

HW9

1. 我们怎样才能使用 Floyd-Warshall 算法的输出来检测权重为负值的环路?

若图中有负环, 假设节点 i 为负值环路中的一个节点, 在循环中会更新节点 i 到自身的距离, 对于大于负值环路中的所有节点序号 k , 会使得 d_{ii}^k 为负值。

2. 假定在一个权重函数为 W 的有向图 G 上运行 Johnson 算法。证明: 如果图 G 包含一条权重为 0 的环路 c , 那么对于环路 c 上的每条边 (u, v) , $\hat{w}(u, v) = 0$

由于重新赋值不会改变环路的权重, 故重新赋值后此环路的权重仍为 0, 又由于重新赋值后每条边的权重为非负权重, 故对于环路 c 上的每条边 (u, v) , 有 $\hat{w}(u, v) = 0$ 。

3. (最大流的更新) 设 $G = (V, E)$ 是一个源结点为 s 汇结点为 t 的流网络, 其容量全部为整数值。假定我们已经给定 G 的一个最大流。

a. 如果将单条边 $(u, v) \in E$ 的容量增加 1 个单位, 请给出一个 $O(V + E)$ 时间的算法来对最大流进行更新。

b. 如果将单条边 $(u, v) \in E$ 的容量减少 1 个单位, 请给出一个 $O(V + E)$ 时间的算法来对最大流进行更新。

a. 用 BFS 或 DFS 来找在残存网络中是否还存在从源节点 s 到汇节点 t 的路径, 若存在, 由于容量全部为整数, 则将此条路径的流量增加 1, 否则不做任何修改。

b. 计算一遍残存网络, 若出现负值, 则说明最大流所依赖的边包含 (u, v) 且流过此条边的流刚好为这条边的容量, 此时利用 BFS 或 DFS 找到包含边 (u, v) 的一条路径, 由于容量全部为整数, 故将此条路径的流量减少 1, 若残存网络的边没有出现负值, 则 (u, v) 容量减少 1 个单位对这个最大流无影响, 故不作修改。