

- (1) 二项树 B_k 的高度为 k ，任一结点的最大度为 k ，结点数为 2^k 。
- (2) 插入排序算法在最坏情况、平均情况和最好情况下的时间复杂度分别为 n^2 ， n^2 ， n 。
- (3) 三个算法的时间分别为 $T_1(n)=10\log n^3$ ， $T_2(n)=50n$ ， $T_3(n)=10\log 3^n$ ，请用渐进界限和渐进上界和渐进下界符号表示他们的渐进关系， $T_1(n)$ O $T_2(n)$ ， $T_2(n)$ Θ $T_3(n)$ ， $T_3(n)$ ω $T_1(n)$ 。
- (4) 包含 8 个内部结点的红黑树中，最多可以有 4 个红色结点，最少可以有 1 个红色结点。
- (5) 装配线调度算法 `Fastest_Way` 的时间复杂度为 $O(n)$ ，最优二叉查找树算法 `Optimal_BST` 的时间复杂度为 $O(n^3)$ 。
- (6) 在 `Push_Relabel` 算法中饱和 `Push` 操作次数的上界是 $2ve$ ，`Relabel` 操作次数的上界是 $4v^2(v+e)$ 。
- (7) 在二叉堆，二项堆和 `Fibonacci` 堆上完成插入一个结点操作的时间分别为 $\log n$ ， $\log n$ ，1。
- (8) `Huffman` 编码算法 `Huffman` 采用的算法设计方法是 贪心，矩阵链乘算法 `Matrix_Chain_Order` 采用的算法设计方法是 DP。

1. 简述应用动态规划方法进行算法设计的基本步骤。

构造最优子结构：描述最优解

重叠子问题

2. 请用 Master 方法求 $T(n)=9T(n/3) + n\lg n$ 的解。

$$\log_b(a) = 2$$

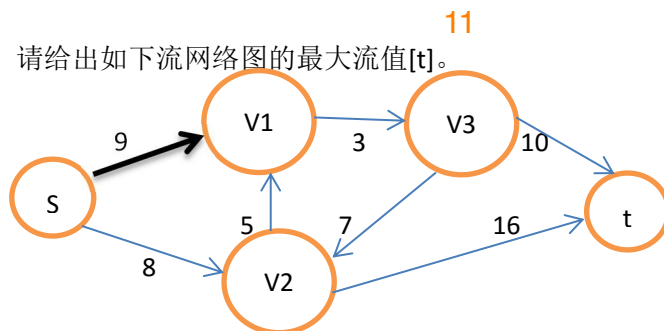
$$n^2 > n\log n \quad n\log n \text{ 渐进小于 } n^2$$

$$T(n) = O(n^2)$$

3. 假设动态表的扩张和收缩策略为： $a=1$ 时插入一个元素表扩张一倍， $a=1/2$ 时删除一个元素表缩小一半，如果势函数定义为 $Q(T)=2\text{num}[T] + \text{size}[T]$ ，请用该势函数分析第一次操作的平摊时间。

4. 请画出在包含 14 个结点的二项堆上完成一次删一任一结点(Binomial-Heap-Delete)操作后的报表。

5. 请给出如下流网络图的最大流值[t]。



6. 请用活动选择问题算法 Recursive-Activity-Selector 从下表活动中选出一个最优解。

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Si	0	5	8	6	1	2	9	2	3	4
fi	6	10	9	8	3	5	13	11	4	7

假设有 n 个人需排队等候处理事务，已知每个人需要处理的时间为 t_i , ($0 < i \leq n$)，请给出一种最优排队次序，使所有人排队等候的总时间最小，要求：

