

HW7

1. 如果将输入的图用邻接矩阵来表示，并修改算法来应对此种形式的输入，请问 BFS 的运行时间将是多少？

$O(V^2)$ ，需要将每一个节点进入队列，这需要 $O(V)$ ，对于每个节点，需要扫描其邻接节点，由于输入的图用邻接矩阵表示，故总共需要 $O(V)+O(V^2)=O(V^2)$

2. 对于有向图 $G = (V, E)$ 来说，如果 $u \rightarrow v$ 意味着图 G 至多包含一条从 u 到 v 的简单路径，则图 G 是单连通图。请给出一个有效算法来判断一个有向图是否是单连通图。

当图 G 中存在前向边和横向边时，此图不是单连通图，故只需对有向图 G 做一次 DFS，在做 DFS 的过程中判断是否有前向边和横向边即可。

在做 DFS 的过程中判断是否有前向边和横向边的方法如下：

当第一次搜索边 (u, v) 时，若节点 v 为黑色则说明 (u, v) 是一条前向边或横向边。

3. 假定图中的边权重全部为整数，且在范围 $1 \sim |V|$ 内，在此情况下，Kruskal 算法最快能多快？如果变得权重取值范围在 1 到某个常数 W 之间呢？

由于每次需要找到最小且安全的边，对于每条边都需要遍历一次并执行 FIND-SET 操作，再加上 $|V|$ 个 MAKE-SET 操作，故总共需要 $O((V + E)\alpha(V)) = O(E\alpha(V)) = O(E \lg E)$ ，而权重的范围，只能改变对于边进行排序所需的时间，本质上改变不了 Kruskal 算法的时间复杂度。

4. 假定图中的边权重全部为整数，且在范围 $1 \sim |V|$ 内，在此情况下，Prim 算法最快能多快？如果变得权重取值范围在 1 到某个常数 W 之间呢？

图中的边权重全部为整数，范围在 $1 \sim |V|$ 内：将边的权重为 i 的边加到索引为 i 的指针数组，数组中的指针指向了一个链表，取最小值时，初始从索引为 1 开始找，找到了从指针数组中删掉这条边，每次 EXTRACT-MIN 只需常熟时间，故总共 EXTRACT-MIN 所需代价为 $O(|V|)$ ，对于 DECREASE-KEY，用 Fibonacci heap，总共的代价只需 $O(E)$ ，故 Prim 的时间复杂度为 $O(|V| + |E|)$ 。

若权重取值范围在 1 到某个常数 W 之间，用 van Emde Boas 树，则每次 EXTRACT-MIN、DECREASE-KEY 所需代价为 $O(\lg(\lg W))$ ，EXTRACT-MIN 共执行 $O(|V|)$ 次，DECREASE-KEY 共执行 $O(|E|)$ 次，故 Prim 的时间复杂度为 $O((|V| + |E|)\lg(\lg W))$