, t) = \exp[ik_0 z] \int \int \int_{-\infty}^{\infty} U_0(\alpha, \beta, \omega) \bar{H}_{\text{FP}}(\alpha, \beta, \bar{\omega}; z) \exp[i(\alpha x + \beta y - \omega t)] d\alpha d\beta d\omega$$

$$= \exp[i(k_0 z - \omega_0 t)] \int \int \int_{-\infty}^{\infty} U_0(\alpha, \beta, \omega) \bar{H}_{\text{FP}}(\alpha, \beta, \bar{\omega}; z) \exp[i(\alpha x + \beta y - \bar{\omega} t)] d\alpha d\beta d\bar{\omega}$$

Einführung der langsam variierenden Amplitude

$$u(x, y, z, t) = v(x, y, z, t) \exp[i(k_0 z - \omega_0 t)]$$

führt auf:

$$v(x, y, z, t) = \int \int \int_{-\infty}^{\infty} U_0(\alpha, \beta, \omega) \overline{H}_{\text{FP}}(\alpha, \beta, \overline{\omega}; z) \exp [i (\alpha x + \beta y - \overline{\omega} t)] d\alpha d\beta d\overline{\omega}$$

Das Spektrum des Gesamtanfangsfeldes ist noch durch das Spektrum des 'langsamen' Feldes zu ersetzen:

$$u_0(x, y, t) = v_0(x, y, t) \exp (-i\omega_0 t)$$

$$\begin{aligned} U_0(\alpha, \beta, \omega) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int \int \int_{-\infty}^{\infty} v_0(x, y, t) \exp [-i (\alpha x + \beta y - \overline{\omega} t)] dx dy dt \\ &= V_0(\alpha, \beta, \overline{\omega}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v(x, y, z, t) &= \int \int \int_{-\infty}^{\infty} V_0(\alpha, \beta, \overline{\omega}) \overline{H}_{\text{FP}}(\alpha, \beta, \overline{\omega}; z) \exp [i (\alpha x + \beta y - \overline{\omega} t)] d\alpha d\beta d\overline{\omega} \\ &= \int \int \int_{-\infty}^{\infty} V_0(\alpha, \beta, \overline{\omega}) \tilde{H}_{\text{FP}}(\alpha, \beta, \overline{\omega}; z) \exp \left\{ i \left[ \alpha x + \beta y - \overline{\omega} \left( t - \frac{z}{v_g} \right) \right] \right\} d\alpha d\beta d\overline{\omega} \end{aligned}$$

wobei der lineare Term aus der Transmissionsfunktion separiert worden ist. Führt man die sog. 'mitgeführte' Zeit des Impulses

$$\tau = t - \frac{z}{v_g}$$

ein und schreibt schließlich die Transmissionsfunktion aus, erhält man die langsame Amplitude im mitgeführten Bezugssystem

$$\tilde{v}(x, y, z, \tau) = \int \int \int_{-\infty}^{\infty} V_0(\alpha, \beta, \overline{\omega}) \exp \left[ i \frac{z}{2} \left( D\overline{\omega}^2 - \frac{\alpha^2 + \beta^2}{k_0} \right) \right] \exp \{ i [\alpha x + \beta y - \overline{\omega} \tau] \} d\alpha d\beta d\overline{\omega}$$

Für das Gesamtfeld gilt dann:

$$u(x, y, z, t) = \tilde{v}(x, y, z, \tau) \exp [i (k_0 z - \omega_0 t)]$$

Damit ist die Evolution eines beliebigen Eingangsimpulses endlicher transversaler Dimension vollständig beschrieben.

Die Analogie zwischen Beugungs- und Dispersionseffekten kann leicht hergestellt werden, wenn man erhält eine dreidimensionale Verallgemeinerung der Beugung:

$$v(\vec{\mu}, \tau) = \int V_0(\vec{\rho}) \exp \left[ i \frac{z}{2} \vec{\delta} \cdot \vec{\rho}^2 \right] \exp (i \vec{\rho} \cdot \vec{\mu}) d\vec{\rho}$$

$$\vec{\rho} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \omega \end{pmatrix}, \vec{\mu} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ -\tau \end{pmatrix}, \vec{\delta} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{k_0} \\ -\frac{1}{k_0} \\ D \end{pmatrix}$$

Man erkennt leicht den Zusammenhang:  $D \longleftrightarrow -1/k_0$ , dabei gilt zu beachten, daß  $D \geq 0$ .

Aus der Entwicklung des Spektrums gelingt es wieder, eine Differentialgleichung für die langsame Amplitude abzuleiten:

$$V(\alpha, \beta, \bar{\omega}; z) = V_0(\alpha, \beta, \bar{\omega}) \exp \left[ i \frac{z}{2} \left( D\bar{\omega}^2 - \frac{\alpha^2 + \beta^2}{k_0} \right) \right]$$

Differenzieren ergibt:

$$i \frac{\partial V(\alpha, \beta, \bar{\omega}; z)}{\partial z} = - \frac{1}{2} \left( D\bar{\omega}^2 - \frac{\alpha^2 + \beta^2}{k_0} \right) V(\alpha, \beta, \bar{\omega}; z)$$

Fourier-Rücktransformation führt auf die gewünschte DGL:

$$i \frac{\partial v(x, y, z, \tau)}{\partial z} - \frac{D}{2} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} v(x, y, z, \tau) + \frac{1}{2k_0} \Delta^{(2)} v(x, y, z, \tau) = 0 \quad (2.20)$$

→ paraxiale Gleichung zur Beschreibung der Impulsausbreitung. Für  $D = 0$  wird der Fall der 'einfachen' Beugung reproduziert.

### 2.6.5.2 Unendliche transversale Ausdehnung

Spezialfall:  $\alpha = \beta = 0 \rightarrow$  nur eine Ortsfrequenz in  $z$ -Richtung, ebene Welle

1. Anfangsverteilung:

$$u_0(t) = v_0(t) \exp(-i\omega_0 t)$$

2. Anfangsspektrum:

$$V_0(\bar{\omega}) = U_0(\omega)$$

3. Entwicklung des Spektrums:

$$V(\bar{\omega}; z) = \exp \left[ i \frac{D}{2} z \bar{\omega}^2 \right] V_0(\bar{\omega})$$

→ Rücktransformation mit  $\tau$



4. Entwicklung der Amplitude:

$$\tilde{v}(z, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} V_0(\bar{\omega}) \exp \left[ i z \frac{D}{2} \bar{\omega}^2 \right] \exp [-i \bar{\omega} \tau] d\bar{\omega}$$

Die Fouriertransformation der Übertragungsfunktion

$$\tilde{H}_P(\bar{\omega}; z) = \exp \left[ i z \frac{D}{2} \bar{\omega}^2 \right]$$

ergibt die zeitliche Responsefunktion

$$\tilde{h}_P(\tau - t'; z) = \sqrt{\frac{2}{-i\pi D z}} \exp \left[ -i \frac{(\tau - t')^2}{2D z} \right]$$

Damit kann man im Zeitraum schreiben:

$$\tilde{v}(z, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{h}_P(\tau - t'; z) v_0(t') dt'$$

Die Differentialgleichung für die langsame Amplitude ergibt sich aus (2.20) zu

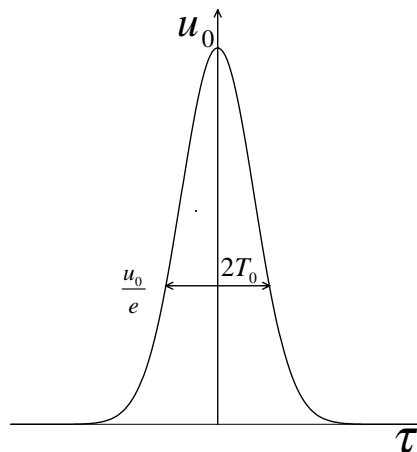
$$i \frac{\partial v(z, \tau)}{\partial z} - \frac{D}{2} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} v(z, \tau) = 0 \quad (2.21)$$

Aus (2.21) kann man nochmals einfach die Analogie zwischen Beugungs- und Dispersionseffekten ablesen

$$(\alpha, \beta) \longleftrightarrow \bar{\omega}, \quad (x, y) \longleftrightarrow \tau, \quad \nabla \longleftrightarrow \frac{\partial}{\partial \tau}, \quad \frac{1}{k_0} \longleftrightarrow -D, \quad \text{aber } D \leq 0.$$

### 2.6.5.3 Beispiel: Chirpfreier Gauß-Impuls

→ Analogie zur Beugung ausnutzen 1. Anfangsverteilung → chirpfreier Impuls



$$u_0(t) = A \exp\left(-\frac{t^2}{T_0^2}\right) \exp(-i\omega_0 t) \rightarrow v_0(\tau) = A \exp\left(-\frac{\tau^2}{T_0^2}\right)$$

2. Anfangsspektrum:

$$V_0(\bar{\omega}) = A \frac{T_0}{\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{\bar{\omega}^2 T_0^2}{4}\right)$$

spektrale Breite:  $\omega_s^2 = 4/T_0^2$

Ergebnisse von Ausbreitung eines Gauß-Strahles ausnutzen:

$z_0$  beschreibt Gauß

$$z_0 = \left(\frac{k}{2} w_0^2\right) = -\frac{1}{2} \frac{T_0^2}{D} \geq 0$$

Dispersionslänge:  $L_D = 2|z_0|$

3. damit folgt aus Analogie zur Ausbreitung eines Bündels die Entwicklung der Amplitude:

$$v(z, \tau) = A \sqrt{\frac{T_0}{T(z)}} \exp\left[-\frac{\tau^2}{T(z)^2}\right] \exp\left[-\frac{i}{2D} \frac{\tau^2}{R(z)}\right] \exp[i\varphi(z)]$$

mit

$$A(z) = A \sqrt{\frac{1}{1 + \left(\frac{z}{z_0}\right)^2}}, \quad T(z) = T_0 \sqrt{1 + \left(\frac{z}{z_0}\right)^2}$$

'Krümmung' ist für Impuls keine passende Größe  $\rightarrow$  Einführung des Chirps

Erinnerung:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) \Phi(x, y) = \frac{k}{R(z)}$$

für monochromatische Felder galt:

$$\Phi(\tau) = -\omega\tau \quad \longrightarrow \quad -\frac{\partial\Phi(\tau)}{\partial\tau} = \omega$$

Verallgemeinerung auf beliebige Zeitabhängigkeit der (Gesamt)-Phase

$$-\frac{\partial\Phi(\tau)}{\partial\tau} = \omega(\tau) \quad \text{und} \quad -\frac{\partial^2\Phi(\tau)}{\partial\tau^2} = \text{chirp}$$

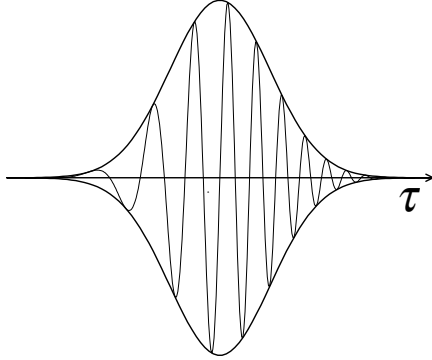
Man führt den 'chirp' als dimensionslose Größe ein (parabolische Näherung):

$$C = -\frac{T_0^2}{2} \frac{\partial^2 \Phi(\tau)}{\partial \tau^2}$$

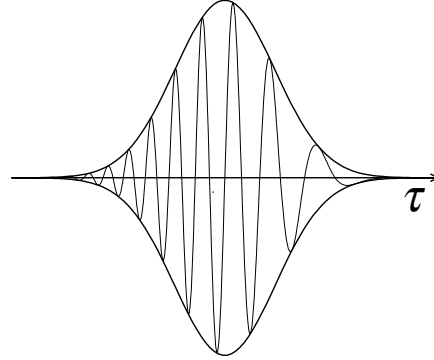
damit wird die variable Frequenz unter dem Puls

$$-\frac{\partial \Phi(\tau)}{\partial \tau} = \omega(\tau) = \omega_0 + 2C \frac{\tau}{T_0}$$

$C > 0 \longrightarrow$  up-chirp



$C < 0 \longrightarrow$  down-chirp



Man hat nun die Krümmung  $R(z)$  durch den chirp  $C(z)$  zu ersetzen:

$$\Phi(\tau) = -\omega_0 \tau - \frac{\tau^2}{2DR(z)} \equiv -\omega_0 \tau - C(z) \frac{\tau^2}{T_0^2} \quad \longrightarrow \quad C(z) = \frac{T_0^2}{2DR(z)} = -\frac{z_0}{R(z)}$$

Mit

$$R(z) = \frac{z^2 + z_0^2}{z} \longrightarrow C(z) = -\frac{z_0 z}{z^2 + z_0^2} = -\frac{z}{z_0 \left(1 + \frac{z^2}{z_0^2}\right)}$$

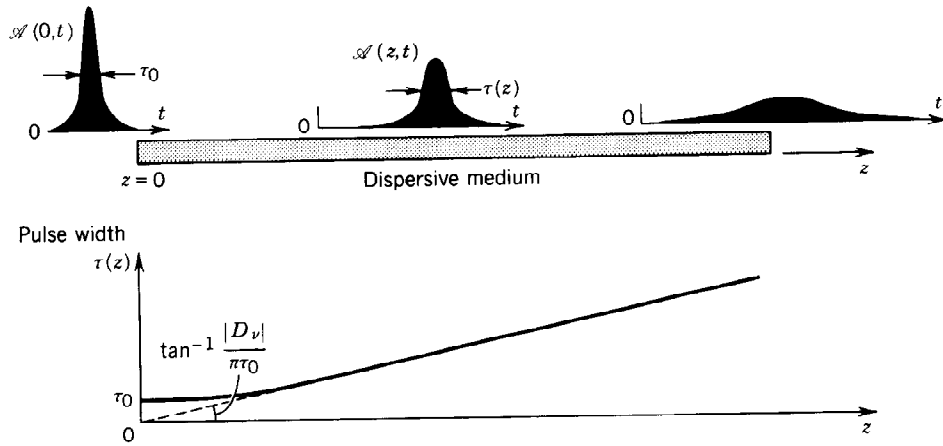
Achtung: Der Chirp trägt das Vorzeichen von  $z_0$  und damit von  $D$ .

Damit ergibt sich für das Gesamtfeld:

$$u(z, \tau) = A \sqrt{\frac{T_0}{T(z)}} \exp \left[ -\frac{\tau^2}{T(z)^2} \right] \exp \left[ -iC(z) \frac{\tau^2}{T_0^2} \right] \exp [i \varphi(z)] \exp [i (k_0 z - \omega_0 t)]$$

Physikalisch ist die Situation ähnlich zu der beim Bündel. Die entscheidende Größe ist der Dispersionsparameter

$$z_0 = -\frac{T_0^2}{2D}$$



Gaussian pulse spreading as a function of distance. For large distances, the width increases at the rate  $|D_v|/\pi\tau_0$ , which is inversely proportional to the initial width  $\tau_0$ .

- 1)  $z \ll |z_0|$ : keine Effekte
- 2)  $z \approx |z_0|$ : wie bei Bündel
- 3)  $D \leq 0$  spielt nur bei chirp eine Rolle, da sonst quadratisch.

#### 2.6.5.4 Beispiel: Gechirpter Gauß-Impuls

Oftmals generieren Laser gechirpte Impulse oder man erzeugt sich den Chirp gezielt, um den Puls zu komprimieren. Diese Kompression kann man in Analogie zur Strahlausbreitung erwarten (gekrümmte Phase  $\rightarrow$  Fokussierung).

Ein gechirpter Eingangsimpuls hat die Form

$$v_0(\tau) = A \exp \left[ -\frac{\tau^2(1 + iC_0)}{T_0^2} \right].$$

Durch Fouriertransformation erhält man das Spektrum

$$V_0(\bar{\omega}) = A \exp \left[ -\frac{\bar{\omega}^2 T_0^2 (1 - iC_0)}{4(1 + C_0^2)} \right].$$

Damit ergibt sich die spektrale Breite zu

$$\bar{\omega}_s^2 = \frac{4(1 + C_0^2)}{T_0^2}.$$

Ein gechirpter Puls ist immer spektral breiter als ein ungechirpter ( $\bar{\omega}_s^2 = 4/T_0^2$ )  $\rightarrow$  transformationsbegrenzt.

Das Ziel besteht nun darin, Pulsbreite und Chirp in Abhängigkeit von den Eingangsparametern zu berechnen. Da ein gaußförmiger Strahl vollständig vom  $q$ -Parameter beschrieben wird, kann man das auch von einem Gauß-Impuls erwarten. Wir nutzen diese Analogie aus.

Bei Ausbreitung im homogenen Raum gilt:

$$q(z) = q(0) + z. \quad (2.22)$$

Wir erinnern uns an den Zusammenhang von  $q$ -Parameter und Strahlparametern

$$\frac{1}{q(z)} = \frac{1}{R(z)} + i \frac{2}{kw^2(z)}.$$

Durch Ausnutzen der Analogie zwischen Beugung und Dispersion können wir den  $q$ -Parameter des Impulses mit Pulslänge und Chirp in Zusammenhahn bringen. Wir ersetzen:

$$k \longrightarrow -\frac{1}{D}, \quad w^2(z) \longrightarrow T^2(z), \quad \frac{1}{R(z)} \longrightarrow \frac{2DC(z)}{T_0^2}$$

und erhalten

$$\frac{1}{q(z)} = \frac{2DC(z)}{T_0^2} - i \frac{2D}{T^2(z)} = \frac{2D}{T_0^2} \left[ C(z) - i \frac{T_0^2}{T^2(z)} \right]. \quad (2.23)$$

Man beachte, daß  $T_0$  mit der Pulsbreite bei  $z = 0$  und nicht in der Taille zusammenhängt.

Als Eingangsgröße ( $z = 0$ ) erhält man aus 2.23

$$\frac{1}{q(0)} = \frac{2D}{T_0^2} [C_0 - i] \quad (2.24)$$

wobei  $C_0 = C(0)$ .

Die Idee besteht nun darin, Gl.(2.24) in Gl.(2.22) einzusetzen und mit Gl.(2.23) gleichzusetzen. Da sowohl Real- als auch Imaginärteil identisch sein müssen, erhält man zwei Gleichungen für die fünf Größen  $C_0, T_0, z, C(z), T(z)$ , d.h. man muß sich drei dieser Größen vorgeben.

Man geht folgendermaßen vor, um die Pulsparameter bei  $z = d$  zu berechnen:

1)  $q$ -Parameter am Eingang

$$q(0) = \frac{T_0^2}{2D} \frac{(C_0 + i)}{(1 + C_0^2)} \quad (2.25)$$

2) Entwicklung des  $q$ -Parameters

$$q(d) = q(0) + d = \frac{T_0^2}{2D} \frac{(C_0 + i)}{(1 + C_0^2)} + d = \frac{1}{2D(1 + C_0^2)} [2Dd(1 + C_0^2) + C_0T_0^2 + iT_0^2] \quad (2.26)$$

3) Invertieren von Gl. 2.23 ergibt

$$q(d) = \frac{T_0^2 T^2(d)}{2D [C^2(d) T^4(d) + T_0^4]} [C(d) T^2(d) + iT_0^2] \quad (2.27)$$

4) Gleichsetzen von 2.26 und 2.27 führt auf

$$\frac{[2Dd(1 + C_0^2) + C_0T_0^2]}{(1 + C_0^2)} = \frac{C(d)T_0^2T^4(d)}{[C^2(d)T^4(d) + T_0^4]}$$

$$\frac{1}{(1 + C_0^2)} = \frac{T_0^2T^2(d)}{[C^2(d)T^4(d) + T_0^4]}$$

Bei Vorgabe von drei relevanten Größen lassen sich daraus die zwei gewünschten Größen berechnen.

Ein wichtiger Spezialfall ist dadurch gegeben, daß man fragt, an welcher Stelle ein chirpter Puls seine größte Kompression (Taille) erreicht und wie groß die Kompression ist.

Vorgegeben sind damit:  $C_0, T_0, C(d) = 0$  (Taille) und die Gleichungen vereinfachen sich zu:

$$[2Dd(1 + C_0^2) + C_0T_0^2] = 0 \longrightarrow d = -\frac{C_0T_0^2}{2D(1 + C_0^2)} = -\frac{1}{2} \text{sgn}(D) \frac{C_0}{(1 + C_0^2)} L_D$$

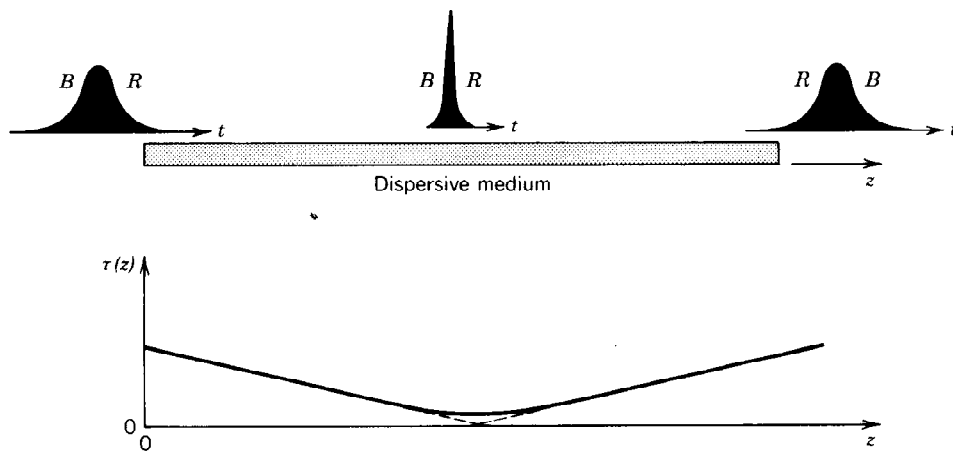
$$T^2(z) = \frac{T_0^2}{(1 + C_0^2)}$$

### Schlußfolgerungen:

- 1) Ein Puls kann komprimiert werden, wenn das Produkt aus Anfangschirp und Dispersion negativ ist  $\longrightarrow C_0D < 0$ .
- 2) Die Kompression ist umso größer je größer der Anfangschirp ist.

### Physikalische Interpretation:

z.B.  $C_0 < 0$  und  $D > 0 \longrightarrow \partial v_g / \partial \omega < 0 \longrightarrow$  'blau' schneller als 'rot'



Compression of a chirped pulse in a medium with normal dispersion. The low frequency (marked R) occurs after the high frequency (marked B) in the initial pulse, but it catches up since it travels faster. Upon further propagation, the pulse spreads again as the R component arrives earlier than the B component.

→ der 'rote Schwanz' überholt die 'blaue Front' → bis  $C(z) = 0$  (Taille), d.h. der Puls wird kompromittiert. Bei der weiteren Ausbreitung wird  $C(z) > 0$  und damit die 'rote Front' schneller als der 'blaue Schwanz', d.h., der Puls wird breiter.

#### Experiment:

- Ausbreitung im nichtlinearen Medium (Selbstphasenmodulation) →  $C < 0$  → anschließend Ausbreitung in Medium mit  $D > 0$  → Kompression (Faktor 5 ist typisch)
- Halbleiterlaser liefern gec chirpten Puls

**hier Analogie weiterführen (chirper) IEEE JQE 26 (90)1158**

#### 2.6.5.5 Beispiel: Ausbreitung eines Gauß-Impulses mit endlicher Breite

→ optisches Bullet

Zur expliziten Berechnung nutzt man die in Kapitel 2.6.1.1 abgeleiteten Ergebnisse (insbesondere Gl.(2.18), die für jede beliebige Anfangsverteilung (nicht auf Gauß beschränkt) gelten.

Hier beschränken wir uns auf ein raum-zeitliches Gauß-Profil.

1. Eingangsfeld:

$$v_0(x, y, \tau) = A \exp\left(-\frac{\tau^2}{T_0^2}\right) \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{w_0^2}\right)$$

2. Feld nach Ausbreitung :

$$v(x, y, z, \tau) = A \sqrt{\frac{T_0}{T(z)} \frac{w_0}{w(z)}} \exp\left[-\frac{\tau^2}{T(z)^2}\right] \exp\left[-\frac{x^2 + y^2}{w^2(z)}\right] \\ \exp\left[\mathrm{i} k_0 \frac{x^2 + y^2}{2R(z)}\right] \exp\left[-\mathrm{i} C(z) \frac{\tau^2}{T_0^2}\right] \exp[\mathrm{i} \varphi(z)] \exp[\mathrm{i} (k_0 z - \omega_0 t)]$$

$$u(x, y, z, \tau) = v(x, y, z, \tau) \exp\{\mathrm{i} [k_0 z - \omega_0 (\tau - z/v_g)]\}$$

mit

$$T(z) = T_0 \sqrt{1 + \left(\frac{2z}{L_d}\right)^2}, \quad w(z) = w_0 \sqrt{1 + \left(\frac{2z}{L_b}\right)^2},$$

$$C(z) = \frac{2z \operatorname{sgn}(D)}{L_d} \left[1 + \left(\frac{2z}{L_d}\right)^2\right]^{-1}, \quad R(z) = z \left[1 + \left(\frac{L_b}{2z}\right)^2\right]$$

$$L_d = \frac{T_0^2}{|D|}, \quad L_b = k w_0^2$$

Eine Verallgemeinerung auf Gauß-Hermite- bzw. Gauß-Laguerre-Moden ist möglich (im Resonator).



# Kapitel 3

## Beugungstheorie

### 3.1 Wechselwirkung mit ebenen Schirmen

a) Beugung im weiteren Sinne  $\rightarrow$  Ausbreitung eines räumlich begrenzten Wellenfeldes in einem Halbraum  $\rightarrow$  Problem bisher behandelt.

b) Beugung historisch  $\rightarrow$  Feld trifft auf Hindernis  $\rightarrow$  WW induziert Polarisierung, die ein Sekundärfeld abstrahlt  $\rightarrow$  Interferenz führt zum Beugungsbild

$\rightarrow$  vektorielles Randwertproblem  $\rightarrow$  vektorielles Randwertproblem selbstkonsistent zu lösen

Es gibt nur wenige strenge Lösungen  $\rightarrow$  keine große praktische Bedeutung

#### Näherungen:

a) geometrische Optik  $\rightarrow$  Schatten

b) skalare Beugungstheorie mit Näherungen für die Wechselwirkung  $\rightarrow$  von der Apertur gehen Erregungen mit bestimmten Amplituden aus  $\rightarrow$  Interferenz

Die Wechselwirkung mit der Apertur wird durch eine komplexe Transferfunktion  $t(x, y)$  beschrieben, wobei gilt, daß  $t(x, y) = 0$  außerhalb der Apertur.

Damit reduziert sich das Beugungsproblem auf drei verschiedene Prozesse:

1. Ausbreitung von der Lichtquelle zur Apertur
2. Multiplikation der Feldverteilung mit der Transferfunktion
3. Ausbreitung der modifizierten Feldverteilung hinter der Apertur

Problem '1' spielt für viele Anwendungen keine Rolle, da man eine ebene Beleuchtungswelle (keine Beugung) voraussetzt.

#### Wechselwirkung mit der Apertur

$$u_+(x, y, z_A) = t(x, y)u_-(x, y, z_A)$$

#### Ausbreitung nach der Apertur

$$u(x, y, z) = \int \int_{-\infty}^{\infty} h(x - x', y - y', z - z_A) u_+(x', y', z_A) dx' dy'$$

oder

$$u(x, y, z) = \int \int_{-\infty}^{\infty} H(\alpha, \beta; z - z_A) U_+(\alpha, \beta; z_A) \exp[i(\alpha x + \beta y)] d\alpha d\beta,$$

wobei

$$h = \frac{1}{(2\pi)^2} \text{FT}[H]$$

und im folgenden wird  $z_B = z - z_A$  eingeführt.

Die Ausbreitung im Halbraum hinter der Apertur kann exakt oder in verschiedenen Näherungen (Fresnel, Fraunhofer) beschrieben werden.

## 3.2 Beschreibung der Ausbreitung in verschiedenen Näherungen

### 3.2.1 Der allgemeine Fall - kleine Öffnungen, große Öffnungswinkel

Die Übertragungsfunktion wurde im Kapitel 2.6.1 abgeleitet. Wir erinnern uns:

$$H(\alpha, \beta; z_B) = \exp(i\gamma z_B)$$

mit

$$\gamma^2 = k^2(\omega) - \alpha^2 - \beta^2.$$

Es bestehen keinerlei Beschränkungen bzgl. der Ortsfrequenzen  $\alpha, \beta$ , d.h., es treten sowohl homogene als auch evaneszente Wellen auf. Es sind beliebig kleine Aperturstrukturen zugelassen. Dazu benutzt man die sog. Weyl-Darstellung der Kugelwelle (Winkelspektrum der Kugelwelle).

$$\frac{1}{r} \exp(ikr) = \frac{i}{2\pi} \int \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\gamma} \exp[i(\alpha x + \beta y + \gamma z_B)] d\alpha d\beta$$

Die Kugelwelle ist die Green'sche Funktion der Helmholtzgleichung im *homogenen Raum*.

Daraus folgt durch einfaches Differenzieren:

$$-2\pi \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{1}{r} \exp(ikr) \right] = \int \int_{-\infty}^{\infty} \exp[i(\alpha x + \beta y + \gamma z_B)] d\alpha d\beta = \text{FT}[H] = (2\pi)^2 h$$

$$h(x, y, z_B) = -\frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{1}{r} \exp(ikr) \right]$$

mit  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z_B^2}$ . Damit wird die Beugung durch die Rayleigh-Formel

$$u(x, y, z) = \int \int_{-\infty}^{\infty} h(x - x', y - y', z_B) u_+(x', y', z_A) dx' dy'$$

beschrieben.  $h(x - x', y - y', z_B)$  bezeichnet man auch als Green'sche Funktion der Helmholtzgleichung im *homogenen Halbraum*.

Man kann sich aus der Übertragungsfunktion die Responsefunktion im Ortsraum beschaffen.

### 3.2.2 Fresnelnäherung - paraxial

Wenn  $\alpha^2 + \beta^2 \ll k^2$  (eingeschränktes Ortsfrequenzspektrum  $\rightarrow$  bestimmte minimale Größe der Variationen in der Apertur), kann man die oben abgeleiteten Übertragungs- und Responsefunktionen benutzen.

$$H_F(\alpha, \beta; z_B) = \exp(ikz_B) \exp\left[-i\frac{z_B}{2k}(\alpha^2 + \beta^2)\right]$$

$$h_F(x, y, z_B) = -\frac{i}{\lambda z_B} \exp(ikz_B) \exp\left[i\frac{k}{2z_B}(x^2 + y^2)\right]$$

Das gleiche Ergebnis erhält man, wenn  $h(x, y, z_B)$  im Ortsraum entwickelt wird.

### 3.2.3 Fraunhofernäherung - paraxial und Fernfeld

$$\alpha^2 + \beta^2 \ll k^2, \quad kz_B \gg 1 \rightarrow z_B \gg \lambda$$

zusätzliche Forderung (Begründung später) für Fresnelzahl  $N_F$

$$N_F \lesssim 0.1 \quad \text{mit} \quad N_F = \frac{a}{\lambda} \frac{a}{z_B} = \frac{1}{\pi} \frac{z_0}{z_B}$$

Ableitung aus Fresnelnäherung mit  
**Methode der stationären Phase:**

Zu berechnen ist das Integral

$$I = \int \int g(p, q) \exp [i\kappa f(p, q)] dp dq$$

Die näherungsweise Berechnung kann erfolgen, wenn  $\kappa \gg 1$  und  $g(p, q)$  *langsam veränderlich* ist.

Idee: Wenn  $\kappa \gg 1$ , oszilliert der Expomnt im Integranden schon bei kleinen Änderungen von  $f(p, q)$  stark  $\longrightarrow$  durch die Integration heben sich diese Beiträge heraus.

*Ausnahme:* stationäre Punkte  $p_m, q_m$

$$\left. \frac{\partial f}{\partial p} \right|_{p_m, q_m} = f_p|_{p_m, q_m} = 0, \quad \left. \frac{\partial f}{\partial q} \right|_{p_m, q_m} = f_q|_{p_m, q_m} = 0$$

Das Integral läßt sich dann näherungsweise als eine Summe über die stationären Punkte darstellen:

$$I = \frac{2\pi}{i\kappa} \sum_{m=1}^M \frac{1}{\sqrt{f_{pp(m)} f_{qq(m)} - f_{pq(m)}^2}} g(p_m, q_m) \exp [i\kappa f(p_m, q_m)]$$

Das Beugungsfeld in Fresnelnäherung ergibt sich zu

$$u_F(x, y, z_B) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} U_+(\alpha, \beta; z_A) \exp(ikz_B) \exp \left[ -i \frac{z_B}{2k} (\alpha^2 + \beta^2) \right] \exp [i(\alpha x + \beta y)] d\alpha d\beta$$

**Anwendung der Methode der stationären Phase:**

$$u_F(x, y, z_B) = \exp(ikz_B) \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} U_+(\alpha, \beta; z_A) \exp \left\{ ikz_B \left[ \left( \frac{\alpha}{k} \frac{x}{z_B} + \frac{\beta}{k} \frac{y}{z_B} \right) - \frac{1}{2} \left( \frac{\alpha^2}{k^2} + \frac{\beta^2}{k^2} \right) \right] \right\} d\alpha d\beta$$

Mit den Abkürzungen:

$$p = \frac{\alpha}{k}, \quad q = \frac{\beta}{k}, \quad \kappa = kz_B \gg 1$$

$$f(p, q) = p \frac{x}{z_B} + q \frac{y}{z_B} - \frac{1}{2} (p^2 + q^2)$$

folgt daraus:

$$u_F(x, y, z_B) = k^2 \exp(ikz_B) \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} U_+(kp, kq; z_A) \exp [i\kappa f(p, q)] dp dq \quad (3.1)$$

Die Ableitungen lauten

$$\frac{\partial f}{\partial p} = \frac{x}{z_B} - p, \quad \frac{\partial f}{\partial q} = \frac{y}{z_B} - q, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial p^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial q^2} = -1, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial p \partial q} = 0$$

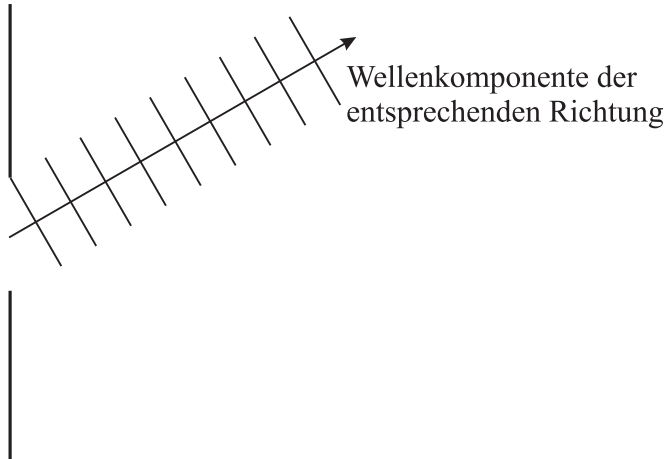
damit ergeben sich die stationären Punkte:

$$p_1 = \frac{x}{z_B}, \quad q_1 = \frac{y}{z_B} \longrightarrow f(p_1, q_1) = \frac{x^2 + y^2}{2z_B}$$

Das Beugungsfeld in Fraunhofernäherung ergibt sich dann zu:

$$\begin{aligned} u_{\text{FR}}(x, y, z_B) &= \frac{2\pi}{ikz_B} k^2 \exp(ikz_B) U_+\left(k\frac{x}{z_B}, k\frac{y}{z_B}; z_A\right) \exp\left[i\frac{k}{2z_B}(x^2 + y^2)\right] \\ &= -i\frac{(2\pi)^2}{\lambda z_B} \exp(ikz_B) U_+\left(k\frac{x}{z_B}, k\frac{y}{z_B}; z_A\right) \exp\left[i\frac{k}{2z_B}(x^2 + y^2)\right] \end{aligned}$$

→ in Fraunhoferscher Näherung ist die Amplitudenverteilung des Beugungsbildes proportional zur Fouriertransformierten des Feldes hinter der Apertur

$$I = \frac{(2\pi)^4}{(\lambda z_B)^2} \left| U_+\left(k\frac{x}{z_B}, k\frac{y}{z_B}\right) \right|^2$$


### Interpretation:

An jedem Ort  $x, y$  trägt nur eine Ortsfrequenz  $\left(\alpha = k\frac{x}{z_B}; \beta = k\frac{y}{z_B}\right)$  mit der entsprechenden Spektralampplitude  $U_+(k\frac{x}{z_B}, k\frac{y}{z_B}; z_A)$  zum Beugungsbild bei (i.a. tragen alle Ortsfrequenzen bei).

### Warum muß die Bedingung

$$N_F = \frac{a}{\lambda} \frac{a}{z_B} \lesssim 0.1$$

erfüllt sein?

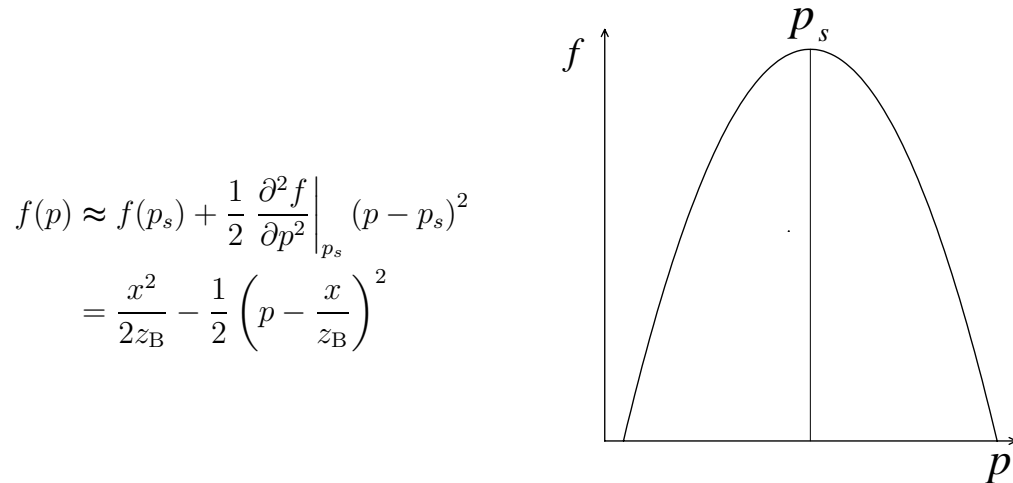
zwei wesentliche Quotienten: Apertur/Wellenlänge und Apertur/Abstand

### Idee:

- $f(p, q)$  muß schnell im Vergleich zu  $U(p, q)$  abklingen  $\longrightarrow U(p, q) \approx \text{const.}$  an stationären Punkten
- schnelles Abklingen von  $U(p, q)$  wird durch Apertur und nicht durch kleine Strukturen bestimmt

Wir zeigen das für den eindimensionalen Fall:

a) spektrale Breite im Exponenten



**Interpretation:**

$$f(p) \approx f(p_s) + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 f}{\partial p^2} \right|_{p_s} (p - p_s)^2$$

$$= \frac{x^2}{2z_B} - \frac{1}{2} \left( p - \frac{x}{z_B} \right)^2$$

Damit ergibt sich für den Exponenten (Phase) in (3.1)

$$kz_B f(p) \approx \frac{kx^2}{2z_B} - \frac{1}{2} \frac{z_B}{k} \left( \alpha - \frac{kx}{z_B} \right)^2$$

damit ergibt sich für die spektrale Breite:

$$w_s^2 = \frac{2k}{z_B} \longrightarrow 2w_s = 4\sqrt{\frac{\pi}{\lambda z_B}}$$

b) spektrale Breite von  $U(p, q)$  :

Apertur  $\longrightarrow a \longrightarrow \alpha_a = 2\pi/a \longrightarrow \text{Breite} = 4\pi/a$

Mit der Forderungen, dass  $U(p, q)$  sich langsamer ändert als der Exponent folgt:

$$4\pi/a \gg 4\sqrt{\frac{\pi}{\lambda z_B}} \longrightarrow N_F = \frac{a^2}{\lambda z} \ll \pi$$

q.e.d.