1. 给出你的贪心选择策略
2. 证明贪心选择的正确性
3. 写出解此问题的贪心算法

一 填空题

- 1 活动选择算法的时间复杂度是 $O(n)$ ，矩阵链乘法的时间复杂度是 $O(n^3)$
- 2 二项堆中有 18 个结点，删除其中的最小结点，则堆中还存在几棵树 3
- 3 红黑树的黑高度是 3，那么树中最多有 31 内部结点，最多有 10 个红色结点
- 4 装配线调度算法的时间复杂度是 $O(n)$ ，快速排序采用的算法设计方法是 分治
- 5 在最大流中，用 FORD-FULKERSON 方法求最大流的时间复杂度是 $O(Ef^*)$ ，采用 Edmonds-Karp 算法的时间复杂度是 $O(VE^2)$
- 6 快速排序的平均时间复杂度是 $n \log n$ ；选择排序的时间复杂度是 n^2 。
- 7 三个算法的时间复杂度分别为 $T_1(n) = 5e^n$ ， $T_2(n) = 2n$ ， $T_3(n) = 10 \ln \ln n$ ，请用 θ ， O ， Ω 表示他们的递进关系： $T_1(n) = \underline{W} T_2(n)$ ， $T_2(n) = \underline{W} T_3(n)$ ， $T_3(n) = \underline{W} T_1(n)$
- 8 二叉堆、二项堆、斐波那契堆完成一次合并堆操作的时间分别是多少 n ， $\lg n$ ，1。
- 9 判断题：红黑树是一颗平衡的二叉搜索树，且红黑内结点数最大比为 2:1 T
- 10 判断题：斐波那契堆不要求树为二项树，但堆中数的根节点必须从小到大排列，且 $\text{Min}[H]$ 指向堆中最小结点。 F 选用基本数据结构，需要添加那些元素，如何维护元素，如何操作

二 综合题

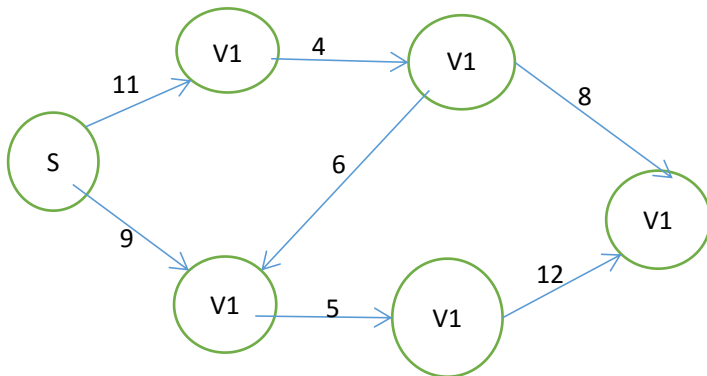
- 1 简述数据结构的扩张方法和步骤
- 2 请用 Master 方法 $T(n) = 5T(n/3) + \lg n$ 的解 $\log_3(5) > 1$ $T(n) = O(n^{\log_3(5)})$
- 3 假设动态表志允许插入操作，且当 $a=1$ 时，将表扩张为原来的 2 倍，请用势函数方法分析第 i 次操作的平摊时间
- 4 下面是冒泡程序的伪代码，请用传统时间方法分析其最好时间和最坏时间
BUBBLESORT (A)

```
1 for i ← 1 to length[A]
2   do for j ← length[A] downto i + 1
3     do if A[j] < A[j-1]
4       then exchange A[j] ↔ A[j-1]
```

最好： $O(n)$

最坏： $1+2+3+\dots+n = O(n^2)$

- 5 请分别用最小割的方法和 FORD-FULKERSON 方法求出小面流网络图的最大流 $|f|$



9

6 请用矩阵链问题算法，求出下列矩阵最优的计算方法

矩阵	A1	A2	A3	A4
规模	2*2	2*1	1*3	3*2

三 算法设计题

一个小孩买了价值少于 1 元的糖，并将 1 元的钱交给售货员，售货员希望用数目最少的硬币找给小孩，假设提供了数目不限的面值为 5 角，2 角和 1 角的硬币，请给出一种最优找钱方案，是给币的总个数最少，要求：

