

## 习题课 2

2021 年 12 月 14 日

### 1 作业三

#### 1.1

##### 题目描述:

我们对钢条切割问题进行一点修改,除了切割下的钢条段具有不同价格  $p_i$  外,每次切割还要付出固定的成本  $c$ 。这样,切割方案的收益就等于钢条段的价格之和减去切割的成本。设计一个动态规划算法解决修改后的钢条切割问题。

##### 思路分析:

$$r_n = \max\{p_n, \max_{1 \leq i \leq n-1} \{p_i + r_{n-i} - c\}\} \quad (1)$$

#### 1.2

##### 题目描述:

令  $R(i, j)$  表示在一次调用 MATRIX-CHAIN-ORDER 过程中,计算其他表项时访问表项  $m[i, j]$  的次数。证明:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^n R(i, j) = \frac{n^3 - n}{3}$$

##### 思路分析:

利用公式

$$\sum_{x=1}^n x^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad (2)$$

计算式子

$$\begin{aligned} & \sum_{l=2}^n \sum_{i=l}^{n-l+1} \sum_{k=i}^{i+l-2} 2 \\ &= \sum_{l=2}^n 2(l-1)(n-l+1) \\ &= \sum_{l=1}^{n-1} 2l(n-l) \\ &= \frac{n^3 - n}{3} \end{aligned} \quad (3)$$

## 1.3

### 题目描述:

对输入链长度为  $n$  的矩阵链乘法问题, 描述其子问题图: 它包含多少个顶点? 包含多少条边? 这些边分别连接哪些顶点。

### 思路分析:

顶点个数:

$$\frac{n(n-1)}{2} + n \quad (4)$$

边的个数:

$$\frac{n^3 - n}{3} \quad (5)$$

对于点  $(i, j)$  而言, 与点  $(u, w)$  间存在边连接当且仅当  $((u = i) \wedge (w < j)) \vee ((w = j) \wedge (u > i))$  为真。

## 2 作业四

### 2.1

#### 题目描述:

假定你希望兑换外汇, 你意识到与其直接兑换, 不如进行多种外币的一系列兑换, 最后兑换到你想要的那种外币, 可能会获得更大收益。假定你可以交易  $n$  种不同的货币, 编号为  $1, 2, \dots, n$ , 兑换从 1 号货币开始, 最终兑换为  $n$  号货币。对每两种货币  $i$  和  $j$ , 给定汇率  $r_{ij}$ 。意味着你如果有  $d$  个单位的货币  $i$ , 可以兑换  $dr_{ij}$  个单位的货币  $j$ 。进行一系列的交易需要支付一定的佣金, 金额取决于交易的次数。令  $c_k$  表示  $k$  次交易需要支付的佣金。证明: 如果对所有  $k = 1, 2, \dots, n$ ,  $c_k = 0$ , 那么寻找最优兑换序列的问题具有最优子结构。然后请证明: 如果佣金  $c_k$  为任意值, 那么问题不一定具有最优子结构。

#### 思路分析:

对于第一问, 发掘最优子结构性质的通用模式:

1. 证明问题最优解的第一个组成部分是做出一个选择。
2. 假定知道哪种选择会获得最优解。
3. 给定获得最优解的选择, 确定这次选择会产生哪些子问题, 以及如何刻画子问题空间。
4. 反证法, “剪切-粘贴” (cut and paste) 技术证明: 作为构成原问题最优解的组成部分, 每个子问题的解就是它本身的最优解。

对于第二问, 举例证明即可。之所以问题不一定具有最优子结构的原因: 佣金的存在会导致子问题间存在影响 (not dependent)。

### 2.2

#### 题目描述:

设计一个高效的算法, 对实数线上给定的一个点集  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ , 求一个单位长度闭区间的集合, 包含所有给定的点, 并要求此集合最小。证明你的算法是正确的。

#### 思路分析:

算法思路：对所有点从大到小排序，找到其中最小的数  $x$  并构建闭区间  $[x, x + 1]$ ，将在此区间中所有数删除。不断重复上述过程。

证明思路：

- 做出一次选择，只剩一个子问题求解。
- 做出贪心选择后，原问题总是存在最优解。
- 做出贪心选择后，剩余子问题最优解与贪心组合即可得到原问题最优解。

## 2.3

### 题目描述：

一位公司主席正在向 Stewart 教授咨询公司聚会方案。公司的内部结构关系是层次化的，即员工按主管-下属关系构成一棵树，根结点为公司主席。人事部按“宴会交际能力”为每个员工打分，分值为实数。为了使所有参加聚会的员工都感到愉快，主席不希望员工及其直接主管同时出席。

公司主席向 Stewart 教授提供公司结构树，采用左孩子右兄弟表示法（参见课本 10.4 节）描述。每个节点除了保存指针外，还保存员工的姓名和宴会交际评分。设计算法，求宴会交际评分之和最大的宾客名单。分析算法复杂度。

### 思路分析：

转移方程：

$$c[x] = \max \left( \sum_{y \text{ is a child of } x} c[y], \sum_{y \text{ is a grandchild of } x} c[y] \right) \quad (6)$$

算法运行时间： $O(n^2)$ 。

## 2.4

### 题目描述：

考虑用最少的硬币找  $n$  美分零钱的问题。假定每种硬币的面额都是整数。设计贪心算法求解找零问题，假定有 25 美分、10 美分、5 美分和 1 美分四种面额的硬币。证明你的算法能找到最优解。

### 思路分析：

总是在不超过额度的情况下找零最大的硬币。