Damit ergibt sich (im eindimensionalen Fall) für die Gültigkeit der Fraunhofernäherung:

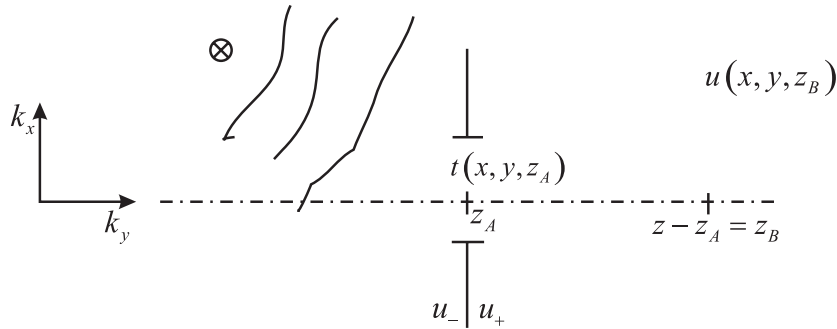
$$1) \quad a^2 \ll k^2 \longrightarrow \Delta x \gg \lambda$$

$$2) \quad kz_B \gg 1 \longrightarrow z_B \gg \lambda$$

$$3) \quad N_F = \frac{a^2}{\lambda z} \ll 1 \longrightarrow z_B \gg \frac{a^2}{\lambda}$$

$$\text{Beispiel: } \Delta x = 10\lambda, \quad a = 100\lambda \longrightarrow z_B \gg 10^4\lambda \approx 1 \text{ cm}$$

### 3.3 Fraunhoferbeugung an ebenen Schirmen



Beleuchtungswelle:

- senkrecht

$$u_-(x, y, z_A) = A \exp(i k_z z_A)$$

- schräg

$$u_-(x, y, z_A) = A \exp[i(k_x x + k_y y + k_z z_A)]$$

Beugungsbild:

$$I(x, y, z_B) = |u(x, y, z_B)|^2 = \frac{(2\pi)^4}{(\lambda z_B)^2} \left| U_+\left(k \frac{x}{z_B}, k \frac{y}{z_B}\right) \right|^2$$

$$\longrightarrow \text{Spektrum nach Schirm bei } \alpha = k \frac{x}{z_B}, \beta = k \frac{y}{z_B}$$

Spektrum:

Feld nach Schirm:

$$u_+(x, y, z_A) = u_-(x, y, z_A) t(x, y) = A \exp [i (k_x x + k_y y + k_z z_A)] t(x, y)$$

$$U_+(k \frac{x}{z_B}, k \frac{y}{z_B}) = \frac{A}{(2\pi)^2} \exp (ik_z z_A) \int \int_{-\infty}^{\infty} t(x', y') \exp \left\{ -i \left[ \left( k \frac{x}{z_B} - k_x \right) x' + \left( k \frac{y}{z_B} - k_y \right) y' \right] \right\} dx' dy'$$

$$= A \exp (ik_z z_A) T \left( k \frac{x}{z_B} - k_x, k \frac{y}{z_B} - k_y \right)$$

Damit ergibt sich für die Intensität des Beugungsbildes

$$I(x, y, z_B) = A^2 \frac{(2\pi)^4}{(\lambda z_B)^2} \left| T \left( k \frac{x}{z_B} - k_x, k \frac{y}{z_B} - k_y \right) \right|^2$$

→ |FT der Apertur|<sup>2</sup>

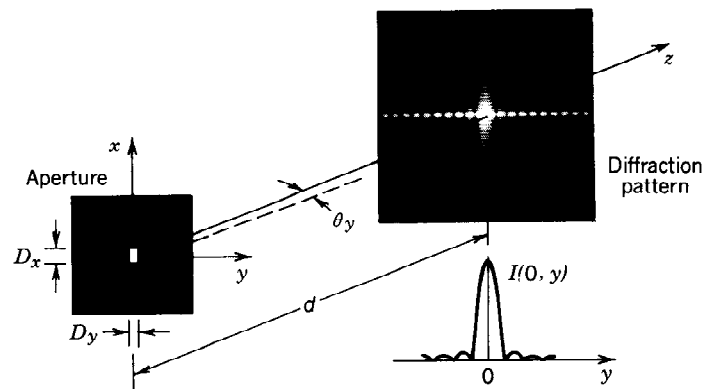
→ Verschiebung des Bildes durch schräge Beleuchtung

### 3.3.0.1 Beispiele:

### 3.3.0.2 rechteckiger Spalt bei senkrechter Beleuchtung

$$t(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{für } |x| \leq a, |y| \leq b \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$I(x, y, z_B) \sim \text{sinc}^2 \left( ka \frac{x}{z_B} \right) \text{sinc}^2 \left( kb \frac{y}{z_B} \right)$$

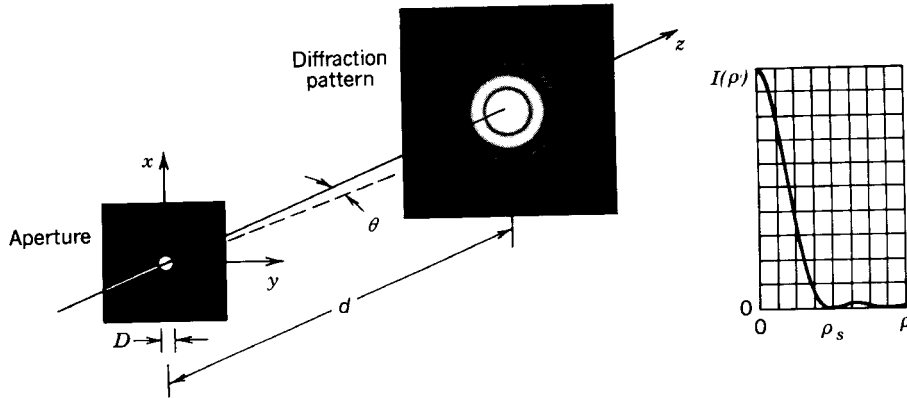


Fraunhofer diffraction from a rectangular aperture. The central lobe of the pattern has half-angular widths  $\theta_x = \lambda/D_x$  and  $\theta_y = \lambda/D_y$ .



### 3.3.0.3 Lochblende

$$t(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{für } x^2 + y^2 \leq a^2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$



The Fraunhofer diffraction pattern from a circular aperture produces the Airy pattern with the radius of the central disk subtending an angle  $\theta = 1.22\lambda/D$ .

$$I(x, y, z_B) \sim \left[ \frac{J_1 \left( \frac{ka}{z_B} \sqrt{x^2 + y^2} \right)}{\frac{ka}{z_B} \sqrt{x^2 + y^2}} \right]^2$$

→ Airy-Funktion

→ Definition des Auflösungsvermögens

Punkt → Airy-Beugungsscheibchen

$$x^2 + y^2 = \rho^2$$

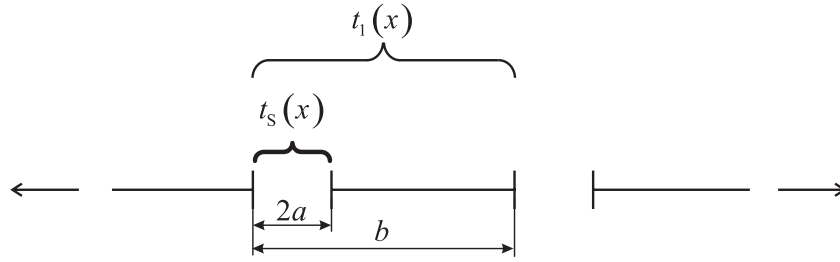
$$\frac{ka}{z_B} \rho_s = 1.22\pi \longrightarrow \frac{\rho_s}{z_B} = \frac{0.61\lambda}{a}$$

$$\Theta = \frac{2\rho_s}{z_B} = \frac{1.22\lambda}{a}$$

$\Theta$  → Auflösungsvermögen später

### 3.3.0.4 eindimensionale periodische Strukturen

$b$  - Periode,  $2a$  - Öffnung



$$t_1(x) = \begin{cases} t_s(x) & \text{für } |x| \leq a \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$t(x) = \sum_{n=0}^{N-1} t_1(x - nb)$$

$$T\left(k \frac{x}{z_B}\right) \sim \sum_{n=0}^{N-1} \int_{-\infty}^{\infty} t_1(x' - nb) \exp\left(-ik \frac{x}{z_B} x'\right) dx'$$

mit  $x' - nb = X'$

$$T\left(k \frac{x}{z_B}\right) \sim \sum_{n=0}^{N-1} \int_{-a}^a t_s(X') \exp\left(-ik \frac{x}{z_B} X'\right) \exp\left(-ik \frac{x}{z_B} nb\right) dX'$$

$$\sim T_S\left(k \frac{x}{z_B}\right) \sum_{n=0}^{N-1} \exp\left(-ik \frac{x}{z_B} nb\right)$$

$$\sim T_S\left(k \frac{x}{z_B}\right) \frac{\sin\left(N \frac{k}{2} \frac{x}{z_B} b\right)}{\sin\left(\frac{k}{2} \frac{x}{z_B} b\right)}$$

wegen

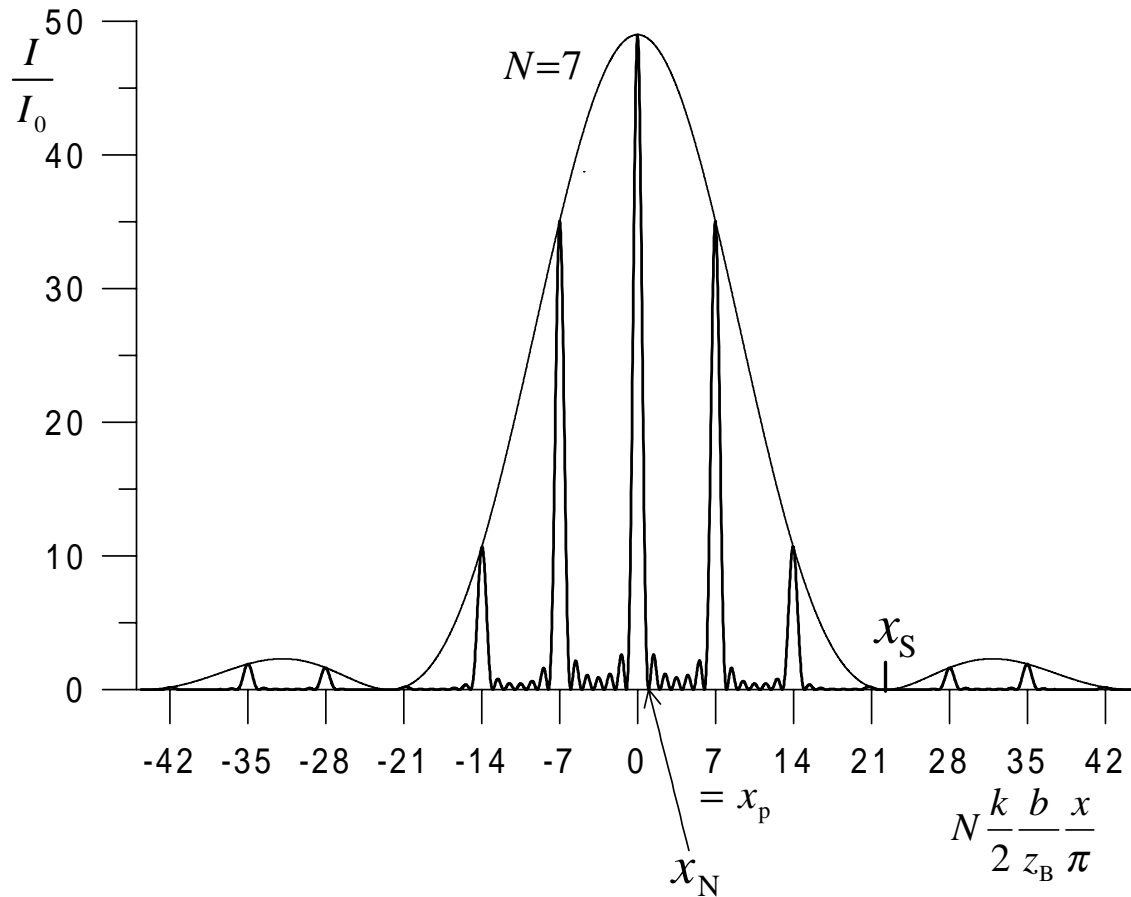
$$\sum_{n=0}^{N-1} \exp(-i\delta n) = \frac{\sin\left(N \frac{\delta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\delta}{2}\right)}$$

Für ein Strichgitter gilt:

$$T_S\left(k \frac{x}{z_B}\right) = \text{sinc}\left(k \frac{x}{z_B} a\right)$$

Damit ergibt sich die Intensität des Beugungsbildes zu

$$I \sim \text{sinc}^2\left(k \frac{x}{z_B} a\right) \frac{\sin^2\left(N \frac{k}{2} \frac{x}{z_B} b\right)}{\sin^2\left(\frac{k}{2} \frac{x}{z_B} b\right)}$$



Die Struktur des Beugungsbildes wird durch drei Größen bestimmt:

- Breite des Beugungsbildes → erste Nullstelle der Spaltfunktion

$$k \frac{x_S}{z_B} a = \pi \rightarrow x_S = \frac{\lambda z_B}{a}$$

- Maxima des Beugungsbildes → Maxima der Gitterfunktion

$$\frac{k}{2} \frac{x_p}{z_B} b = n\pi \rightarrow x_p = n \frac{\lambda z_B}{b}$$

- Breite der Maxima → Nullstellen der Gitterfunktion

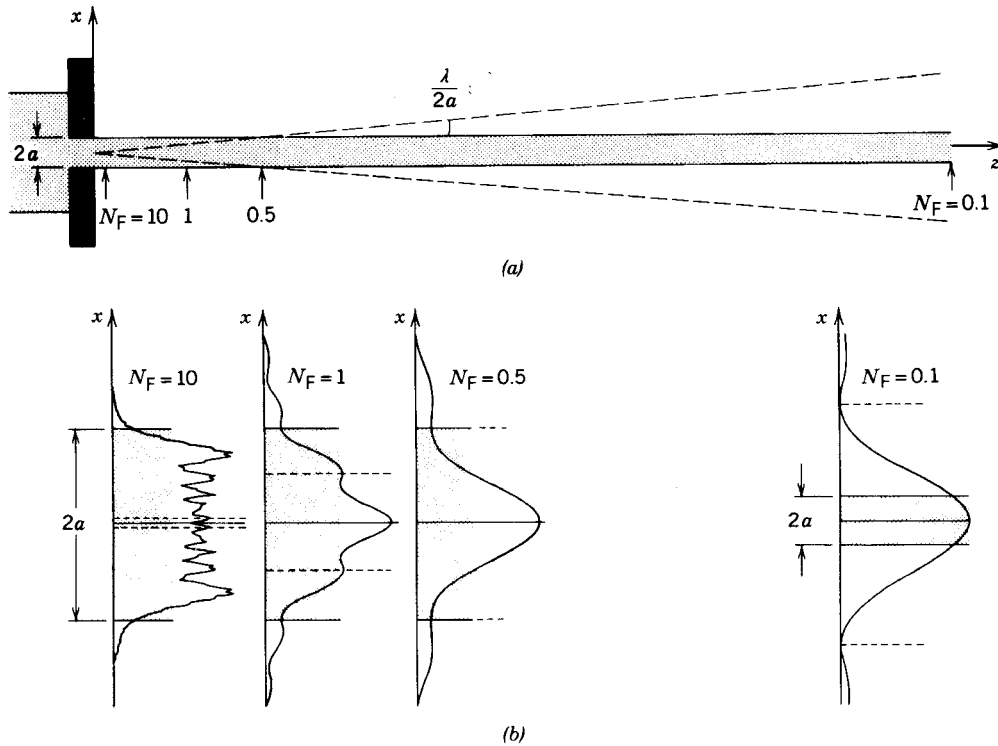
$$N \frac{k}{2} \frac{x_N}{z_B} b = \pi \rightarrow x_N = \frac{\lambda z_B}{Nb}$$

$N \rightarrow \infty \rightarrow$  Delta-Funktion  $\delta(x - n \frac{\lambda}{b} z_B)$

### 3.3.1 Bemerkungen zur Fresnelbeugung am Spalt

Verhalten wird durch Fresnelzahl  $N_F = \frac{a}{\lambda} \frac{a}{z_B} = \frac{1}{\pi} \frac{z_0}{z_B}$  bestimmt.

- $N_F \gtrsim 10$  ( $a$  groß,  $\lambda z_B$  klein,  $z_B < 1/30 z_0$ )  $\longrightarrow$  geometrischer Schatten
- $N_F \lesssim 0.1$  ( $z_B > 3z_0$ )  $\longrightarrow$  Fraunhoferbeugung  $\longrightarrow$  Fouriertransformation der Apertur
- $10 \gtrsim N_F \gtrsim 0.1$  ( $1/30 z_0 < z_B < 3z_0$ )  $\longrightarrow$  Fresnelbeugung



Fresnel diffraction from a slit of width  $D = 2a$ . (a) Shaded area is the geometrical shadow of the aperture. The dashed line is the width of the Fraunhofer diffracted beam. (b) Diffraction pattern at four axial positions marked by the arrows in (a) and corresponding to the Fresnel numbers  $N_F = 10, 1, 0.5$ , and  $0.1$ . The shaded area represents the geometrical shadow of the slit. The dashed lines at  $|x| = (\lambda/D)z$  represent the width of the Fraunhofer pattern in the far field. Where the dashed lines coincide with the edges of the geometrical shadow, the Fresnel number  $N_F = a^2/\lambda z = 0.5$ .

Beispiel: 1D Spalt

$$u_+(x) = 1 \quad \text{für } |x| \leq a$$

$$U_+(\alpha) = a \operatorname{sinc}(\alpha a) \longrightarrow U(\alpha; z) \sim a \operatorname{sinc}(\alpha a) \exp\left(-i \frac{\alpha^2}{2k} z\right)$$

$$u(x, z) \sim \int a \operatorname{sinc}(\alpha a) \exp\left(-i \frac{\alpha^2}{2k} z\right) \exp(i \alpha x) d\alpha$$

# Kapitel 4

## Fourieroptik $\longrightarrow$ Optische Filterung

Beherrscht man die Beschreibung der Ausbreitung des Feldes, benötigt man noch die Transferfunktion einer Linse, um die *optische Abbildung* zu beschreiben. Wir beschränken uns auf die *paraxiale Näherung* (siehe Kapitel 3.2.2), was im allgemeinen für die optischen Systeme eine ausreichende Näherung darstellt. Es wird sich herausstellen, daß unter bestimmten Bedingungen bei der Abbildung die Fouriertransformierte des Objektes entsteht. Diese Feldverteilung kann nun in der Fourierebene manipuliert werden. Eine weitere Abbildung erzeugt ein gegenüber dem Objekt verändertes Bild. Durch gezielte Manipulationen können Filterfunktionen verwirklicht werden.

Die Ausbreitung im homogenen Raum wird im Fourierraum beschrieben, die Wechselwirkung mit der Linse im Ortsraum.

### 4.1 Die Abbildung eines beliebigen Feldes mit einer dünnen Linse

#### 4.1.1 Transferfunktion einer dünnen Linse

Eine dünne Linse soll nur die Phase eines optischen Feldes verändern (Transmission = 1). Nimmt man an, daß eine Linse eine vom Fokus ausgehende Kugelwelle in eine ebene Welle transformiert, ergibt sich für die Transferfunktion einer dünnen Linse wegen

$$\exp(ikz) \exp\left[i\frac{k}{2f}(x^2 + y^2)\right] t_L(x, y) = \exp(ikz)$$

$$t_L(x, y) = \exp\left[-i\frac{k}{2f}(x^2 + y^2)\right].$$

Im Fourierraum gilt damit:

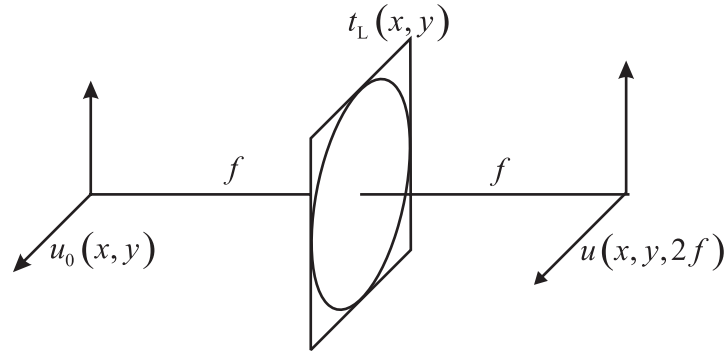
$$T_L(\alpha, \beta) = -i\frac{\lambda f}{(2\pi)^2} \exp\left[i\frac{f}{2k}(\alpha^2 + \beta^2)\right].$$

Der Vollständigkeit halber geben wir noch die Übertragungsfunktion des homogenen Raumes an

$$H_F(\alpha, \beta; z) = \exp(ikz) \exp \left[ -\frac{i}{2k} (\alpha^2 + \beta^2) z \right].$$

### 4.1.2 Die Beschreibung der Abbildung

Das Objekt befinde sich im hinteren Fokus einer Linse, das Beugungsbild wird im Fokus berechnet.



#### 4.1.2.1 1. Spektrum in der Objektebene

$$U_0(\alpha, \beta) = \text{FT}^{-1} [u_0(x, y)]$$

#### 4.1.2.2 2. Ausbreitung Objekt $\longrightarrow$ Linse

$$U_-(\alpha, \beta; f) = H_F(\alpha, \beta; f) U_0(\alpha, \beta)$$

#### 4.1.2.3 3. Wechselwirkung mit der Linse

$$u_+(x, y, f) = t_L(x, y) u_-(x, y, f)$$

$$\longrightarrow U_+(\alpha, \beta; f) = T_L(\alpha, \beta) * U_-(\alpha, \beta; f)$$

#### 4.1.2.4 4. Ausbreitung Linse $\longrightarrow$ Bildebene

$$U(\alpha, \beta; 2f) = H_F(\alpha, \beta; f) U_+(\alpha, \beta; f)$$

#### 4.1.2.5 5. Fouriertransformation in der Bildebene

$$u(x, y, 2f) = \text{FT} [U(\alpha, \beta; 2f)]$$

#### Durchführung der Rechnung

#### 4.1.2.6 1. Spektrum in der Objektebene

$$U_0(\alpha, \beta) = \text{FT}^{-1} [u_0(x, y)]$$

#### 4.1.2.7 2. Ausbreitung Objekt $\longrightarrow$ Linse

$$U_-(\alpha, \beta; f) = \exp(ikf) \exp \left[ -\frac{i}{2k} (\alpha^2 + \beta^2) f \right] U_0(\alpha, \beta)$$

#### 4.1.2.8 3. Wechselwirkung mit der Linse

$$\begin{aligned} U_+(\alpha, \beta; f) &= T_L(\alpha, \beta) * U_-(\alpha, \beta; f) \\ &= -i \frac{\lambda f}{(2\pi)^2} \exp(ikf) \int \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ i \frac{f}{2k} [(\alpha - \alpha')^2 + (\beta - \beta')^2] \right\} \cdot \\ &\quad \cdot \exp \left[ -\frac{i}{2k} (\alpha'^2 + \beta'^2) f \right] U_0(\alpha', \beta') d\alpha' d\beta' \end{aligned}$$

#### 4.1.2.9 4. Ausbreitung Linse $\longrightarrow$ Bildebene

$$\begin{aligned} U(\alpha, \beta; 2f) &= -i \frac{\lambda f}{(2\pi)^2} \exp(2ikf) \int \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ i \frac{f}{2k} [(\alpha - \alpha')^2 + (\beta - \beta')^2] \right\} \cdot \\ &\quad \cdot \exp \left[ -\frac{i}{2k} (\alpha'^2 + \beta'^2) f \right] \exp \left[ -\frac{i}{2k} (\alpha^2 + \beta^2) f \right] U_0(\alpha', \beta') d\alpha' d\beta' \\ &= -i \frac{\lambda f}{(2\pi)^2} \exp(2ikf) \int \int_{-\infty}^{\infty} U_0(\alpha', \beta') \exp \left[ -i \frac{f}{k} (\alpha\alpha' + \beta\beta') \right] d\alpha' d\beta' \\ &= -i \frac{\lambda f}{(2\pi)^2} \exp(2ikf) u_0 \left( -\frac{f}{k} \alpha, -\frac{f}{k} \beta \right) \end{aligned}$$

$\longrightarrow$  das Spektrum in der Bildebene entspricht der Objektverteilung, wobei die Ortsfrequenzen  $(\alpha, \beta)$  durch  $\left(-\frac{k}{f}x, -\frac{k}{f}y\right)$  zu ersetzen sind.



#### 4.1.2.10 5. Fouriertransformation in der Bildebene

$$u(x, y, 2f) = \text{FT} [U(\alpha, \beta; 2f)]$$

$$= -i \frac{\lambda f}{(2\pi)^2} \exp(2ikf) \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u_0 \left( -\frac{f}{k} \alpha, -\frac{f}{k} \beta \right) \exp[i(\alpha x + \beta y)] d\alpha d\beta$$

Mit der Koordinatentransformation

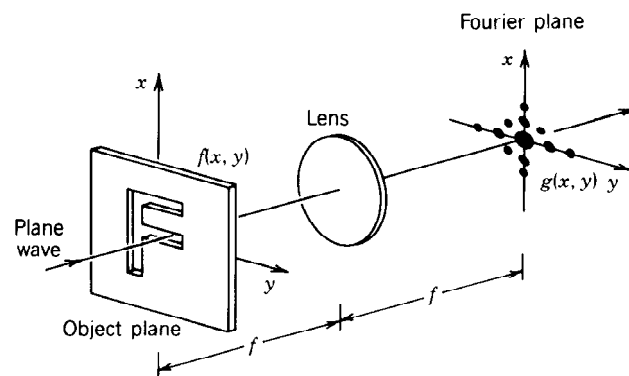
$$x' = -\frac{f}{k} \alpha, \quad y' = -\frac{f}{k} \beta \longrightarrow d\alpha = -\frac{k}{f} dx', d\beta = -\frac{k}{f} dy'$$

ergibt sich

$$\begin{aligned} u(x, y, 2f) &= -i \frac{1}{\lambda f} \exp(2ikf) \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u_0(x', y') \exp \left[ -i \frac{k}{f} (xx' + yy') \right] dx' dy' \\ &= -i \frac{(2\pi)^2}{\lambda f} \exp(2ikf) U_0 \left( \frac{k}{f} x, \frac{k}{f} y \right) \end{aligned}$$

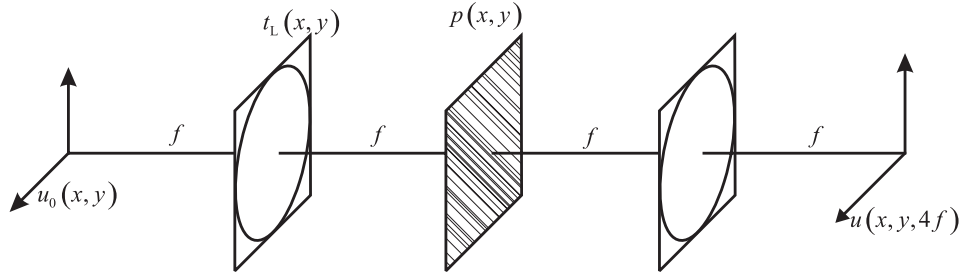
Das Bild in der hinteren Brennebene entspricht der Fouriertransformierten der Objektverteilung  $\longrightarrow$  Analogie zum Fernfeld in der Fraunhofernäherung, aber  $z_B \longleftrightarrow f$ .

Die optische Fouriertransformation erlaubt Manipulationen am spektralen Inhalt.



## 4.2 Optische Filterung bzw. Bildbearbeitung

### 4.2.1 Die $4f$ - Geometrie



In der hinteren Brennebene der ersten Linse (Fourierebene) soll eine Manipulation am Spektrum durch eine Pupillenfunktion  $p(x, y)$  vorgenommen werden. Das wesentliche Ergebnis bisher ist, daß das Bild in der hinteren Brennebene einer Linse (Objekt in vorderer Brennebene) proportional zur Fouriertransformierten der Objektverteilung ist

$$u(x, y, 2f) = A U_0 \left( \frac{k}{f}x, \frac{k}{f}y \right), \quad (4.1)$$

wobei  $A$  eine komplexe Amplitude ist. Unser Ziel besteht nun darin, die Abbildung durch die zweite Linse unter Berücksichtigung der Manipulation zu beschreiben und eine Übertragungsfunktion  $H_A(\alpha, \beta; 4f)$  des gesamten abbildenden Systems zu finden.

$$u(x, y, 4f) = \int \int_{-\infty}^{\infty} H_A(\alpha, \beta; 4f) U_0(\alpha, \beta) \exp[i(\alpha x + \beta y)] d\alpha d\beta$$

Die Aperturfunktion  $p(x, y)$  beschreibt alle Begrenzungen des Systems und beliebige, zusätzlich einzubringende, Filterfunktionen.

Damit ergibt sich mit (4.1) das Feld hinter der Pupille zu

$$\begin{aligned} u_+(x, y, 2f) &= u(x, y, 2f)p(x, y) \\ &= A U_0 \left( \frac{k}{f}x, \frac{k}{f}y \right) p(x, y) \end{aligned}$$

Aus den vorangegangenen Rechnungen wissen wir, daß die Linse eine Fouriertransformation dieser Feldverteilung durchführt, also

$$\begin{aligned} u(x, y, 4f) &= \overline{A} U_+ \left( \frac{k}{f}x, \frac{k}{f}y; 2f \right) = \overline{A} \int \int_{-\infty}^{\infty} u_+(x', y', 2f) \exp \left[ -i \frac{k}{f} (xx' + yy') \right] dx' dy' \\ &= \overline{A} A \int \int_{-\infty}^{\infty} U_0 \left( \frac{k}{f}x', \frac{k}{f}y' \right) p(x', y') \exp \left[ -i \frac{k}{f} (xx' + yy') \right] dx' dy' \end{aligned}$$

Eine Koordinatentransformation

$$\alpha = \frac{k}{f}x', \beta = \frac{k}{f}y'$$

führt auf

$$u(x, y, 4f) = \tilde{A} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} U_0(\alpha, \beta) p\left(\frac{f}{k}\alpha, \frac{f}{k}\beta\right) \exp[-i(\alpha x + \beta y)] d\alpha d\beta$$

$$\begin{aligned} u(-x, -y, 4f) &= \tilde{A} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} p\left(\frac{f}{k}\alpha, \frac{f}{k}\beta\right) U_0(\alpha, \beta) \exp[i(\alpha x + \beta y)] d\alpha d\beta \\ &= \tilde{A} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} H_A(\alpha, \beta; 4f) U_0(\alpha, \beta) \exp[i(\alpha x + \beta y)] d\alpha d\beta \end{aligned} \quad (4.2)$$

Damit können wir die Übertragungsfunktion ablesen:

$$H_A(\alpha, \beta; 4f) = \tilde{A} p\left(\frac{f}{k}\alpha, \frac{f}{k}\beta\right)$$

—→ Jede Fourieramplitude des Objektspektrums wird mit der Pupillenfunktion gewichtet, d.h., die Pupillenfunktion stellt im wesentlichen die Übertragungsfunktion dar. Ähnlich zu unserem früheren Vorgehen können wir die Abbildung im Ortsraum beschreiben, indem wir die Responsefunktion  $h_A(x - x', y - y')$  einführen.

$$u(-x, -y, 4f) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h_A(x - x', y - y') u_0(x', y') dx' dy'$$

wobei gilt:

$$\begin{aligned} h_A(x - x', y - y') &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} H_A(\alpha, \beta; 4f) \exp\{i[\alpha(x - x') + \beta(y - y')]\} d\alpha d\beta \\ &= \hat{A} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} p\left(\frac{f}{k}\alpha, \frac{f}{k}\beta\right) \exp\{i[\alpha(x - x') + \beta(y - y')]\} d\alpha d\beta \end{aligned}$$

mit

$$\bar{x} = \frac{f}{k}\alpha, \quad \bar{y} = \frac{f}{k}\beta$$

folgt

$$\begin{aligned} h_A(x - x', y - y') &= \overleftrightarrow{A} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} p(\bar{x}, \bar{y}) \exp\left\{-i\frac{k}{f}[\bar{x}(x' - x) + \bar{y}(y' - y)]\right\} d\bar{x} d\bar{y} \\ &= \overleftrightarrow{A} P\left[\frac{k}{f}(x' - x), \frac{k}{f}(y' - y)\right] \end{aligned}$$

und damit

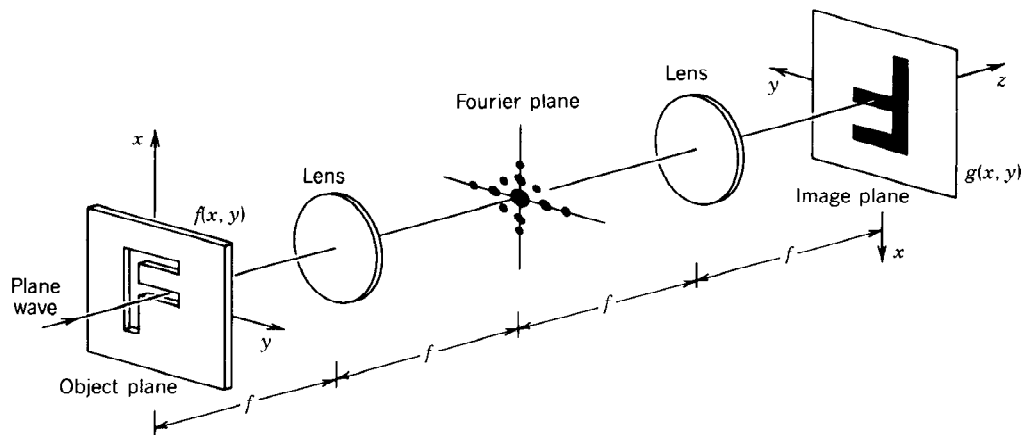
$$u(-x, -y, 4f) = \overleftrightarrow{A} \int \int_{-\infty}^{\infty} P \left[ \frac{k}{f} (x' - x), \frac{k}{f} (y' - y) \right] u_0(x', y') dx' dy', \quad (4.3)$$

d.h., wie zu erwarten war, ist die Responsefunktion im wesentlichen die Fouriertransformation der Pupillenfunktion.

Die  $4f$ -Abbildung mit einer Aperturfunktion bei  $z = 2f$  ist damit im Fourier- und im Ortsraum beschrieben.

## 4.2.2 Beispiele:

### 4.2.2.1 Die ideale Abbildung (unendliche Apertur)



The  $4f$  system performs a Fourier transform followed by an inverse Fourier transform, so that the image is a perfect replica of the object.

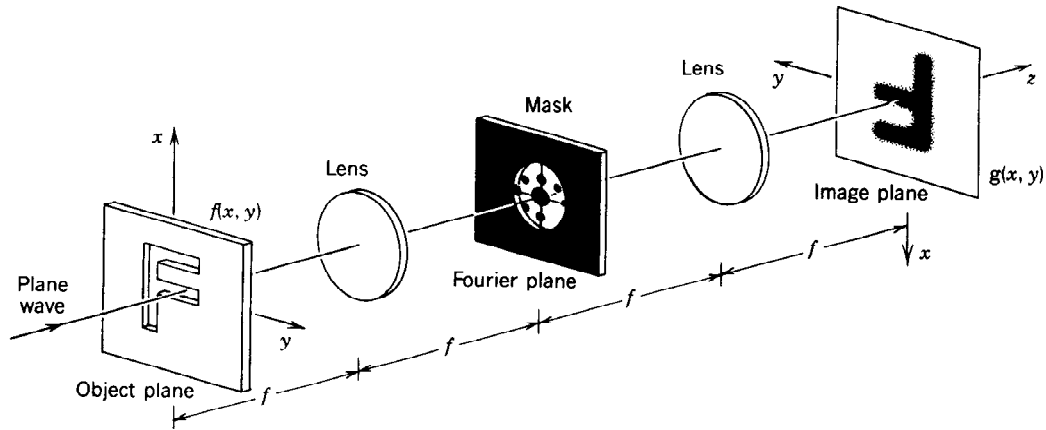
Mit  $p = 1 \longrightarrow P \sim \delta(x - x') \delta(y - y')$  folgt aus 4.2 oder 4.3

$$u(-x, -y, 4f) = \overleftrightarrow{A} u_0(x, y)$$

d.h. ein seitenverkehrtes Original.

### 4.2.2.2 Endliche Apertur

$$p(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{für } x^2 + y^2 \leq (D/2)^2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$



Spatial filtering. The transparencies in the object and Fourier planes have complex amplitude transmittances  $f(x, y)$  and  $p(x, y)$ . A plane wave traveling in the  $z$  direction is modulated by the object transparency, Fourier transformed by the first lens, multiplied by the transmittance of the mask in the Fourier plane and inverse Fourier transformed by the second lens. As a result, the complex amplitude in the image plane  $g(x, y)$  is a filtered version of  $f(x, y)$ . The system has a transfer function  $\mathcal{H}(\nu_x, \nu_y) = p(\lambda f \nu_x, \lambda f \nu_y)$ .

Die Übertragungsfunktion ergibt sich damit zu

$$H_A(\alpha, \beta; 4f) = \begin{cases} 1 & \text{für } \left(\frac{f}{k}\alpha\right)^2 + \left(\frac{f}{k}\beta\right)^2 \leq (D/2)^2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

d.h. die endliche Apertur schneidet die hohen Objektortsfrequenzen ab (Tiefpaßfilter) und bestimmt damit das *Auflösungsvermögen*.

Mit  $\rho^2 = \alpha^2 + \beta^2$  ergibt sich damit für die obere Grenzfrequenz  $\rho_G$ , (Bandbreite des Systems)

$$\rho_G^2 = \frac{k^2}{f^2} \left(\frac{D}{2}\right)^2 \longrightarrow \rho_G = \frac{2\pi n D}{\lambda f} \frac{1}{2}.$$

Entsprechend der Fourier-Theorie hängt die kleinste noch übertragbare Struktur mit der Bandbreite zusammen

$$\Delta r_{\min} = \frac{2\pi}{\rho_G} = \frac{2\lambda f}{nD} = \frac{2\lambda}{nF} \approx \frac{\lambda}{n\Theta} \approx \frac{\lambda}{n \sin \Theta} \quad (4.4)$$

wobei  $F = D/f \approx 2\Theta$  die Fresnelzahl der Linse und  $\Theta$  der halbe Aperturwinkel ist. Gl.(4.4) ist die bekannte Formel für das Auflösungsvermögen bei der optischen Abbildung.

Ein alternativer Zugang zur Bestimmung des Auflösungsvermögen ergibt sich im Ortsraum:

$$\begin{aligned}
u(-x, -y, 4f) &= \overleftrightarrow{A} \int \int_{-\infty}^{\infty} P \left[ \frac{k}{f} (x' - x), \frac{k}{f} (y' - y) \right] u_0(x', y') dx' dy' \\
&= \overleftrightarrow{A} \int \int_{-\infty}^{\infty} \frac{J_1 \left[ \frac{kD}{2f} \sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2} \right]}{\frac{kD}{2f} \sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2}} u_0(x', y') dx' dy',
\end{aligned}$$

d.h., jeder Objektpunkt wird bei der Abbildung zu einem Airy'schen Beugungsscheibchen.  $P \left[ \frac{k}{f} (x' - x), \frac{k}{f} (y' - y) \right]$  stellt gleichzeitig die Green'sche Funktion des Übertragungssystems dar.

Definiert man die Auflösungsgrenze dahingehend, daß das Maximum eines zweiten Bildpunktes im ersten Minimum des ersten liegen muß, erhält man

$$\frac{kD}{2f} \frac{\Delta r_{\min}}{2} = 1.22\pi$$

$$\Delta r_{\min} = \frac{1.22\lambda}{n \sin \Theta}$$

#### 4.2.2.3 Optisches Differenzieren (hier eindimensional)

Man gebe sich eine Pupillenfunktion  $p(x) = -ix$  vor und erhält

$$\begin{aligned}
u(x, 4f) &= \tilde{A} \int_{-\infty}^{\infty} U_0(\alpha) \left( -i \frac{f}{k} \alpha \right) \exp(-i\alpha x) d\alpha \\
&= B \frac{\partial}{\partial x} \int_{-\infty}^{\infty} U_0(\alpha) \exp(-i\alpha x) d\alpha \\
&= B \frac{\partial}{\partial x} u_0(-x)
\end{aligned}$$

Experimentell kann die Funktion mit einem Graukeil mit einem Phasensprung  $\pi$  im Zentrum realisiert werden:

$$p(x) = \begin{cases} x \exp(i\frac{3}{2}\pi) & \text{für } x > 0 \\ |x| \exp(i\frac{\pi}{2}) & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

#### 4.2.2.4 Das Phasenkontrastverfahren nach Zernike

**Problem:** Ein reines Phasenobjekt (z.B. biologische Objekte)  $u_0(x, y) = \exp[i\varphi(x, y)]$  wird bei der idealen Abbildung identisch abgebildet, d.h.,  $u(-x, -y, 4f) = \exp[i\varphi(x, y)]$  und damit  $I(-x, -y, 4f) = |u(-x, -y, 4f)|^2 = 1$ , d.h., die Information geht bei der Detektion verloren.

Die Idee besteht nun darin, eine Manipulation in der Pupillenebene vorzunehmen.

Die Phasenvariationen im Objekt sind i.a. klein, d.h.,

$$u_0(x) \approx 1 + i\varphi(x)$$

$$U_0(\alpha) = \delta(\alpha) + i\Phi(\alpha)$$

Die Pupillenfunktion sei ein Phasenplättchen mit einem Loch im Zentrum, so daß nur die Ortsfrequenz  $\alpha = 0$  unbeeinflusst hindurchgeht. Alle anderen Ortsfrequenzen sollen einen Phasenshift  $\pi/2$  erfahren.

$$p(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \approx 0 \\ \exp(i\frac{\pi}{2}) = i & \text{sonst} \end{cases}$$

$$p(\frac{f}{k}\alpha) = \begin{cases} 1 & \text{für } \alpha \approx 0 \\ \exp(i\frac{\pi}{2}) = i & \text{sonst} \end{cases}$$

Damit ergibt sich in der Bildebene

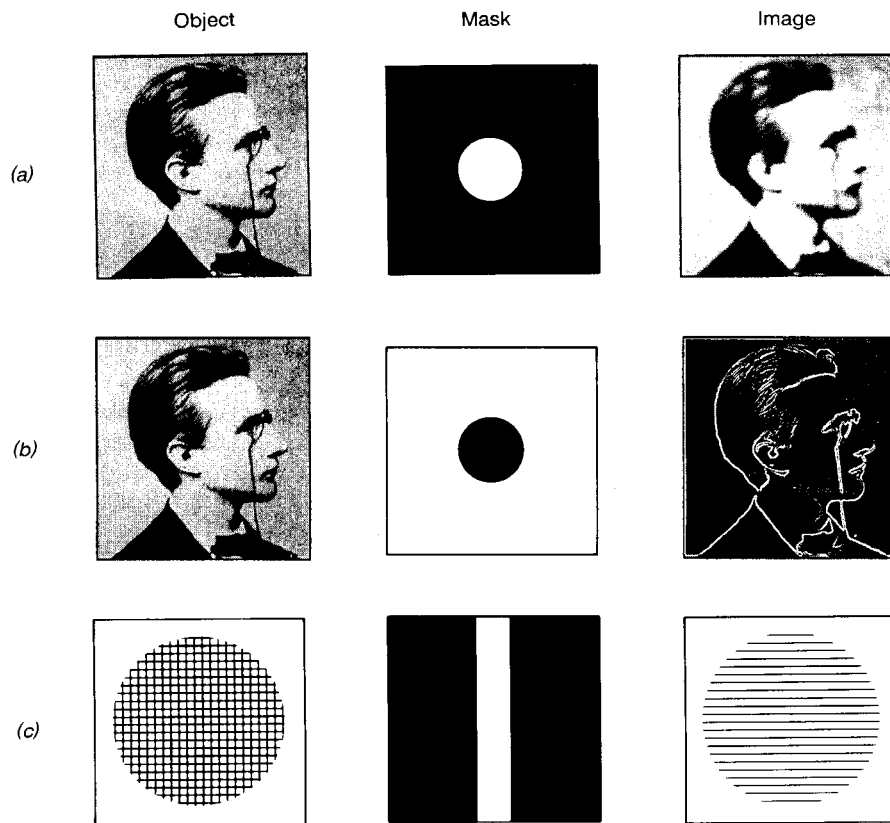
$$u(-x, 4f) \approx \tilde{A} \int_{-\infty}^{\infty} [\delta(\alpha) - \Phi(\alpha)] \exp(i\alpha x) d\alpha$$

$$= \tilde{A} [1 - \varphi(x)]$$

und für die Intensität

$$I(x, 4f) \sim 1 - 2\varphi(x),$$

d.h., die Phasenmodulation wird in eine Amplitudenmodulation umgewandelt.



Examples of object, mask, and filtered image for three spatial filters: (a) low-pass filter; (b) high-pass filter; (c) vertical-pass filter. Black means the transmittance is zero and white means the transmittance is unity.