- 1) 给出你的贪心选择策略
- 2) 证明贪心选择的正确性
- 3) 写出解决此问题的贪心算法

一 填空

- 1 装配线调度算法的时间复杂度是 n^3 ，最长公共子序列的时间复杂度是 mn
- 2 二项树 B_k ，左边第 3 个孩子有 2 个孩子，问 B_{k-1} 有 4 个结点
- 3 红黑树的有 15 个结点，则红黑树的高度至多有 5
- 4 最优二叉搜索树问题采用的算法设计方法是 DP，归并排序采用的算法设计是分治
- 5 在最大流中，用 FORD--FULKERSON 与 Edmonds-Karp 算法的区别是 BFS
- 6 快速排序的最好时间复杂度，平均时间复杂度，最差时间复杂度分别是 $n \log n$ ， $n \log n$ ， n^2 。
- 7 三个算法的时间复杂度分别为 $T_1(n) = 5e^n$ ， $T_2(n) = 2n$ ， $T_3(n) = 10 \ln \ln n$ ，请用 θ ， O ， Ω 表示他们的递进关系： $T_1(n) = W T_2(n)$ ， $T_2(n) = W T_3(n)$ ， $T_3(n) = O T_1(n)$
- 8 二叉堆，二项堆，斐波那契堆完成一次减值操作的时间分别是多少 $\log n$ ， $\log n$ ，1。
- 9 判断题：二项堆中的树必须为二项树，其度必须以递增序排列，且不唯一。T
- 10 判断题：斐波那契堆是最小堆序的有限树的集合，从任何一棵树的根节点出发能找到任何一颗其他的树。T

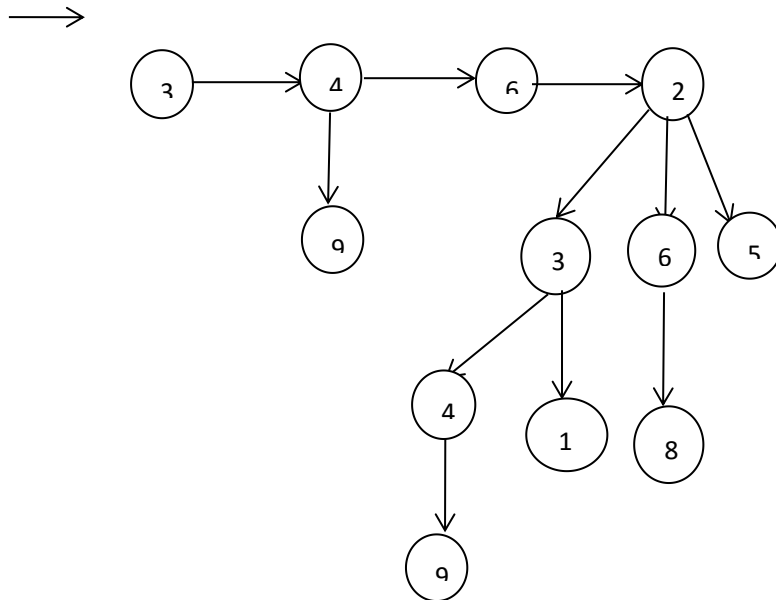
二 综合题

- 1 简述分治法的设计步骤
分解子问题
子问题可以分别求解
问题的解有子问题的解求得
- 2 请用 Master 方法求 $T(n) = 2T(n/3) + n$ 的解

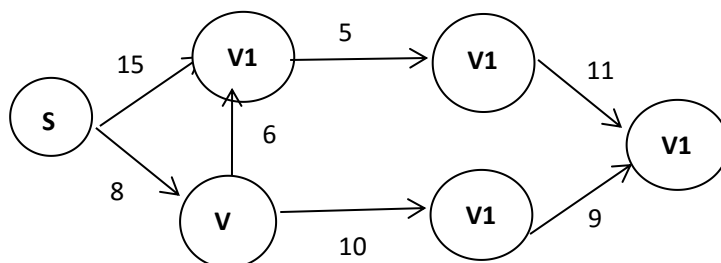
$\log_3(2) < 1$
 $2 \cdot n/3 < cn$ $c == 1 > 0$ 多项式大于
 直接求得 $T(n) = O(n)$

3 假设动态表志允许插入操作，且当 $a=1$ 时，将表扩张为原来的 2 倍，请用势函数方法分析第 i 次操作的平摊时间

4 请给出下面二项堆删除节点 6 的所有过程



5 请分别用最小割的方法和 FORD—FULKERSON 的方法求出最小面流网络图的最大流 $[f]$ 。



13

6 请用最长公共子序列问题算法，求出 $L1=<\underline{A,B,C,B,D,A,C}>$ ， $L2=<\underline{B,D,A,B,D,C}>$ 的 LCS。