## 4.3 Das Prinzip der holographischen Abbildung

**Idee:** Wenn das Feld  $u(x, y, z_H)$  in einer Ebene  $z = z_H$  bekannt ist (genügend groß), ist es im Prinzip im gesamten Halbraum  $z > z_H$  bekannt (2D Information  $\rightarrow$  3D Information). Das Problem besteht darin, daß bei  $z = z_H$  das *komplexe* Feld bekannt

sein muß. Konventionelle Aufnahmeverfahren registrieren i.a. nur die Intensität. So weist eine Fotoplatte eine Transmissionsfunktion

$$t(x, y, z_H) = C |u(x, y, z_H)|^2$$

auf. Der Ausweg besteht darin, das Objektfeld mit einer einfach strukturierten Referenzwelle (z.B. ebene Welle) zu überlagern.

### a) Aufzeichnung des Hologramms

$$u_H(x, y, z_H) = u(x, y, z_H) + a \exp(i\mathbf{K}\mathbf{r}_H)$$



$$\begin{aligned}
t(x, y, z_H) &= C |u_H(x, y, z_H)|^2 \\
&= C [|u|^2 + |a|^2 + ua^* \exp(-i\mathbf{K}\mathbf{r}_H) + u^*a \exp(i\mathbf{K}\mathbf{r}_H)]
\end{aligned}$$

$t(x, y, z_H)$  ist die Transmissionsfunktion einer entwickelten Fotoplatte  $\rightarrow$  *Hologramm*. Das Interferenzmuster weist keine Ähnlichkeit mit dem Objekt auf. Der Interferenzterm trägt die benötigte Phaseninformation. Eine Verkleinerung ('Zerbrechen') des Hologramms bedeutet keinen Verlust des Bildes. Es werden nur bestimmte Ortsfrequenzen ausgeblendet.

### b) Rekonstruktion des Objektes noindent

$$u_{H+}(x, y, z_{H+}) = a \exp(\pm i\mathbf{K}\mathbf{r}_H) t(x, y, z_H)$$

Das dritte Glied in der Transmissionsfunktion ergibt bei zur Referenzwelle identischer Rekonstruktionswelle

$$\sim |a|^2 \exp[-i(\mathbf{K} - \mathbf{K})\mathbf{r}_H] u(x, y, z_H) = |a|^2 u(x, y, z_H)$$

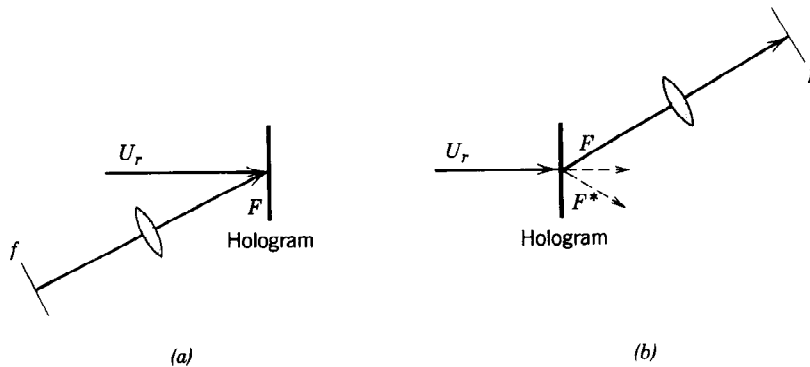
Das Objektfeld breitet sich im Halbraum  $z > z_H$  aus  $\rightarrow$  *virtuelle Abbildung*.

Das vierte Glied in der Transmissionsfunktion ergibt bei zur Referenzwelle konjugierter Rekonstruktionswelle

$$\sim |a|^2 \exp[i(\mathbf{K} - \mathbf{K})\mathbf{r}_H] u^*(x, y, z_H) = |a|^2 u^*(x, y, z_H)$$

Das konjugierte Objektfeld (einlaufende Welle) breitet sich im Halbraum  $z < z_H$  aus  $\rightarrow$  *reelle Abbildung*.

### Fourier-Holographie

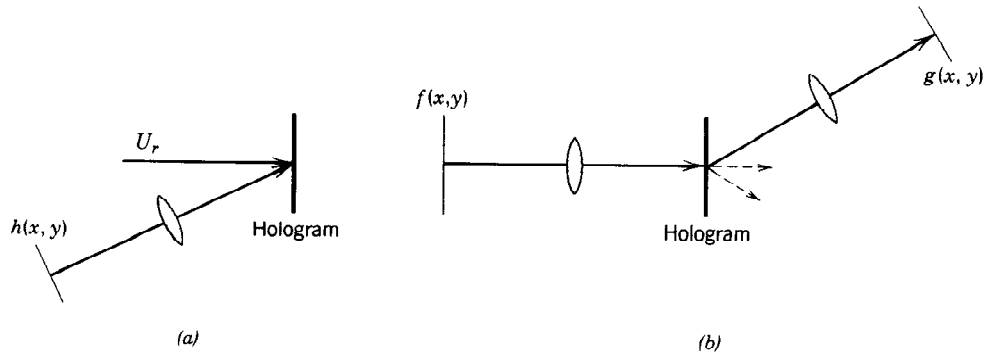


Hologram of a wave whose complex amplitude represents the Fourier transform of a function  $f(x, y)$ : (a) recording; (b) reconstruction.

## Holographische (van der Lugt) Filter

Das Ziel besteht in der optischen Generierung einer *beliebigen* Filterfunktion, um optische Filterung (Bildverarbeitung) zu implementieren.

$$u(x, y, z) = \int \int_{-\infty}^{\infty} f(x - x', y - y', z) u_0(x', y') dx' dy'$$



The Vander Lugt holographic filter. (a) A hologram of the Fourier transform of  $h(x, y)$  is recorded. (b) The Fourier transform of  $f(x, y)$  is transmitted through the hologram and inverse Fourier transformed by a lens. The result is a function  $g(x, y)$  proportional to the convolution of  $f(x, y)$  and  $h(x, y)$ . The overall process provides a spatial filter with impulse-response function  $h(x, y)$ .

# Kapitel 5

## Die Polarisation elektromagnetischer Wellen

### 5.1 Einführung

Der zeitliche Verlauf des reellen elektrischen Feldvektors  $\mathbf{E}_r(\mathbf{r}, t)$  bestimmt den Polarisationszustand des Feldes.

Wir betrachten hier den Polarisationszustand einer Normalmode

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \bar{\mathbf{E}}(\omega) \exp \{i [\mathbf{k}(\omega) \mathbf{r} - \omega t]\}$$

wobei wir uns der Einfachheit halber auf eine sich in  $z$  ausbreitende Mode beschränken. Die Ergebnisse können auf Normalmoden mit kleinen transversalen Wellenzahlvektoren (paraxiale Verhältnisse) übertragen werden. Da die Felder transversal sind, besitzen sie nur eine  $x$ - und  $y$ -Komponente. Die Orientierung und Gestalt der Fläche, auf der sich der (reelle) elektrische Feldvektor bewegt, bestimmt den Polarisationszustand. Diese Fläche ist i.a. eine sich mit der Ausbreitungsrichtung nicht ändernde Ellipse, die zur Linie (lineare Polarisation) oder zum Kreis (zirkulare Polarisation) entarten kann.

### 5.2 Die Polarisation einer Normalmode im isotropen, dispersiven Medium

Wir berechnen die Bewegung des momentanen elektrischen Feldvektors, wobei nach Voraussetzung

$$\mathbf{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ k \end{pmatrix}$$

gilt. Die relevante Größe ist der Realteil des Feldes

$$\mathbf{E}_r(\mathbf{r}, t) = \Re \{ \bar{\mathbf{E}}(\omega) \exp [ikz - \omega t] \},$$

wobei wegen der Transversalität des Feldes nur zwei *komplexe* Feldkomponenten frei wählbar sind.

$$\overline{\mathbf{E}}(\omega) = \begin{pmatrix} \overline{E_x} \\ \overline{E_y} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_x \exp(i\varphi_x) \\ E_y \exp(i\varphi_y) \\ 0 \end{pmatrix}$$

mit den reellen Größen  $E_{x,y}$  und  $\varphi_{x,y}$ .

$$\mathbf{E}_r(\mathbf{r}, t) = \begin{pmatrix} E_x \cos(\Phi - \varphi_x) \\ E_y \cos(\Phi - \varphi_y) \\ 0 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} X(z, t) \\ Y(z, t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

und  $\Phi = \omega t - kz$ . Wir erhalten

$$\frac{X}{E_x} = \cos(\Phi) \cos(\varphi_x) + \sin(\Phi) \sin(\varphi_x) \quad (5.1)$$

$$\frac{Y}{E_y} = \cos(\Phi) \cos(\varphi_y) + \sin(\Phi) \sin(\varphi_y) \quad (5.2)$$

Multipliziert man zuerst (5.1) mit  $\sin(\varphi_y)$  und (5.2) mit  $\sin(\varphi_x)$  und subtrahiert die Gleichungen und wiederholt das entsprechend mit  $\cos(\varphi_y)$ ,  $\cos(\varphi_x)$ , erhält man

$$\frac{X}{E_x} \sin(\varphi_y) - \frac{Y}{E_y} \sin(\varphi_x) = \cos(\Phi) \sin(\varphi_y - \varphi_x)$$

$$\frac{X}{E_x} \cos(\varphi_y) - \frac{Y}{E_y} \cos(\varphi_x) = -\sin(\Phi) \sin(\varphi_y - \varphi_x).$$

Mit der Abkürzung  $\delta = \varphi_y - \varphi_x$  und Quadrieren und Addieren der resultierenden Gleichungen ergibt sich die Gleichung einer Ellipse

$$\frac{X^2}{E_x^2} + \frac{Y^2}{E_y^2} - 2 \frac{XY}{E_x E_y} \cos \delta = \sin^2 \delta.$$

Die Dreh-Transformation ins Hauptachsensystem führt man mit

$$X = \xi \cos \psi - \eta \sin \psi$$

$$Y = \xi \sin \psi + \eta \cos \psi$$

durch. Verschwinden des  $\xi\eta$ -Gliedes erfordert für den Drehwinkel

$$\tan 2\psi = \frac{2E_x E_y}{E_x^2 - E_y^2} \cos \delta \quad (5.3)$$

und es folgt die Ellipsengleichung im Hauptachsensystem

$$\frac{\xi^2}{\alpha^2} + \frac{\eta^2}{\beta^2} = 1$$

mit den Hauptachsen

$$\frac{1}{\alpha^2} = \left( \frac{\cos^2 \psi}{E_x^2} + \frac{\sin^2 \psi}{E_y^2} - \frac{\cos \delta}{E_x E_y} \sin 2\psi \right) \frac{1}{\sin^2 \delta}$$

$$\frac{1}{\beta^2} = \left( \frac{\sin^2 \psi}{E_x^2} + \frac{\cos^2 \psi}{E_y^2} + \frac{\cos \delta}{E_x E_y} \sin 2\psi \right) \frac{1}{\sin^2 \delta},$$

wobei sich  $\psi$  aus 5.3 ergibt.

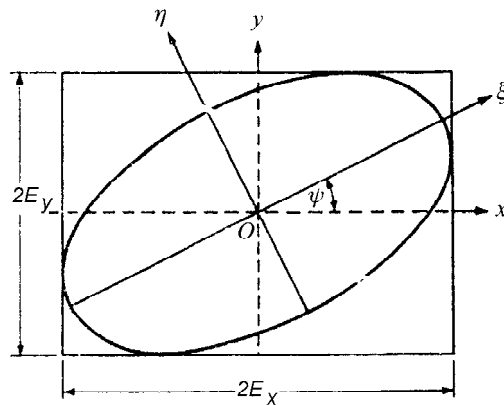


Abbildung 5.1: Polarisationsellipse

Die Normalmode eines isotropen, dispersiven Mediums ist i.a. elliptisch polarisiert, da beliebige  $E_x, E_y$  und Phasendifferenz  $\delta = (\varphi_y - \varphi_x)$ .

### 5.2.1 Polarisationszustände

**A) elliptische Polarisation**  $\longrightarrow E_x \neq E_y, \delta \neq n\pi$

$$\alpha) \delta = \pm\pi/2 \longrightarrow \psi = 0, \quad \alpha = E_x, \quad \beta = E_y$$

$+\pi/2 \longrightarrow$  linksdrehend,  $-\pi/2 \longrightarrow$  rechtsdrehend (man sieht entgegen der Ausbreitungsrichtung auf den Feldvektor)

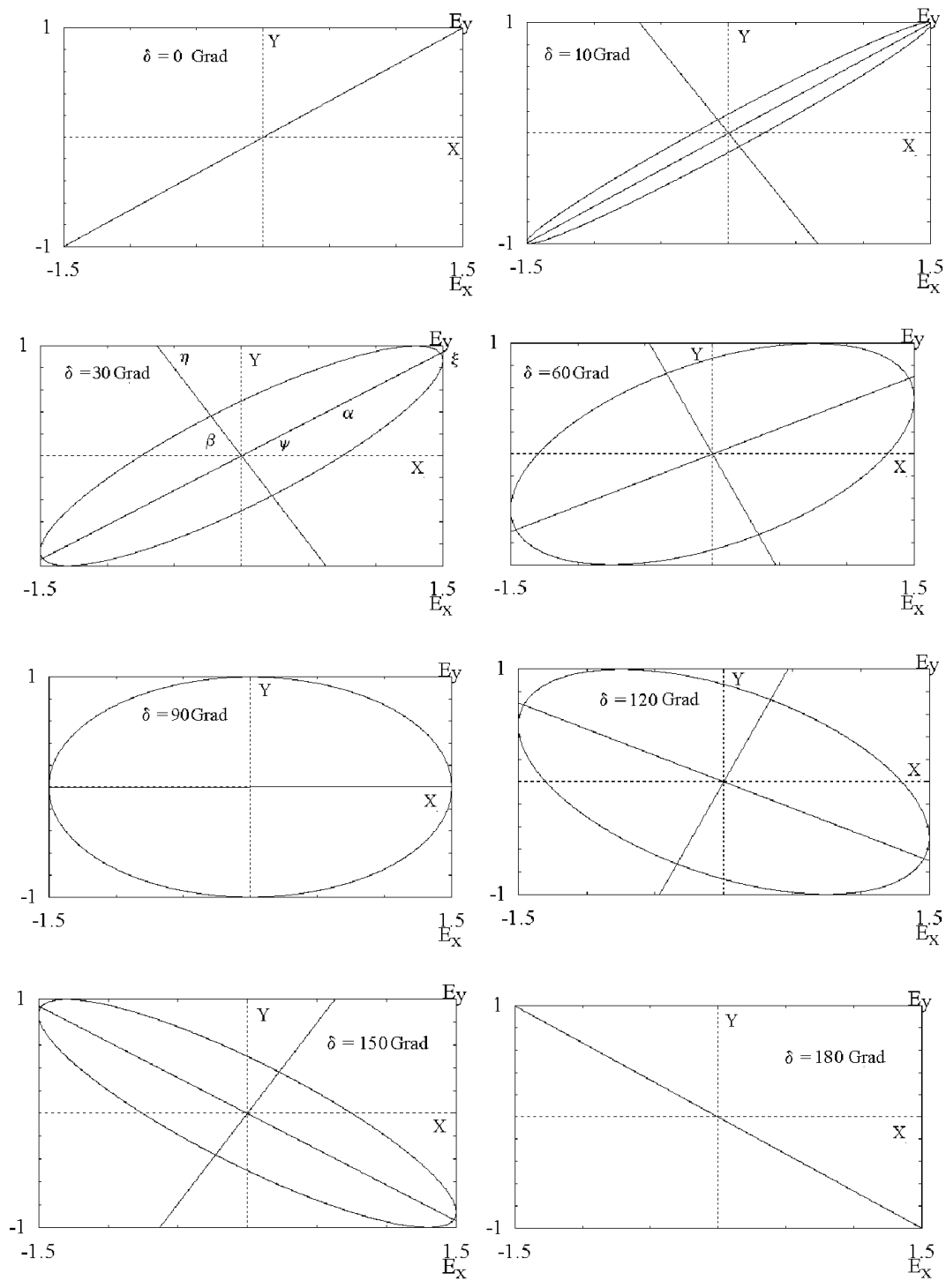
$$\begin{aligned} \beta) \quad & 0 < \delta < \pi \longrightarrow \text{linksdrehend} \\ & \pi < \delta < 2\pi \longrightarrow \text{rechtsdrehend} \\ & \psi \text{ ist endlich} \end{aligned}$$

**B) zirkulare Polarisation**  $\longrightarrow E_x = E_y = E, \delta = \pm\pi/2$

$$\psi = 0, \quad \alpha = E, \quad \beta = E$$

rechts/links wie oben

**C) lineare Polarisation**  $\longrightarrow \delta = n\pi$



$$\tan 2\psi = (-1)^n \frac{2E_x E_y}{E_x^2 - E_y^2}$$

$$E_x = E_y \curvearrowright \psi = \pi/4, 3\pi/4$$

**Bemerkung:** linear polarisierte Welle ist die Überlagerung zweier zirkularer Wellen

$$(kz = 0, \delta = \pm\pi/2)$$

$$E \begin{pmatrix} \cos(\omega t) \\ \sin(\omega t) \\ 0 \end{pmatrix} + E \begin{pmatrix} \cos(\omega t) \\ -\sin(\omega t) \\ 0 \end{pmatrix} = 2E \begin{pmatrix} \cos(\omega t) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

## 5.3 Alternative Darstellung des Polarisationszustandes

### 5.3.1 Poincaré-Kugel, Stokes-Parameter

→ anschauliche Darstellung der Dynamik von Systemen mit drei Freiheitsgraden

$$s_0 = E_x^2 + E_y^2$$

$$s_1 = E_x^2 - E_y^2$$

$$s_2 = 2E_x E_y \cos \delta$$

$$s_3 = 2E_x E_y \sin \delta$$

$$\curvearrowright s_0^2 = s_1^2 + s_2^2 + s_3^2$$

Jeder Polarisationszustand kann durch einen Punkt auf der Kugeloberfläche (Radius  $s_0$ ) dargestellt werden.

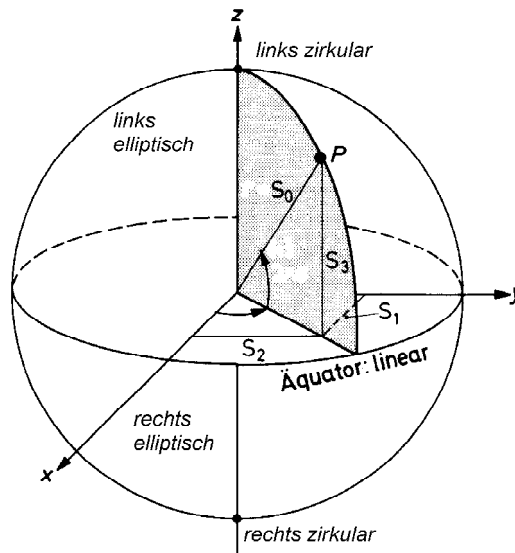


Abbildung 5.2: Poincare-Kugel

<b>obere Halbkugel</b>	→ linksdrehend
<b>untere Halbkugel</b>	→ rechtsdrehend
<b>Äquator</b>	→ lineare Polarisation $s_3 = 0 \rightarrow \delta = n\pi$
<b>Pole</b>	→ zirkulare Polarisation $s_1 = s_2 = 0 \rightarrow E_x = E_y, \delta = \pm\pi/2$



### 5.3.2 Jones-Kalkül

Dieses Kalkül ist nützlich, um die Änderung des Polarisationszustandes bei Durchgang durch optische Elemente zu berechnen.

$$\begin{array}{ll} \text{Polarisationszustand} & \mathbf{J}, \text{ normiert } \mathbf{j} \\ \text{opt. Element Matrix} & \longrightarrow \hat{\mathbf{T}} \end{array}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{J} &= \begin{pmatrix} E_x \exp(i\varphi_x) \\ E_y \exp(i\varphi_y) \end{pmatrix} \\ &= \sqrt{E_x^2 + E_y^2} \exp(i\varphi_x) \begin{pmatrix} \frac{E_x}{\sqrt{E_x^2 + E_y^2}} \\ \frac{E_y}{\sqrt{E_x^2 + E_y^2}} \exp(i\delta) \end{pmatrix} \\ &= \sqrt{E_x^2 + E_y^2} \exp(i\varphi_x) \begin{pmatrix} j_x \\ j_y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} \tan \Psi &= \frac{E_y}{E_x}, \quad \sin \Psi = \frac{E_y}{\sqrt{E_x^2 + E_y^2}}, \quad \cos \Psi = \frac{E_x}{\sqrt{E_x^2 + E_y^2}} \\ \mathbf{j} &= \begin{pmatrix} \cos \Psi \\ \sin \Psi \exp(i\delta) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Kennt man  $j_x$  und  $j_y$  folgen daraus  $E_x, E_y, \delta$ .

#### Beispiele:

a) lineare Polarisation  $\curvearrowright \delta = n\pi$

$$\mathbf{j}_{\text{lin}} = \begin{pmatrix} \cos \Psi \\ \pm \sin \Psi \end{pmatrix}$$

b) zirkulare Polarisation  $\delta = \pm\pi/2, E_x = E_y \curvearrowright \Psi = \pi/4$

$$\mathbf{j}_{\text{zl}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, \quad \mathbf{j}_{\text{zr}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$$

#### Definition der Orthogonalität:

$$\mathbf{j}_1 \mathbf{j}_2^* = j_{1x} j_{2x}^* + j_{1y} j_{2y}^* = \delta_{12}$$

z.B. lin. polarisiert ( $x$  und  $y$ ), zirkular (rechts, links)

**Zerlegung jedes beliebigen Polarisationszustandes nach diesen orthogonalen Zuständen:**

$$\mathbf{j} = \alpha \mathbf{j}_1 + \beta \mathbf{j}_2$$

$$\alpha = \mathbf{j}_1^* \mathbf{j}, \quad \beta = \mathbf{j}_2^* \mathbf{j},$$

**Durchrechnen durch optische Elemente:**

$$\mathbf{j}_{\text{out}} = \hat{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{j}_{\text{in}}$$

Bei Anwendungen oft Koordinatentransformation (Drehung) nötig.

$$\mathbf{j}' = \hat{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{j}$$

$$\hat{\mathbf{T}}' = \hat{\mathbf{R}}(-\Theta) \cdot \hat{\mathbf{T}} \cdot \hat{\mathbf{R}}(\Theta)$$

$$\hat{\mathbf{R}} = \begin{bmatrix} \cos \Theta & \sin \Theta \\ -\sin \Theta & \cos \Theta \end{bmatrix}$$

# Kapitel 6

## Grundzüge der Kristalloptik - Normalmoden in homogenen, anisotropen Medien

### 6.1 Suszeptibilitäts- und Dielektrizitätstensor

Bisherige Annahme der Isotropie (Richtungsunabhängigkeit der optischen Eigenschaften) von Materialien fallenlassen. In vielen optischen Materialien (insbesondere Kristalle) hängen die Polarisierbarkeiten (Auslenkungen) von der Richtung des Feldes ab, da die Atome periodisch, aber mit unterschiedlichen Symmetrien angeordnet sind  $\leadsto$  Anisotropie.

**Beispiele:**

Lithiumniobat	$\longrightarrow$	elektro-optisches Material
Quarz	$\longrightarrow$	Polarisatoren
Flüssigkristalle	$\longrightarrow$	Anzeigeelemente, NLO
MQW	$\longrightarrow$	Optoelektronik

Wir beschränken uns hier auf eine Frequenz- (Monochromasie) und eine Ortsfrequenzkomponente (ebene Welle), die Ergebnisse sind zu verallgemeinern bei Anwendung der im isotropen Medien benutzten Methoden (Fouriertransformation), i.a. jedoch schwieriger. Wir nehmen weiterhin Absorptionsfreiheit an.

Im isotropen Material waren elliptisch polarisierte, ebene monochromatische Wellen die Normalmoden. Im folgenden sollen die *Normalmoden des anisotropen Mediums* identifiziert werden. Mit Hilfe dieser Normalmoden kann man sich dann jede beliebige raum-zeitlich begrenzte Lösung aufbauen.

**bisher:**

$$\overline{\mathbf{P}}(\mathbf{r}, \omega) = \varepsilon_0 \overline{\chi}(\omega) \overline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega)$$

$$\overline{\mathbf{D}}(\mathbf{r}, \omega) = \varepsilon_0 \overline{\varepsilon}(\omega) \overline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega)$$

Im folgenden wird  $\overline{\mathbf{E}}$  durch  $\mathbf{E}$  usw. ersetzt, da nur eine Frequenzkomponente betrachtet wird

jetzt:

$$P_i(\mathbf{r}, \omega) = \varepsilon_0 \sum_{j=1}^3 \underbrace{\chi_{ij}(\omega)}_{\text{Tensorkomponenten}} E_j(\mathbf{r}, \omega) \stackrel{!}{=} \varepsilon_0 \chi_{ij}(\omega) E_j(\mathbf{r}, \omega)$$

$\leadsto \mathbf{P} \propto \mathbf{E}$ ,  $\chi_{ij}$  - widerspiegelt die Kristallstruktur  $\longrightarrow$  jedoch nicht mikroskopisch wegen unterschiedlicher Längenskalen (Optik -  $5 \cdot 10^{-7}$  m, Kristall -  $5 \cdot 10^{-10}$  m  $\leadsto$  das Feld spürt periodische Anordnung nicht im einzelnen, aber Symmetrien des Kristalls  
analog:

$$D_i(\mathbf{r}, \omega) = \varepsilon_0 \varepsilon_{ij}(\omega) E_j(\mathbf{r}, \omega)$$

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}, \omega) = \varepsilon_0 \hat{\varepsilon}(\omega) \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega)$$

$$\leadsto \mathbf{D} \propto \mathbf{E}$$

$\hat{\chi} = (\chi_{ij})$  - Suszeptibilitätstensor

$\hat{\varepsilon} = (\varepsilon_{ij})$  - Dielektrizitätstensor  $\longrightarrow$  im folgenden benutzt  
oftmals auch inverser Tensor  $\hat{\sigma}$

$$\varepsilon_0 \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) = \hat{\sigma} \mathbf{D}(\mathbf{r}, \omega)$$

$$\hat{\sigma} = [\hat{\varepsilon}]^{-1} = (\sigma_{ij})$$

**Eigenschaften:**

- $\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij} \longrightarrow$  reell im Transparenzgebiet ( $\omega$  weggelassen, nicht vergessen).
- $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}, \sigma_{ij} = \sigma_{ji} \longrightarrow$  Tensoren sind symmetrisch, nur noch 6 Komponenten, d.h. Tensor

**Beweis:**

Aus Maxwell-Gleichungen im Fourierraum folgt:

$$\operatorname{div}(\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*) - i\omega (\mathbf{E} \hat{\varepsilon}^* \mathbf{E}^* - \mu_0 \mathbf{H}^* \mathbf{H}) + \mathbf{j}^* \mathbf{E} = 0$$

Für ein verlustfreies Medium gilt  $\operatorname{div} \langle \mathbf{S} \rangle = \frac{1}{2} \Re [\operatorname{div}(\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*)] = 0$  und damit

$$\Re(i \mathbf{E} \hat{\varepsilon}^* \mathbf{E}^*) = -\Im(\mathbf{E} \hat{\varepsilon}^* \mathbf{E}^*) = 0$$

Gilt für jedes beliebige  $\mathbf{E}$ -Feld, also auch wenn nur  $E_x \neq 0$

$$|E_x|^2 \Im(\varepsilon_{xx}^*) = 0$$

In analoger Weise gilt das für  $\varepsilon_{yy}$  und  $\varepsilon_{zz}$ , d.h. alle Diagonalelemente des Tensors sind reell.

Nutzt man dieses Ergebnis aus gilt z.B. weiterhin (:

$$\Im (\varepsilon_{xy}^* E_x E_y^* + \varepsilon_{yx}^* E_y E_x^*) = \Im [(\varepsilon_{xy}^* - \varepsilon_{yx}) E_x E_y^*] = 0 \longrightarrow \varepsilon_{xy}^* = \varepsilon_{yx}.$$

Dieses Ergebnis kann man auf alle  $\varepsilon_{ij}$  verallgemeinern. Damit ist gezeigt, daß der dielektrische Tensor *hermitisch* ist. (analog gilt das für  $\chi_{ij}$  und  $\sigma_{ij}$ )

· Transformation auf Hauptachsen möglich  $\longrightarrow$  hier für  $\sigma_{ij}$  zeigen Richtungen gesucht, wo  $\mathbf{D} \parallel \mathbf{E}$

$$\sigma_{ij} D_j = \varepsilon_0 E_i = \lambda D_i$$

$$\det [\sigma_{ij} - \lambda I_{ij}] = 0, I_{ij} = \delta_{ij}$$

Gleichung 3.Ordnung  $\longrightarrow$  drei Wurzeln  $\lambda^{(\alpha)}$ . Wir setzen

$$\sigma_{ij} D_j^{(\alpha)} = \lambda^{(\alpha)} D_i^{(\alpha)},$$

um die Eigenvektoren  $D_j^{(\alpha)}$  zu bestimmen.

Die Eigenvektoren sind orthogonal, da

$$\sigma_{ij} D_j^{(\alpha)} = \lambda^{(\alpha)} D_i^{(\alpha)}, \sigma_{ij} D_j^{(\beta)} = \lambda^{(\beta)} D_i^{(\beta)}$$

und die anschließende Multiplikation ergibt

$$D_i^{(\beta)} \sigma_{ij} D_j^{(\alpha)} - D_i^{(\alpha)} \sigma_{ij} D_j^{(\beta)} = (\lambda^{(\alpha)} - \lambda^{(\beta)}) D_i^{(\beta)} D_i^{(\alpha)}$$

Die linke Seite verschwindet, da Summationen vertauscht werden können und  $\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \leadsto D_i^{(\beta)} D_i^{(\alpha)} = 0$  für  $\lambda^{(\alpha)} \neq \lambda^{(\beta)}$ . Die Hauptachsenrichtungen spiegeln die Kristallsymmetrien wieder.

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_i \delta_{ij}, \quad \sigma_{ij} = \sigma_i \delta_{ij} = \frac{1}{\varepsilon_i} \delta_{ij}$$

$$(\varepsilon_{ij}) = \begin{bmatrix} \varepsilon_1(\omega) & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2(\omega) & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3(\omega) \end{bmatrix}$$

$\leadsto$  ein anisotropes Medium wird i.a. durch drei verschiedene dielektrische Funktionen charakterisiert (im Hauptachsensystem). In der Regel rechnet man im Hauptachsen- (Kristall-) System und führt zum Schluß die Transformation ins Laborsystem durch.

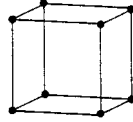
## 6.2 Die optische Klassifikation von Kristallen

### a) isotrop

Es existieren drei kristallographisch äquivalente, senkrechte Achsen

→ kubische Kristalle

→ Gase, amorphe Festkörper, Flüssigkeiten, polykristalline Medien

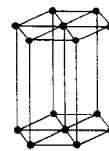
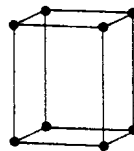


$$\varepsilon_1(\omega) = \varepsilon_2(\omega) = \varepsilon_3(\omega) \longrightarrow D_i = \varepsilon_0 \varepsilon(\omega) E_i$$

### b) optisch einachsig (uniaxial)

Es existieren zwei oder mehr kristallographisch äquivalente Achsen in einer Ebene

→ trigonal, tetragonal, hexagonal

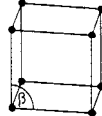
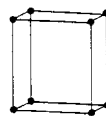


$$\varepsilon_1(\omega) = \varepsilon_2(\omega) \neq \varepsilon_3(\omega)$$

### c) optisch zweiachsig (biaxial)

Es existieren keine zwei kristallographisch äquivalente Richtungen

→ orthorhombisch, monoklin, triklin



$$\varepsilon_1(\omega) \neq \varepsilon_2(\omega) \neq \varepsilon_3(\omega)$$

## 6.3 Das Indexellipsoid

→ geometrische Veranschaulichung des inversen dielektrischen Tensors  $\hat{\sigma}$

**Vektor:** im physikalischen Raum unabhängig vom Koordinatensystem, einfach im Hauptachsensystem

**Tensor:** Ähnlich ist ein symmetrischer Tensor als Fläche 2. Ordnung darzustellen → invariant gegenüber Koordinatentransformationen

Darstellung von  $\hat{\sigma} = [\hat{\varepsilon}]^{-1}$  :

$$\sum_{i,j=1}^3 \sigma_{ij} x_i x_j = 1$$

wegen:

$$\sum_{i,j=1}^3 \sigma_{ij} D_i D_j = \varepsilon_0 \sum_{i=1}^3 E_i D_i = 2w_{\text{el}}$$

in Hauptachsen:

$$\sigma_1 x_1^2 + \sigma_2 x_2^2 + \sigma_3 x_3^2 = \frac{x_1^2}{\varepsilon_1} + \frac{x_2^2}{\varepsilon_2} + \frac{x_3^2}{\varepsilon_3} = 1$$

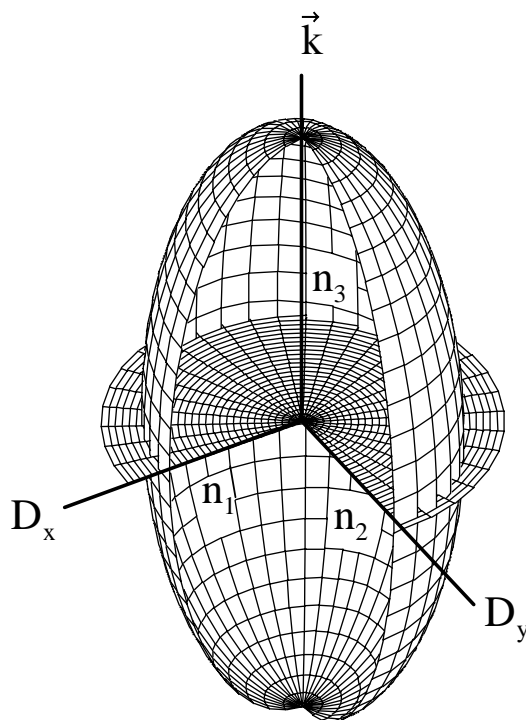


Abbildung 6.1: Indexellipsoid

Das Medium wird durch einen Tensor (statt eines Skalars) beschrieben ; Hauptachsen:  
 $\sqrt{\varepsilon_i} = n_i$

**Degenerierte Fälle:**

**kubisch:** Kugel

**einachsig:** rotationssymmetrisch um  $z$ -Achse und  $n_1 = n_2$

## 6.4 Normalmoden im anisotropen Medium

**Normalmode:**

- Lösung der Wellengleichung, die bei der Ausbreitung nur eine raum-zeitliche Phasenänderung erfährt.
- die räumliche und zeitliche Phasenänderung hängen über eine Dispersionsrelation  $\omega = \omega(k)$  oder  $k = k(\omega)$  zusammen.

## Isotropes Medium:

Normalmode  $\longrightarrow$  monochromatische ebene Welle

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_\omega \exp \{i [\mathbf{k}(\omega) \cdot \mathbf{r} - \omega t]\}$$

$$\mathbf{k}^2(\omega) = \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon(\omega)$$

bei reellem  $\varepsilon(\omega) > 0$  und mit  $\mathbf{kE}_\omega = \mathbf{kD}_\omega = 0$ . Die Welle ist i.a. elliptisch polarisiert, der Polarisationszustand bleibt bei der Ausbreitung erhalten.

$\longrightarrow$  jetzt Suche nach Normalmoden im anisotropen Medium. Im Hauptachsensystem ist deren Berechnung einfach.

### 6.4.1 Normalmoden bei Ausbreitung in Hauptachsen

**Annahme:** Hauptachsen in  $x, y, z \longrightarrow \mathbf{kD}_\omega = \mathbf{kE}_\omega = 0$ , Ausbreitung in  $z$  - Richtung ( $\mathbf{k} \longrightarrow k_z$ ),  $D_x, D_y \neq 0$

$$D_i = \varepsilon_0 \varepsilon_i E_i$$

$\longrightarrow$  Achtung keine Summation

Feld beliebig in  $x, y$ -Ebene:

$$D_1, \varepsilon_1 \leadsto D_1 \exp [i (\mathbf{k}_1 \mathbf{r} - \omega t)] = D_1 \exp [i \varphi_1] \exp (i \omega t) \text{ mit } \mathbf{k}_1^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_1(\omega)$$

$$D_2, \varepsilon_2 \leadsto D_2 \exp [i (\mathbf{k}_2 \mathbf{r} - \omega t)] = D_2 \exp [i \varphi_2] \exp (i \omega t) \text{ mit } \mathbf{k}_2^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_2(\omega)$$

$\longrightarrow \mathbf{E} \nparallel \mathbf{D} \longrightarrow$  elliptische Polarisation keine Normalmode  $\longrightarrow$  Polarisationszustand ändert sich bei der Ausbreitung wegen  $\delta = \varphi_2 - \varphi_1 = (k_2 - k_1) z$ .

Jedoch wenn Feld in jeweils einer Hauptachse polarisiert  $\longrightarrow$  Normalmode

$$\mathbf{D}^{(a)} = \{D_1 \exp [i (\mathbf{k}_a \mathbf{r} - \omega t)]\} \mathbf{e}_1 \longrightarrow \mathbf{k}_a^2 = \frac{\omega^2}{c^2} n_a^2 = \mathbf{k}_1^2 \longrightarrow \text{Normalmode a}$$

$$\mathbf{D}^{(b)} = \{D_2 \exp [i (\mathbf{k}_b \mathbf{r} - \omega t)]\} \mathbf{e}_2 \longrightarrow \mathbf{k}_b^2 = \frac{\omega^2}{c^2} n_{bk}^2 = \mathbf{k}_2^2 \longrightarrow \text{Normalmode b}$$

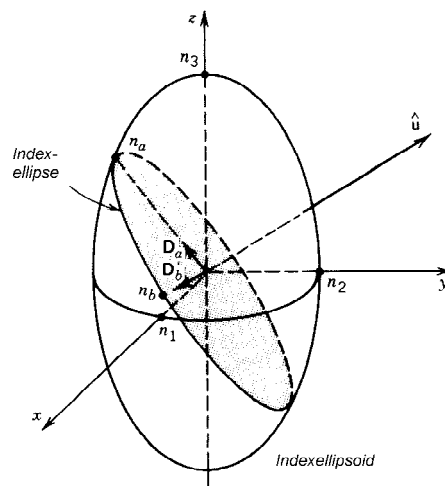
$\longrightarrow$  es existieren zwei senkrecht zueinander, linear polarisierte Normalmoden,  $\longrightarrow \mathbf{E} \parallel \mathbf{D}$ .



## 6.4.2 Normalmoden bei beliebiger Ausbreitungsrichtung $\longrightarrow$ Dispersionsrelation

### 6.4.2.1 Geometrische Konstruktion I

- Vorgabe von  $\omega$  und Kristall  $\longrightarrow \varepsilon_i \longrightarrow$  Indexellipsoid bekannt
- Vorgabe der Ausbreitungsrichtung  $\longrightarrow \mathbf{k}/k$
- Ebene durch Ursprung des Indexellipsoids und senkrecht zu  $\mathbf{k}$  zeichnen  $\longrightarrow$  Schnittfläche ist Ellipse  $\longrightarrow$  Indexellipse
- Die Halbachsen dieser Ellipse sind die Brechzahlen  $n_a, n_b$  der Normalmoden in dieser Ausbreitungsrichtung  $\longrightarrow k_a = \frac{\omega}{c} n_a, k_b = \frac{\omega}{c} n_b$
- Die Richtungen der Halbachsen  $\longrightarrow$  Polarisationsrichtungen von  $\mathbf{D}^{(a)}$  und  $\mathbf{D}^{(b)}$  an.
- $\mathbf{E}^{(a)}$  und  $\mathbf{E}^{(b)}$  folgen aus  $E_i^{(a)} = \frac{D_i^{(a)}}{\varepsilon_0 \varepsilon_i}, \quad E_i^{(b)} = \frac{D_i^{(b)}}{\varepsilon_0 \varepsilon_i}$  damit  $\mathbf{D}^{(a,b)} \nparallel \mathbf{E}^{(a,b)}$  und  $\mathbf{E}^{(a,b)}$  nicht  $\perp$  zu  $\mathbf{k}$ .
- Ellipse  $\longrightarrow$  Kreis, Richtung des  $\mathbf{k}$ - Vektors definiert die *optischen Achse*.



### 6.4.2.2 Ableitung der Dispersionsrelation

**isotropes Medium:**

*Dispersionsrelation:*

Die Länge des  $\mathbf{k}$ - Vektor ist nicht von der Richtung abhängig.

$$\mathbf{k}^2(\omega) = \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon(\omega)$$

*Feld der Normalmode:*

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_\omega \exp \{i [\mathbf{k}(\omega) \mathbf{r} - \omega t]\}$$

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \underbrace{\mathbf{D}_\omega}_{\text{elliptisch polarisiert}} \exp \{i [\mathbf{k}(\omega) \mathbf{r} - \omega t]\}$$

elliptisch polarisiert

### anisotropes Medium:

Normalmode wird wieder eine ebene, monochromatische Welle

$$\sim \exp \{i [\mathbf{k}(\omega) \mathbf{r} - \omega t]\}$$

sein. Im anisotropen Medien wird jedoch die Länge des  $\mathbf{k}$ -Vektors i.a. neben der Frequenz auch noch von der Ausbreitungsrichtung abhängen (Dispersionsrelation). Darüberhinaus wurde schon deutlich, daß die Polarisation der Normalmode nicht elliptisch sein wird. Um die Richtungsabhängigkeit zu erfassen, schreiben wir den  $\mathbf{k}$ -Vektor komponentenweise auf:

$$\mathbf{k} = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 1$$

### Ziel:

$\omega = \omega(k_1, k_2, k_3)$  oder  $\omega = \omega(k, u_1, u_2, u_3)$  oder  $k = k(\omega, u_1, u_2, u_3)$  zusammen.

### Maxwell-Gleichungen:

$$\mathbf{k} \mathbf{D}_\omega = 0 \quad \mathbf{k} \times \mathbf{E}_\omega = \omega \mu_0 \mathbf{H}_\omega$$

$$\mathbf{k} \mathbf{H}_\omega = 0 \quad \mathbf{k} \times \mathbf{H}_\omega = -\omega \mathbf{D}_\omega$$

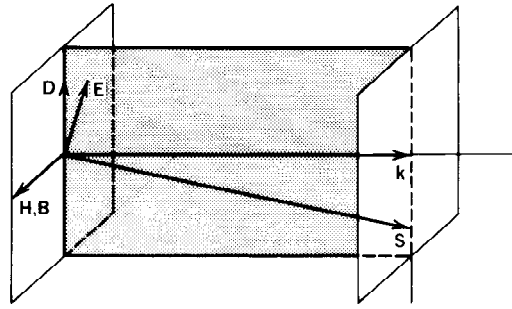
$$\mathbf{S} = \frac{1}{2} \Re (\mathbf{E}_\omega \times \mathbf{H}_\omega^*)$$

$$\curvearrowright \mathbf{k} \nparallel \mathbf{S}, \quad \mathbf{S} \perp \mathbf{E}_\omega$$

jetzt Index ' $\omega$ ' weglassen

$$-[\mathbf{k} \times (\mathbf{k} \times \mathbf{E})] = \frac{\omega^2}{c^2} \frac{1}{\varepsilon_0} \mathbf{D}$$

$$-\mathbf{k} (\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}) + \mathbf{k}^2 \mathbf{E} = \frac{\omega^2}{c^2} \frac{1}{\varepsilon_0} \mathbf{D}$$



im Hauptachsensystem

$$D_i = \varepsilon_0 \varepsilon_i E_i$$

$$-k_i \sum_j k_j E_j + k^2 E_i = \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_i E_i$$

$$\left( \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_i - k^2 \right) E_i = -k_i \sum_j k_j E_j$$

für isotrope Medien wird die rechte Seite zu Null.

**Eigenwertgleichung:**

$$\begin{bmatrix} \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_1 - k_2^2 - k_3^2 & k_1 k_2 & k_1 k_3 \\ k_2 k_1 & \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_2 - k_1^2 - k_3^2 & k_2 k_3 \\ k_3 k_1 & k_3 k_2 & \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_3 - k_2^2 - k_3^2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Aus  $\det[.] = 0$  folgt die gewünschte Dispersionsrelation  $\omega = \omega(k)$  für vorgegebenen  $k_i/k$ .

Hier einfacheren Weg:

$$E_i = -\frac{k_i}{\left( \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_i - k^2 \right)} \sum_j k_j E_j$$

Multiplikation mit  $k_i$  und Summation über 'i' ergibt bei Substitution  $i \longleftrightarrow j$  auf der linken Seite

$$\sum_j k_j E_j = -\sum_i \frac{k_i^2}{\left( \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_i - k^2 \right)} \sum_j k_j E_j,$$

da  $\mathbf{div} \mathbf{E} = \sum_j k_j E_j \neq 0$  folgt daraus die Dispersionsrelation

$$\sum_i \frac{k_i^2}{\left( k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_i \right)} = 1$$

mit  $\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} = k(\omega) \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \frac{\omega}{c} n(\omega) \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$  können wir schreiben

$$\sum_i \frac{k^2 u_i^2}{(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_i)} = 1$$

$$\sum_i \frac{u_i^2}{(1 - \frac{\varepsilon_i}{n^2})} = 1$$

$$\sum_i \frac{u_i^2}{[n^2(\omega) - \varepsilon_i(\omega)]} = \frac{1}{n^2(\omega)}$$

Damit ergibt sich für vorgegebene  $\varepsilon_i(\omega)$  und Richtungskosinus'  $(u_1, u_2, u_3)$  die Brechzahl  $n(\omega, u_1, u_2, u_3)$  (eigentlich  $n(\omega, u_1, u_2)$ , da  $u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 1$ ), die die Normalmode sieht. Explizit ergibt sich:

$$u_1^2 (n^2 - \varepsilon_2) (n^2 - \varepsilon_3) n^2 + u_2^2 (n^2 - \varepsilon_1) (n^2 - \varepsilon_3) n^2 + u_3^2 (n^2 - \varepsilon_1) (n^2 - \varepsilon_2) n^2 = (n^2 - \varepsilon_1) (n^2 - \varepsilon_2) (n^2 - \varepsilon_3)$$

→ quadratische Gleichung in  $n^2$  ( $n^6$ -Term verschwindet) → zwei Lösungen  $n_a, n_b$  und damit  $k_a = \frac{\omega}{c} n_a, k_b = \frac{\omega}{c} n_b$  für die beiden senkrecht zueinander polarisierten Normalmoden  $\mathbf{D}^{(a)}$  und  $\mathbf{D}^{(b)}$ .

**speziell:**

Ausbreitung in einer Hauptachse →  $u_3 = 1$  (siehe Kapitel 6.3.1):

$$(n^2 - \varepsilon_1) (n^2 - \varepsilon_2) n^2 = (n^2 - \varepsilon_1) (n^2 - \varepsilon_2) (n^2 - \varepsilon_3)$$

$$(n^2 - \varepsilon_1) (n^2 - \varepsilon_2) \varepsilon_3 = 0 \rightarrow n_a^2 = \varepsilon_1, n_b^2 = \varepsilon_2$$

## Geometrische Interpretation II - Die Normalenfläche

Gleichung einer Fläche im  $k_i$ -Raum ( $\frac{k}{\omega/c} u_i = n u_i$ ) → *Normalenfläche* → centrosymmetrische, aus zwei Blättern bestehende Fläche → schneidet jede Hauptebene als Kreis und Ellipse.

**biaxial:** 4 Schnittpunkte der Flächen → Verbindungslinien ergeben die zwei *optischen Achsen*.

**uniaxial:** Rotationsellipse und Kugel → 2 Schnittpunkte in den Polen → Verbindungslinie ergibt die *optische Achse* (wenn  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = n_{\text{or}}^2, \varepsilon_3 = n_e^2$ ), dann ist  $z$ -Achse die optische Achse

**kubisch:** Kugel

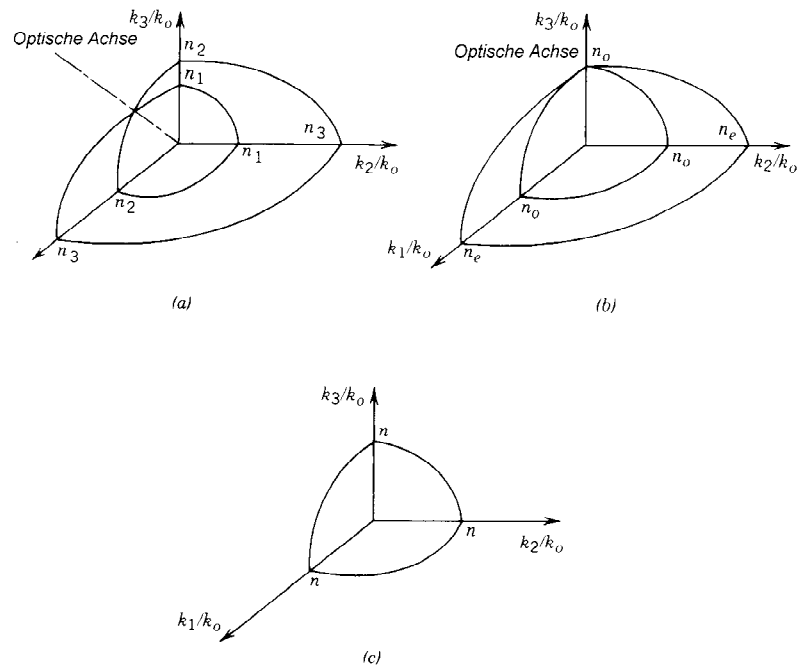


Abbildung 6.2: (a) zweiachsiger; (b) einachsiger; (c) isotroper Kristall

#### Vorgehen:

- Richtung festlegen  $(u_1, u_2) \rightarrow$  Schnittpunkte mit Oberfläche
- Abstand Zentrum - Schnittpunkt ergibt die Brechzahlen der Normalmoden
- in der optischen Achse  $\rightarrow n_a = n_b$

$\rightarrow$  damit zwei geometrische Interpretationen:

#### a) Indexellipsoid

- Richtung festlegen  $\leadsto$  Indexellipse  $\leadsto$  Halbachsen ergeben  $n_a, n_b$  (Brechzahlen, die NM sehen)
- optische Achse dann, wenn Indexellipse zum Kreis entartet
- bei einachsigen Kristallen ist die optische Achse mit einer Hauptachse identisch

#### b) Normalenfläche

- Richtung festlegen  $\leadsto$  Schnittpunkte mit Normalenfläche
- $\leadsto$  Abstände vom Zentrum ergeben  $n_a, n_b$
- optische Achse verbindet die Schnittpunkte der Blätter

#### Felder:

$$D_i = -\frac{\varepsilon_0 \varepsilon_i k_i}{\left(\frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_i - k^2\right)} \sum_j k_j E_j$$

$$D_1 : D_2 : D_3 = -\frac{\varepsilon_1 k_1}{\frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_1 - k^2} : \frac{\varepsilon_2 k_2}{\frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_2 - k^2} : \frac{\varepsilon_3 k_3}{\frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_3 - k^2}$$

Verhältnis reell  $\longrightarrow$  Phasendifferenz 0  $\longrightarrow$  lineare Polarisation

**also:**

Im anisotropen Medium existieren zwei Normalmoden - linear polarisierte ebenen monochromatische Wellen- mit zwei unterschiedlichen Phasengeschwindigkeiten  $\left(\frac{c}{n_a}, \frac{c}{n_b}\right)$  und zwei senkrecht zueinander stehenden Polarisationsrichtungen bei beliebig vorzugebender Richtung

### 6.4.3 Einachsige Kristalle

$\longrightarrow$  trigonal, tetragonal, hexagonal

Indexellipsoid ist rotationssymmetrisch um  $z$ -Achse

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_{\text{or}} = n_{\text{or}}^2, \quad \varepsilon_3 = \varepsilon_e = n_e^2$$

$\longrightarrow$  ordentlicher und außerordentlicher Brechungsindex

#### 2 Normalmoden:

- a) ordentliche Welle  $\longrightarrow n$  unabhängig von Richtung
- b) außerordentliche Welle  $\longrightarrow n$  abhängig von Richtung

Die  $z$ -Achse ist die optische Achse mit  $n_a = n_b$ .

Die *ordentliche* Welle ist senkrecht zur Rotationsachse und zum  $\mathbf{k}$ -Vektor polarisiert.  
Die *außerordentliche* Welle ist senkrecht zum  $\mathbf{k}$ -Vektor polarisiert und liegt in der Ebene  $\mathbf{k}$ -Vektor Rotationsachse.

#### Dispersionsrelation:

$$u_1^2 (n^2 - \varepsilon_{\text{or}}) (n^2 - \varepsilon_e) n^2 + u_2^2 (n^2 - \varepsilon_{\text{or}}) (n^2 - \varepsilon_e) n^2 + \\ + u_3^2 (n^2 - \varepsilon_{\text{or}})^2 n^2 = (n^2 - \varepsilon_{\text{or}})^2 (n^2 - \varepsilon_e)$$

Division durch  $n^2$  ergibt:

$$(n^2 - \varepsilon_{\text{or}}) \left[ (u_1^2 + u_2^2) (n^2 - \varepsilon_e) + u_3^2 (n^2 - \varepsilon_{\text{or}}) - \frac{(n^2 - \varepsilon_e) (n^2 - \varepsilon_{\text{or}})}{n^2} \right] = 0$$

1. Wellenzahl der *ordentlichen Welle* unabhängig von Richtung

$$n_a^2 = \varepsilon_{\text{or}} \longrightarrow k_a^2 = \frac{\omega^2}{c^2} n_a^2 = k_0^2 \varepsilon_{\text{or}}$$

2. Wellenzahl der *außerordentlichen Welle* abhängig von Richtung

$$(u_1^2 + u_2^2) (n^2 - \varepsilon_e) + u_3^2 (n^2 - \varepsilon_{\text{or}}) = \frac{(n^2 - \varepsilon_e) (n^2 - \varepsilon_{\text{or}})}{n^2}$$

$$n^2 (u_1^2 + u_2^2 + u_3^2) - n^2 - (u_1^2 + u_2^2) \varepsilon_e - u_3^2 \varepsilon_{\text{or}} + \varepsilon_e + \varepsilon_{\text{or}} - \frac{\varepsilon_e \varepsilon_{\text{or}}}{n^2} = 0$$

$$\varepsilon_e (1 - u_1^2 - u_2^2) + \varepsilon_{\text{or}} (1 - u_3^2) - \frac{\varepsilon_e \varepsilon_{\text{or}}}{n^2} = 0$$

$$\frac{(u_1^2 + u_2^2)}{\varepsilon_e(\omega)} + \frac{u_3^2}{\varepsilon_{\text{or}}(\omega)} - \frac{1}{n^2(\omega)} = 0$$

$\longrightarrow$  Vorgabe von  $u_i \longrightarrow n_a, n_b$

Man beachte, daß  $\varepsilon_e, \varepsilon_{\text{or}}$  in dispersiven Medien Funktionen der Frequenz sind.

### Geometrische Darstellung als Normalenflächen

da

$$k_i^2 = k_0^2 n^2 u_i^2$$

#### 1. ordentlich

$$k_a^2 = k_1^2 + k_2^2 = k_0^2 \varepsilon_{\text{or}} = k_0^2 n_{\text{or}}^2$$

#### 2. außerordentlich

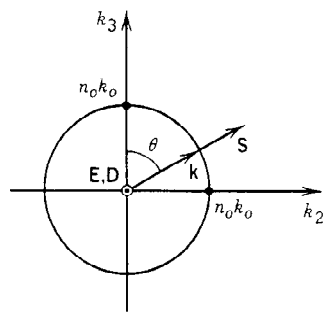
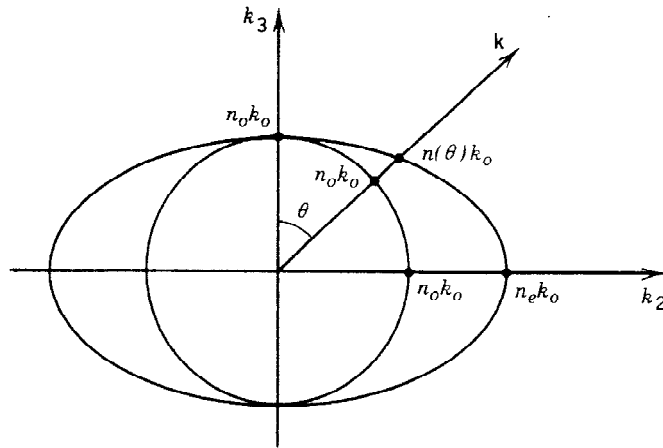
$$\frac{1}{\varepsilon_e} \frac{(k_1^2 + k_2^2)}{k_0^2} + \frac{1}{\varepsilon_{\text{or}}} \frac{k_3^2}{k_0^2} = 1$$

$$\frac{1}{n_e^2} \frac{(k_1^2 + k_2^2)}{k_0^2} + \frac{1}{n_{\text{or}}^2} \frac{k_3^2}{k_0^2} = 1$$

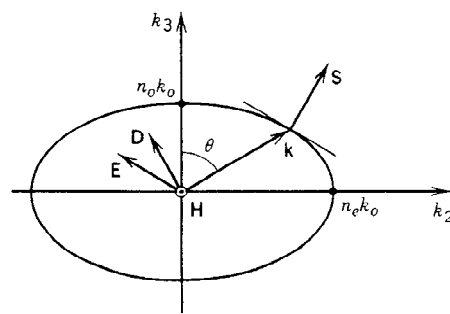
$\longrightarrow$  Rotationsellipsoid, deshalb o.B.d.A. Ausbreitung in  $y-z$ -Ebene  $\longrightarrow u_1 = 0$ . Man beachte, daß sich die Größe der Ellipse mit der Frequenz ändert.

### Einfache Berechnung von $n^2(\Theta)$

$$\frac{u_2^2}{\varepsilon_e} + \frac{u_3^2}{\varepsilon_{\text{or}}} = \frac{1}{n^2}$$



(a) Ordinary



(b) Extraordinary

$$u_2 = \sin \Theta, \quad u_2 = \cos \Theta$$

$$\frac{\sin^2 \Theta}{\varepsilon_e(\omega)} + \frac{\cos^2 \Theta}{\varepsilon_{or}(\omega)} = \frac{1}{n^2(\omega, \Theta)}$$

$$n^2(\omega, \Theta) = \frac{\varepsilon_e(\omega) \varepsilon_{or}(\omega)}{\varepsilon_{or}(\omega) \sin^2 \Theta + \varepsilon_e(\omega) \cos^2 \Theta}$$

### Klassifizierungen:

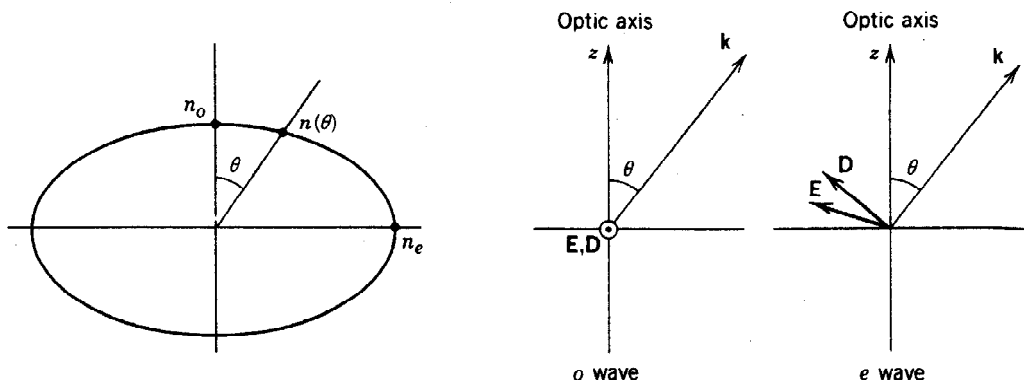
$\varepsilon_{or} > \varepsilon_e \longrightarrow$  negativ einachsrig

$\varepsilon_{or} < \varepsilon_e \longrightarrow$  positiv einachsrig

### Polarisation der Felder:

- 1) ordentlich: senkrecht zu Ebenen optischer Achse -  $\mathbf{k}$  ,  
 $\mathbf{D} \perp \mathbf{k}, \mathbf{D} \parallel \mathbf{E}$





2) außerordentlich: senkrecht zu  $\mathbf{k}$  und in Ebene optische Achse -  $\mathbf{k}$

$$\mathbf{D} \perp \mathbf{k}, \mathbf{D} \nparallel \mathbf{E}, \text{ da } D_1 = \varepsilon_0 \varepsilon_{\text{or}} E_1, \quad D_3 = \varepsilon_0 \varepsilon_e E_3$$

## Bemerkungen zur Ausbreitung von Gaußschen Strahlen

Zusammenhang zwischen Dispersionsrelation  $\longleftrightarrow$  Propagationsgleichung:

Das Ziel besteht darin, zu zeigen, daß für die außerordentliche Welle die Richtung des  $\mathbf{k}$ -Vektors nicht mit der Ausbreitungsrichtung eines Gauß-Bündels übereinstimmt. Weiterhin wollen wir zeigen, wie diese Ausbreitungsrichtung mit der Normalenfläche in Zusammenhang steht.

Wir erinnern uns an die skalare Helmholtzgleichung für eine Fourierkomponente

$$\Delta u(\mathbf{r}, \omega) + \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon(\omega) u(\mathbf{r}, \omega) = 0$$

im isotropen Medium. Im Ortsfrequenzraum folgt daraus

$$\left[ -(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) + \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon(\omega) \right] U(\alpha, \beta, \gamma; \omega) = 0.$$

Man kann die Dispersionsrelation der Normalmoden der Helmholtzgleichung ablesen:

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon(\omega).$$

Es gilt auch der Umkehrschluß: Kennt man die Dispersionsrelation, findet man die zugehörige Differentialgleichung. Im einachsigen Kristall haben wir die Dispersionsrelation

$$\frac{u_1^2}{\varepsilon_e} + \frac{u_2^2}{\varepsilon_e} + \frac{u_3^2}{\varepsilon_{\text{or}}} = \frac{1}{n^2}$$

$$\frac{k_x^2}{n_e^2} + \frac{k_y^2}{n_e^2} + \frac{k_z^2}{n_{\text{or}}^2} = \frac{\omega^2}{c^2}$$

Daraus folgt sofort eine modifizierte Helmholtzgleichung im anisotropen Medium

$$\left( \frac{1}{\varepsilon_e} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{\varepsilon_e} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{1}{\varepsilon_{or}} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) u(\mathbf{r}, \omega) + \frac{\omega^2}{c^2} u(\mathbf{r}, \omega) = 0$$

Mit den Transformationen

$$\xi = n_e x, \quad \eta = n_e y, \quad \varsigma = n_{or} z$$

erhalten wir eine kugelsymmetrische Helmholtzgleichung für die Ausbreitung im freien Raum

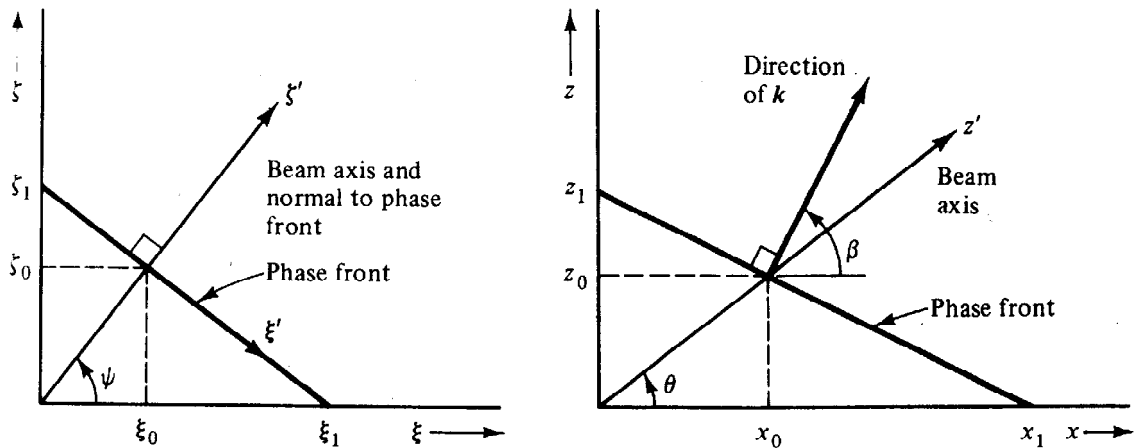
$$\left( \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2}{\partial \varsigma^2} \right) u(\xi, \eta, \varsigma, \omega) + \frac{\omega^2}{c^2} u(\xi, \eta, \varsigma, \omega) = 0$$

Für paraxiale Bedingungen ist die Lösung für einen Gaußschen Strahl bei  $z = 0$

$$u \sim \frac{1}{\varsigma' - iz_0} \exp \left[ i \frac{\omega}{2c} \frac{\xi'^2 + \eta^2}{\varsigma' - iz_0} \right],$$

wobei  $\xi'$  und  $\varsigma'$  darauf hinweisen, daß sich der Strahl in einer beliebigen Richtung in der  $\xi' - \varsigma'$ -Ebene ausbreiten kann. Im Prinzip ist damit das Problem der Ausbreitung eines Gauß-Strahl gelöst, wenn man nur die entsprechende Rücktransformation ausführt. Auf die anfangs gestellten Fragen haben wir jedoch noch keine Antwort erhalten.

Zu diesem Zwecke bedienen wir uns einfacher geometrischer Überlegungen. In den symmetrischen Koordinaten stimmen die Richtungen der Phasenfrontnormalen (Richtung des  $\mathbf{k}$ -Vektors und des Strahls überein. Man nutzt nun die Transformationsgleichungen, um die Verhältnisse im 'echten' Raum ( $x, y, z$ ) darzustellen.



Man wähle einen Punkt  $(x_0, z_0)$  auf der Achse des Gaußschen Strahles  $\rightarrow$  entspricht einem Punkt  $(\xi_0, \varsigma_0)$  im transformierten System. Es gilt dann

$$\tan \Theta = \frac{z_0}{x_0} = \frac{n_e}{n_{or}} \frac{\varsigma_0}{\xi_0} = \frac{n_e}{n_{or}} \tan \psi,$$

wobei  $\Theta$  die Richtung der Achse des Gauß-Strahls angibt. Nun betrachtet man die zwei Schnittpunkte mit den Achsen  $\varsigma = \varsigma_1, \xi = \xi_1$ . Im realen System hat man dann

$$\frac{x_1}{z_1} = \frac{\xi_1}{\varsigma_1} \frac{n_{\text{or}}}{n_e} \stackrel{!}{=} \tan \beta,$$

wobei  $\beta$  den Winkel der Normalen zur Phasenfläche bezeichnet (siehe Abbildung) . Im transformierten System gilt

$$\frac{\xi_1}{\varsigma_1} = \frac{\varsigma_0}{\xi_0}.$$

Damit erhalten wir

$$\tan \beta = \frac{\xi_1}{\varsigma_1} \frac{n_{\text{or}}}{n_e} = \frac{\varsigma_0}{\xi_0} \frac{n_{\text{or}}}{n_e} = \frac{z_0}{x_0} \frac{n_{\text{or}}^2}{n_e^2} = \tan \Theta \frac{n_{\text{or}}^2}{n_e^2},$$

$$\frac{\tan \beta}{\tan \Theta} = \frac{n_{\text{or}}^2}{n_e^2}$$

d.h. Richtung des  $\mathbf{k}$ -Vektors und Strahlrichtung stimmen nicht überein (walk off).

Jetzt bleibt noch, eine Beziehung der Strahlrichtung zur Normalenfläche herzustellen. Wir gehen zurück zur Dispersionsrelation für die außerordentliche Welle (Ausnutzen der Rotationssymmetrie und Weglassen des  $k_y$ -Terms)

$$\frac{k_x^2}{n_e^2} + \frac{k_z^2}{n_{\text{or}}^2} = \frac{\omega^2}{c^2},$$

die Normalenfläche ist eine Ellipse, deren Tangente gegeben ist durch

$$\frac{dk_z}{dk_x} = -\frac{k_x}{k_z} \frac{n_{\text{or}}^2}{n_e^2},$$

was zur Normalen

$$-\frac{dk_x}{dk_z} = \frac{k_z}{k_x} \frac{n_e^2}{n_{\text{or}}^2} = \tan \beta \frac{n_e^2}{n_{\text{or}}^2} = \tan \Theta,$$

führt, d.h., die Richtung des Gaußschen Strahles steht senkrecht auf der Normalenfläche. Diese Richtung ist gleichzeitig die Richtung des Poyntingvektors, da die Gruppengeschwindigkeit gegeben ist mit

$$\mathbf{v}_g = \nabla_{\mathbf{k}} \omega$$

und damit ebenfalls senkrecht auf der Fläche mit konstantem  $\omega$  (Normalenfläche) steht..

- Die Strahlachse eines Gauß-Strahl stimmt mit der Richtung der Gruppengeschwindigkeit und des Poyntingvektors überein, i.e. senkrecht zu Normalenfläche.
- Damit stimmt bei außerordentlichen Strahlen die Richtung des  $\mathbf{k}$ - Vektors nicht mit der Richtung der Strahlausbreitung überein.
- Damit stimmen auch die Richtungen von ordentlichen und außerordentlichen Strahlen nicht überein  $\longrightarrow$  walk off.
- Übereinstimmung besteht nur bei Ausbreitung in Richtung der Hauptachsen.

# Kapitel 7

## Optische Felder in isotropen, dispersiven und stückweise homogenen Medien

### 7.1 Grundsätzliches

#### 7.1.1 Definition des Problems

→ bisher keine echten Grenzflächeneffekte (nur Feld vorgegeben auf Grenzfläche), jetzt werden Reflexion- und Transmissionseigenschaften diskutiert.

##### Physikalische Systeme

- Grenzflächen
- Schichten
- Schichtsysteme

##### Geometrien:

- Wechselwirkung von Normalmoden (ebene, monochromatische Wellen) mit beliebigen Vielschichtsystemen → Interferometer, dielektrische Spiegel etc. → Überlagerung der Normalmoden (Wechselwirkung von raum-zeitlichen begrenzten Feldern mit diesen Geometrien)
- 'Einsperren' dieser Normalmoden in beliebige Wellenleiter → neue Normalmoden → geführte Wellen → beugungsfrei → Überlagerung der neuen Normalmoden (Pulspropagation in Wellenleitern) → Wellenleiter- oder integrierte Optik, Spektroskopie an Oberflächen

##### Vorgehen:

- Maxwellsche Übergangsbedingungen an Grenzflächen
- Feldberechnung im inhomogenen Medium → Matrixmethode
- Reflexions - Transmissionsproblem → Grenzfläche, Schicht, Schichtsystem, Fabry-Perot Interferometer

- Geführte Wellen  $\longrightarrow$  Grenzfläche, Film, Streifen, Faser

## 7.1.2 Grenzflächen und Symmetrien

**bisher:**

Homogenität des Raumes  $\longrightarrow \exp(\mathbf{i}\mathbf{k}\mathbf{r})$

Stationarität  $\longrightarrow \exp(-i\omega t)$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \overline{\mathbf{E}}_{\omega} \exp[\mathbf{i}(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)]$$

**jetzt:**

Grenzfläche in  $(y, z)$  - Ebene, unendlich ausgedehnt

1.  $\mathbf{k} = (k_x, 0, k_z)$  in  $(x, z)$  - Ebene  $\longrightarrow$  Einfallsebene  $\curvearrowright$  Problem hängt nicht von  $y$  - Koordinate ab
2. Homogenität nur noch in  $z$  - Richtung  $\curvearrowright$  zu retten:  $\sim \exp(ik_z z) \curvearrowright k_z$  stetig an Grenzflächen

$$\mathbf{E}(x, z, t) = \overline{\mathbf{E}}_{\omega}(x) \exp[\mathbf{i}(k_z z - \omega t)]$$

3. Polarisation  $\longrightarrow$  Erinnerung an vorn  $\longrightarrow$  Translationsinvariant in eine Richtung  $\longrightarrow \mathbf{E} = \mathbf{E}_{\text{TE}} + \mathbf{E}_{\text{TM}} \curvearrowright$  Gesamtfeld wird zerlegt, unabhängig durchgerechnet und schließlich wieder addiert.

**TE:**

$$\mathbf{E}_{\text{TE}} = \begin{pmatrix} 0 \\ E_y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ E \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{H}_{\text{TE}} = \begin{pmatrix} H_x \\ \\ H_z \end{pmatrix}$$

**TM:**

$$\mathbf{E}_{\text{TM}} = \begin{pmatrix} E_x \\ \\ E_z \end{pmatrix}, \quad \mathbf{H}_{\text{TM}} = \begin{pmatrix} 0 \\ H_y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ H \\ 0 \end{pmatrix}$$

4. Transversalität  $\longrightarrow \mathbf{k}\mathbf{E}_{\text{TE}} = \mathbf{k}\mathbf{E}_{\text{TM}} = 0$

5. Dispersionsrelation in Schicht 'i':

$$\longrightarrow k_i^2 = k_{ix}^2 + k_z^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_i(\omega)$$

$$\curvearrowright k_{ix}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_i(\omega) - k_z^2$$

### 7.1.3 Die Übergangsbedingungen

#### a) Felder

Maxwell  $\longrightarrow \mathbf{E}_t, \mathbf{H}_t$  gehen stetig durch Grenzflächen

TE:  $E$  und  $H_z$  stetig

TM:  $E_z$  und  $H$  stetig

#### a) Wellenzahlvektoren

Homogenität in  $z$ -Richtung  $\longrightarrow$  Phase  $\exp(ik_z z) \longrightarrow k_z$  stetig

## 7.2 Das Feld im Schichtsystem $\longrightarrow$ die Matrixmethode

### 7.2.1 Das Feld in einer homogenen Schicht

Die Schicht sei durch eine dielektrische Funktion  $\varepsilon_f(\omega)$  charakterisiert und weise die Dicke  $d$  auf. Das Ziel besteht darin, bei Vorgabe der Felder bei  $x = 0$  die Felder bei  $x = d$  zu berechnen. Dabei beschränkt man sich auf die Tangentialkomponenten, da diese stetig übergehen, und berechnet die Normalkomponenten später. Wir zeigen das im Fourierraum für eine Fourierkomponente  $\overline{\mathbf{E}}(x, z; \omega), \overline{\mathbf{H}}(x, z; \omega)$ .

#### TE-Polarisation

Feldgleichung ( $\omega$  und  $-$  weglassen, aber nicht vergessen):

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_f(\omega) \right) \mathbf{E}(x, z) = 0$$

Mit dem Ansatz:

$$\mathbf{E}(x, z) = \mathbf{E}(x) \exp(ik_z z), \quad \mathbf{H}(x, z) = \mathbf{H}(x) \exp(ik_z z)$$

folgen aus

$$\left( \frac{d^2}{dx^2} + \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_f(\omega) - k_z^2 \right) E(x) = 0$$

und

$$\mathbf{H}_{\text{TE}}(x, z) = -\frac{i}{\omega \mu_0} \text{rot } \mathbf{E}(\mathbf{x}, \mathbf{z})$$

die beiden Gleichungen für die tangentialen Felder  $E_y = E, H_z$

$$\left( \frac{d^2}{dx^2} + k_{\text{fx}}^2 \right) E(x) = 0$$

$$H_z(x) = -\frac{i}{\omega \mu_0} \frac{\partial}{\partial x} E(x).$$

### TM-Polarisation

In analoger Weise folgt für die tangentialen Komponenten  $H_y = H, E_z$

$$\left( \frac{d^2}{dx^2} + k_{\text{fx}}^2 \right) H(x) = 0$$

$$E_z(x) = \frac{i}{\omega \varepsilon_0 \varepsilon} \frac{\partial}{\partial x} H(x).$$

Damit besteht die Aufgabe darin, jeweils die Felder  $(E, H)$  und Ableitungen  $(\frac{\partial}{\partial x} E(x), \frac{\partial}{\partial x} H(x))$  bei  $x = d$  aus ihrer Kenntnis bei  $x = 0$  zu bestimmen. Am Ende der Rechnung (alle Schichten) folgt aus  $H \longrightarrow \mathbf{E}_{\text{TM}}$  und damit  $\mathbf{E} = \mathbf{E}_{\text{TE}} + \mathbf{E}_{\text{TM}}$ .

Aufgrund der identischen Struktur obiger Gleichungen können wir beide Polarisationsrichtungen simultan behandeln, indem wir setzen

$$E, H \longrightarrow F$$

$$i\omega\mu_0 H_z, -i\omega\varepsilon_0 E_z(x) \longrightarrow G$$

Damit ergibt sich

$$\left( \frac{d^2}{dx^2} + k_{\text{fx}}^2 \right) F(x) = 0$$

$$G(x) = \alpha_f \frac{\partial}{\partial x} F(x).$$

mit

$$\alpha_{\text{fTE}} = 1, \quad \alpha_{\text{fTM}} = \frac{1}{\varepsilon_f}.$$

Die allgemeine Lösung ergibt sich zu

$$F(x) = C_1 \exp(i k_{\text{fx}} x) + C_2 \exp(-i k_{\text{fx}} x)$$

$$G(x) = \alpha_f \frac{\partial}{\partial x} F(x) = i k_{\text{fx}} \alpha_f [C_1 \exp(i k_{\text{fx}} x) - C_2 \exp(-i k_{\text{fx}} x)].$$

$F(0)$  und  $G(0)$  werden als bekannt vorausgesetzt. Damit können die unbekannten Koeffizienten  $C_1$  und  $C_2$  bestimmt werden. Aus

$$F(0) = C_1 + C_2$$

$$G(0) = i k_{\text{fx}} \alpha_f (C_1 - C_2)$$

folgt

$$C_1 = \frac{1}{2} \left[ F(0) - \frac{i}{k_{\text{fx}} \alpha_{\text{f}}} G(0) \right]$$

$$C_2 = \frac{1}{2} \left[ F(0) + \frac{i}{k_{\text{fx}} \alpha_{\text{f}}} G(0) \right].$$

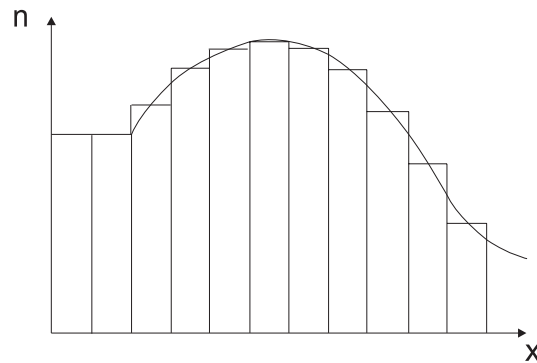
Damit ergibt sich die gesuchte Lösung für  $0 \leq x \leq d$  zu

$$F(x) = \cos(k_{\text{fx}} x) F(0) + \frac{1}{k_{\text{fx}} \alpha_{\text{f}}} \sin(k_{\text{fx}} x) G(0)$$

$$G(x) = -k_{\text{fx}} \alpha_{\text{f}} \sin(k_{\text{fx}} x) F(0) + \cos(k_{\text{fx}} x) G(0)$$

## 7.2.2 Das Feld im Schichtsystem

Dielektrische Schichtsysteme sind häufig benutzte optische Bauelemente (Braggspiegel, gechirpte Spiegel zur Dispersionskompensation, Interferometer, Vielschichtwellenleiter, Braggwellenleiter). Darüberhinaus kann man jede beliebige inhomogene Brechzahlverteilung durch eine Diskretisierung in ein Schichtsystem beliebig genau annähern (wichtig für sog. 'GRIN' - Graded-Index-Wellenleiter).



Unser Ziel besteht darin, die Ergebnisse für eine Schicht auf einen Schichtstapel zu übertragen. Es wirkt sich nun vorteilhaft aus, daß wir für unsere Rechnungen die Feldkomponenten nutzen, die stetig durch die Grenzflächen gehen. Wir können das Feld in der ersten Schicht schreiben als

$$\begin{Bmatrix} F(x) \\ G(x) \end{Bmatrix} = \hat{\mathbf{m}} \begin{Bmatrix} F(0) \\ G(0) \end{Bmatrix},$$

d.h. eine  $2 \times 2$ -Matrix beschreibt die Ausbreitung der Felder



$$\widehat{\mathbf{m}}(x) = \begin{Bmatrix} \cos(k_{\text{fx}}x) & \frac{1}{k_{\text{fx}}\alpha_f} \sin(k_{\text{fx}}x) \\ -k_{\text{fx}}\alpha_f \sin(k_{\text{fx}}x) & \cos(k_{\text{fx}}x) \end{Bmatrix}.$$

Speziell gilt am Ende der Schicht  $x = d$ . Für absorptionsfreie Medien gilt weiterhin  $\|\widehat{\mathbf{m}}(x)\| = 1$ , d.h. die Matrix ist unimodular. Für ein Schichtsystem, charakterisiert durch  $\varepsilon_i, d_i$ , gilt:

a) zwei Schichten:

$$\begin{pmatrix} F \\ G \end{pmatrix}_{d_1+d_2} = \widehat{\mathbf{m}}_2(d_2) \begin{pmatrix} F \\ G \end{pmatrix}_{d_1} = \widehat{\mathbf{m}}_2(d_2) \widehat{\mathbf{m}}_1(d_1) \begin{pmatrix} F \\ G \end{pmatrix}_0$$

b) N Schichten:

$$\begin{pmatrix} F \\ G \end{pmatrix}_{d_1+d_2+\dots+d_N=D} = \prod_{i=1}^N \widehat{\mathbf{m}}_i(d_i) \begin{pmatrix} F \\ G \end{pmatrix}_0 = \widehat{\mathbf{M}} \begin{pmatrix} F \\ G \end{pmatrix}_0 \quad (7.1)$$

$$\widehat{\mathbf{M}} = \prod_{i=1}^N \widehat{\mathbf{m}}_i(d_i)$$

Alle Matrizen  $\widehat{\mathbf{m}}_i$  haben die gleiche Gestalt und unterscheiden sich nur durch unterschiedliche  $k_{\text{fx}}, \alpha_f^i, d_i$ .

Das Verfahren arbeitet folgendermaßen:

- Man gebe sich  $F(0)$  und  $G(0)$  vor ( $E, H_z$  für TE,  $E_z, H$  für TM)
- Die Vorgabe von  $k_z, \alpha_f^i, d_i$  erlaubt die Berechnung der Matrixelemente.
- Durch Multiplikation der Matrizen ergibt sich die Gesamtmatrix.
- Damit kann man die Felder  $F(D)$  und  $G(D)$  berechnen.

## 7.3 Reflexions - Transmissionsproblem an Schichtsystemen

### 7.3.1 Allgemeines Schichtsystem

#### 7.3.1.1 Reflexions- und Transmissionskoeffizienten - die verallgemeinerten Fresnelschen Formeln

Das Ziel besteht darin, reflektiertes und transmittiertes Gesamtfeld in Abhängigkeit vom Einfallswinkel und Frequenz des einfallenden Feldes zu bestimmen. Bisher haben wir nur bestimmte Feldkomponenten von der ersten bis zur letzten Schicht durchgerechnet. Diese Komponenten müssen nun mit den zugänglichen Feldern verknüpft werden.

Wir definieren am Anfang die wesentlichen Größen:

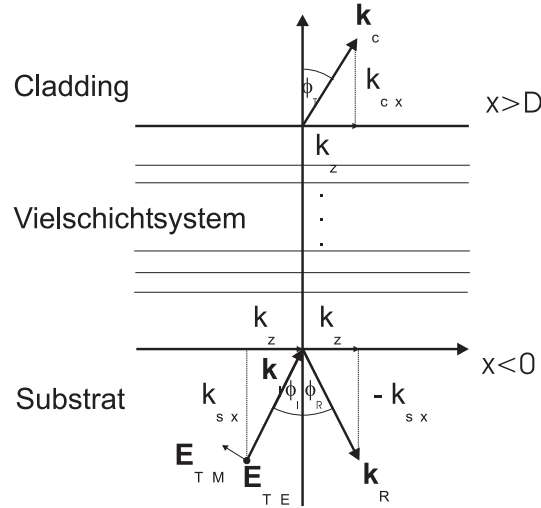
Wellenzahlvektor des einfallenden ( $\mathbf{k}_I$ ), reflektierten ( $\mathbf{k}_R$ ) und transmittierten ( $\mathbf{k}_T$ ) Feldes:

$$\mathbf{k}_I = \begin{pmatrix} k_{\text{sx}} \\ 0 \\ k_z \end{pmatrix}, \quad \mathbf{k}_R = \begin{pmatrix} -k_{\text{sx}} \\ 0 \\ k_z \end{pmatrix}, \quad \mathbf{k}_T = \begin{pmatrix} k_{\text{cx}} \\ 0 \\ k_z \end{pmatrix}$$

mit

$$k_{sx} = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_s(\omega) - k_z^2} = \sqrt{k_s^2(\omega) - k_z^2}, \quad k_{cx} = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_c(\omega) - k_z^2} = \sqrt{k_c^2(\omega) - k_z^2},$$

wobei  $\varepsilon_s(\omega)$  und  $\varepsilon_c(\omega)$  die dielektrischen Funktionen des Substrats und Claddings sind.