三 算法设计题

设有 n 个正整数，分别为 a_1, a_2, \dots, a_n ，将它们连接一排，组成一个最大的多位整数，例如：

$n=3$ 时，3 个整数 13, 312, 343，连成的最大整数位 34331213

又如： $n=4$ 是，4 个整数 7, 13, 4, 246，连成的最大整数位 7424613

请给出一种最优的数字顺序，使连成的整数最大，要求：

- 1) 给出你的贪心选择策略
- 2) 证明贪心选择的正确性
- 3) 写出解决此问题的贪心算法

姓 名: _____ 学 号: _____

所在班级: _____ 得 分: _____

注意: 试卷须交回, 否则无分。

一. 判断题 (请直接在试卷上作答, 是 $\sqrt{}$, 非 \times , 每小题 2 分, 共 20 分)

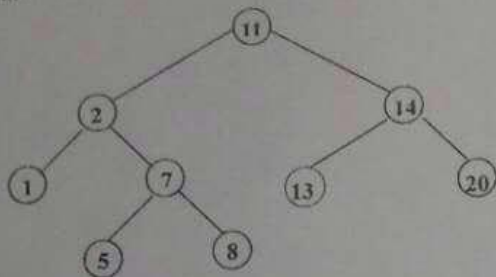
1. Huffman 算法是采用动态规划方法设计的。
2. 归并排序算法在最坏情况下的时间均为 $O(n^2)$ 。
3. 两个算法的时间分别为 $T_1(n)=10n^2$, $T_2(n)=32^n$, 则他们的渐进时间关系为 $T_1(n)=\Omega(T_2(n))$ 。
4. 在快速排序算法中, 如果输入数据均相同时时间复杂度为 $O(n \lg n)$ 。
5. 应用动态规划方法的前提是问题必须存在最优子结构和重叠子问题。
6. 二项树 B_k 包含的结点数恰好为 2^k 个。
7. 设 $M=(S,I)$ 为一个胚, 若 $B \in I$, 则 B 的子集 $A \in I$ 。
8. 算法 Fastest-Way 的时间复杂度为 $O(n^2)$ 。
9. Fibonacci 堆的根表头指针总是指向关键字最小的根结点。
10. 在二项堆上完成一次插入操作的时间为 $O(\lg n)$ 。

二. 综合题 (共 60 分, 每小题 10 分)

1. 用 Master 方法求 $T(n)=3T(n/3)+\lg n$ 的解。
2. 请用活动选择问题算法 Recursive-Activity-Selector 从下表活动中选出一个最优解。

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
s_i	0	4	3	8	1	5	5	6	8
f_i	6	8	5	12	4	9	7	10	11

3. 请用势函数方法分析红黑树插入和删除算法的平摊时间。势函数定义为 $\Phi(T) = k \sum_{i=1}^n \lg i$, 其中 n 表示红黑树的结点数, $k > 0$ 为一常数, 红黑树的初态为空树。
4. 请把如下二叉查找树标识为一棵红黑树 (树的形状和结点的位置不变, 只需标识每个结点的颜色)。要求: 1) 包含最少的红结点; 2) 包含最多的红结点。

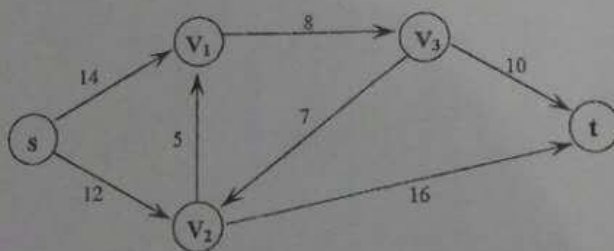


5. 阅读如下算法并计算该算法的时间复杂度。

```

fact(n)
  if n < 0 then return -1
  if (n == 0) or (n == 1) then return 1
  else return n * fact(n-1)
  
```

6. 对如下的流网络图, 用 Ford-Fulkser 方法计算最大流值。



三. 算法设计题 (20 分)