Bemerkung zum Reflexions- und Brechungsgesetz:

$k_z$  ist eine Erhaltungsgröße  $\leadsto$

1.  $k_s \sin \varphi_I = k_s \sin \varphi_R \leadsto \varphi_I = \varphi_R$  (Reflexionsgesetz)
2.  $k_s \sin \varphi_I = k_c \sin \varphi_T \leadsto n_s \sin \varphi_I = n_c \sin \varphi_T$  (Brechungsgesetz)

#### A) Feld im Substrat

mit den komplexen Feldamplituden  $F_I, F_R$ .

$$F_s(x, z) = \exp(ik_z z) [F_I \exp(ik_{sx}x) + F_R \exp(-ik_{sx}x)] \quad (7.2)$$

$$G_s(x, z) = i\alpha_s k_{sx} \exp(ik_z z) [F_I \exp(ik_{sx}x) - F_R \exp(-ik_{sx}x)]$$

#### B) Feld im Schichtsystem

$\longrightarrow$  bekannt durch Matrixmethode

$$F_f(x, z) = \exp(ik_z z) F(x) \quad (7.3)$$

$$G_s(x, z) = \exp(ik_z z) G(x)$$

und

$$\begin{pmatrix} F \\ G \end{pmatrix}_x = \widehat{\mathbf{M}} \begin{pmatrix} F \\ G \end{pmatrix}_0$$

#### C) Feld im Cladding

$$F_c(x, z) = \exp(ik_z z) F_T \exp[ik_{cx}(x - D)] \quad (7.4)$$

$$G_c(x, z) = i\alpha_c k_{cx} \exp(ik_z z) F_T \exp[ik_{cx}(x - D)].$$

Das Ziel besteht nun darin,  $F_R$  und  $F_T$  in Abhängigkeit von  $k_z(\sim \sin \varphi_I), \varepsilon_i, d_i$  und  $N$  zu berechnen. Dazu nutzen wir Gl.(7.3) und die Tatsache, daß  $F$  und  $G$  stetig an den Grenzflächen sind. Es gilt

$$\begin{pmatrix} F \\ G \end{pmatrix}_D = \widehat{\mathbf{M}} \begin{pmatrix} F \\ G \end{pmatrix}_0.$$

Setzen wir nun auf der linken Seite das Claddingfeld (7.4) bei  $x = D$  und auf der rechten Seite das Substratfeld (7.2) bei  $x = 0$  ein, erhalten wir

$$\begin{pmatrix} F_T \\ i\alpha_c k_{cx} F_T \end{pmatrix} = \begin{Bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{Bmatrix} \begin{pmatrix} F_I + F_R \\ i\alpha_s k_{sx}(F_I - F_R) \end{pmatrix}.$$

Die Lösung des inhomogenen Gleichungssystems ergibt

$$F_R = \underbrace{\frac{(\alpha_s k_{sx} M_{22} - \alpha_c k_{cx} M_{11}) - i(M_{21} + \alpha_s k_{sx} \alpha_c k_{cx} M_{12})}{(\alpha_s k_{sx} M_{22} + \alpha_c k_{cx} M_{11}) + i(M_{21} - \alpha_s k_{sx} \alpha_c k_{cx} M_{12})}}_N F_I \quad (7.5)$$

$$F_T = \frac{2\alpha_s k_{sx}(M_{11} M_{22} - M_{12} M_{21})}{N} F_I = \frac{2\alpha_s k_{sx}}{N} F_I. \quad (7.6)$$

Wir spezifizieren die Resultate (7.5) und (7.6) auf die beiden Polarisationsrichtungen:

#### A) TE - Polarisation

Es gilt

$$F = E = E_y, \quad \alpha_{TE} = 1$$

Damit erhalten wir für das reflektierte Feld

$$E_R^{TE} = R_{TE} E_I^{TE} \quad (7.7)$$

$$R_{TE} = \frac{(k_{sx} M_{22} - k_{cx} M_{11}) - i(M_{21} + k_{sx} k_{cx} M_{12})}{\underbrace{(k_{sx} M_{22} + k_{cx} M_{11}) + i(M_{21} - k_{sx} k_{cx} M_{12})}_N}$$

$$N_{TE}$$

und das transmittierte Feld

$$E_{\text{T}}^{\text{TE}} = T_{\text{TE}} E_{\text{I}}^{\text{TE}} \quad (7.8)$$

$$T_{\text{TE}} = \frac{2k_{\text{sx}}}{N_{\text{TE}}},$$

wobei  $R_{\text{TE}}$  und  $T_{\text{TE}}$  die komplexen Reflexions- und Transmissionskoeffizienten sind (beeinflussen Amplitude und Phase des einfallenden Feldes). Man beachte, daß die Matrixelemente von der Polarisationsrichtung abhängig sind, d.h.  $M_{ij}^{\text{TE}} \neq M_{ij}^{\text{TM}}$ .

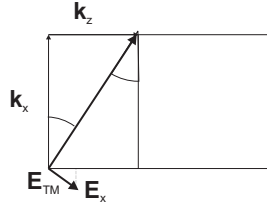
## B) TM - Polarisation

Es gilt

$$F = H = H_y, \quad \alpha_{\text{TM}} = \frac{1}{\varepsilon}.$$

Die einfache Durchführung der Rechnung wie bei der TE-Polarisation ist hier nicht korrekt, da wir nicht das Verhältnis der  $H$ -Felder (z.B.  $H_{\text{R}}/H_{\text{I}}$ ) sondern das Verhältnis der elektrischen Felder (z.B.  $E_{\text{R}}^{\text{TM}}/E_{\text{I}}^{\text{TM}}$ ) benötigen. Wir müssen deshalb die  $H$ -Felder in die  $E^{\text{TM}}$ -Felder umrechnen.

Nebenrechnung:



$$\frac{E_x}{E^{\text{TM}}} = -\sin \varphi = -\frac{k_z}{k}$$

$$\hookrightarrow E^{\text{TM}} = -\frac{k}{k_z} E_x,$$

wegen

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{\omega \varepsilon_0 \varepsilon} (\mathbf{k} \times \mathbf{H})$$

folgt

$$E_x = \frac{1}{\omega \varepsilon_0 \varepsilon} k_z H_y$$

und schließlich

$$E^{\text{TM}} = -\frac{k}{\omega \varepsilon_0 \varepsilon} H_y = -\frac{1}{\omega c \sqrt{\varepsilon}} H_y$$

und damit

$$\frac{E_{\text{R,T}}^{\text{TM}}}{E_{\text{I}}^{\text{TM}}} = \sqrt{\frac{\varepsilon_{\text{s}}}{\varepsilon_{\text{s,c}}}} \frac{H_{\text{R,T}}}{H_{\text{I}}},$$

das heißt, der Faktor  $\sqrt{\varepsilon_s/\varepsilon_c}$  spielt nur bei der Berechnung der Transmissionskoeffizienten eine Rolle. Wenn wir das beachten erhalten wir aus Gl. (7.5), indem wir Zähler und Nenner mit  $\varepsilon_s\varepsilon_c$  multiplizieren.

$$E_R^{\text{TM}} = R_{\text{TM}} E_I^{\text{TM}} \quad (7.9)$$

$$R_{\text{TM}} = \frac{(\varepsilon_c k_{\text{sx}} M_{22} - \varepsilon_s k_{\text{cx}} M_{11}) - i(\varepsilon_s \varepsilon_c M_{21} + k_{\text{sx}} k_{\text{cx}} M_{12})}{\underbrace{(\varepsilon_c k_{\text{sx}} M_{22} + \varepsilon_s k_{\text{cx}} M_{11}) + i(\varepsilon_s \varepsilon_c M_{21} - k_{\text{sx}} k_{\text{cx}} M_{12})}_{N_{\text{TM}}}} F_I$$

$$N_{\text{TM}}$$

$$E_T^{\text{TM}} = T_{\text{TM}} E_I^{\text{TM}} \quad (7.10)$$

$$T_{\text{TM}} = \frac{2\sqrt{\varepsilon_s \varepsilon_c} k_{\text{sx}}}{N_{\text{TM}}}.$$

Damit sind die komplexen Reflexions- und Transmissionskoeffizienten ( $R, T = |R|, |T| \exp i\varphi$ ) für beide Polarisationsrichtungen bekannt. Die Amplituden- und Phasenänderung ist i.a. unterschiedlich und abhängig von  $\sin \varphi_i, \varepsilon_i(\omega), d_i$  und  $N$ . Dieses Ergebnis findet Anwendung beim Verfahren der *Ellipsometrie*. Ist das einfallende Licht linear polarisiert (z.B.  $45^\circ \rightarrow |E_I^{\text{TM}}| = |E_I^{\text{TE}}|, \varphi_{\text{ITE}} = \varphi_{\text{ITM}}$ ), wird das reflektierte oder transmittierte Feld i.a. elliptisch polarisiert sein. Aus mehreren Messungen ermittelt man dann  $\varepsilon_i(\omega), d_i$ . Die Formeln (7.7) -(7.10) stellen die verallgemeinerten *Fresnelschen Formeln* für ein beliebiges dielektrisches Vielschichtsystem dar.

### 7.3.1.2 Bemerkungen zum Reflexions-Transmissionsverhalten von Impulsen mit endlicher Breite

Die für eine Normalmode geltenden Formeln (7.7) -(7.10) können auf den wichtigen Fall, daß das einfallende Feld zeitlich und/oder räumlich begrenzt ist, erweitert werden, indem wir unsere Ergebnisse aus Kapitel 2 nutzen. Wir haben jedoch zu beachten, daß die karthesischen Koordinaten  $x \longleftrightarrow z$  vertauscht worden sind. Um Konfusionen zu vermeiden, ersetzen wir die Komponenten des  $\mathbf{k}$  - Vektors wieder durch  $(\alpha, \beta, \gamma)$ .

Hier gilt nun  $k_z \longleftrightarrow \alpha, k_y \longleftrightarrow \beta, k_{\text{s,c,fx}} \longleftrightarrow \gamma_{\text{s,c,f}}$ .

Der Einfachheit halber nehmen wir an, daß die Haupteinfallrichtung senkrecht zum Schichtsystem orientiert ist ( $\varphi_i = 0$ ). Damit erhalten wir identische Ergebnisse für die Reflektions- und Transmissionskoeffizienten in TE- und TM-Polarisation. Ist die Begrenzung nur in einer Dimension relevant ( $\infty$ -Ausdehnung in Polarisationsrichtung) ist das Vorgehen exakt. Für eine begrenzte Feldverteilung in beiden Dimensionen hat das Feld eine Komponente in Ausbreitungsrichtung. Für nicht zu enge Bündel (Durchmesseres einige zehn Wellenlängen) kann man diese Komponente vernachlässigen. Wir berechnen das Spektrum des einfallenden Feldes zu

$$E_I^{\text{TE,TM}}(\alpha, \beta, \bar{\omega}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \int \int_{-\infty}^{\infty} dz dy dt E_I^{\text{TE,TM}}(z, y, t) \exp[-i(\alpha z + \beta y - \bar{\omega} t)]$$

Das reflektierte/transmittierte Spektrum berechnet man mit den verallgemeinerten Fresnelschen Formeln (7.7) -(7.10). Es gilt zum Beispiel für die Reflexion des TE-Feldes

$$E_R^{\text{TE}}(\alpha, \beta, \bar{\omega}) = R_{\text{TE}}(\alpha, \beta, \bar{\omega}) E_I^{\text{TE}}(\alpha, \beta, \bar{\omega}) \quad (7.11)$$

$$R_{\text{TE}}(\alpha, \beta, \bar{\omega}) = \frac{[\gamma_s M_{22}(\alpha, \beta, \bar{\omega}) - \gamma_c M_{11}(\alpha, \beta, \bar{\omega})] - i[M_{21}(\alpha, \beta, \bar{\omega}) + \gamma_s \gamma_c M_{12}(\alpha, \beta, \bar{\omega})]}{[\gamma_s M_{22}(\alpha, \beta, \bar{\omega}) + \gamma_c M_{11}(\alpha, \beta, \bar{\omega})] + i[M_{21}(\alpha, \beta, \bar{\omega}) - \gamma_s \gamma_c M_{12}(\alpha, \beta, \bar{\omega})]}$$

mit

$$\gamma_{s,c,f} = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_{s,c,f}(\omega) - \alpha^2 - \beta^2} = \sqrt{k_{s,c,f}^2(\omega) - \alpha^2 - \beta^2}.$$

Für  $\gamma_{s,c,f}$  kann im allgemeinen die Fresnelsche Näherung und die Entwicklung der Dispersionsrelation  $k_{s,c,f}(\omega)$  verwendet werden

$$\gamma_{s,c,f} \approx k_0 + \frac{1}{v_g} \bar{\omega} + \frac{D}{2} \bar{\omega}^2 - \frac{\alpha^2 + \beta^2}{2k_0}.$$

Damit ist das reflektierte Spektrum bekannt. Das Feld ergibt sich dann aus

$$\begin{aligned} E_R^{\text{TE}}(z, y, t) &= \int \int \int_{-\infty}^{\infty} d\alpha d\beta d\bar{\omega} E_R^{\text{TE}}(\alpha, \beta, \bar{\omega}) \exp[i(\alpha z + \beta y - \bar{\omega} t)] \\ &= \int \int \int_{-\infty}^{\infty} d\alpha d\beta d\bar{\omega} R_{\text{TE}}(\alpha, \beta, \bar{\omega}) E_I^{\text{TE}}(\alpha, \beta, \bar{\omega}) \exp[i(\alpha z + \beta y - \bar{\omega} t)]. \end{aligned}$$

Analog verfährt man bei der Berechnung des transmittierten Feldes.

### 7.3.1.3 Reflektivität und Transmissivität

Häufig benötigt man nicht die komplexen Koeffizienten, sondern die Verhältnisse der Energieflüsse (Reflektivität und Transmissivität). Dazu müssen wir den Energiefluß senkrecht zu den Grenzflächen berechnen.

Fluß durch eine Fläche  $x = \text{const.}$  :

$$\langle \mathbf{S} \rangle \mathbf{e}_x = \frac{1}{2} \Re(\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*) \mathbf{e}_x$$

mit

$$\mathbf{H}^* = \frac{1}{\omega \mu_0} (\mathbf{k}^* \times \mathbf{E}^*)$$

folgt

$$\langle \mathbf{S} \rangle_{\mathbf{e}_x} = \frac{1}{2\omega\mu_0} \Re(\mathbf{k}^* \mathbf{e}_x) |\mathbf{E}|^2 = \frac{1}{2\omega\mu_0} \Re(k_x) |\mathbf{E}|^2.$$

In absorptionsfreien Schichten und Substrat bleibt der Energiefluß erhalten. Es gilt im Substrat

$$\langle \mathbf{S} \rangle_s \mathbf{e}_x = \frac{1}{2\omega\mu_0} [k_{sx} |\mathbf{E}_I|^2 - k_{sx} |\mathbf{E}_R|^2]$$

und im Cladding

$$\langle \mathbf{S} \rangle_c \mathbf{e}_x = \frac{1}{2\omega\mu_0} \Re(k_{cx}) |\mathbf{E}_T|^2.$$

$$\langle \mathbf{S} \rangle_s \mathbf{e}_x = \langle \mathbf{S} \rangle_c \mathbf{e}_x \curvearrowright$$

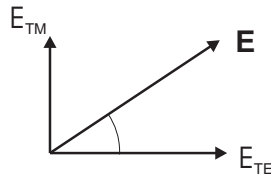
$$|\mathbf{E}_I|^2 = |\mathbf{E}_R|^2 + \frac{\Re(k_{cx})}{k_{sx}} |\mathbf{E}_T|^2.$$

Das Ziel besteht in der Berechnung der globalen Reflektivitäten  $\rho$  und Transmissivitäten  $\tau$  sowie derer für die einzelnen Polarisationsrichtungen. Wir benutzen die Ergebnisse des vorhergehenden Kapitels.

$$\mathbf{E}_R = \mathbf{E}_R^{\text{TE}} + \mathbf{E}_R^{\text{TM}}, \quad \mathbf{E}_T = \mathbf{E}_T^{\text{TE}} + \mathbf{E}_T^{\text{TM}}$$

$$\begin{aligned} |\mathbf{E}_I|^2 &= |E_R^{\text{TE}}|^2 + |E_R^{\text{TM}}|^2 + \frac{\Re(k_{cx})}{k_{sx}} (|E_T^{\text{TE}}|^2 + |E_T^{\text{TM}}|^2) \\ &= \left\{ |R_{\text{TE}}|^2 + \frac{\Re(k_{cx})}{k_{sx}} |T_{\text{TE}}|^2 \right\} |E_I^{\text{TE}}|^2 + \left\{ |R_{\text{TM}}|^2 + \frac{\Re(k_{cx})}{k_{sx}} |T_{\text{TM}}|^2 \right\} |E_I^{\text{TM}}|^2. \end{aligned}$$

Das einfallende Feld wird wie folgt zerlegt



$$E_I^{\text{TE}} = |\mathbf{E}_I| \cos \delta, \quad E_I^{\text{TM}} = |\mathbf{E}_I| \sin \delta.$$

Damit ergibt sich

$$1 = \left\{ |R_{\text{TE}}|^2 + \frac{\Re(k_{\text{cx}})}{k_{\text{sx}}} |T_{\text{TE}}|^2 \right\} \cos^2 \delta + \left\{ |R_{\text{TM}}|^2 + \frac{\Re(k_{\text{cx}})}{k_{\text{sx}}} |T_{\text{TM}}|^2 \right\} \sin^2 \delta$$

$$1 = (|R_{\text{TE}}|^2 \cos^2 \delta + |R_{\text{TM}}|^2 \sin^2 \delta) + \frac{\Re(k_{\text{cx}})}{k_{\text{sx}}} (|T_{\text{TE}}|^2 \cos^2 \delta + |T_{\text{TM}}|^2 \sin^2 \delta)$$

$$1 = \rho + \tau$$

mit

$$\rho = \rho_{\text{TE}} \cos^2 \delta + \rho_{\text{TM}} \sin^2 \delta$$

$$\tau = \tau_{\text{TE}} \cos^2 \delta + \tau_{\text{TM}} \sin^2 \delta$$

und

$$\rho_{\text{TE,TM}} = |R_{\text{TE,TM}}|^2, \quad \tau_{\text{TE,TM}} = \frac{\Re(k_{\text{cx}})}{k_{\text{sx}}} |T_{\text{TE,TM}}|^2.$$

Damit kann man alle relevanten Größen berechnen, wenn die Reflektions- und Transmissionskoeffizienten und der Polarisationszustand am Eingang bekannt sind.

## 7.3.2 Die einfache Grenzfläche

### 7.3.2.1 Fresnelsche Formeln

Wir erinnern uns an die relevanten Wellenzahlvektoren

$$\mathbf{k}_{\text{I}} = \begin{pmatrix} k_{\text{sx}} \\ 0 \\ k_{\text{z}} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{k}_{\text{R}} = \begin{pmatrix} -k_{\text{sx}} \\ 0 \\ k_{\text{z}} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{k}_{\text{T}} = \begin{pmatrix} k_{\text{cx}} \\ 0 \\ k_{\text{z}} \end{pmatrix}.$$

Die stetige Komponente ergibt sich zu

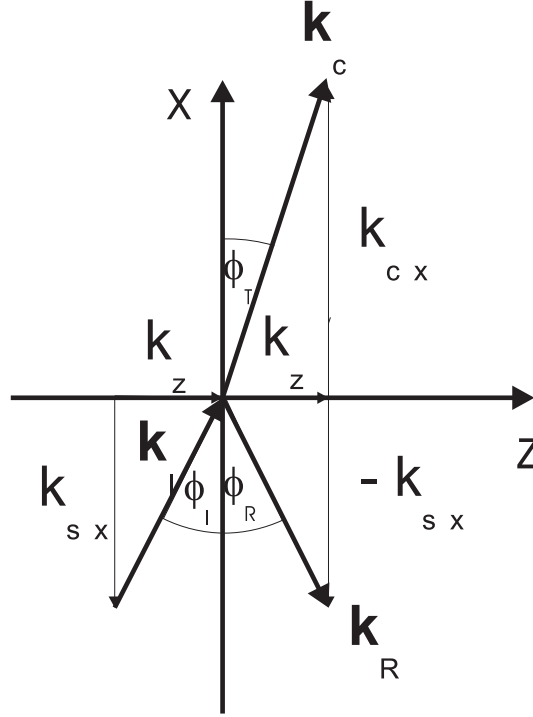
$$k_{\text{z}} = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_{\text{s}}} \sin \varphi_{\text{I}} = \frac{\omega}{c} n_{\text{s}} \sin \varphi_{\text{I}}.$$

Damit kann man die entsprechenden  $x$ -Komponenten von  $\mathbf{k}$  schreiben als

$$k_{\text{ix}} = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_{\text{i}} - k_{\text{z}}^2} = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_{\text{i}} - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_{\text{s}} \sin^2 \varphi_{\text{I}}} = \frac{\omega}{c} \sqrt{n_{\text{i}}^2 - n_{\text{s}}^2 \sin^2 \varphi_{\text{I}}}$$

$$\leadsto k_{\text{sx}} = \frac{\omega}{c} n_{\text{s}} \cos \varphi_{\text{I}}, \quad k_{\text{cx}} = \frac{\omega}{c} \sqrt{n_{\text{c}}^2 - n_{\text{s}}^2 \sin^2 \varphi_{\text{I}}},$$





d.h.  $k_{sx}$  ist immer reell, während  $k_{cx}$  für  $n_c < n_s \sin \varphi_I$  imaginär wird (Totalreflexion).  
Mit der 'Schichtmatrix'

$$\hat{\mathbf{m}}(d \rightarrow 0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ergeben sich die Reflexions- und Transmissionskoeffizienten.

### A) TE-Polarisation

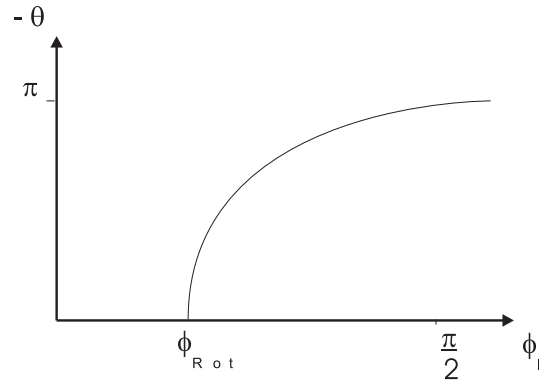
$$R_{\text{TE}} = \frac{(k_{sx} - k_{cx})}{(k_{sx} + k_{cx})} = \frac{n_s \cos \varphi_I - \sqrt{n_c^2 - n_s^2 \sin^2 \varphi_I}}{n_s \cos \varphi_I + \sqrt{n_c^2 - n_s^2 \sin^2 \varphi_I}} = \frac{n_s \cos \varphi_I - n_c \cos \varphi_T}{n_s \cos \varphi_I + n_c \cos \varphi_T}$$

$$T_{\text{TE}} = \frac{2k_{sx}}{(k_{sx} + k_{cx})} = \frac{2n_s \cos \varphi_I}{n_s \cos \varphi_I + \sqrt{n_c^2 - n_s^2 \sin^2 \varphi_I}} = \frac{2n_s \cos \varphi_I}{n_s \cos \varphi_I + n_c \cos \varphi_T}$$

$$\rho_{\text{TE}} = |R_{\text{TE}}|^2 = \frac{|k_{sx} - k_{cx}|^2}{|k_{sx} + k_{cx}|^2}$$

$$\tau_{\text{TE}} = \frac{\Re(k_{cx})}{k_{sx}} |T_{\text{TE}}|^2 = \frac{4k_{sx} \Re(k_{cx})}{|k_{sx} + k_{cx}|^2}.$$

$$\curvearrowright \rho_{\text{TE}} + \tau_{\text{TE}} = 1$$



### A) TM-Polarisation

$$R_{\text{TM}} = \frac{(k_{\text{sx}}\varepsilon_{\text{c}} - k_{\text{cx}}\varepsilon_{\text{s}})}{(k_{\text{sx}}\varepsilon_{\text{c}} + k_{\text{cx}}\varepsilon_{\text{s}})} = \frac{n_{\text{s}}n_{\text{c}}^2 \cos \varphi_{\text{I}} - n_{\text{s}}^2 \sqrt{n_{\text{c}}^2 - n_{\text{s}}^2 \sin^2 \varphi_{\text{I}}}}{n_{\text{s}}n_{\text{c}}^2 \cos \varphi_{\text{I}} + n_{\text{s}}^2 \sqrt{n_{\text{c}}^2 - n_{\text{s}}^2 \sin^2 \varphi_{\text{I}}}} = \frac{n_{\text{c}} \cos \varphi_{\text{I}} - n_{\text{s}} \cos \varphi_{\text{T}}}{n_{\text{c}} \cos \varphi_{\text{I}} + n_{\text{s}} \cos \varphi_{\text{T}}}$$

$$T_{\text{TM}} = \frac{2k_{\text{sx}}\sqrt{\varepsilon_{\text{c}}\varepsilon_{\text{s}}}}{(k_{\text{sx}}\varepsilon_{\text{c}} + k_{\text{cx}}\varepsilon_{\text{s}})} = \frac{2n_{\text{s}}^2 n_{\text{c}} \cos \varphi_{\text{I}}}{n_{\text{s}}n_{\text{c}}^2 \cos \varphi_{\text{I}} + n_{\text{s}}^2 \sqrt{n_{\text{c}}^2 - n_{\text{s}}^2 \sin^2 \varphi_{\text{I}}}} = \frac{2n_{\text{s}} \cos \varphi_{\text{I}}}{n_{\text{c}} \cos \varphi_{\text{I}} + n_{\text{s}} \cos \varphi_{\text{T}}},$$

und damit

$$\rho_{\text{TM}} = |R_{\text{TM}}|^2 = \frac{|k_{\text{sx}}\varepsilon_{\text{c}} - k_{\text{cx}}\varepsilon_{\text{s}}|^2}{|k_{\text{sx}}\varepsilon_{\text{c}} + k_{\text{cx}}\varepsilon_{\text{s}}|^2},$$

$$\tau_{\text{TM}} = \frac{\Re(k_{\text{cx}})}{k_{\text{sx}}} |T_{\text{TM}}|^2 = \frac{4k_{\text{sx}}\Re(k_{\text{cx}})\varepsilon_{\text{s}}|\varepsilon_{\text{c}}|}{|k_{\text{sx}}\varepsilon_{\text{c}} + k_{\text{cx}}\varepsilon_{\text{s}}|^2}.$$

Widerspruch für  $\varphi_{\text{I}} = 0$  ? Es gilt  $R_{\text{TE}} = -R_{\text{TM}}$ ,  $T_{\text{TE}} = T_{\text{TM}}$ . Warum?



### 7.3.2.2 Totalreflexion

Bedingung:

$$k_{\text{cx}} = 0 \leadsto n_c = n_s \sin \varphi_I$$

$$\sin \varphi_{\text{I tot}} = \frac{n_c}{n_s}.$$

Für  $\varphi_I > \sin \varphi_{\text{I tot}}$  gilt dann

$$k_{\text{cx}} = i \frac{\omega}{c} \sqrt{n_s^2 \sin^2 \varphi_I - n_c^2} = i \mu_c = i \sqrt{k_z^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_c} \leadsto \text{imaginär.}$$

Totalreflexion tritt auf, wenn  $\Re(k_{\text{cx}}) = 0$ . Das gilt für beide Polarisationsrichtungen in gleicher Weise. Für die Energieflüsse gilt (hier TE):

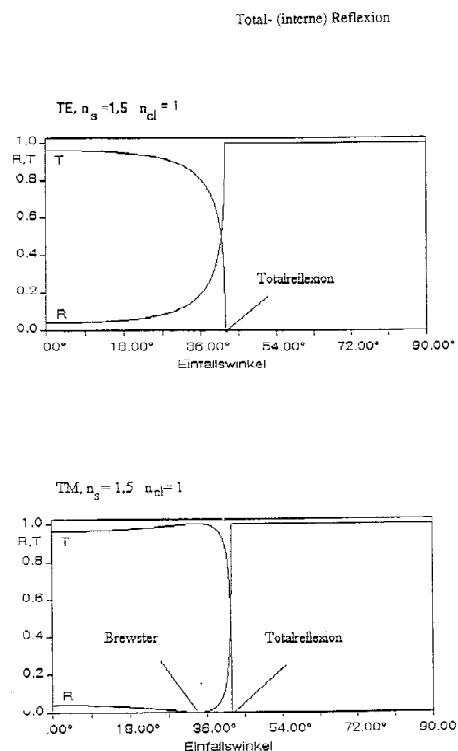
$$\rho_{\text{TE}} = \frac{|k_{\text{sx}} - i \mu_c|^2}{|k_{\text{sx}} + i \mu_c|^2} = \left| \frac{Z}{Z^*} \right|^2 = 1$$

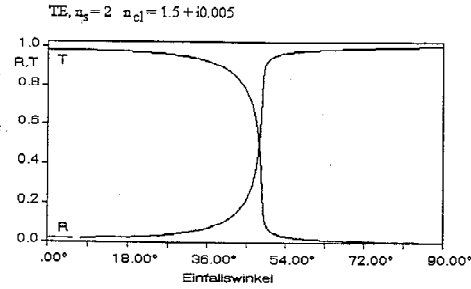
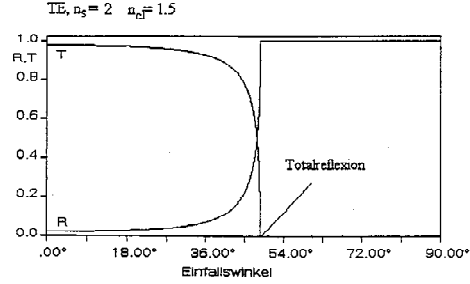
$$\tau_{\text{TE}} = \frac{4 k_{\text{sx}} \Re(k_{\text{cx}})}{|k_{\text{sx}} + k_{\text{cx}}|^2} = 0.$$

Für Metalle ( $\Re(\varepsilon_c) < 0, \Im(\varepsilon_c) \ll |\Re(\varepsilon_c)|$ ) tritt immer Totalreflexion auf  $\leadsto$  kein Grenzwinkel.  $\Im(\varepsilon_c) \ll |\Re(\varepsilon_c)|$  führt zu einer kleinen Verschiebung des Grenzwinkels und zu einer Verschmierung des abrupten Übergangs.

Da der Reflexionskoeffizient komplex ist, kommt es bei der Totalreflexion zu einer Phasenverschiebung.

## A) TE-Polarisation





$$R_{\text{TE}} = 1 \cdot \exp(i\Theta_{\text{TE}}) = \frac{k_{\text{sx}} - i\mu_c}{k_{\text{sx}} + i\mu_c} = \frac{Z}{Z^*} = \frac{\exp(i\alpha)}{\exp(-i\alpha)} = \exp(2i\alpha)$$

$$\leadsto \tan \alpha = \tan \frac{\Theta_{\text{TE}}}{2} = -\frac{\mu_c}{k_{\text{sx}}} = -\frac{\sqrt{n_s^2 \sin^2 \varphi_{\text{I}} - n_c^2}}{n_s \cos \varphi_{\text{I}}} = -\frac{\sqrt{\sin^2 \varphi_{\text{I}} - \sin^2 \varphi_{\text{Itot}}}}{\cos \varphi_{\text{I}}}.$$

## B) TM-Polarisation

Entsprechend gilt für TM-Polarisation

$$R_{\text{TM}} = 1 \cdot \exp(i\Theta_{\text{TM}}) = \frac{k_{\text{sx}}\varepsilon_c - i\mu_c\varepsilon_s}{k_{\text{sx}}\varepsilon_c + i\mu_c\varepsilon_s} = \frac{Z}{Z^*} = \frac{\exp(i\alpha)}{\exp(-i\alpha)} = \exp(2i\alpha)$$

$$\leadsto \tan \alpha = \tan \frac{\Theta_{\text{TM}}}{2} = -\frac{\mu_c\varepsilon_s}{k_{\text{sx}}\varepsilon_c} = \frac{\varepsilon_s}{\varepsilon_c} \tan \frac{\Theta_{\text{TE}}}{2},$$

d.h.

$$|\Theta_{\text{TM}}| > |\Theta_{\text{TE}}|,$$

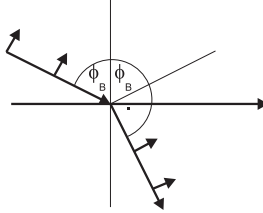
linear polarisiertes Licht wird bei Totalreflexion elliptisch polarisiert  $\leadsto$  Fresnelsches Prisma

Das Feld im Cladding ist evaneszent  $\sim \exp(ik_z z) \exp(-\mu_c z)$ . Der *mittlere* Energiefluß ins Cladding verschwindet

$$\langle \mathbf{S} \rangle_x = \frac{1}{2\omega\mu_0} \Re(\mathbf{k} |\mathbf{E}|^2)_x = \frac{1}{2\omega\mu_0} \Re(k_x) |\mathbf{E}|^2 = 0.$$

### 7.3.2.3 Der Brewster-Winkel

Für TM-polarisiertes Licht gibt es einen zweiten ausgezeichneten Winkel  $\rightarrow$  Brewsterwinkel  $\varphi_B$ . Dort verschwindet der Reflexionskoeffizient  $\rightarrow R_{\text{TM}} = 0$ , d.h., es muß gelten



$$k_{sx}\varepsilon_c = k_{cx}\varepsilon_s$$

$$\varepsilon_c^2 (\varepsilon_s - \sin^2 \varphi_B \varepsilon_s) = \varepsilon_s^2 (\varepsilon_c - \sin^2 \varphi_B \varepsilon_s)$$

$$\sin^2 \varphi_B = \frac{\varepsilon_s \varepsilon_c (\varepsilon_s - \varepsilon_c)}{\varepsilon_s (\varepsilon_s^2 - \varepsilon_c^2)} = \frac{\varepsilon_c}{(\varepsilon_s + \varepsilon_c)}$$

$$\tan \varphi_B = \sqrt{\frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_s}}.$$

Der Brewster-Winkel existiert für  $n_s \leq n_c$ .

Physikalische Interpretation:

$$\tan \varphi_B = \frac{\sin \varphi_B}{\cos \varphi_B} = \frac{n_c}{n_s}$$

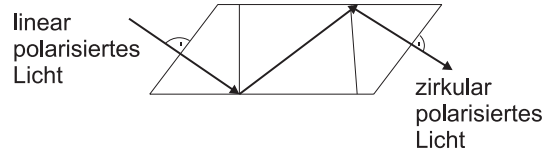
$$\curvearrowright n_s \sin \varphi_B = n_c \cos \varphi_B = n_c \sin \left( \frac{\pi}{2} - \varphi_B \right)$$

$$n_s \sin \varphi_B = n_c \sin \varphi_T \curvearrowright \varphi_T = \frac{\pi}{2} - \varphi_B,$$

d.h., Wellenzahlvektoren der reflektierten und transmittierten Welle stehen senkrecht aufeinander  $\curvearrowright$  keine Abstrahlung in Richtung der potentiellen reflektierten Welle.

### 7.3.2.4 Folgerungen aus spezifischem Reflexionsverhalten

1.  $\varphi_I = \varphi_B$  reflektiertes Licht ist vollständig TE-polarisiert bei beliebig polarisiertem Eingangsfeld  $\mathbf{E}_I$
2.  $\varphi_I > \varphi_{\text{tot}}$   $\Theta_{\text{TE}} \neq \Theta_{\text{TM}}$ , aber  $|R_{\text{TE}}| = |R_{\text{TM}}| \curvearrowright$  für lin.pol.einfallende Welle ( $45^\circ$ )  $|E_I^{\text{TE}}| = |E_I^{\text{TM}}| \curvearrowright |E_R^{\text{TE}}| = |E_R^{\text{TM}}|$ , aber in Abhängigkeit vom Material ist ein Winkel zu finden, wo  $\Delta\Theta \approx 45^\circ$ , d.h., zweimalige Totalreflexion gibt zirkular polarisiertes Licht.



### 7.3.2.5 Der Goos-Hänchen-Shift

→ Totalreflexion endlicher Bündel an Grenzflächen (hier für TE-Polarisation zeigen)

**Ebene Welle:**

$$E_I(x, z) = E_I \exp [i (k_{sx}x + k_z z)] \longrightarrow E_I(x, z) = E_I \exp [i (\alpha z + \gamma_s x)]$$

$$E_R(x, z) = E_I \exp [i (\alpha z - \gamma_s x)] \exp [i\Theta(\alpha)]$$

mit

$$\alpha = \frac{\omega}{c} n_s \sin \varphi_I, \quad \gamma_s = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} n_s^2 - \alpha^2}.$$

→ wichtig für das folgende ist, daß die Phasenverschiebung vom Einfallswinkel (transversale Wellenzahl) abhängt.

**Bündel:**

$$E_I(x, z) = \int d\alpha e_I(\alpha) \exp [i (\alpha z + \gamma_s x)]$$

Da schräger Einfall mit Haupteinfallswinkel  $\alpha_0 = \frac{\omega}{c} n_s \sin \varphi_{I0}$

$$\alpha = \alpha_0 + \varepsilon$$

nur Integration über nichtverschwindene Spektralampplituden

$$E_I(x, z) = \exp (i\alpha_0 z) \int_{-\Delta}^{\Delta} d\varepsilon e_I(\varepsilon) \exp [i (\varepsilon z + \gamma_s x)]$$

$$E_R(x, z) = \exp (i\alpha_0 z) \int_{-\Delta}^{\Delta} d\varepsilon e_I(\varepsilon) \exp [i (\varepsilon z - \gamma_s x)] \exp [i\Theta(\alpha_0 + \varepsilon)].$$

**Annahmen:**

- Reflexion an der Grenzfläche  $x = 0$ .
- da Divergenz des Strahles klein  $\longrightarrow$  alle Fourierkomponenten totalreflektiert.

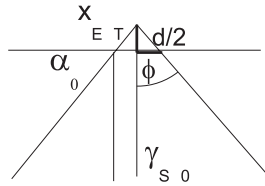
Damit kann die Phasenverschiebung entwickelt werden

$$\Theta(\alpha_0 + \varepsilon) \approx \Theta(\alpha_0) + \left. \frac{\partial \Theta}{\partial \alpha} \right|_{\alpha_0} \varepsilon = \Theta(\alpha_0) + \Theta' \varepsilon$$

und wir erhalten

$$E_R(0, z) = \exp \{i [\alpha_0 z + \Theta(\alpha_0)]\} \int_{-\Delta}^{\Delta} d\varepsilon e_I(\varepsilon) \exp [i (z + \Theta') \varepsilon] \\ \exp \{i [\alpha_0 z + \Theta(\alpha_0)]\} E_I(z + \Theta').$$

$\longrightarrow$  der reflektierte Strahl ist um  $d = -\Theta'$  verschoben (Goos-Hänchen Shift).

**Berechnung dieser Verschiebung:**

von vorn:

$$\Theta = -2 \arctg \frac{\sqrt{\alpha^2 - \frac{\omega^2}{c^2} n_c^2}}{\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} n_s^2 - \alpha^2}}$$

$$\longrightarrow \Theta'|_{\alpha_0} = -2 \frac{\alpha_0}{\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} n_s^2 - \alpha_0^2}} \frac{1}{\sqrt{\alpha_0^2 - \frac{\omega^2}{c^2} n_c^2}} = -2 \tan \varphi_{I0} \frac{1}{\mu_c}$$

$$\Theta'|_{\alpha_0} = -d = -2 \tan x_{ET} \quad \text{mit} \quad x_{ET} = \frac{1}{\mu_c} = \frac{1}{\sqrt{\alpha_0^2 - \frac{\omega^2}{c^2} n_c^2}},$$

wobei  $x_{ET}$  als Eindringtiefe interpretiert werden kann

$$\tan \varphi_{I0} = \frac{d/2}{x_{ET}}.$$

### 7.3.2.6 Bemerkungen zur Metallreflexion und Doppelbrechung

#### A) Metallreflexion

Wir setzen ein 'ideales' Metall (freie Elektronen ohne Stöße) im Cladding voraus:

$$\varepsilon_c(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2},$$

wobei im optischen Spektralbereich ( $\omega_p > \omega$ )  $\varepsilon_c(\omega) < 0$  gilt. Damit gilt für alle Einfallswinkel

$$\mu_c = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} |\varepsilon_c(\omega)| + k_z^2},$$

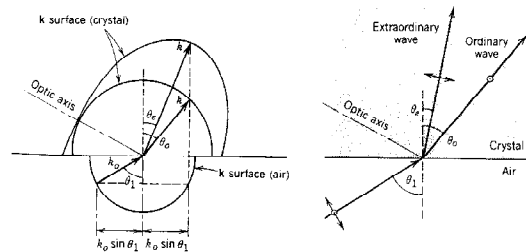
d.h. an Metallgrenzflächen tritt immer Totalreflexion auf, unabhängig vom Einfallswinkel. Die Eindringtiefe  $\frac{1}{\mu_c}$  ist immer kleiner als bei Dielektrika.

#### B) Doppelbrechung an anisotropen Medien (einachsig)

z. B. :  $n_s = 1$  (isotrop),  $n_c \longrightarrow n_{\text{cor}}$  und  $n_{\text{ce}}$

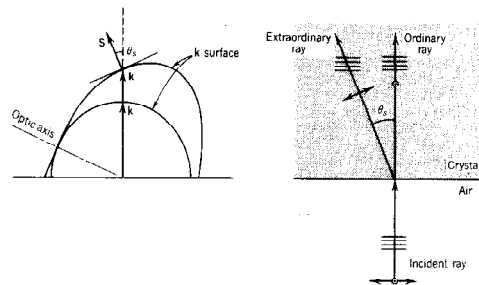
Prinzip: Stetigkeit von  $k_z$

$$n_s \sin \varphi_I = \begin{cases} n_{\text{cor}} \sin \varphi_{\text{Tor}} \\ n_{\text{ce}}(\varphi_{\text{Tor}}) \sin \varphi_{\text{Te}} \end{cases}$$



Doppelbrechung von Strahlen:

Wenn die Hauptausbreitungsrichtung nicht in einer Hauptachse liegt, stimmen im anisotropen Medium die Richtungen von  $\mathbf{k}$  und  $\mathbf{S}$  nicht überein (walk off).

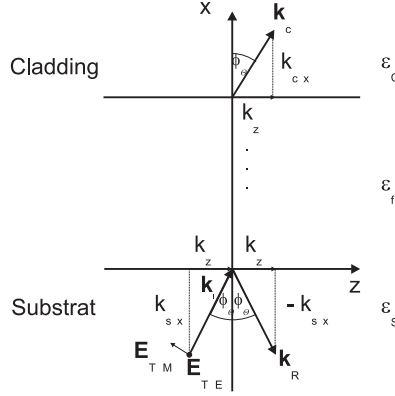




### 7.3.3 Die optische Schicht

#### 7.3.3.1 Reflexions- und Transmissionskoeffizienten

Wir beziehen uns auf folgende Geometrie und beschränken uns der Einfachheit halber auf TE-Polarisation (TM analog aus Kapitel 7.3.1)



Aus den Gln.(7.7) und (7.8) folgt mit

$$\widehat{\mathbf{M}} = \widehat{\mathbf{m}}(d) = \left\{ \begin{array}{cc} \cos(k_{fx}d) & \frac{1}{k_{fx}} \sin(k_{fx}d) \\ -k_{fx} \sin(k_{fx}d) & \cos(k_{fx}d) \end{array} \right\}$$

$$R_{TE} = \frac{(k_{sx} - k_{cx}) \cos \frac{\delta}{2} + i \left( k_{fx} - \frac{k_{sx}k_{cx}}{k_{fx}} \right) \sin \frac{\delta}{2}}{\underbrace{(k_{sx} + k_{cx}) \cos \frac{\delta}{2} - i \left( k_{fx} + \frac{k_{sx}k_{cx}}{k_{fx}} \right) \sin \frac{\delta}{2}}_N},$$

$$T_{TE} = \frac{2k_{sx}}{N},$$

wobei

$$\frac{\delta}{2} = k_{fx}d.$$

Für die Reflektivität und Transmissivität ergibt sich damit

$$\rho_{TE} = |R_{TE}|^2$$

$$\tau_{TE} = \frac{k_{cx}}{k_{sx}} |T_{TE}|^2.$$

Für absorptionsfreie Filme gilt natürlich:

$$\rho_{TE} + \tau_{TE} = 1$$

und

$$\rho_{\text{TE}} = \frac{(k_{\text{sx}} + k_{\text{cx}})^2 \cos^2 \frac{\delta}{2} + \left(k_{\text{fx}} + \frac{k_{\text{sx}} k_{\text{cx}}}{k_{\text{fx}}}\right)^2 \sin^2 \frac{\delta}{2} - 4k_{\text{cx}} k_{\text{sx}}}{\underbrace{(k_{\text{sx}} + k_{\text{cx}})^2 \cos^2 \frac{\delta}{2} + \left(k_{\text{fx}} + \frac{k_{\text{sx}} k_{\text{cx}}}{k_{\text{fx}}}\right)^2 \sin^2 \frac{\delta}{2}}_{\tilde{N}}}.$$

$$\tau_{\text{TE}} = \frac{4k_{\text{cx}} k_{\text{sx}}}{\tilde{N}}$$

Reflektivitäten und Transmissivitäten sind phasenempfindlich (Resonatoren). Daraus ergeben sich die bekannten Anwendungsfälle.

a)  $\lambda/2$ -Schichten

$$\frac{\delta}{2} = k_{\text{fx}} d = m\pi, \quad \leadsto \quad d = m \frac{\lambda}{2n_{\text{f}} \sqrt{1 - \frac{k_{\text{z}}^2}{k_{\text{f}}^2}}} \longrightarrow \perp \longrightarrow d = m \frac{\lambda}{2n_{\text{f}}}$$

mit  $\sin \frac{\delta}{2} = 0$ ,  $\cos \frac{\delta}{2} = \pm 1$  folgt dann

$$\rho_{\text{TE}} = \frac{(k_{\text{sx}} - k_{\text{cx}})^2}{(k_{\text{sx}} + k_{\text{cx}})^2} \longrightarrow \text{wie Grenzfläche.}$$

Mit  $k_{\text{sx}} = k_{\text{cx}}$  ergibt sich  $\rho_{\text{TE}} = 0 \longrightarrow$  Antireflexionsschicht.

b)  $\lambda/4$ -Schichten

$$\frac{\delta}{2} = k_{\text{fx}} d = (2m + 1) \frac{\pi}{2} \quad \leadsto \quad d = (2m + 1) \frac{\lambda}{4n_{\text{f}} \sqrt{1 - \frac{k_{\text{z}}^2}{k_{\text{f}}^2}}} \longrightarrow \perp \longrightarrow d = (2m + 1) \frac{\lambda}{4n_{\text{f}}}$$

mit  $\sin \frac{\delta}{2} = 1$ ,  $\cos \frac{\delta}{2} = 0$  folgt dann

$$\rho_{\text{TE}} = \frac{\left(k_{\text{fx}} - \frac{k_{\text{sx}} k_{\text{cx}}}{k_{\text{fx}}}\right)^2}{\left(k_{\text{fx}} + \frac{k_{\text{sx}} k_{\text{cx}}}{k_{\text{fx}}}\right)^2}$$

und für senkrechten Einfall

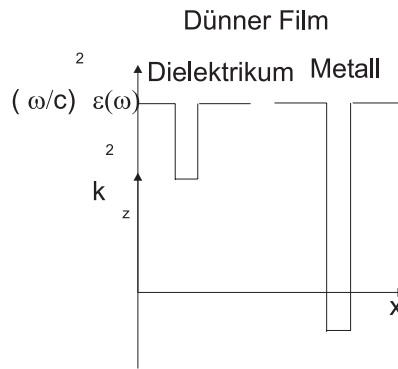
$$\rho_{\text{TE}} = \frac{(n_{\text{f}}^2 - n_{\text{s}} n_{\text{c}})^2}{(n_{\text{f}}^2 + n_{\text{s}} n_{\text{c}})^2} = \frac{\left(1 - \frac{n_{\text{s}} n_{\text{c}}}{n_{\text{f}}^2}\right)^2}{\left(1 + \frac{n_{\text{s}} n_{\text{c}}}{n_{\text{f}}^2}\right)^2},$$

d.h. für  $n_{\text{f}}^2 \gg n_{\text{s}} n_{\text{c}}$  wird die Reflektivität maximiert, beträgt bei  $n_{\text{s}} = n_{\text{c}} = 1$ ,  $n_{\text{f}} = 2$  jedoch nur 35%. Die Idee besteht nun darin  $\lambda/4$ -Schichten hintereinander anzuordnen. Fügt man eine zweite Schicht mit  $n_{\text{f}} = 1.5$  hinzu, erhält man mit 5 solchen Doppelschichten eine Reflektivität von 95%. Solche dielektrischen Schichtsysteme spielen eine große praktische Rolle und werden als Laser- oder Resonatorspiegel (Braggspiegel) eingesetzt. Wir kommen später auf diesen Punkt zurück.

### 7.3.3.2 Der optische Tunneleffekt

Analog zum Tunneleffekt in der Quantenmechanik kann Licht durch dünne Filme tunneln, wenn eigentlich die Bedingungen der Totalreflexion erfüllt sind, also

$$\varepsilon_f < 0 \quad \text{oder} \quad \varepsilon_f < \varepsilon_c \varepsilon_s \quad \text{und} \quad \varphi_I > \varphi_{\text{Tot}}$$



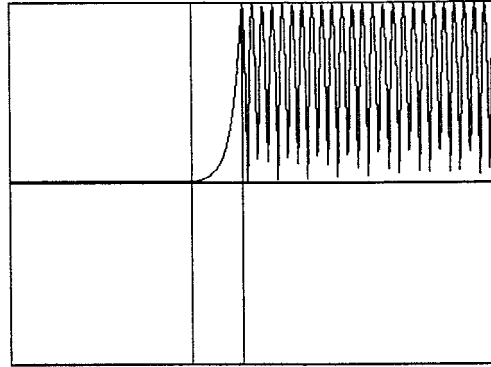
Wir erhalten also

$$k_{\text{fx}} = i\mu_f = i \begin{cases} \sqrt{k_z^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_f(\omega)}, & \text{Dielektrikum} \\ \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} |\varepsilon_f| + k_z^2}, & \text{Metall} \end{cases}.$$

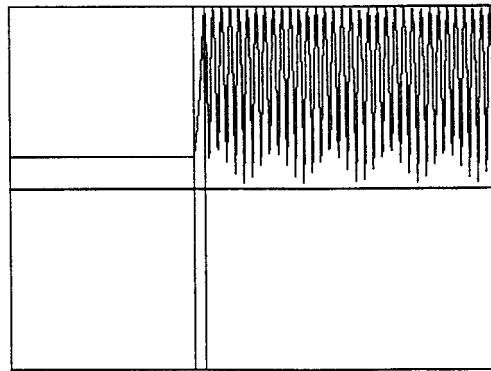
Für eine symmetrische Anordnung  $\varepsilon_c = \varepsilon_s$  und  $\sin(i\mu_f d) = i \sinh(\mu_f d)$ ,  $\cos(i\mu_f d) = \cosh(\mu_f d)$  ergibt sich dann für den Transmissionskoeffizienten mit  $\Gamma = \mu_f d$

$$\begin{aligned} T_{\text{TE}} &= \frac{1}{\cosh \Gamma - i \underbrace{\frac{(k_{\text{sx}}^2 - \mu_f^2)}{2k_{\text{sx}}\mu_f}}_C \sinh \Gamma} \\ &= \frac{2}{\exp \Gamma + \exp(-\Gamma) - iC [\exp \Gamma - \exp(-\Gamma)]} \\ &= \frac{2 \exp(-\Gamma)}{(1 - iC) + (1 + iC) \exp(-2\Gamma)}. \end{aligned}$$

OPTISCHER TUNNELEFFEKT  $d_f = 2 \text{ micro}$



OPTISCHER TUNNELEFFEKT  $d_f = 0.6 \text{ micro}$



Damit folgt für die Transmissivität

$$\tau_{\text{TE}} = \frac{4 \exp(-2\Gamma)}{(1 + C^2)(1 + \exp(-4\Gamma)) + 2(1 - C^2) \exp(-2\Gamma)}$$

$$\approx \frac{4}{(1 + C^2)} \exp(-2\Gamma).$$

Für  $\Gamma = \mu_f d \sim 1$  erhalten wir  $\tau_{\text{TE}} \sim 0.1$ . Für einen Metallfilm mit  $|\varepsilon_f| = 10$  folgt bei senkrechtem Einfall

$$\Gamma = \frac{2\pi}{\lambda} \sqrt{|\varepsilon_f|} d \lesssim 1 \quad \leadsto d \lesssim \frac{\lambda}{20}.$$

Das Licht kann also durch extrem dünne Filme 'tunneln', wenn es eigentlich total-reflektiert werden müßte. Anwendungen ergeben sich für die Nahfeldmikroskopie bei Auflösungen unterhalb der Wellenlänge.

### 7.3.4 Periodische Vielschichtsysteme - Bragg-Spiegel

Periodische Strukturen spielen in der Physik eine große Rolle (Kristalle, Supergitter, atomare Ketten, Arrays von Wellenleitern). Periodische Anordnungen von Schichten werden als Bragg-Spiegel bezeichnet. Die Reflektivität dieser Spiegel ist in bestimmten Frequenzbereichen nahezu '1' und wächst mit der Anzahl der Schichten und dem Brechzahlkontrast zwischen den Schichten. Braggspiegel werden in Resonatoren (Laser, Interferometer) eingesetzt. Ändert sich die Periode (z. b. linear) nennt man die Spiegel *gechirpt*. Solche Spiegel werden zur Dispersionskompensation in Nachrichtenübertragungsstrecken und bei der Erzeugung ultrakurzer Impulse (einige fs) eingesetzt.

Wir wollen hier die Grundlagen der Braggreflexion verstehen und betrachten ein halbumendliches periodisches Vielschichtsystem  $[x > 0, (\varepsilon_1, d_1), (\varepsilon_2, d_2)]$  und setzen TE-Polarisation und Monochromasie voraus. Von vorn wissen wir, daß an der Grenzfläche Substrat-Braggspiegel ( $x = 0$ ) gelten muß:

$$E_I + E_R = E_0 \quad (7.12)$$

$$ik_{sx} (E_I - E_R) = \left. \frac{\partial E}{\partial x} \right|_0 = E'_0,$$

damit ergibt sich für die Reflektivität

$$\rho = \left| \frac{E_R}{E_I} \right|^2 = \left| \frac{k_{sx} E_0 + i E'_0}{k_{sx} E_0 - i E'_0} \right|^2, \quad (7.13)$$

d. h., Totalreflexion tritt auf, wenn  $E'_0$  reell ist. Die Aufgabe besteht nun darin, das Feld im Vielschichtsystem zu berechnen. Für endliche Systeme muß die Matrixmethode und die numerische Lösung des Problems herangezogen werden. Ist das periodische Medium unendlich ausgedehnt (Analogie zum eindimensionalen Kristall), kann man vom *Bloch-Theorem* (siehe Festkörperphysik) Gebrauch machen. Das periodische Vielschichtsystem kann charakterisiert werden durch

$$\varepsilon(x) = \varepsilon(x + \Lambda),$$

wobei  $\Lambda = d_1 + d_2$  die Periode darstellt. Das Bloch-Theorem sagt aus, daß nun jede Lösung die Gestalt

$$E(x, z; \omega) = \exp \{ i [k_x (k_z, \omega) x + k_z z] \} E_{k_x}(x)$$

mit

$$E_{k_x}(x + \Lambda) = E_{k_x}(x)$$

annimmt.  $k_x$  ist der sog., bislang unbekannte, *Blochvektor*. Natürlich unterscheidet sich der zu bestimmende Zusammenhang zwischen  $k_x$ ,  $k_z$  und  $\omega$  von der Volumendispersionsrelation

$$k_x^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon(\omega) - k_z^2.$$

Zur Vereinfachung der Schreibweise setzen wir im folgenden  $k_x = K$ . Das Feld trägt den Index ' $K$ ', d.h., zu jeder Lösung der Dispersionsrelation gehört ein anderes Feld. Die Felder am Anfang der  $N$ -ten und  $(N + 1)$ -ten Schicht sind damit folgendermaßen verbunden (wir lassen den Index weg)

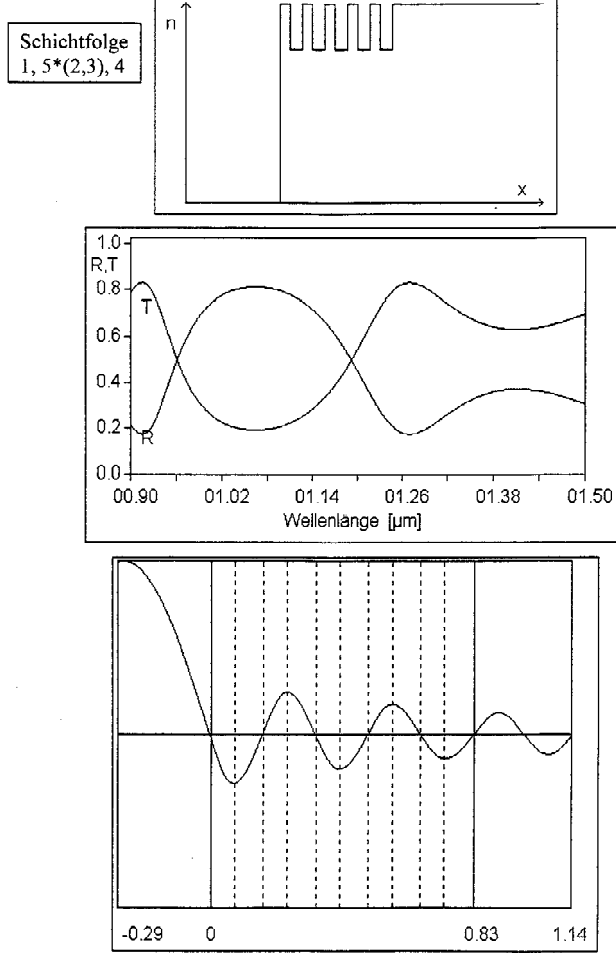
$$\begin{pmatrix} E \\ E' \end{pmatrix}_{(N+1)d} = \exp(iK\Lambda) \begin{pmatrix} E \\ E' \end{pmatrix}_{Nd}.$$

Andererseits können wir die Felder unter Benutzung der Matrixmethode verbinden

$$\begin{pmatrix} E \\ E' \end{pmatrix}_{(N+1)d} = \widehat{\mathbf{M}} \begin{pmatrix} E \\ E' \end{pmatrix}_{Nd} \quad (7.14)$$

Materialdaten:

- (1) : ( 1.000000 , i\* 0.000000 )  
 (2) : ( 3.482000 , i\* 0.000000 ) d= 7.6400000E-02 μm  
 (3) : ( 2.939000 , i\* 0.000000 ) d= 9.0500000E-02 μm  
 (4) : ( 3.482000 , i\* 0.000000 )



mit  $\widehat{\mathbf{M}} = \widehat{\mathbf{M}}(d_2) \widehat{\mathbf{M}}(d_1)$ , wobei  $M_{ij} = \sum_k M_{ik}^{(2)} M_{kj}^{(1)}$ . Gleichsetzen ergibt

$$\left\{ \widehat{\mathbf{M}} - \exp(iK\Lambda) \widehat{\mathbf{I}} \right\} \begin{pmatrix} E \\ E' \end{pmatrix}_{\text{Nd}} = 0 \quad (7.15)$$

und mit  $\mu = \exp(iK\Lambda)$  erhält man wegen

$$\det \left\{ \widehat{\mathbf{M}} - \mu \widehat{\mathbf{I}} \right\} = 0$$

die vorläufige Dispersionsrelation (eigentlich ist  $K$ ) zu bestimmen

$$\mu = \frac{(M_{11} + M_{22})}{2} \pm \sqrt{\left\{ \frac{(M_{11} + M_{22})}{2} \right\}^2 - 1}. \quad (7.16)$$

Bevor wir uns näher mit dieser Dispersionsrelation beschäftigen, bestimmen wir aus Gl.(7.15) das Feld und die Ableitung

$$\begin{pmatrix} E \\ E' \end{pmatrix}_{\text{Nd}} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ (\mu - M_{11})/M_{12} \end{pmatrix} \right\} E_{\text{Nd}}.$$

Setzen wir  $N = 0$ , folgt aus Gl.(7.13) , daß für Totalreflexion  $E'_0$  und damit  $\mu$  reell sein muß, d.h.

$$\left| \frac{(M_{11} + M_{22})}{2} \right| \geq 1$$

mit

$$M_{11} = \cos(k_{1x}d_1) \cos(k_{2x}d_1) - \frac{k_{2x}}{k_{1x}} \sin(k_{1x}d_1) \sin(k_{2x}d_1)$$

$$M_{22} = \cos(k_{1x}d_1) \cos(k_{2x}d_1) - \frac{k_{1x}}{k_{2x}} \sin(k_{1x}d_1) \sin(k_{2x}d_1) .$$

Die explizite Dispersionsrelation ergibt sich aus Gl.(7.16) mit

$$\mu = \exp(iK\Lambda) = \cos(K\Lambda) + i \sin(K\Lambda) = \cos(K\Lambda) - \sqrt{\{\cos(K\Lambda)\}^2 - 1}$$

zu

$$\cos\{K(k_z, \omega)\Lambda\} = \frac{(M_{11} + M_{22})}{2}$$

und ersetzt damit die Volumendispersionsrelation  $k_x^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon(\omega) - k_z^2$ .

Folgende Schlußfolgerungen lassen sich aus der Dispersionsrelation ziehen:

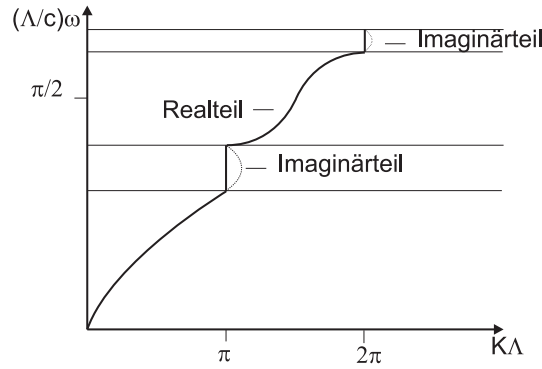
1. Für die obige Bedingung für Totalreflexion ( $\mu$  reell) wird der Blochvektor komplex mit

$$\Re\{K(k_z, \omega)\Lambda\} = n\pi$$

und

$$\Im\{K(k_z, \omega)\Lambda\} = \ln \left( (-1)^n \left\{ \frac{(M_{11} + M_{22})}{2} \pm \sqrt{\left\{ \frac{(M_{11} + M_{22})}{2} \right\}^2 - 1} \right\} \right) .$$

2. Komplexer Wellenzahlvektor bedeutet Dämpfung. Damit ist in diesem Bereich von  $(k_z, \omega)$  keine Ausbreitung möglich  $\rightarrow$  evaneszente Einhüllende. Es gibt unendlich viele solcher Bereiche ( $n = 1... \infty$ ). Diese Bereiche heißen *verbotene Bänder* oder *gaps*  $\rightarrow$  Braggspiegel, Braggwellenleiter, 'photonic crystals'
3. Die Bandgrenzen sind gegeben durch  $\Re\{K(k_z, \omega)\Lambda\} = n\pi \curvearrowright K(k_z, \omega) = n\pi/\Lambda$  (und mit  $K = 2\pi/\lambda_B$  ( $\lambda_B$ -Blochwellenlänge)  $\Lambda = n\lambda_B/2$ ) und  $\Im\{K(k_z, \omega)\Lambda\} = 0$ .
4. Außerhalb der verbotenen Bänder existieren propagierende Lösungen, die sich aber in ihren Eigenschaften von Volumenwellen unterscheiden (Dispersionsrelation)  $\curvearrowright$  Ausnutzen der starken Krümmung zur Dispersionskompensation.
5. Für senkrechten Einfall ( $k_z = 0$ ) heißt das, daß verbotene Frequenzbereiche existieren (Filter etc.).
6. Graphische Darstellung der Dispersionsrelation für  $k_z = 0$  in dimensionslosen Größen:  $\frac{\Lambda}{c} \omega(K\Lambda)$



7. Nimmt man

$$\begin{aligned} \cos \{K(\omega) \Lambda\} &= \frac{(M_{11} + M_{22})}{2} \\ &= \cos \left( \frac{\omega}{c} n_1 d_1 \right) \cos \left( \frac{\omega}{c} n_2 d_2 \right) - \frac{1}{2} \left( \frac{n_2}{n_1} + \frac{n_1}{n_2} \right) \sin \left( \frac{\omega}{c} n_1 d_1 \right) \sin \left( \frac{\omega}{c} n_2 d_2 \right) \end{aligned}$$

so findet man leicht im ersten verbotenen Band mit  $K\Lambda = \pi + ix$  für die Mitte des gaps, die gegeben ist mit

$$\frac{\omega_B}{c} n_1 d_1 = \frac{\omega_B}{c} n_2 d_2 = \frac{\pi}{2} \quad \sim \quad \lambda/4 - \text{Schichten,}$$

$$\cosh x_{\text{ma}} = \frac{1}{2} \left( \frac{n_2}{n_1} + \frac{n_1}{n_2} \right), x_{\text{ma}} = \Lambda \Im(K)_{\text{ma}} \approx 2 \frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1} \quad \text{für} \quad |n_2 - n_1| \ll (n_2 + n_1)$$

$\hookrightarrow$  Dämpfung ist proportional zum Kontrast.

8. Die Breite des Bandes ergibt sich zu

$$\Delta\omega_{\text{gap}} \approx \frac{2\omega_B}{\pi} x_{\text{ma}} = \frac{2\omega_B}{\pi} \Lambda \Im(K)_{\text{ma}}$$

und ist damit ebenfalls proportional zum Kontrast.

### 7.3.5 Fabry-Perot-Resonatoren

Fabry-Perot-Resonatoren stellen eine Kombination der in den Kapiteln 7.3.3. und 7.3.4. behandelten Konfigurationen, Schicht (Cavity) und periodisches Vielschichtsystem (Spiegel), dar. Sie spielen in der Optik eine wichtige Rolle. Zum einen werden sie als

- Spektralapparate verwendet,
- zum anderen stellt ein Laser mit ebenen Spiegeln einen Fabry-Perot-Resonator mit einem aktiven Medium in der Cavity dar.
- In der nichtlinearen Optik sind sie von Interesse, da in der Cavity eine starke Feldüberhöhung auftritt und damit nichtlineare optische Effekte bei geringeren Intensitäten des einfallenden Lichtes auftreten. Effekte wie



1. Bistabilität,
2. Modulationsinstabilität,
3. Muster- und Resonatorsolitonenbildung

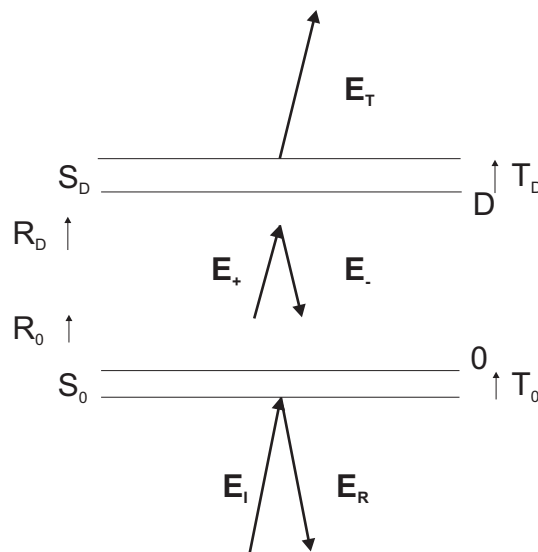
sind Gegenstand moderner Forschung.

Aus diesem Grunde ist es wichtig, die wesentlichen physikalischen Eigenschaften dieses optischen Elementes zu verstehen.

Hinsichtlich der Spiegel unterscheidet man zwischen Resonatoren mit Metall- (Auskopplung über den Tunneleffekt) und Bragg-Spiegeln. Wir untersuchen das Transmissionsverhalten der Resonatoren für

- beliebige ebene, unterschiedliche Spiegel mit Absorption
- absorbierende Cavity
- TE-Polarisation

Folgende Geometrie wird betrachtet:



Dabei sind  $E_I$ ,  $E_R$  und  $E_T$ , die Amplituden des einfallenden, reflektierten und transmittierten Feldes an den jeweiligen äußeren Grenzflächen der Spiegel. Die Reflexions- und Transmissionskoeffizienten können für Metallfilme und Braggspiegel mit den in den Kapiteln 7.3.3. und 7.3.4. behandelten Methoden berechnet werden.

1) am unteren Spiegel gilt:

$$T_0 E_I + R_0 E_-(0) = E_+(0) \quad (7.17)$$

Das Ziel besteht darin,  $E_-(0)$  und  $E_+(0)$  durch die Felder  $E_R$  und  $E_T$  zu ersetzen.

2)  $E_+(0)$  wird ersetzt durch Felder am oberen Spiegel

$$E_T = T_D E_+(D) \quad \text{mit} \quad E_+(D) = E_+(0) \exp(i k_{\text{fx}} D)$$

$$E_+(0) = \frac{E_T}{T_D} \exp(-i k_{\text{fx}} D) \quad (7.18)$$

3) jetzt ersetzt man  $E_-(0)$

a) am oberen Spiegel gilt:

$$E_-(D) = R_D E_+(D) = \frac{R_D}{T_D} E_T$$

b) am unteren Spiegel gilt:

$$E_-(0) = E_-(D) \exp(i k_{\text{fx}} D) \quad \text{wegen} \quad E_-(D) = E_-(0) \exp(-i k_{\text{fx}} D)$$

$$E_-(0) = \frac{R_D}{T_D} E_T \exp(i k_{\text{fx}} D)$$

4) nun setzt man  $E_+(0)$  und  $E_-(0)$  in 7.17 ein und erhält:

$$T_0 E_I + R_0 E_-(0) = E_+(0)$$

$$T_0 E_I + R_0 \frac{R_D}{T_D} E_T \exp(i k_{\text{fx}} D) = \frac{E_T}{T_D} \exp(-i k_{\text{fx}} D)$$

$$E_I = \frac{1}{T_0 T_D} \{ \exp(-i k_{\text{fx}} D) - R_0 R_D \exp(i k_{\text{fx}} D) \} E_T.$$

Daraus folgt Transmissionsfunktion eines Fabry-Perot zu

$$T_{\text{TE}} = \frac{E_T}{E_I} = \frac{T_0 T_D \exp(i k_{\text{fx}} D)}{1 - R_0 R_D \exp(2i k_{\text{fx}} D)}.$$

Die Reflexion- und Transmissionskoeffizienten der Spiegel sind komplex  $\longrightarrow (R, T)_{0,D} = (|R|, |T|)_{0,D} \exp(i \varphi_{0,D}^{\text{R,T}})$ , aber nur die Phasen der Reflexionskoeffizienten spielen für die Transmissivität  $\tau_{\text{TE}} \sim |T_{\text{TE}}|^2$  eine Rolle. Wir setzen jetzt

$$k_{\text{fx}} = \Re(k_{\text{fx}}) + i \Im(k_{\text{fx}}) = k + i \alpha$$

und erhalten

$$|T_{\text{TE}}|^2 = |T|^2 = \frac{|T_0|^2 |T_D|^2 \exp(-2\alpha D)}{1 + \exp(-4\alpha D) |R_0|^2 |R_D|^2 - |R_0| |R_D| \exp(-2\alpha D) \cos \left( \underbrace{2kD + \varphi_0 + \varphi_D}_{\delta} \right)}$$

$$\tau = \frac{k_{\text{cx}}}{k_{\text{sx}}} |T|^2. \quad (7.19)$$

Die Art der Spiegel (Bragg-Spiegel unterschiedlicher Dicke) beeinflusst die Phasen ( $\varphi_0, \varphi_D$ ) und damit die Transmissivität. Die Beziehung 7.19 stellt die allgemeinste Formel zur Berechnung der Transmissivität bei Vorgabe von  $|R_0|, |R_D|, |T_0|, |T_D|$  und  $\varphi_0, \varphi_D$  dar, i.a. gilt  $\tau_{\text{ma}} < 1$ .

Wir behandeln nun einige Spezialfälle:

#### a) verlustfreier FP-Resonator (Cavity und Spiegel)

$$\tau = \frac{k_{\text{cx}}}{k_{\text{sx}}} \frac{|T_0|^2 |T_D|^2}{1 + |R_0|^2 |R_D|^2 - |R_0| |R_D| \cos \delta}$$

Wegen Verlustfreiheit der Spiegel gilt:

$$\begin{aligned} |T_0|^2 |T_D|^2 &= \frac{k_{\text{sx}}}{k} (1 - |R_0|^2) \frac{k}{k_{\text{cx}}} (1 - |R_D|^2) \\ &= \frac{k_{\text{sx}}}{k_{\text{cx}}} (1 - |R_0|^2) (1 - |R_D|^2) \end{aligned}$$

mit

$$\cos \delta = \cos^2 \frac{\delta}{2} - \sin^2 \frac{\delta}{2} = 1 - 2 \sin^2 \frac{\delta}{2}$$

erhalten wir

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{(1 - |R_0|^2) (1 - |R_D|^2)}{1 + |R_0|^2 |R_D|^2 - 2 |R_0| |R_D| (1 - 2 \sin^2 \frac{\delta}{2})} \\ &= \left\{ \frac{(1 - |R_0| |R_D|)^2}{(1 - |R_0|^2) (1 - |R_D|^2)} + \frac{4 |R_0| |R_D|}{(1 - |R_0|^2) (1 - |R_D|^2)} \sin^2 \frac{\delta}{2} \right\}^{-1}. \end{aligned}$$

Und mit

$$\rho_0 = |R_0|^2, \rho_D = |R_D|^2$$

$$\tau = \left\{ \frac{(1 - \sqrt{\rho_0 \rho_D})^2}{(1 - \rho_0) (1 - \rho_D)} + \frac{4 \sqrt{\rho_0 \rho_D}}{(1 - \rho_0) (1 - \rho_D)} \sin^2 \frac{\delta}{2} \right\}^{-1}.$$

#### b) verlustfreier FP-Resonator mit symmetrischen Spiegeln

Dieser wichtigste Spezialfall erlaubt die Ableitung einer kompakten Formel (Airy-Formel) für die Transmissivität. Bei Verlustfreiheit gilt das Reziprozitätstheorem, d.h. Reflektivitäten und Transmissivitäten an den Einzelspiegeln sind gleich von innen und von außen. Damit gilt

$$\rho = |R_0|^2 = |R_D|^2 = \rho_0 = \rho_D, \quad \varphi = \varphi_0 = \varphi_D$$

gilt

$$\begin{aligned}\tau &= \left\{ \frac{(1-\rho)^2}{(1-\rho)^2} + \frac{4\rho}{(1-\rho)^2} \sin^2 \frac{\delta}{2} \right\}^{-1} \\ &= \left\{ 1 + F \sin^2 \frac{\delta}{2} \right\}^{-1}\end{aligned}$$

mit

$$F = \frac{4\rho}{(1-\rho)^2}$$

und

$$\frac{\delta}{2} = kD + \varphi$$

Die *Airy-Formel* beschreibt die Transmissivität eines symmetrischen, verlustfreien Fabry-Perot-Resonators. Nur in diesem Fall ist die maximale Transmissivität  $\tau = 1$  für  $\delta/2 = n\pi$  zu erreichen.

### Bemerkungen und Schlußfolgerungen

- Gleichungen gelten analog für TM-Polarisation, man hat die entsprechenden Reflexionskoeffiziente  $R_{\text{TM}}$  bzw. Reflektivitäten  $\rho_{\text{TM}}$  einzusetzen.
- Resonanzen:  $\tau_{\text{MAX}} = 1$  für  $\delta/2 = kD_{\text{MAX}} + \varphi = m\pi$  mit

$$\begin{aligned}k &= k_x = \frac{2\pi}{\lambda} \sqrt{n_F^2 - n_S^2 \sin^2 \varphi_I} \\ \leadsto D_{\text{MAX}} &= \frac{m\pi - \varphi}{k_x} = \frac{\lambda}{2} \frac{(m - \frac{\varphi}{\pi})}{\sqrt{n_F^2 - n_S^2 \sin^2 \varphi_I}} \\ &\leadsto \frac{\lambda}{2} \text{ cavity.}\end{aligned}\tag{7.20}$$

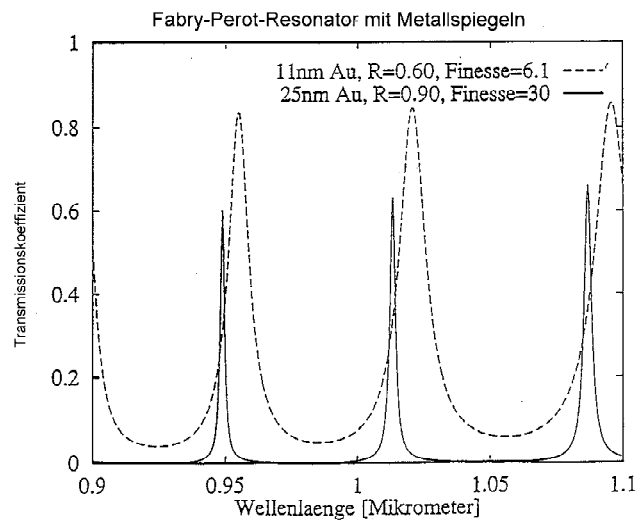
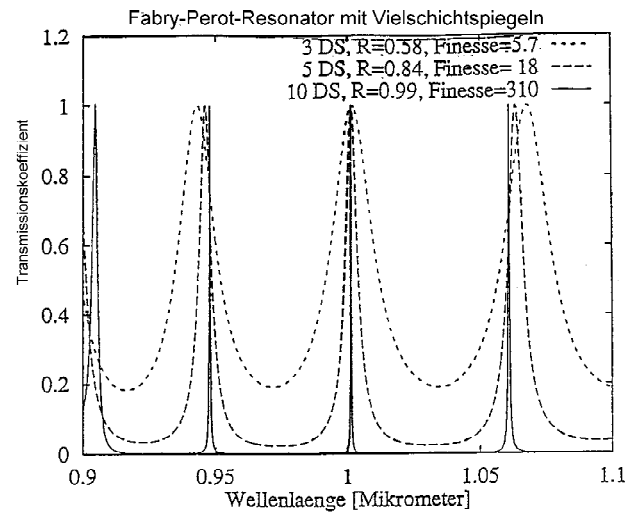
Transmissionseigenschaften ändern sich mit  $\varphi_I$  und  $\lambda$ .

- Transmissionsminima

$$\tau_{\text{MIN}} = \frac{1}{1+F}$$

→ Ziel: großes  $F$ , um großen Kontrast zu erreichen, z.B.  $F = 100$

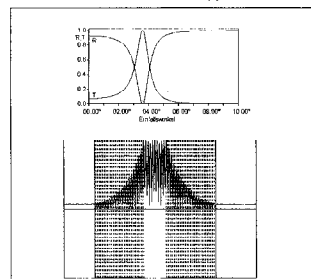
$$\begin{aligned}100 &= F = \frac{4\rho}{(1-\rho)^2} \\ \rho &= 1 - \varepsilon \leadsto \frac{4}{\varepsilon^2} \approx 100 \leadsto \varepsilon = 0.2 \leadsto \rho = 0.8.\end{aligned}$$



- Feldüberhöhung im Resonator mit großer Finesse

$$\text{Feldüberhöhung} \sim |T_{\text{Spiegel}}|^2$$

5  $\lambda$  GaAs - Resonator  
mit 2 x 20 AlGaAs - Doppelschichten



20 AlGaAs - Doppelschichten

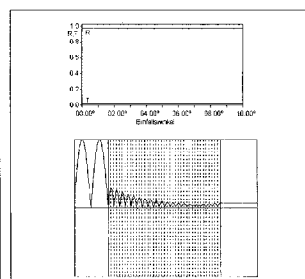


Abbildung 7.1: Fabry-Perot-Resonator

- bei Pulsen und Bündeln geht man wie bei der Grenzfläche vor  $\rightarrow$  z.B. TE:  $E_T(\alpha, \beta, \omega) = T_{FP}(\alpha, \beta, \omega) E_I(\alpha, \beta, \omega) \rightarrow$  Fouriertransformation  $E_T(x, y, t) = \text{FT}[E_T(\alpha, \beta, \omega)]$ , interessante Näherung (Moden- oder mean-field-Theorie)

$$T_{FP}(\alpha, \beta, \omega) \sim \frac{1}{\sigma^2(\omega) - \alpha^2 - \beta^2}$$

$\rightarrow \sigma^2(\omega)$  (komplexe Resonanz) entwickeln und Fouriertransformation  $\rightarrow$  DGL in  $z, y, t$ .

- Reflektivitäten von Metallfilmen oder dielektrischen Spiegeln werden mit den in den Kapiteln 7.3.3. und 7.3.4. vorgestellten Methoden berechnet.
- Finesse (Güte) eines Resonators:

$$\Phi = \frac{\text{ABSTAND DER RESONANZEN}}{\text{HALBWERTSBREITE}} = \frac{\Delta\left(\frac{\delta}{2}\right)}{\varepsilon} = \frac{\pi}{\varepsilon}$$

$\varepsilon \doteq \text{FWHM}$

$$\begin{aligned} \left\{1 + F \sin^2\left(m\pi \pm \frac{\varepsilon}{2}\right)\right\}^{-1} &\doteq \frac{1}{2} = \left\{1 + F \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2\right\}^{-1} \\ &\curvearrowright F \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2 = 1 \curvearrowright \varepsilon = \frac{2}{\sqrt{F}} \\ \Phi = \frac{\pi}{2} \sqrt{F} \curvearrowright \varepsilon &= \frac{\pi}{\Phi}. \end{aligned}$$

$\rightarrow$  Linienbreite ist umgekehrt proportional zur Finesse. Wir erhalten für die Airy-Formel

$$\tau = \left\{1 + \left(\frac{2\Phi}{\pi}\right)^2 \sin^2 \frac{\delta}{2}\right\}^{-1}.$$

- Fabry-Perot-Resonator als Spektralapparat  $\rightarrow$  Auflösungsvermögen (senkrechter Einfall)

Resonanz:

$$\begin{aligned} kD + \varphi = m\pi &\rightarrow kD + \varphi \pm \frac{\Delta k}{2} D = m\pi \pm \frac{\varepsilon}{2} = m\pi \pm \frac{\pi}{2\Phi} \\ &\curvearrowright |\Delta k| = \frac{2\pi}{\lambda^2} n_f |\Delta \lambda| = \frac{\pi}{\Phi D} \end{aligned}$$

$$\curvearrowright \left| \frac{\Delta \lambda}{\lambda} \right| = \frac{\lambda}{n_f \Phi D} \sim \frac{1}{\Phi D} \sim \frac{\varepsilon(\rho)}{D}$$

$\curvearrowright$  Das Auflösungsvermögen wird größer mit kleinerer Linienbreite oder /und größerer Cavitydicke.

Beispiel:  $\lambda = 5 \cdot 10^{-7} \text{m}$ ,  $\Phi = 30$ ,  $n_f D = 4 \cdot 10^{-3} \text{m} \curvearrowright \left| \frac{\Delta \lambda}{\lambda} \right| = 4 \cdot 10^{-6} \curvearrowright \Delta \lambda = 2 \cdot 10^{-12} \text{m}$

- Feldüberhöhung in der Cavity  $\sim |T|^{-2} \sim 1/(1 - \rho) \sim \Phi \rightarrow$  wichtig für nichtlineare Effekte

- Lebensdauer der Photonen in der Cavity

Unschärferelation:  $\Delta\omega T_c = \text{const.} \approx 1$ . Wegen

$$|\Delta k| = \frac{1}{c} n_F \Delta\omega = \frac{\pi}{\Phi D}$$

$$\Delta\omega = \frac{c}{n_F} \frac{\pi}{\Phi D} \quad \curvearrowright \quad T_c = \frac{1}{\Delta\omega} = \frac{n_F \Phi D}{c\pi} \sim \frac{D}{\varepsilon(\rho)}.$$

Lebensdauer wächst mit Finesse und Cavity-Dicke. Trade-off zwischen Feldüberhöhung und Lebensdauer.