假设有 P 个处理器 (处理能力均相同) 可以运行 n 个任务 j_1, j_2, \dots, j_n , 任务对应的运行时间为 t_1, t_2, \dots, t_n , 同时假设 n 为 P 的整数倍。请安排一种调度使得每个任务平均完成时间 (包括等待时间) 最短并输出该平均完成时间。要求:

1. 描述你的贪心选择策略
2. 编写基于此贪心选择的贪心算法求出每个任务最短的平均完成时间
3. 若 $P=3, n=9$ 时, 9 个任务对应的运行时间分别为: 3, 5, 6, 10, 11, 14, 15, 18, 20, 请按照你安排的调度计算任务平均完成的时间。

- (d) 在一个加权胚 $M=(S, I)$ 中, 下述说法错误的是 A。
- (a) 设 $A \in I$, 若对于 $\forall B \in I$, 有 $A \not\subseteq B$, 则 A 是 M 的最大独立子集
- (b) M 的最大独立子集必是最优子集
- (c) 加权胚的贪心算法即是求胚的一个最优子集
- (d) 胚中独立集的子集必定也是独立的

一. 填空题 (请直接在试卷上作答, 每空 1 分, 共 20 分)

1. 平摊分析中采用的三种分析方法分别为(1) 重集法, (2) 记账法, (3) 重积分法.
2. 快速排序算法在最坏情况、平均情况和最好情况下的时间复杂度分别为(4) $O(n^2)$, (5) $O(n \lg n)$, (6) $O(n \lg n)$.
3. 三个算法的时间分别为 $T_1(n)=10n \lg n^2$, $T_2(n)=50\sqrt{n}$, $T_3(n)=n^2 \log 3$, 请按渐进时间从低到高排列为(7) $T_2(n)$, (8) $T_1(n)$, (9) $T_3(n)$.
4. 包含 n 个结点的红黑树高度最多为(10) $2 \lg(n+1)$, 二叉查找树的高度最多为(11) $\lg n + 1$.
5. 在 Huffman 编码算法中队列 Q 的管理若分别采用二叉堆、二项堆和 Fibonacci 堆, 则算法时间分别为(12) $O(\lg n)$, (13) $O(\lg n)$, (14) $O(1)$.
6. 在红黑树中插入一个结点的时间为(15) $O(\lg n)$, 而在二叉查找树中插入一个结点的时间为(16) $O(\lg n)$.
7. 二项堆的根表采用(17) 双向链表 链表链接所有树根结点, 而 Fibonacci 堆则采用(18) 双向链表 链表链接所有树根结点.
8. 活动选择问题算法 Recursive-Activity-Selector 采用的算法设计方法是(19) 贪心解法, 最长公共子序列算法 LCS-Length 采用的算法设计方法是(20) 动态规划解法.

3. 假设对动态表的操作均为删除操作, 表收缩的策略为 $\alpha=1/2$ 时, 删除一个元素表收缩一半。势函数定义为 $\Phi[T] = \text{size}[T] - \text{num}[T]$, 请用此势函数分析第 i 次操作的平摊代价。

三. 算法设计题 (每题 15 分, 共 30 分)

1. 对以上第二大题中第 4 小题用动态规划方法求解此问题。

要求: ① 写出最优解值的递归式 (5 分)
② 写出求此最优解值的动态规划算法 (10 分)

2. 给定 n 件物品及一个背包, 物品 i 的重量为 w_i , 其价值为 v_i , 背包可装载物品的总重量为 W , 求在不超过背包总重量 W 的前提下, 如何选择装入背包的物品, 使装入背包中的物品总价值最大, 考虑物品是可以拆分的, 即该问题是一个零头背包(fractional knapsack)问题。

要求: ① 写出解此问题的贪心选择策略 (5 分)
② 编写求此问题的贪心算法 (10 分)