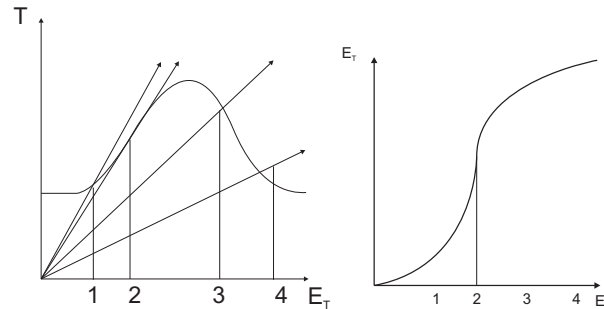
- Optische Bistabilität

→ in Resonator Feldüberhöhung → wenn Cavity-Material nichtlinear ist (z.B.  $n_F(I) = n_F + n_2 I$ ) → Verstimmung

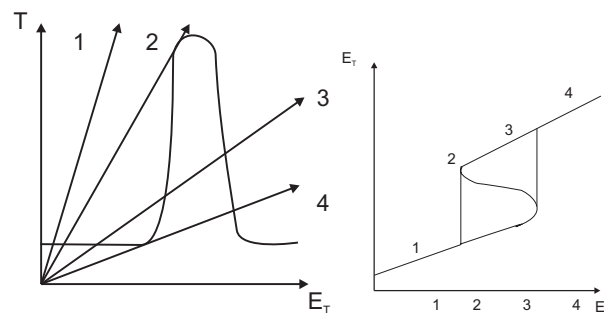
$$\frac{\delta}{2} = \frac{\delta_0}{2} + k D n_2 I = \frac{\delta_0}{2} + a k D |E_T|^2$$

$$T = \frac{1}{E_I} E_T \quad \text{und} \quad T = f(E_T)$$

a) geringe Finesse



b) große Finesse



## 7.4 Geführte Wellen in Schichtsystemen

**Motivation:**

- Suche nach Wellen, die sich beugungsfrei ausbreiten.
- Miniaturisierung der Optik  $\longrightarrow$  Licht in dielektrischen Schichten (Streifen, Fasern) kleiner Dimension einsperren.
- Störunanfälligkeit, Führung des Lichtes an gewünschte Positionen, optische Nachrichtenübertragung
- überhöhte nichtlineare Effekte.
- Schichtsysteme deshalb, um allgemeingültige Aspekte zu erkennen und bestimmte praktisch wichtige Fälle (stark gekoppelte Wellenleiter, Bragg-Wellenleiter) behandeln zu können.

### 7.4.1 Feldstruktur geführter Wellen

**bisher:** Reflexions–Transmissionsproblem

**Aufgabe:** Vorgabe von  $k_z, \mathbf{E}_I, d_i, \varepsilon_i \longrightarrow$  Berechnung von  $\mathbf{E}_R, \mathbf{E}_T$

Felder (eine Fourierkomponente) sind Normalmoden des homogenen Mediums:

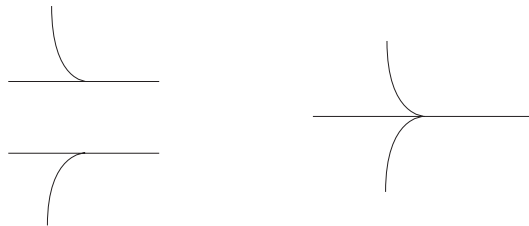
$$\sim \mathbf{E}_\alpha(k_z, \omega) \exp[i(k_{\alpha x}x + k_z z - \omega t)]$$

**Frage:** Kann Schichtsystem Wellen einfangen (nicht mehr unendlich ausgedehnt)

**Hinweis:** Totalreflexion

$$\mathbf{E}_T(x, z) = \mathbf{E}_T \exp(ik_z z) \exp(-\mu_c x)$$

$\longrightarrow$  Totalreflexion ist der prinzipielle Mechanismus (auch an Grenzfläche???)



*neue Eigenschaft geführter Wellen  $\longrightarrow$  Ausbreitung ist nur absorptions- und nicht beugungsbegrenzt.*

**Feldstruktur geführter Wellen:**

- ebene Welle in Ausbreitungsrichtung

$$\sim \exp(ik_z z)$$



- oszillierende Lösung (stehende Wellenfelder) im Kern (Schichten, Faserkern, Streifen) (später werden wir auch exponentielle Felder im Kern kennenlernen), hier zumindest in einer Schicht

$$\sim A \sin(k_{\text{fx}} x) + B \cos(k_{\text{fx}} x)$$

mit

$$k_{ix} = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_i(\omega) - k_z^2} > 0$$

↪ **1. Einschränkung:**

$$k_z^2 < \frac{\omega^2}{c^2} \max_i \{\varepsilon_i(\omega)\}$$

- evaneszente Wellen in Substrat und Cladding

$$\begin{aligned} &\sim \exp[-\mu_c(x-D)] && \text{Cladding} \\ &\sim \exp(\mu_s x) && \text{Substrat} \end{aligned}$$

mit:

$$\mu_{s,c} = \sqrt{k_z^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_{s,c}(\omega)} > 0$$

↪ **2. Einschränkung:**

$$k_z^2 > \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_{s,c}(\omega)$$

und damit ist die  $z$ -Komponente des Wellenzahlvektors geführter Wellen eingeschränkt:

$$\max\left(\frac{\omega}{c} n_{s,c}\right) < k_z < \max_i\left(\frac{\omega}{c} n_i\right)$$

Die Feldstruktur in den umgebenden Medien

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_T(x, z) &= \mathbf{E}_T \exp(ik_z z) \exp[-\mu_c(x-D)] && x > D \\ \mathbf{E}_S(x, z) &= \mathbf{E}_S \exp(ik_z z) \exp(\mu_s x) && x < 0 \end{aligned}$$

impliziert, daß eine reflektierte und transmittierte Welle im Grenzfall verschwindender einfallender Welle existiert. Diese Tatsache nutzen wir aus, um die Eigenschaften geführter Wellen einfach durch Spezialisierung der in Kapitel 7.3 gewonnenen Erkenntnisse abzuleiten anstatt den gesamten schwerfälligen Apparat nochmals zu bemühen.

## 7.4.2 Die Dispersionsrelation geführter Wellen

Da  $\mathbf{E}_T, \mathbf{E}_R \neq 0$  für  $\mathbf{E}_I \rightarrow 0$ , gilt  $R, T \rightarrow \infty$ , d.h. geführte Wellen sind *Resonanzen* des Systems (vgl. mit getriebenen harmonischen Oszillator)

$$x = \frac{F}{\omega^2 - \omega_0^2}$$

$\rightarrow \omega = \omega_0$  ist Resonanz. Damit erhält man die Dispersionsrelation geführter Wellen für verschwindende Nenner von  $R, T$ . Man kann ein allgemeines physikalisches Prinzip formulieren:

**Die Pole der Responsefunktion (oder der Greenschen Funktion) entsprechen Resonanzen des Systems.**

Man erhält damit von vorn:

$$(\alpha_s k_{sx} M_{22} + \alpha_c k_{cx} M_{11}) + i(M_{21} - \alpha_s k_{sx} \alpha_c k_{cx} M_{12}) \doteq 0$$

und mit

$$k_{sx} = i\mu_s, \quad k_{cx} = i\mu_c$$

$$(\alpha_s \mu_s M_{22} + \alpha_c \mu_c M_{11}) + (M_{21} + \alpha_s \mu_s \alpha_c \mu_c M_{12}) \doteq 0$$

$$M_{11} + \alpha_s \mu_s M_{12} + \frac{1}{\alpha_c \mu_c} M_{21} + \frac{\alpha_s \mu_s}{\alpha_c \mu_c} M_{22} \doteq 0$$

mit

$$\alpha_{TE} = 1, \quad \alpha_{TM} = \frac{1}{\varepsilon}$$

$\leadsto$  zusätzlich zur Materialdispersion

$$k^2(\omega) = \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_i(\omega) = k_x^2 + k_z^2$$

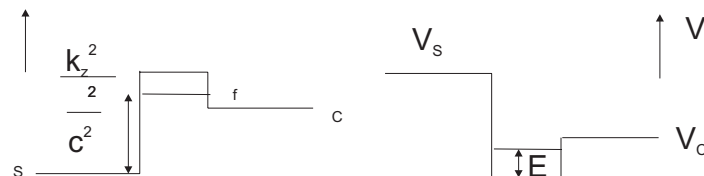
tritt die Wellenleiterdispersionsrelation  $k_z(\omega, \text{Geometrie}) \leadsto$  es gibt nur einen diskreten Satz von Lösungen  $\longrightarrow$  *Moden*, d.h. bei Vorgabe von  $\varepsilon_i, d_i, \omega$  folgt  $k_{z\mu}(\omega)$ .

**Bemerkung:** Analogie zur zeitfreien Schrödingergleichung  
z.B. TE-Polarisation

$$\left\{ \frac{d^2}{dx^2} + \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon(x) \right\} E(x) = k_z^2 E(x) \longleftrightarrow \left\{ \frac{d^2}{dx^2} - \frac{2m}{\hbar^2} V(x) \right\} \psi(x) = -\frac{2m}{\hbar^2} E \psi(x)$$

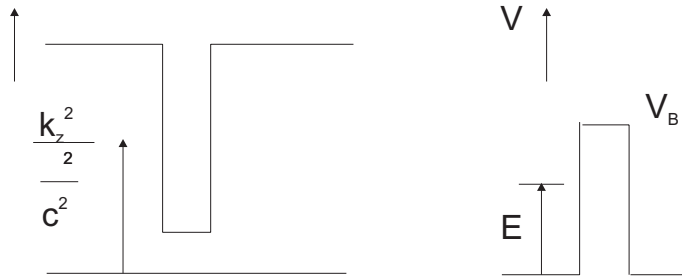
- geführte Wellen  $\longleftrightarrow$  diskrete Energieeigenwerte

$$k_z^2 > \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_{c,s} \longleftrightarrow E < V_{\text{Umgebung}}$$



- Tunneleffekt

$$k_z^2 > \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_{\text{Film}} \longleftrightarrow E < V_{\text{Barriere}}$$



- Warum nur endliche Anzahl diskreter Moden?

Randbedingung ( $\mathbf{E}_{T,R} \rightarrow 0$  für  $x \rightarrow \pm\infty$ ) wählt diskrete Werte von  $k_z$  aus.  $\varepsilon_c, \varepsilon_s, k_z$  bestimmen eindeutig die Ableitungen auf den Grenzflächen  $\curvearrowright$  nur die erlaubten  $k_z$  führen auf Lösungen mit dem richtigen asymptotischen Verhalten auf dem Rand.

- Dispersionsrelation ist eine komplizierte transzendente Gleichung für  $k_z(\omega, d, \varepsilon_i, \varepsilon_c, \varepsilon_s) \rightarrow$  im allgemeinen werden numerische Nullstellensuchroutinen benötigt.
- Feldberechnung im Schichtsystem

1.  $k_z$  aus Dispersionsrelation
2. im Substrat gilt:

$$F(x) = F \exp(\mu_s x), \quad G(x) = \alpha \frac{\partial}{\partial x} \{F \exp(\mu_s x)\}$$

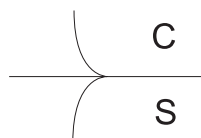
$\curvearrowright F(0), G(0) = \alpha \mu_s F(0)$  sind bekannt bei Vorgabe von  $F(0) \rightarrow$  freier Parameter

- 3.

$$\begin{pmatrix} F \\ G \end{pmatrix}_x = \widehat{\mathbf{M}}(x) \begin{pmatrix} F \\ G \end{pmatrix}_0 = \widehat{\mathbf{M}}(x) \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \mu_s \end{pmatrix} F(0).$$

### 7.4.3 Geführte Wellen an einer Grenzfläche - Oberflächenpolaritonen

Gibt es lokalisierte Anregungen an einer Oberfläche?



Bedingung:  $k_z^2 > \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_{c,s}$

Matrix:

$$\widehat{\mathbf{M}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

damit folgt die Dispersionsrelation

$$1 + \frac{\alpha_s \mu_s}{\alpha_c \mu_c} = 1.$$

**a) TE-Polarisation** ( $\alpha = 1$ )

$$\mu_s + \mu_c = 0,$$

da beide Größen positiv sind, gibt es keine Lösung. Das ist physikalisch sofort klar, da hier

$$F = E, \quad G = \frac{\partial E}{\partial x}$$

und Feld und Ableitung müssen steig sein. Die Ableitung ist jedoch unstetig an der Grenzfläche.  $\leadsto$  es existieren keine TE-polarisierten Oberflächenpolaritonen.

**b) TM-Polarisation** ( $\alpha = 1/\varepsilon$ )

Dispersionsrelation

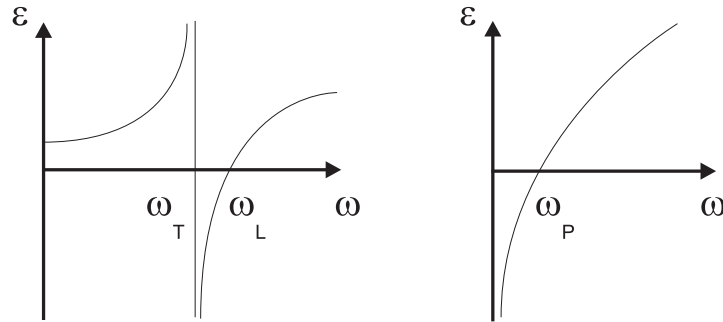
$$\frac{\mu_c}{\varepsilon_c} + \frac{\mu_s}{\varepsilon_s} = 0 \quad \longrightarrow \text{vgl. Brewster } \frac{k_{cx}}{\varepsilon_c} - \frac{k_{sx}}{\varepsilon_s} = 0,$$

da

$$\mu_c, \mu_s > 0 \leadsto \varepsilon_c \cdot \varepsilon_s < 0,$$

d.h., ein Medium muß 'oberflächenaktiv' sein ( $\varepsilon_c \vee \varepsilon_s < 0$ )  $\longrightarrow$  Geführte TM-polarisierte Oberflächenwellen existieren nur in der Nähe von Resonanzen eines beteiligten Materials.

### Existenzbedingungen:



- Dielektrika  $\longrightarrow \omega_{0(T)} < \omega < \omega_L \longrightarrow$  Oberflächen-Phonon-Polaritonen
  - Metall  $\longrightarrow \omega < \omega_p \longrightarrow$  Oberflächen-Plasmon-Polaritonen
- explizite Dispersionsrelation

$$(\mu_c \varepsilon_s)^2 = (\mu_s \varepsilon_c)^2$$

$$\varepsilon_s^2(\omega) \left\{ k_z^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_c \right\} = \varepsilon_c^2 \left\{ k_z^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_s(\omega) \right\}$$

$$k_z(\omega) = \frac{\omega}{c} \sqrt{\frac{\varepsilon_s(\omega) \varepsilon_c}{\varepsilon_c + \varepsilon_s(\omega)}}$$

$\curvearrowright$

- zweite Bedingung:  $\varepsilon_c + \varepsilon_s(\omega) < 0$ , also insgesamt:

1.  $\varepsilon_s(\omega) < 0, \varepsilon_c > 0$ ,
2.  $|\varepsilon_s(\omega)| > \varepsilon_c$

$\curvearrowright$  es existiert bei Vorgabe der Frequenz und für eine Materialkombination nur eine geführte Mode mit  $k_z(\omega)$ .

### Beispiel:OF-Plasmon-Polaritonen an Grenzfläche Luft-Metall

Metall:

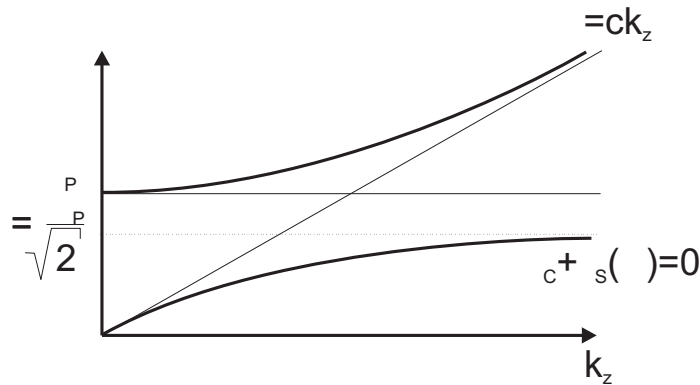
$$\varepsilon_s(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} < -\varepsilon_c = -1$$

$$\curvearrowright \omega^2 < \frac{\omega_p^2}{2}.$$

Explizite Dispersionsrelation:

$$k_z^2(\omega) = \frac{\omega^2}{c^2} \frac{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}{1 + 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}$$

$$\begin{aligned} \leadsto \omega^2 &= \frac{1}{2} (\omega_p^2 + 2c^2 k_z^2) - \sqrt{\frac{1}{4} (\omega_p^2 + 2c^2 k_z^2)^2 - c^2 k_z^2 \omega_p^2}, \\ k_z \longrightarrow 0 &\leadsto \omega \longrightarrow 0, \quad k_z \longrightarrow \infty \leadsto \omega \longrightarrow \omega_p / \sqrt{2}. \end{aligned}$$



$\longrightarrow$  an der Grenzfläche können sich im 'dämpfenden' Frequenzbereich (Volumen) ungedämpfte Wellen ausbreiten.

### Feldstruktur eines TM-OF-Polaritons

$$\text{stetige Felder} \longrightarrow F = H_y = H, \quad G = \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial H}{\partial x},$$

da  $\varepsilon$  das Vorzeichen wechselt, gilt das auch für  $\frac{\partial H_y}{\partial x}$ .

$$H_s(x, z) = H_0 \exp(ik_z z) \exp(\mu_s x)$$

$$H_s(x, z) = H_0 \exp(ik_z z) \exp(-\mu_c x)$$

$$\text{mit } \mu_s = \sqrt{k_z^2 + \frac{\omega^2}{c^2} |\varepsilon_M|}.$$

Aus der Maxwellgleichung

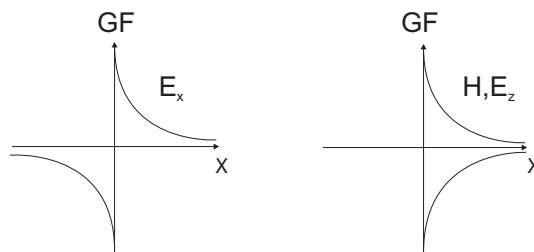
$$\mathbf{E}_{\text{TM}} = \frac{i}{\omega \varepsilon_0 \varepsilon} \text{rot } \mathbf{H}_{\text{TM}}$$

folgt

$$E_{s,cx} = \frac{k_z}{\omega \varepsilon_0 \varepsilon_{s,c}} H \quad \sim \frac{\partial}{\partial z}$$

$$E_{sz} = \frac{i}{\omega \varepsilon_0} \frac{\mu_s}{\varepsilon_s} H \quad \sim \frac{\partial}{\partial x}$$

$$E_{cz} = -\frac{i}{\omega \varepsilon_0} \frac{\mu_c}{\varepsilon_c} H \quad \sim \frac{\partial}{\partial x}.$$

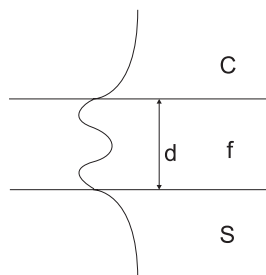


$\hookrightarrow H, E_x$  in Phase,  $E_z$  um  $-\pi/2$  phasenverschoben.

#### OF-Wellen:

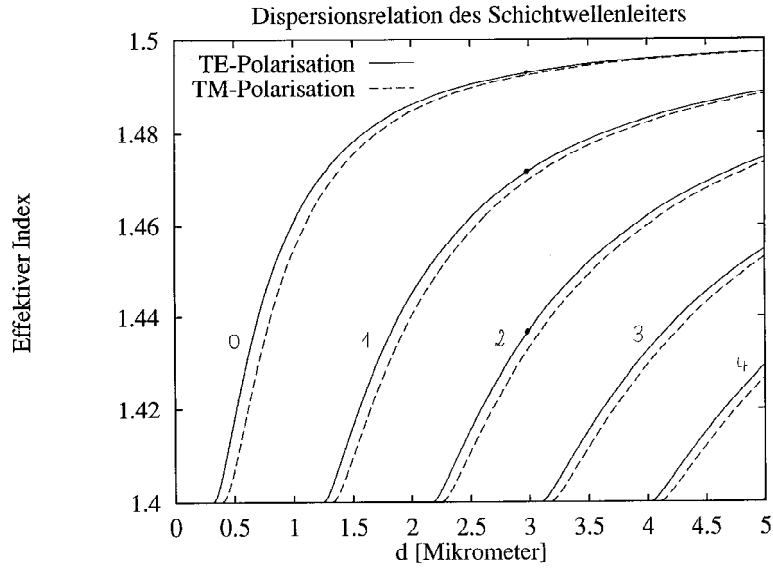
- Spektroskopie, jedoch eingeschränkter Frequenzbereich
- Radiowellen (AM)
- Erdbeben, Wasserwellen
- whispering gallery

#### 7.4.4 Geführte Wellen in einer Schicht - Schichtwellenleiter



$\longrightarrow$  eigentliche Basis der Integrierten Optik  
typische Parameter:

- $d \approx \text{einige } \lambda$
- $\Delta\varepsilon \approx 10^{-3} - 10^{-1}$
- Herstellung durch Beschichtung, Diffusion, Ionenimplantation



$$\widehat{\mathbf{M}} = \widehat{\mathbf{m}}(d) = \begin{pmatrix} \cos(k_{\text{fx}}d) & \frac{1}{\alpha_{\text{f}}k_{\text{fx}}} \sin(k_{\text{fx}}d) \\ -\alpha_{\text{f}}k_{\text{fx}} \sin(k_{\text{fx}}d) & \cos(k_{\text{fx}}d) \end{pmatrix}$$

Dispersionsrelation:

$$M_{11} + \alpha_{\text{s}}\mu_{\text{s}}M_{12} + \frac{1}{\alpha_{\text{c}}\mu_{\text{c}}}M_{21} + \frac{\alpha_{\text{s}}\mu_{\text{s}}}{\alpha_{\text{c}}\mu_{\text{c}}}M_{22} \doteq 0$$

$$\cos \frac{\delta}{2} + \frac{\alpha_{\text{s}}\mu_{\text{s}}}{\alpha_{\text{f}}k_{\text{fx}}} \sin \frac{\delta}{2} - \frac{\alpha_{\text{f}}k_{\text{fx}}}{\alpha_{\text{c}}\mu_{\text{c}}} \sin \frac{\delta}{2} + \frac{\alpha_{\text{s}}\mu_{\text{s}}}{\alpha_{\text{c}}\mu_{\text{c}}} \cos \frac{\delta}{2} = 0, \quad \frac{\delta}{2} = k_{\text{fx}}d$$

$$\tan(k_{\text{fx}}d) = \frac{1 + \frac{\alpha_{\text{s}}\mu_{\text{s}}}{\alpha_{\text{c}}\mu_{\text{c}}}}{\frac{\alpha_{\text{f}}k_{\text{fx}}}{\alpha_{\text{c}}\mu_{\text{c}}} - \frac{\alpha_{\text{s}}\mu_{\text{s}}}{\alpha_{\text{f}}k_{\text{fx}}}} = \frac{\alpha_{\text{f}}k_{\text{fx}}(\alpha_{\text{s}}\mu_{\text{s}} + \alpha_{\text{c}}\mu_{\text{c}})}{\alpha_{\text{f}}^2k_{\text{fx}}^2 - \alpha_{\text{c}}\alpha_{\text{s}}\mu_{\text{c}}\mu_{\text{s}}}$$

$$\tan(k_{\text{fx}}d) = \frac{\frac{k_{\text{fx}}}{\alpha_{\text{f}}} \left( \frac{\mu_{\text{s}}}{\alpha_{\text{c}}} + \frac{\mu_{\text{c}}}{\alpha_{\text{s}}} \right)}{\frac{k_{\text{fx}}^2}{\alpha_{\text{c}}\alpha_{\text{s}}} - \frac{\mu_{\text{c}}\mu_{\text{s}}}{\alpha_{\text{f}}^2}}.$$

#### 7.4.4.1 a) TE-Polarisation

( $\alpha = 1$ )

$$\tan(k_{\text{fx}}d) = \frac{k_{\text{fx}}(\mu_{\text{s}} + \mu_{\text{c}})}{k_{\text{fx}}^2 - \mu_{\text{c}}\mu_{\text{s}}},$$

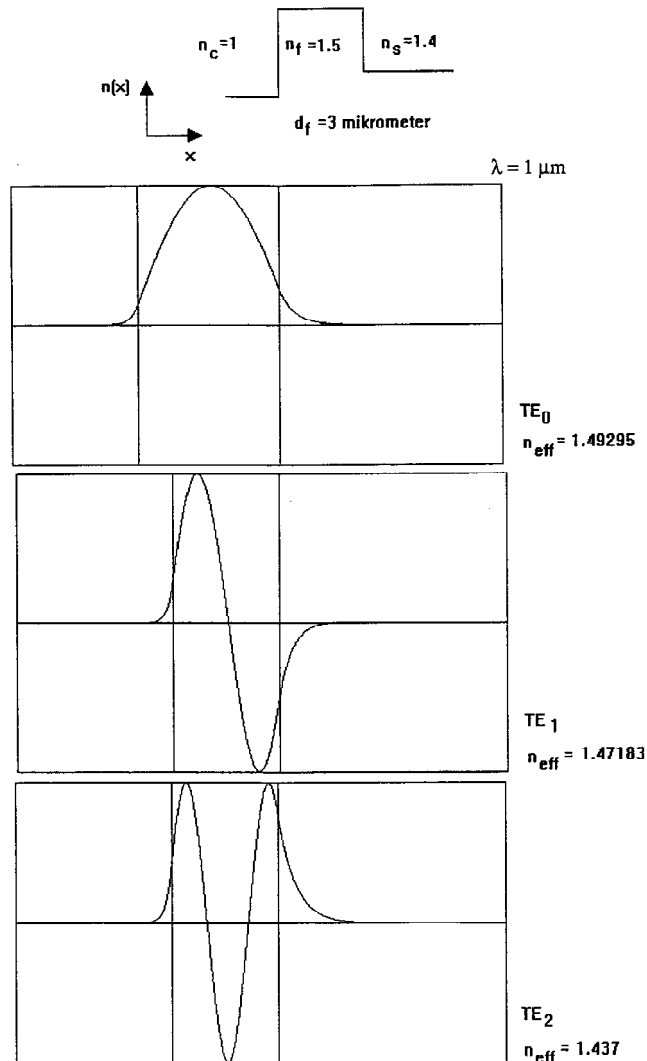
→ implizite Gleichung für  $k_z$  → Lösungen  $k_{z\nu}$ ; für reelle dielektrische Funktionen und

$$\frac{\omega^2}{c^2} \max(\varepsilon_{\text{c}}, \varepsilon_{\text{s}}) \leq k_z^2 \leq \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_{\text{f}}$$



## GEFÜHRTE MODEN IM SCHICHTWELLENLEITER

Konfiguration:



sind alle Lösungen reell.

### 7.4.4.2 Bemerkungen:

- Trick zur Bestimmung der Wellenzahl (Propagationskonstante)  $\rightarrow k_z$  vorgeben  $\rightarrow d$  oder  $\omega$  bestimmen

1. Startwert:  $k_z = (\omega/c) \sqrt{\varepsilon_f}$
2. einsetzen in :

$$d_{\text{calc}} = \frac{1}{k_{fx}} \left\{ \arctan \left( \frac{k_{fx} (\mu_s + \mu_c)}{k_{fx}^2 - \mu_c \mu_s} \right) + \nu \pi \right\}.$$

(  $\nu = 0, 1, 2..$  nummeriert Moden)

3.  $\Delta = d_{\text{calc}} - d$

4.  $k_z$  reduzieren bis  $d_{\text{calc}} - d$  das Vorzeichen wechselt.

5. Intervallhalbierung

- meist im sichtbaren Gebiet  $\curvearrowright \varepsilon_i(\omega) = \varepsilon_i$ , da weit weg von Resonanz. Wellenleiterdispersion i.a. viel stärker als Materialdispersion.

- Verschwinden eines Modes  $\longrightarrow$  cut-off (hier o.B.d.A.  $\varepsilon_c < \varepsilon_s$ )

Definition des cut offs:  $\gamma_s = 0 \longrightarrow$  kein Abklingen  $\curvearrowright k_z^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_s$

$$\tan\left(\frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_f - \varepsilon_s} d\right) = \frac{\sqrt{\varepsilon_f - \varepsilon_s} \sqrt{\varepsilon_s - \varepsilon_c}}{\varepsilon_f - \varepsilon_s} = \sqrt{\frac{\varepsilon_s - \varepsilon_c}{\varepsilon_f - \varepsilon_s}}$$

$\curvearrowright$

$$(\omega d)_{\text{co}}^{\text{TE}} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_f - \varepsilon_s}} \left\{ \arctan \sqrt{\frac{\varepsilon_s - \varepsilon_c}{\varepsilon_f - \varepsilon_s}} + \nu \pi \right\}$$

$$(\omega d)_{\text{co}}^{\text{TE}} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_f - \varepsilon_s}} \left\{ \underbrace{\arctan a}_{\max \pi/2} + \nu \pi \right\}$$

mit Asymmetrieparameter  $a$  :

$$\begin{array}{ll} \varepsilon_s \approx \varepsilon_c & a \longrightarrow 0 \\ \varepsilon_s \approx \varepsilon_f & a \longrightarrow \infty \\ \varepsilon_s \neq \varepsilon_c & \end{array} .$$

$\longrightarrow$  cut-off Frequenz für  $k_z(\omega) \longrightarrow d$  fest

$\longrightarrow$  cut-off Dicke für  $k_z(d) \longrightarrow \omega$  fest

1. symmetrischer Wellenleiter  $\curvearrowright$  cut-off = 0

2. stark asymmetrischer Wellenleiter  $(\omega d)_{\text{co}}^{\text{TE}} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_f - \varepsilon_s}} \left\{ \frac{\pi}{2} + \nu \pi \right\}$

- Anzahl der Moden  $m \longrightarrow$  Umstellen nach  $\nu$  und  $\nu = m + 1$

•

$$m = 1 + \text{int} \left\{ \frac{1}{\pi} \left( \frac{2\pi}{\lambda} \sqrt{\varepsilon_f - \varepsilon_s} d - \arctan a \right) \right\}$$

mit

$$\text{int}(c) = \begin{cases} \text{Vorkommawert} & \text{f. } c > 0 \\ -1 & \text{f. } c < 0 \end{cases} .$$

- Dispersionskurven  $\longrightarrow$  graphische Darstellung der Dispersionsrelation mit  $n_{\text{eff}} = k_z / \left( \frac{\omega}{c} \right)$

1.  $k_z(\omega) \longrightarrow n_{\text{eff}}(\omega)$

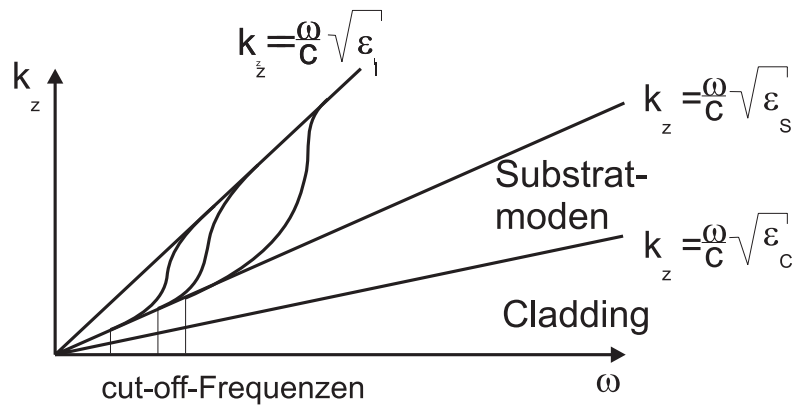
2.  $k_z(d) \longrightarrow n_{\text{eff}}(d)$

3.  $k_z(\omega d) \longrightarrow$  speziell in Faseroptik

$$V = \frac{\omega}{c} d \sqrt{\varepsilon_f - \varepsilon_s} = \frac{\omega}{c} d \text{NA} = 2\pi \text{NA} \frac{d}{\lambda}$$

$$B = \frac{n_{\text{eff}}^2 - \varepsilon_s}{\varepsilon_f - \varepsilon_s}$$

$\leadsto n_{\text{eff}}(V)$  oder  $B(V)$ ;  $V$ - Wellenleiterparameter,  $\text{NA}$ - numerische Apertur



Modenanzahl:

$$m = 1 + \text{int} \left\{ \frac{1}{\pi} \left( \frac{2\pi}{\lambda} \sqrt{\varepsilon_f - \varepsilon_s} d - \arctan a \right) \right\}$$

$$= 1 + \text{int} \left\{ 2\text{NA} \frac{d}{\lambda} - \frac{\arctan a}{\pi} \right\}$$

$$m = 1 + \text{int} \left\{ 2\text{NA} \frac{d}{\lambda} \right\} \text{ symm. WL}$$

$$m = 1 + \text{int} \left\{ 2\text{NA} \frac{d}{\lambda} - \frac{1}{2} \right\} \text{ stark asymm. WL}$$

• Feldstruktur

$$\mu_{s,c} = \sqrt{k_z^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_{s,c}}$$

1.  $k_z \longrightarrow \sqrt{\frac{\omega}{c} \varepsilon_f} \leadsto \mu_{s,c}$  werden am größten  $\leadsto$  starker Abfall
2.  $k_z \longrightarrow \sqrt{\frac{\omega}{c} \max(\varepsilon_{s,c})} \leadsto \mu_s \vee \mu_c \longrightarrow 0 \leadsto$  weites Eindringen

$$\begin{pmatrix} F \\ G \end{pmatrix}_x = \hat{\mathbf{m}}(x) \begin{pmatrix} F \\ G \end{pmatrix}_0$$

$$F = E, \quad G = \frac{dF}{dx} = \frac{dE}{dx}$$

$$\curvearrowright E_f(x) = m_{11}E_0 + m_{12} \left. \frac{dE}{dx} \right|_0, \quad \left. \frac{dE}{dx} \right|_0 = \mu_s E_0$$

$$\curvearrowright E_f(x) = E_0 \left\{ \cos(k_{fx}d) + \frac{\mu_s}{k_{fx}} \sin(k_{fx}d) \right\}.$$

Gesamtfeld einer Mode:

$$E_\nu(x, z) = E_0 \exp(i k_{z\nu} z) \begin{cases} \left\{ \cos(k_{fx\nu}d) + \frac{\mu_{s\nu}}{k_{fx\nu}} \sin(k_{fx\nu}d) \right\} \exp[-\mu_c(x-d)] & x > d \\ \cos(k_{fx\nu}x) + \frac{\mu_{s\nu}}{k_{fx\nu}} \sin(k_{fx\nu}x) & 0 \leq x \leq d \\ \exp(\mu_s x) & x < 0 \end{cases},$$

also:  $k_{z\nu}$  aus Dispersionsrelation  $\curvearrowright$  Modenfeld  $E_\nu(x)$ ;  $\nu$ -Anzahl der Nulldurchgänge

- Energietransport

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \frac{1}{2} \Re(\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*)$$

$$\langle \mathbf{S}_x \rangle = \frac{1}{2} \Re(E H_z^*) = \frac{1}{2\omega\mu_0} \Re\left(iE \frac{\partial E^*}{\partial x}\right) = 0$$

$$\langle \mathbf{S}_z \rangle = \frac{1}{2} \Re(E H_x^*) = -\frac{1}{2\omega\mu_0} \Re\left(iE \frac{\partial E^*}{\partial z}\right) = \frac{k_{z\nu}}{2\omega\mu_0} |E_\nu(x)|^2$$

$\curvearrowright$  Energiefluß geführter Moden nur in Ausbreitungsrichtung

- Geführte Leistung

$$P_\nu = \frac{k_{z\nu}}{2\omega\mu_0} \int_{-\infty}^{\infty} |E_\nu(x)|^2 dx \quad \left[ \frac{W}{m} \right]$$

#### 7.4.4.3 b) TM-Polarisation

$$(\alpha = 1/\varepsilon)$$

- Dispersionsrelation

$$\tan(k_{fx}d) = \frac{k_{fx}\varepsilon_f(\mu_s\varepsilon_c + \mu_c\varepsilon_s)}{k_{fx}^2\varepsilon_c\varepsilon_s - \mu_c\mu_s\varepsilon_f^2}.$$

- cut off

$$\tan\left(\frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon_f - \varepsilon_s}d\right) = \frac{\sqrt{\varepsilon_f - \varepsilon_s}\sqrt{\varepsilon_s - \varepsilon_c}\varepsilon_s\varepsilon_f}{(\varepsilon_f - \varepsilon_s)\varepsilon_s\varepsilon_c} = \frac{\varepsilon_f}{\varepsilon_c}\sqrt{\frac{\varepsilon_s - \varepsilon_c}{\varepsilon_f - \varepsilon_s}}$$

$\curvearrowright$

$$(\omega d)_{\text{co}}^{\text{TM}} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_f - \varepsilon_s}} \left\{ \arctan\left(\frac{\varepsilon_f}{\varepsilon_c}a\right) + \nu\pi \right\}$$

$\curvearrowright$  für TM-Polarisation sind cut-off Dicken und Frequenzen größer  $\curvearrowright k_{z\nu}^{\text{TE}} > k_{z\nu}^{\text{TM}}$ .

- Anzahl der Moden

$$m = 1 + \text{int} \left\{ \frac{1}{\pi} \left( \frac{2\pi}{\lambda} \sqrt{\varepsilon_f - \varepsilon_s}d - \arctan\left(\frac{\varepsilon_f}{\varepsilon_c}a\right) \right) \right\}.$$

- Feldstruktur

$$H_\nu(x, z) = H_0 \exp(ik_{z\nu}z) \begin{cases} \left\{ \cos(k_{\text{fx}\nu}d) + \frac{\varepsilon_f\mu_{\text{sx}\nu}}{\varepsilon_s k_{\text{fx}\nu}} \sin(k_{\text{fx}\nu}d) \right\} \exp[-\mu_c(x-d)] & x > d \\ \cos(k_{\text{fx}\nu}x) + \frac{\varepsilon_f\mu_{\text{sx}\nu}}{\varepsilon_s k_{\text{fx}\nu}} \sin(k_{\text{fx}\nu}x) & 0 \leq x \leq d \\ \exp(\mu_s x) & x < 0 \end{cases},$$

und die elektrischen Feldkomponenten folgen mit

$$E_x = \frac{i}{\omega\varepsilon_0\varepsilon} \frac{\partial H}{\partial z} = -\frac{k_{z\nu}}{\omega\varepsilon_0\varepsilon} H$$

$$E_z = -\frac{i}{\omega\varepsilon_0\varepsilon(x)} \frac{\partial H}{\partial x}$$

- Energietransport

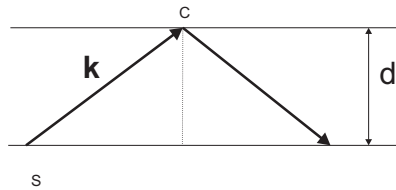
$$\langle \mathbf{S}_x \rangle = 0$$

$$\langle \mathbf{S}_z \rangle = \frac{1}{2} \Re(E_x H^*) = \frac{k_{z\nu}}{2\omega\varepsilon_0\varepsilon(x)} |H_\nu(x)|^2.$$

- Geführte Leistung

$$P_\nu^{\text{TM}} = \frac{k_{z\nu}}{2\omega\varepsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|H_\nu(x)|^2}{\varepsilon(x)} dx \quad \left[ \frac{W}{m} \right].$$

**Bemerkung:** Geführte Wellen im Strahlenbild



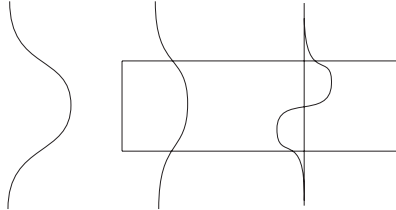
$$\Delta\Phi + \Delta\Theta_{\text{tot}} = 2k_{\text{xf}}d + \Theta_c + \Theta_s = 2m\pi.$$

### 7.4.5 Anregung geführter Moden

→ OF-Polaritonen analog

zwei Möglichkeiten: Feldanpassung oder Wellenzahl ( $k_z$ )-Anpassung

- Feldanpassung → Stirnflächenkopplung



im Wellenleiter (ohne Strahlungsmoden):

$$E(x, z) = \sum_{\nu} a_{\nu} E_{\nu}(x) \exp(i k_{z\nu} z)$$

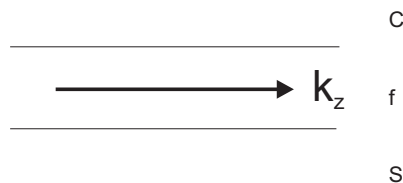
$$\hookrightarrow E(x, 0) \approx \sum_{\nu} a_{\nu} E_{\nu}(x) \quad \left| \int E_{\mu}(x) \right.$$

$$\text{wegen : } P_{\nu} = \frac{k_{z\nu}}{2\omega\mu_0} \int_{-\infty}^{\infty} |E_{\nu}(x)|^2 dx$$

$$a_{\nu} = \frac{k_{z\nu}}{2\omega\mu_0 P_{\nu}} \int_{-\infty}^{\infty} E_{\text{in}}(x) E_{\nu}(x) dx,$$

d.h. die Mode ' $\nu$ ' wird durch das einfallende Feld  $E_{\text{in}}(0)$  mit der Amplitude  $a_{\nu}$  angeregt. Gauß-Strahl regt den Grund-Modus gut an. Wegen der Symmetrie ungerader Moden werden sie nur von versetztem Gauß-Strahl angeregt.