中国科学技术大学软件学院

《算法设计与分析》期末考试试题

一、选择题

- 要使得递归方程 $T(n)=3/2T(2n/b)+\lg n$ 的解是 $O(n)$ ，常数 a 必须为 A。
A.3 B.2 C.2/3 D.3/2
- 下列各式中错误的而是 D。
A. $30n=O(n^2)$ B. $200n=o(n^2)$ C. $0.01n^2=\Omega(n^2)$ D. $2n^2=\omega(n^2)$
- 下列各式中解为 $O(n\lg n)$ 的是 B。
A. $T(n)=9T(n/3+20)+n$ B. $T(n)=2T(2n/4)+n$
C. $T(n)=4T(n/4)+n\lg n$ D. $T(n)=5T(n/4)+n\lg n$
- 在下列各种数据结构中，查找操作效率较低的是 A。
A. 二叉堆 B. 二叉排序树 C. B-树 D. 红黑树
- 就时间复杂性而言，作为优先队列性能最好的数据结构是 C。
A. 二叉堆 B. 二项堆 C. Fib 堆 D. FIFO 队列
- 设 i_1 和 i_2 是两个区间对象，他们相交的充要条件是 D。
A. $\text{low}[i_1]>\text{high}[i_2]$ B. $\text{low}[i_2]>\text{high}[i_1]$
C. $(\text{low}[i_1]\leq\text{high}[i_2])\text{or}(\text{low}[i_2]\leq\text{high}[i_1])$ D. $(\text{low}[i_1]\leq\text{high}[i_2])\text{and}(\text{low}[i_2]\leq\text{high}[i_1])$
- 关于红黑树，下述说法错误的是 ?。
A. 红黑树是平衡的二叉树 B. 红黑树是二叉搜索树
C. 红黑树的高度为 $O(\lg n)$ D. 红黑树插入和删除过程至多有 2 个旋转操作
- 设 x 是一棵顺序统计树中的一个结点，下列说法错误的是 D。
A. 在 OSSelec 和 OSRank 两个操作中，可有效维护 size;
B. 在以 x 为根的树中， x 的秩是 $\text{size}[\text{left}[x]+1]$;
C. 若 $\text{size}[\text{NUL}[T]]=0$ ，则 $\text{size}[x]=\text{size}[\text{left}[x]]+\text{size}[\text{right}[x]]+1$;
D. 若 x 是 $p[x]$ 的右孩子，在 $p[x]$ 为根的子树中， x 的秩是 $\text{size}[\text{left}[x]]+\text{size}[\text{left}[p[x]]]+1$
- 关于动态规划，下列说法错误的是 B。
A. 使用动态规划的两要素是“最优子结构”和“重叠子问题”
B. 在使用“cut-and-paste”技术证明最优子结构时，要求子问题之间是相互关联的
C. 若子问题空间大小为多项式阶，则动态规划的时间一般也是多项式的
D. 一般情况下，动态规划和其记忆型递归的变种算法的渐进时间相同

二、填空题

- 二项树 B_k 的高度为 ，任一结点的最大度为 ，结点数为 。
- 插入排序算法在最坏、平均和最好情况下的时间复杂度分别为 。
- 三个算法的时间分别为 $T_1(n)=10\log n^3$ ， $T_2(n)=50n$ ， $T_3(n)=\log n^3$ ，请用 Θ, O, Ω 表示它们的渐进关系： $T_1(n)=$ $T_2(n)$; $T_2(n)=$ $T_3(n)$; $T_3(n)=$ $T_1(n)$ 。
- 包含 8 个内部结点的红黑树中，最多可有 个红色结点，最少可有 个红色结点。
- 装配线调度算法 Faster_Way 的时间复杂度为 ; 最优二叉查找树算法 Optimal_BST 的时间复杂度为 。
- 在 Push-Relabel 算法中饱和 Push 操作次数的上界是 ; Relabel 操作次数的上界是 。
- 在二叉堆、二项堆和 Fibonacci 堆上完成插入一个结点操作的时间分别为 $\log n, \log n, 1$ 。
- Huffman 编码算法 Huffman 采用的算法设计方法是 贪心; 矩阵链乘算法

Matrix_Chain_Order 采用的算法设计方法是 dp .

9. 平摊分析中采用的三种分析方法分别为 聚合 , 记账 , 势能 。

三、综合题

1. 简述分治法的适用条件。

2. 请用 Master 方法求 $T(n)=3T(n/3)+n$ 的解。
 $n \log n$

3. 假设动态表的扩张和收缩策略为： $\alpha=1$ 时插入一个元素表扩张一倍， $\alpha=1/2$ 时删除一个元素表缩小一半。如果势函数定义为 $\Phi(T)=2\text{num}[T]-\text{size}[T]$ 。请用该势函数分析第一次操作的平摊时间。

$$3 \quad 3 \quad -1 \quad 2n(i-1) - 2$$

4. 请画出在包含 14 个结点的二项堆上完成一次删任一结点(Binomial-Heap-Delet)操作后的根表。

5. 请用活动选择问题算法 Recursive-Activity-Selector 从下表活动中选出一个最优解。

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Si	0	5	8	6	1	2	9	2	3	4
fi	6	10	9	8	3	5	15	11	4	7

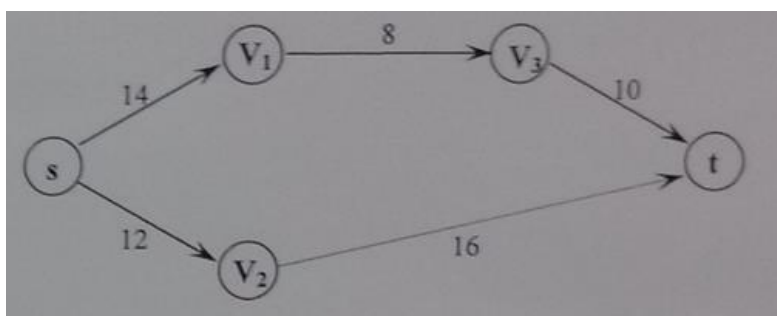
6. 请写出以下算法的时间函数 $T(n)$ 的表达式。

```

Eval(n)
  If (n==0) then return 1
  Else sum = 0
    For i=0 to n-1 Do
      Sum = sum + Eval(i)
  Return sum
    
```

2^n

7. 写出以下流网络的最小截(S,T)及容量值 $C(S,T)$ 。



20

20

四、算法设计题

1. 给定 n 件物品及一个背包，物品 i 的重量为 w_i ，其价值为 V_i ，背包可装载物品的总重量为 W 。求在不超过背包总重量 W 的前提下，如何选择装入背包的物品，使装入背包中的物品总价值最大，考虑物品是可拆分的，即该问题是一个零头背包问题。

要求：(1). 写出解此问题的贪心选择策略；

(2). 编写求此问题的贪心算法。

2. 写出一个有效算法在区间树中，查找给定区间 i 重叠且有最小起点的区间，并给出算法的时间复杂度。

3. 假设有 n 个人需排队等候处理事务，已知每个人需要处理的时间为 t_i ，($0 < i \leq n$)，请给出一种最优排队次序，使所有人排队等候的总时间最小。

要求：(1). 给出你的贪心选择策略；

(2). 证明贪心选择的正确性；

(3). 写出解此问题的贪心算法。

4. 用 LCS 的动态规划方法计算 $X=\{\underline{B}, \underline{D}, B, C, \underline{A}, \underline{B}, A\}$ 与 $Y=\{A, B, C, B, \underline{D}, \underline{A}, \underline{B}, A\}$ 的最大公共子序列。

5. 贪心算法中求单位任务调度(注意节制时间有相同情况)。

五、证明题

1. 利用调和级数证明 $\sum_{k=1}^n \frac{1}{2k-1} = \ln(\sqrt{n}) + O(1)$ 。

2. 请给出 $T(n) = 2T(\frac{n}{2}) + n$ 的渐进上界，并用数学归纳法证明之。

六、简答题

1. 在一棵有 n 个关键字、高度为 h 的红黑树中，根的高度至少是多少？至多是多少？

2. 在一个加权 $M=(S,I)$ 中， M 的最优子集一定是最大独立子集吗？为什么？

3. 设二项堆 H 中有 11 个结点，请问 H 由哪几棵二项树构成？画出这些二项树。

$$2+8=10$$



4. Fib 堆中是哪一个操作合并度数相同的根，其原因是什么？

提取最小值时