- Wellenzahlanpassung → Impulserhaltung



1.  $k_z$  muß an Grenzflächen stetig übergehen
2. Bedingung für die Existenz geführter Wellen

$$k_z > \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_{c,s}}$$

auch für OF-Polaritonen

$$k_z(\omega) = \frac{\omega}{c} \sqrt{\frac{\varepsilon_s(\omega) \varepsilon_c}{\varepsilon_c + \varepsilon_s(\omega)}} = \frac{\omega}{c} \varepsilon_c \sqrt{\frac{|\varepsilon_M(\omega)|}{|\varepsilon_M(\omega)| / \varepsilon_c - 1}} > \frac{\omega}{c} \varepsilon_c.$$

### 3. Dispersionsrelation der Volumenwelle erfordert

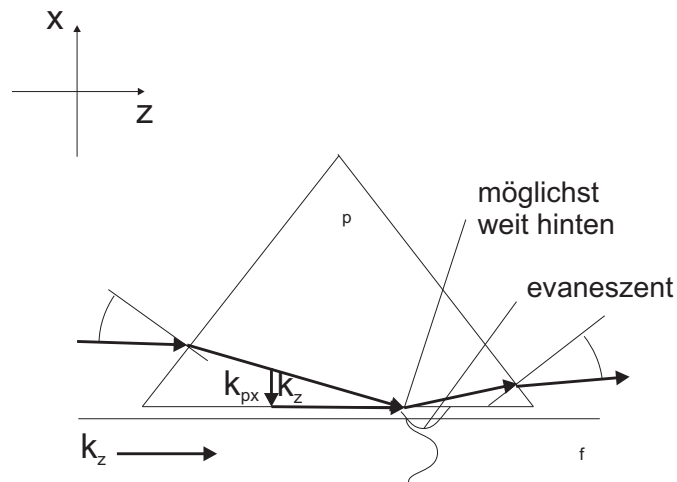
$$k_z = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_{c,s} - k_{s,cx}^2} < \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_{c,s}}$$

↪ Widerspruch

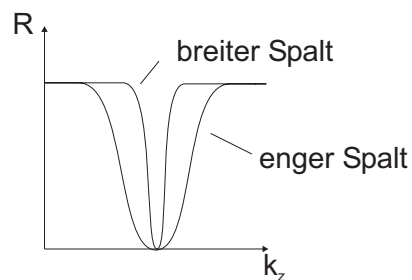
#### • Prismenkopplung

Auf Wellenleiter Medium mit  $\varepsilon_p > \varepsilon_f$  (Prisma) ↪  $k_z < \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_f}$  ↪  $k_z < \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_p}$  ↪

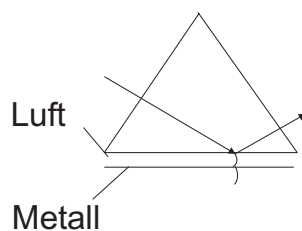
$$k_{px} = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_p - k_z^2} > 0.$$



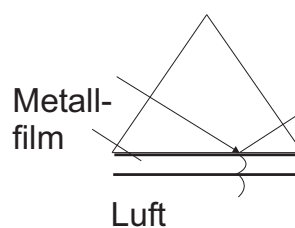
→ Physik des Tunneleffektes, ATR ('attenuated total reflection')



Breite und Minimum der Resonanz und damit die Effektivität der Anregung hängen von Breite des Luftspalts ab ↪ Strahlungsdämpfung  $\sim 1/\text{Breite}$  → Optimierung; Prisma 'verfälscht' Mode

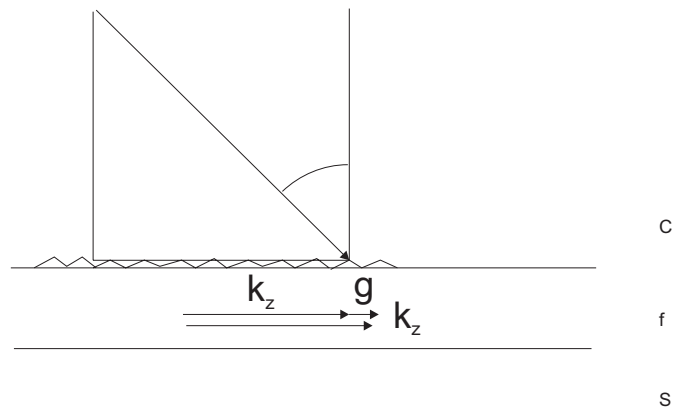


Otto-Geometrie (WL, OF)



Kretschmann-Geometrie (OF)

- Gitterkoppler



Gitter:

$$d(z) = d + \varsigma(z)$$

$$\varsigma(z) = A \sin(gz) \quad \text{mit} \quad g = \frac{2\pi}{P}$$

$P$ - Gitterperiode

Bedingung:

$$k_{zv} = k_z + mg$$

$$= \frac{\omega}{c} n_s \sin \phi + mg.$$

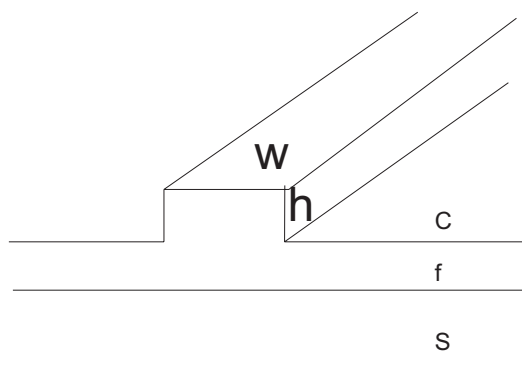
Gittermodulation bestimmt Effektivität (ähnlich Luftspalt).

Bei beiden Methoden ist Einkopplung stets mit Auskopplung verbunden.

## 7.4.6 Einige Bemerkungen zu Streifen- und Faserwellenleitern

### 7.4.6.1 Streifenwellenleiter

→ für Anwendung wichtiger → zweidimensionale Führung





i. a. keine Aufspaltung in TE- und TM-Moden  $\rightarrow$  Hybridmoden (besitzen alle Feldkomponenten)

$$\mathbf{E}_\nu(x, y) = \begin{pmatrix} \mathbf{E}_t(x, y) \\ E_z(x, y) \end{pmatrix}.$$

Die Gleichungen lassen sich entkoppeln und es folgt eine Eigenwertgleichung für  $\mathbf{E}_t(x, y)$

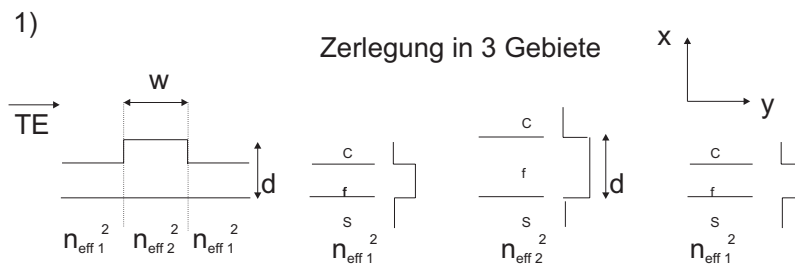
$$\left( \nabla_t^2 + \left\{ \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon(x, y) - k_z^2 \right\} \right) \mathbf{E}_t(x, y) + \nabla_t \{ \mathbf{E}_t(x, y) \nabla_t \log \varepsilon(x, y) \} = 0$$

mit

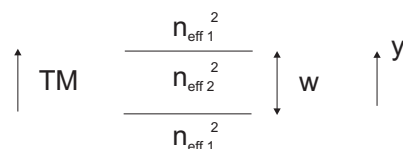
$$\nabla_t = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

EW-Gleichung kann nur mit vektoriellen Eigenwertlösern behandelt werden  $\rightarrow$  z.B. **F**inite-**E**lement-**M**ethode (FEM).

Wichtige Näherung  $\rightarrow$  Effektive-Index-Methode: Quasi-TE, Quasi-TM  
 $\rightarrow$  sukzessive Lösung für zwei Schichtwellenleiter



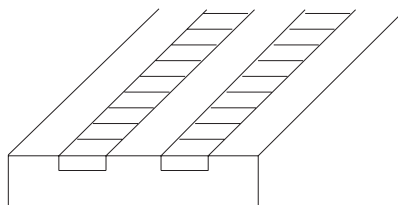
2) in y-Richtung nun als effektiver Wellenleiter



#### 7.4.6.2 Grundbauelemente:

1. Richtkoppler

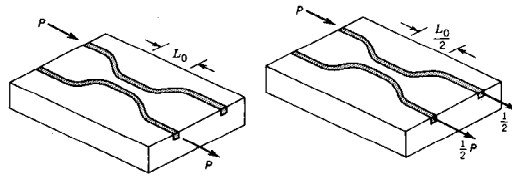
Aufbau:



Theorie: Supermoden, Kopplung

$$P_1(z) = P_0 \cos^2(k_{\text{kop}} z)$$

→ nichtlinearer Schalter.  
Technologie:



#### 7.4.6.3 Reflektoren (Spiegel)

→ Bragg-Gitter

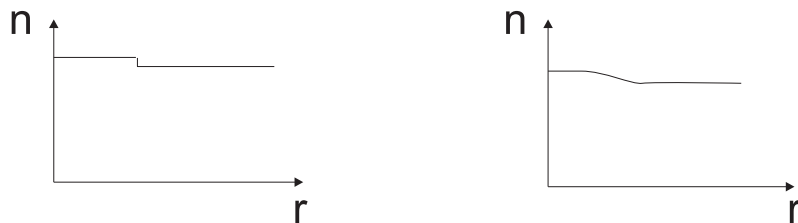
$$2|k_z| = 2\frac{2\pi}{\lambda}n_{\text{eff}} = mg = m\frac{2\pi}{\Lambda}$$

$$\Lambda = \frac{m\lambda}{2n_{\text{eff}}}.$$

#### 7.4.6.4 Faserwellenleiter

→ Quarzglas, SiO<sub>2</sub>, → Kern, cladding, jacket, zylindrische Geometrie, step-index, graded-index

Brechzahlverhältnisse:



Wellenleiterparameter:

$$V = \frac{2\pi}{\lambda}r_{\text{co}}\sqrt{n_{\text{co}}^2 - n_c^2}$$

Für  $V < 2.405$  single-mode Wellenleiter, ansonsten multi-mode

i.a. schwache Wellenleitung → skalare Näherung der Eigenwertgleichung

$$\left(\nabla_t^2 + \left\{\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon(x,y) - k_z^2\right\}\right)\psi(x,y) = 0$$

→ Entartung, Zylindersymmetrie, Besselfunktionen sind Eigenlösungen, Grundmodus kann oft durch Gauß-Profil genähert werden für  $1 < V < 2.405$ . Man erhält mit

$$\Delta = 0.5\frac{\varepsilon_{\text{co}} - \varepsilon_c}{\varepsilon_{\text{co}}}$$

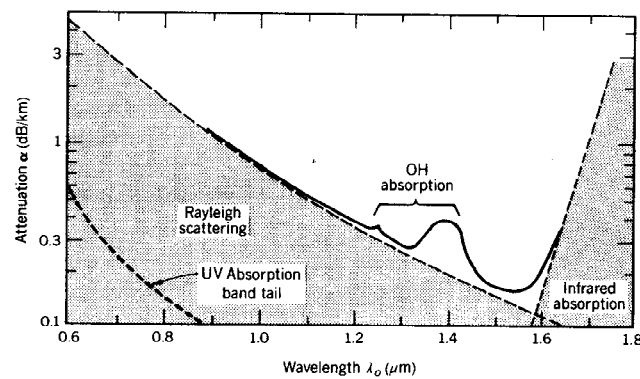
$$\psi \sim \psi_0 \exp \left( -2 \frac{r^2}{r_{co}^2} \log V \right) / \exp(-2 \log V)$$

$$k_z = \frac{1}{r_{co}} \sqrt{\frac{V^2}{2\Delta} - 1 - 2 \log V}.$$

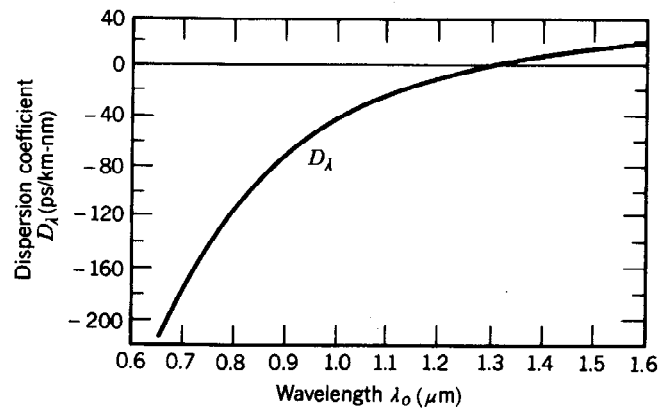
#### 7.4.6.5 Dämpfung und Dispersion

→ Dämpfung extrem niedrig

$\alpha = 0.2 \text{ dB/km @ } 1.55 \mu\text{m}$  (50% nach 15 km)



→ im wesentliche Rayleigh-Streuung an stochastischen Inhomogenitäten  
Dispersion:



$$D_\omega = \frac{\partial^2 k_z}{\partial \omega^2} = \frac{\partial}{\partial \omega} \frac{1}{v_g}, \quad [D_\omega] = \frac{\text{ps}^2}{\text{km}}$$

oft:

$$D_\lambda = \frac{\partial}{\partial \lambda} \frac{1}{v_g}$$

mit

$$\omega = \frac{2\pi c}{\lambda}$$

folgt

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} = -\frac{2\pi c}{\lambda^2} \frac{\partial}{\partial \omega}$$

und damit

$$D_\lambda = -\frac{2\pi c}{\lambda^2} D_\omega, \quad [D_\lambda] = \frac{\text{ps}}{\text{nm} \cdot \text{km}}$$

$D_\lambda = 1 \frac{\text{ps}}{\text{nm} \cdot \text{km}}$  bedeutet, daß sich eine Wellenlängenverschiebung um 1 nm bei der Ausbreitung über 1 km in einer Veränderung der Ankunftszeit um 1 ps bemerkbar macht.

Es gilt die Faustformel:

$$D_\lambda \left[ \frac{\text{ps}}{\text{nm} \cdot \text{km}} \right] \approx -\frac{1.88}{\lambda^2 [\mu\text{m}]} D_\omega \left[ \frac{\text{ps}^2}{\text{km}} \right].$$

Typische Dispersionswerte bei der Kommunikationswellenlänge von  $\lambda = 1550 \text{ nm}$ :  
Standardfaser (billig, einfaches Profil):  $D_\lambda = 17 \text{ ps}/(\text{nm} \cdot \text{km})$

# Kapitel 8

## Statistische Optik – Kohärenztheorie

### 8.1 Grundlagen

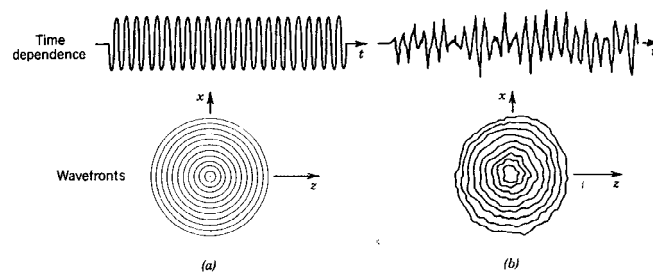
wesentliche Beiträge durch Max Born und Emil Wolf (50iger Jahre)

**Gegenstand:** Eigenschaften von ‘zufälligem’ Licht → Fluktuationen der Quelle oder der optischen Eigenschaften des Mediums, das vom Licht passiert wird.

- natürliches Licht (Wärmestrahler), viele unabhängige Atome (unterschiedliches  $\omega$  und Phase)
- Streuung an rauen Oberflächen

→ **Kohärenztheorie**

**Annahmen:** skalare Näherung  $u(\mathbf{r}, t)$ , bisher:  $u(\mathbf{r}, t) = U(\mathbf{r}, \omega) \exp -i\omega t + c.c.$  z.B.:  $U(\mathbf{r}, \omega) = \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r})$  → Phasen vollständig determiniert → *kohärentes Licht*



Feld ist Zufallsgröße, erfüllt jedoch nach wie vor die Wellengleichung. Statistische Eigenschaften führen zur Einteilung des Lichtes nach dem Grad der Korrelation der Phasen in:

- kohärentes Licht
- partiell kohärentes Licht
- inkohärentes Licht

Wir definieren zuerst wesentliche Begriffe der Kohärenztheorie.

## 8.2 Statistische Eigenschaften des Lichtes

### 8.2.1 Definitionen

$u(\mathbf{r}, t) \rightarrow$  komplexes analytisches Signal

$$u(\mathbf{r}, t) = \int_0^\infty U(\mathbf{r}, \omega) \exp(-i\omega t) d\omega$$

$$u_R(\mathbf{r}, t) = \Re \int_0^\infty U(\mathbf{r}, \omega) \exp(-i\omega t) d\omega.$$

#### 8.2.1.1 a) Intensität

$$I(\mathbf{r}, t) = \langle |u(\mathbf{r}, t)|^2 \rangle_e$$

$|u(\mathbf{r}, t)|^2$  - Zufallsintensität,  $\langle \rangle_e$  - Ensemblemittelwert  $\rightarrow$  gleiche Präparation des Systems

- statistisch stationär - Lampe mit konstantem Strom



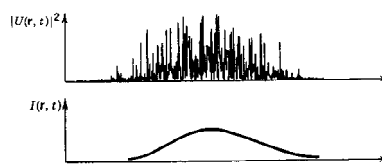
$$I(\mathbf{r}, t) = I(\mathbf{r}).$$

Es gilt die Ergodenhypothese: Ensemblemittelwert kann durch Zeitmittelwert ersetzt werden.

$$\langle \rangle_e = \langle \rangle_t = \langle \rangle$$

$$I(\mathbf{r}) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |u(\mathbf{r}, t)|^2 dt$$

- statistisch nichtstationär  $\rightarrow$  Lampe mit veränderlichem Strom  $\rightarrow I(\mathbf{r}, t)$



### 8.2.1.2 b) zeitliche Kohärenz und Spektrum

**Annahmen:** statistisch stationär  $\rightarrow I(\mathbf{r})$  und am festen Ort  $\rightarrow I(\mathbf{r}) = I$ .

Maß für Korrelation von  $u(t)$  und  $u(t + \tau) \rightarrow$  Autokorrelationsfunktion  $G(\tau)$

$$G(\tau) = \langle u^*(t)u(t + \tau) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T u^*(t)u(t + \tau) dt.$$

$G(\tau)$  ist die *zeitliche Kohärenzfunktion*.

**Zeitskalen:**  $u(t)$  schwach veränderlich innerhalb von  $t_K$  (Korrelationszeit), darüber hinaus 'rauh', d.h.,  $G(\tau) = 0$  für  $\tau > t_K$ .

Speziell gilt:

$$G(0) = I.$$

$G(\tau)$  beschreibt damit Kohärenz und Intensität. Man kann beide Effekte trennen durch die Einführung einer normierten Größe  $\rightarrow$  *komplexer zeitlicher Kohärenzgrad*  $g(\tau)$

$$g(\tau) = \frac{G(\tau)}{G(0)} = \frac{\langle u^*(t)u(t + \tau) \rangle}{\langle u^*(t)u(t) \rangle}$$

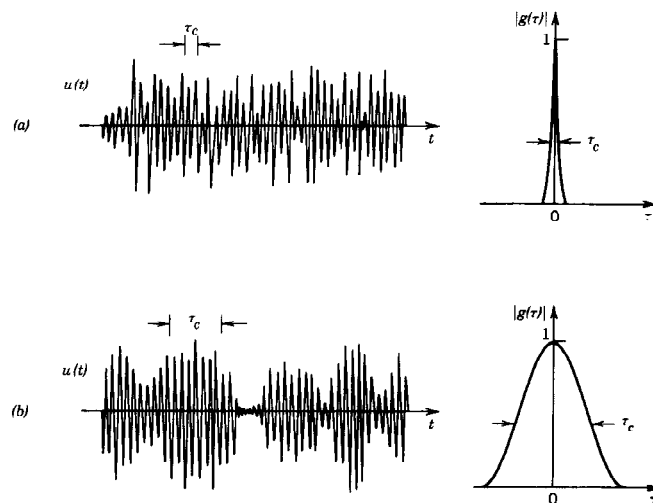
$$0 \leq g(\tau) \leq 1.$$

**Beispiel:** deterministisches Licht

$$u(t) = A \exp(-i\omega_0 t)$$

$$g(\tau) = \frac{\frac{1}{2T} \int |A|^2 \exp(-i\omega_0 \tau) dt}{\frac{1}{2T} \int |A|^2 dt} = \exp(-i\omega_0 \tau) \rightarrow |g(\tau)| = 1.$$

i.a.:



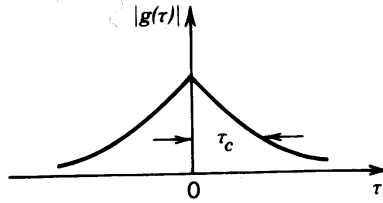
**Kohärenzzeit:**

$|g(\tau)|$  nimmt monoton ab  $\leadsto$  Definition der Kohärenzzeit über Breite von  $|g(\tau)| = 1/e$  o.  $1/2$ .

$$\tau_c = \int_{-\infty}^{\infty} |g(\tau)|^2 d\tau,$$

also  $|g(\tau)| = 1 \leadsto \tau_c \rightarrow \infty$ .

z.B.:  $g(\tau) = \exp(-|\tau|/A) \leadsto \tau_c = 2 \int \exp(-2|\tau|/A) d\tau = A(1 - 0) = A$ .



Kohärenzlänge:  $l_c = c\tau_c \leadsto$  wenn Längendifferenzen in optischen Systemen  $\leq l_c \rightarrow$  Kohärenz.

### 8.2.1.3 c) Das Wiener-Khinchin-Theorem

$\rightarrow$  Zusammenhang Spektrum und zeitliche Kohärenz

**Theorem:** Die Fouriertransformation der Autokorrelationsfunktion eines Signals ist identisch mit dem Betragsquadrat der Fouriertransformation des Signal.

hier also: Zusammenhang zwischen FT der zeitlichen Kohärenzfunktion und des Signalspektrums

$$G(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) \exp(-i\omega\tau) d\omega$$

und

$$S(\omega) = |U(\omega)|^2.$$

**Beweis** (beachten, daß endliche Zeiten, da bei stationären Prozessen unendliche Energie):

$$G(\tau) = \langle u^*(t)u(t+\tau) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T u^*(t)u(t+\tau) dt.$$

abgeschnittene FT:

$$U_T(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} u_T(t) \exp(i\omega t) dt$$

$$u_T(t) = \begin{cases} u(t) & \text{für } |t| \leq T \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$u_T(t) = \int_{-\infty}^{\infty} U_T(\omega) \exp(-i\omega t) d\omega,$$

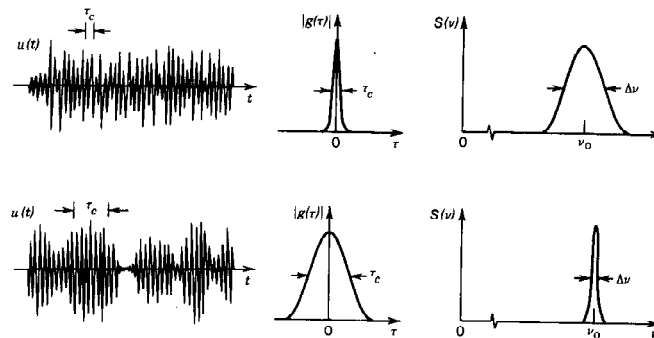


$$\begin{aligned}
G(\tau) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T U_T^*(\omega') \exp(i\omega' t) U_T(\omega'') \exp[-i\omega''(t + \tau)] d\omega' d\omega'' dt \\
&= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} 2\pi \int_{-T}^T |U_T(\omega')|^2 \exp(-i\omega' \tau) d\omega' \\
&\leadsto S(\omega) = 2\pi \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} |U_T(\omega)|^2 \quad \text{q.e.d.}
\end{aligned}$$

$S(\omega)d\omega \rightarrow$  spektrale Intensität zwischen  $\omega$  und  $\omega + d\omega$ . Da  $U(-\omega) = 0$ , gilt

$$I = \int_0^\infty S(\omega) d\omega.$$

$\rightarrow$  Kohärenz einer Lichtquelle durch spektrale Intensität bestimmt.



Es gilt:

$$\tau_c \Delta\omega = \text{const.}$$

mit spektraler Breite

$$\Delta\omega = \frac{[\int_0^\infty S(\omega) d\omega]^2}{\int_0^\infty S^2(\omega) d\omega}$$

$\leadsto$

- spektrale Filter verbessern Kohärenz, aber Intensität geht verloren,
- Monochromasie ( $\Delta\omega \rightarrow 0$ ) bedeutet vollst. zeitl. Kohärenz ( $\tau_c \rightarrow \infty$ ).
- wenn  $\Delta\omega \ll \omega_0$  oder  $\tau_c \gg t_{\text{system}} \rightarrow$  Quasimonochromasie (wie kohärentes Licht)

### 8.2.1.4 d) gegenseitige Kohärenzfunktion (räumliche und zeitliche Kohärenz)

→ Kreuzkorrelation  $u(\mathbf{r}_1, t_1)$ ,  $u(\mathbf{r}_2, t_2)$  mit  $\tau = t_2 - t_1$

$$G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau) = \langle u^*(\mathbf{r}_1, t), u(\mathbf{r}_2, t + \tau) \rangle$$

$$g(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau) = \frac{G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau)}{\sqrt{I(\mathbf{r}_1)I(\mathbf{r}_2)}}, \quad 0 \leq |g(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau)| \leq 1.$$

$G$  - gegenseitige Kohärenzfunktion,  $g$  - komplexer Kohärenzgrad,  $g(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau)$  - Maß für Korrelation zwischen  $(\mathbf{r}_1, t)$  und  $(\mathbf{r}_2, t + \tau)$ .

**Beispiel:** ebene, monochromatische Welle:

$$|g(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau)| = |\exp[\mathbf{i}\mathbf{k}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) - \omega\tau]| = 1.$$

speziell:

a) zeitliche Kohärenz:  $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_2 = \mathbf{r}$

b) räumliche Kohärenz:  $\tau = 0$ .

### 8.2.1.5 e) gegenseitige Intensität - räumliche Kohärenz

→  $\tau = 0$

$$G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, 0) = \langle u^*(\mathbf{r}_1, t), u(\mathbf{r}_2, t) \rangle = G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$$

$G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \rightarrow$  gegenseitige Intensität

$$g(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \frac{G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)}{\sqrt{I(\mathbf{r}_1)I(\mathbf{r}_2)}}$$

$g(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \rightarrow$  normierte gegenseitige Intensität

#### Bemerkung:

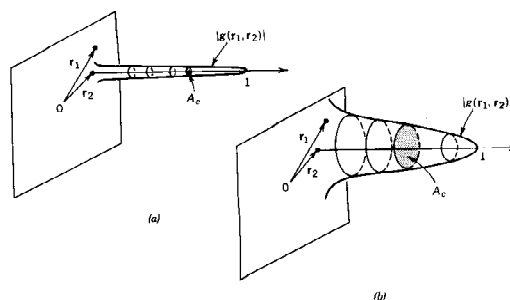
Wenn Wegdifferenz im optischen System  $< l_c$

↪

$$\begin{aligned} G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau) &= G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \exp(-i\omega_0\tau) \\ &= G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) G(\tau), \end{aligned}$$

Separation von zeitlicher und räumlicher Kohärenz, dabei vollst. zeitl. Kohärenz → quasimonochr. Licht.

Kohärenzgebiet:



Wenn Apertur < Kohärenzgebiet  $\leadsto |g| = 1 \rightarrow$  Kohärenz

Wenn Auflösungsgrenze > Kohärenzgebiet  $\leadsto |g| = 0 \rightarrow$  Inkohärenz

z.B.: Wärmestrahler  $\rightarrow$  Kohärenzgebiet  $\sim \lambda^2$ , d.h. inkohärent.

## 8.3 Interferenz mit partiell kohärentem Licht

### 8.3.1 Interferenz zweier partiell kohärenter Wellen

Es seien  $u_1(\mathbf{r}, t)$  und  $u_2(\mathbf{r}, t)$  zwei Zufallsfunktionen mit den Intensitäten an einem Ort  $\mathbf{r}$  zur gleichen Zeit  $t$

$$I_1 = \langle |u_1(\mathbf{r}, t)|^2 \rangle, \quad I_2 = \langle |u_2(\mathbf{r}, t)|^2 \rangle$$

und der Kreuzkorrelation

$$G_{12} = \langle u_1^* u_2 \rangle$$

bzw. der normierten Größe

$$g_{12} = \frac{\langle u_1^* u_2 \rangle}{\sqrt{I_1 I_2}}$$

(man beachte den Unterschied zu den Größen  $g$  und  $G$  ohne Index, bisher kein Bezug zu diesen Größen).

Überlagerung ergibt:

$$\begin{aligned} I(\mathbf{r}) &= \langle |u_1 + u_2|^2 \rangle = \langle |u_1|^2 \rangle + \langle |u_2|^2 \rangle + \langle u_1^* u_2 \rangle + \langle u_1 u_2^* \rangle \\ &= I_1 + I_2 + G_{12} + G_{12}^* = I_1 + I_2 + 2\Re(G_{12}) \\ &= I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \Re(g_{12}) \\ &= I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} |g_{12}| \cos \varphi, \quad \varphi = \arg(g_{12}). \end{aligned}$$

1.  $|g_{12}| = 1 \rightarrow$  Interferenzformel für kohärentes Licht
2.  $|g_{12}| = 0 \rightarrow I = I_1 + I_2 \rightarrow$  inkohärentes Licht
3. i.a.  $0 \leq |g_{12}| < 1 \rightarrow$  Interferenzmuster mit Sichtbarkeit

$$v = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}} = 2 \frac{\sqrt{I_1 I_2}}{I_1 + I_2} |g_{12}|$$

und für  $I_1 = I_2$

$$v = |g_{12}|.$$

Das Ziel besteht nun darin,  $g_{12}$  mit  $g(\tau)$  oder  $g(\mathbf{r}_1 \mathbf{r}_2, \tau)$  in Zusammenhang zu bringen, um eine Meßvorschrift für die normierten Kohärenzfunktionen zu besitzen.

### 8.3.2 Interferenz und zeitliche Kohärenz

Wir betrachten das Signal am gleichen Ort zu zwei verschiedenen Zeiten.

$$u_1 = u(t) \rightarrow I_0 = \langle |u(t)|^2 \rangle$$

$$u_2 = u(t + \tau) \rightarrow I_0 = \langle |u(t + \tau)|^2 \rangle \rightarrow \text{zeitversetzte Welle}$$

Damit gilt:

$$g_{12} = \frac{\langle u_1^* u_2 \rangle}{I_0} = \frac{\langle u^*(t) u(t + \tau) \rangle}{I_0} = g(\tau).$$

Das Interferenzmuster ergibt sich zu

$$I(\mathbf{r}) = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \Re(g_{12})$$

$$I(\tau) = 2I_0 \{1 + [\Re g(\tau)]\} = 2I_0 [1 + |g(\tau)| \cos \varphi(\tau)]$$

$|g(\tau)|$  bestimmt die Sichtbarkeit  $v = |g(\tau)|$  und  $\cos \varphi(\tau)$  die Lage der Interferenzstreifen, d.h.  $v = 1$  für  $\tau = 0$  und  $v = 0$  für  $\tau > \tau_c$ .

Realisierung  $\rightarrow$  Michelson- oder Mach-Zehnder-Interferometer:

$$\tau = \frac{2(d_2 - d_1)}{c}$$

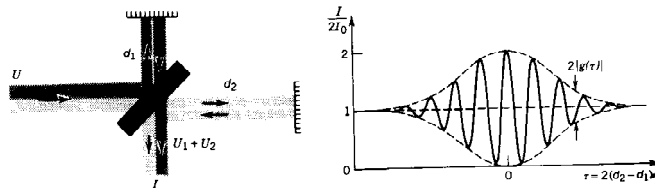
Quasimonochromasie ( $\omega_0 \gg \Delta\omega$ )

$$u(t) = a(t) \exp(-i\omega_0 t)$$

$$g(\tau) = g_a(\tau) \exp(-i\omega_0 \tau) = |g_a(\tau)| \exp[-i(\omega_0 \tau - \varphi_a)]$$

$$g_a(\tau) = \frac{\langle a^*(t) a(t + \tau) \rangle}{|a(t)|^2}$$

$$I(\tau) = 2I_0 \left\{ 1 + \underbrace{|g_a(\tau)|}_{\text{Kontrast}} \cos \left[ \underbrace{\omega_0 \tau}_{\text{Periode}} - \underbrace{\varphi_a(\tau)}_{\text{Lage}} \right] \right\}.$$



#### 8.3.2.1 Fourier-Transformations-Spektroskopie:

Da  $S(\omega)$  reell ist, gilt

$$G(\tau) = g(\tau) I_0 = \int_0^\infty S(\omega) \exp(-i\omega\tau) d\omega$$

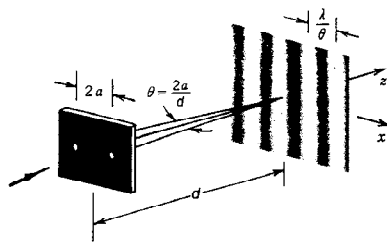
$$\begin{aligned} I(\tau) &= 2I_0 + 2I_0 \Re g(\tau) \\ &= 2I_0 + 2 \int_0^\infty S(\omega) \exp(-i\omega\tau) d\omega \\ &= 2 \int_0^\infty S(\omega) d\omega + 2 \int_0^\infty S(\omega) \cos(\omega\tau) d\omega \\ &= 2 \int_0^\infty S(\omega) [1 + \cos(\omega\tau)] d\omega. \end{aligned}$$

$\hookrightarrow I(\tau)$  messen  $\rightarrow \text{FT}^{-1}[I(\tau)] = S(\omega) \hookrightarrow G(\tau)$

Interpretation: kontinuierliche Überlagerung von Interferogrammen mit Sichtbarkeit  $v = 1$ .

### 8.3.3 Interferenz und räumliche Kohärenz

Young-Interferometer  $\rightarrow$  Beugung am Schirm,



$u_1 = u_1(\mathbf{r}, t)$  - Licht von Loch '1',  $u_2 = u_2(\mathbf{r}, t)$  - Licht von Loch '2'  
Messung von  $I(\mathbf{r}, t)$

$$\mathbf{r}_1 = (-a, 0, 0), \quad \mathbf{r}_2 = (a, 0, 0), \quad \mathbf{r} = (x, 0, d), \quad \Theta \approx \frac{2a}{d}.$$

In Fresnelnäherung gilt:

1. Loch

$$u_1(\mathbf{r}, t) = u\left(\mathbf{r}_1, t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|}{c}\right) \approx u\left\{\mathbf{r}_1, t - \frac{d + (x + a)^2 / (2d)}{c}\right\},$$

2. Loch

$$u_2(\mathbf{r}, t) = u\left(\mathbf{r}_2, t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_2|}{c}\right) \approx u\left\{\mathbf{r}_2, t - \frac{d + (x - a)^2 / (2d)}{c}\right\}.$$

Weiterhin

$$I_1 \approx I_2 \approx I_0.$$

Von vorn haben wir:

$$I = 2I_0 (1 + |g_{12}| \cos \varphi)$$

mit

$$g_{12} = \frac{\langle u_1^* u_2 \rangle}{I_0} = \frac{\langle u^*(\mathbf{r}_1, \bar{t}) u(\mathbf{r}_2, \bar{t} + \tau) \rangle}{I_0} = g(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau)$$

erhält man den gegenseitigen komplexen Kohärenzgrad. Dabei ist

$$\bar{t} = \frac{d + (x + a)^2 / 2d}{c},$$

$$\tau = \frac{(x + a)^2}{2dc} - \frac{(x - a)^2}{2dc} = \frac{2ax}{dc} = \Theta \frac{x}{c}.$$

und dieser Kohärenzgrad über die Intensität zu messen:

$$I(x) = 2I_0 \{1 + g[\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau(x)] \cos \varphi(x)\}.$$

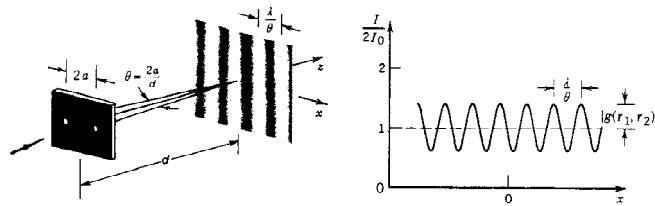
Setzt man zeitliche Kohärenz voraus ( $\tau < \tau_c$ ), kann man separieren

$$g(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau) = g(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \exp(-i\omega_0\tau)$$

und erhält die normierte gegenseitige Intensität (räumlicher Kohärenzgrad)

$$I(x) = 2I_0 \left\{ 1 + |g(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)| \cos \left( \omega_0 \Theta \frac{x}{c} + \varphi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \right) \right\}.$$

$\hookrightarrow$  Periode:  $x_p = \lambda/\Theta$ , Sichtbarkeit  $v = |g(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)|$ , Lage  $\varphi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$



Messung der räumlichen Kohärenz mit Young-Interferometer und quasimonochromatischem Licht.

### 8.3.4 Räumliche Kohärenz und Ausbreitung

Annahme: zeitlich kohärentes Licht ( $\tau < \tau_c$ ),

$$G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau) = G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \exp(-i\omega_0\tau)$$

Frage: Wie ändert sich räumliche Kohärenz bei Ausbreitung durch beliebiges, lineares System?

$$u_i(\mathbf{r}') \longrightarrow \boxed{h(\mathbf{r}, \mathbf{r}')} \longrightarrow u_e(\mathbf{r})$$

$$u_e(\mathbf{r}) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\mathbf{r}, \mathbf{r}') u_i(\mathbf{r}') d\mathbf{r}'$$

$\hookrightarrow$  Kohärenzfunktion am Ausgang

$$G_e(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \int \int_{-\infty}^{\infty} h^*(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}'_1) h(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}'_2) G_i(\mathbf{r}'_1, \mathbf{r}'_2) d\mathbf{r}'_1 d\mathbf{r}'_2.$$

- **Intensität:**

1. partielle Kohärenz am Eingang

$$I_e(\mathbf{r}) = \int \int_{-\infty}^{\infty} h^*(\mathbf{r}, \mathbf{r}'_1) h(\mathbf{r}, \mathbf{r}'_2) G_i(\mathbf{r}'_1, \mathbf{r}'_2) d\mathbf{r}'_1 d\mathbf{r}'_2$$

$\leadsto$  um Intensität zu berechnen, braucht man die Kohärenzfunktion am Eingang.

2. Inkohärenz am Eingang  $\rightarrow G_i(\mathbf{r}'_1, \mathbf{r}'_2) \sim \sigma I_i(\mathbf{r}'_1) \delta(\mathbf{r}'_1 - \mathbf{r}'_2)$

$$I_e(\mathbf{r}) = \sigma \int_{-\infty}^{\infty} h^*(\mathbf{r}, \mathbf{r}'_1) h(\mathbf{r}, \mathbf{r}'_1) I_i(\mathbf{r}'_1) d\mathbf{r}'_1$$

$\leadsto$  Übertragungsfunktion für inkohärentes Licht

$$h_{\text{INT}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \sigma |h(\mathbf{r}, \mathbf{r}')|^2$$

- **Kohärenzfunktion bei inkohärenter Beleuchtung**

$$G_i(\mathbf{r}'_1, \mathbf{r}'_2) \sim \sigma I_i(\mathbf{r}'_1) \delta(\mathbf{r}'_1 - \mathbf{r}'_2)$$

$$G_e(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \sigma \int_{-\infty}^{\infty} h^*(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}'_1) h(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}'_1) I_i(\mathbf{r}'_1) d\mathbf{r}'_1.$$

$\leadsto$  inkohärentes Licht wird bei der Ausbreitung partiell kohärent.

**Physik:** Licht, das von einem Punkt kommt, und damit kohärent ist, wird in entfernte Bereiche gebeugt  $\leadsto$  Korrelation ist endlich  $\rightarrow$  **van-Cittert-Zernike-Theorem**

Ähnlichkeit zu verdrahtetem Zeitsignal  $\rightarrow$  Filter  $\rightarrow$  Kohärenzzeit wird größer  $\rightarrow$  Raum wirkt als Tiefpaßfilter

Beispiel:  $d$  sehr groß  $\rightarrow$  Fraunhoferbeugung

$$\begin{aligned} h(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}'_1) &\sim \exp\left(-ik \frac{\mathbf{r}_i \mathbf{r}'_1}{d}\right) \\ |G_e(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)| &\sim \sigma \left| \int \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-i \frac{k \mathbf{r}'_1}{d} (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)\right] I_i(\mathbf{r}'_1) d\mathbf{r}'_1 \right|, \\ |G_e(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)| &\sim \sigma \left| \tilde{I}_i \left\{ \frac{k}{d} (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \right\} \right|, \quad \tilde{I}_i = \text{FT}(I_i). \end{aligned}$$

$$|g_e(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)| = \frac{\left| \tilde{I}_i \left\{ \frac{k}{d} (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \right\} \right|}{\left| \tilde{I}_i(0) \right|}$$

- $I_i \sim \delta(\mathbf{r}'_1)$

$\leadsto |g_e(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)| = 1 \leadsto$  Punktquelle liefert vollständig kohärentes Licht

- Lichtquelle groß (Radius  $a$ )  $\leadsto$  Kohärenzgebiet sehr klein

$$I(\mathbf{r}'_1) = I_0 \quad \text{für} \quad |\mathbf{r}'_1| \leq a,$$

$$|g_e(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)| = \frac{2 J_1\left(\frac{k}{d}a\rho\right)}{\frac{k}{d}a\rho},$$

$$\rho = |\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|, \quad \Theta_s = \frac{2a}{d}, \quad \frac{k}{d}a = \frac{2\pi}{\lambda d}a = \frac{\pi}{\lambda}\Theta_s$$

$$|g_e(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)| = \frac{2 J_1(\pi\rho\Theta_s/\lambda)}{\pi\rho\Theta_s/\lambda}$$

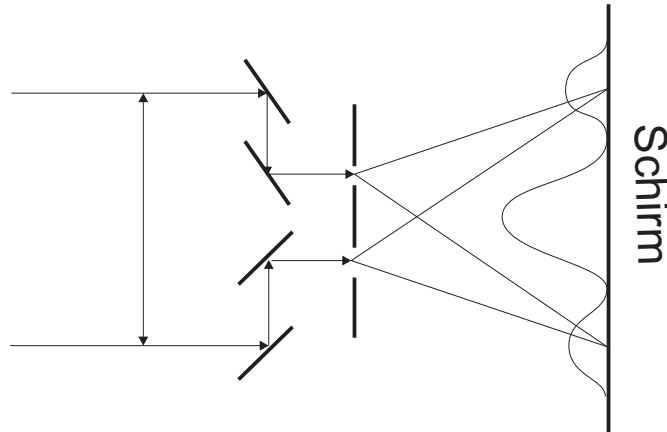
$$\frac{2 J_1(x)}{x} = 0 \quad \text{für} \quad x = 3.832$$

$$\leadsto \rho_c = 1.22 \frac{\lambda}{\Theta_s}$$

Kohärenzradius  $\rho_c$

Beispiel:  $\lambda = 0.6 \mu\text{m}$ ,  $a = 1 \text{ cm}$ ,  $d = 100 \text{ m}$   $\leadsto \rho_c = 3.7 \text{ mm}$

- Anwendung: Michelson-Stern-Interferometer



Stern inkohärent, Kohärenz  $\rightarrow 0$ , wenn  $\rho_c = 1.22\lambda/\Theta_s = 1.22\lambda d/(2a) \leadsto 2a = 1.22\lambda d/\rho_c$

$\leadsto \rho_c$  über verschwindende Sichtbarkeit im Interferogramm bestimmen Sterndurchmesser  $2a$ .