常应变三角单元（CST）刚度矩阵推导

1. 单元定义与位移假设

常应变三角单元是二维有限元中最简单的单元，由三个节点组成，每个节点有 2 个自由度（u, v）。单元内位移采用**线性插值**：

$$\begin{cases} u(x,y) = a_1 + a_2 x + a_3 y \\ v(x,y) = a_4 + a_5 x + a_6 y \end{cases}$$

写成矩阵形式：

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \mathbf{N}\mathbf{d}^e$$

其中：

- $\mathbf{N}$ 为形函数矩阵，$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 \end{bmatrix}$。
- $\mathbf{d}^e$ 为节点位移向量，$\mathbf{d}^e = [u_1, v_1, u_2, v_2, u_3, v_3]^T$。
- 形函数 N_i 满足 $N_i(x_j, y_j) = \delta_{ij}$，且 $\sum N_i = 1$。

2. 应变-位移关系

二维弹性力学中，应变 $\boldsymbol{\varepsilon} = [\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \gamma_{xy}]^T$ 与位移关系为：

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{L}\mathbf{u}, \quad \mathbf{L} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}$$

代入位移插值：

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{L}\mathbf{N}\mathbf{d}^e = \mathbf{B}\mathbf{d}^e$$

$\mathbf{B}$ 为应变-位移矩阵，对 CST 单元为常数矩阵：

$$\mathbf{B} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} b_1 & 0 & b_2 & 0 & b_3 & 0 \\ 0 & c_1 & 0 & c_2 & 0 & c_3 \\ c_1 & b_1 & c_2 & b_2 & c_3 & b_3 \end{bmatrix}$$

其中：

- A 为三角形面积，
- $b_i = y_j - y_k$, $c_i = x_k - x_j$（i, j, k 循环排列）。

3. 应力-应变关系

线弹性材料本构关系（平面应力或平面应变）：

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{D}\mathbf{B}\mathbf{d}^e$$

$\mathbf{D}$ 为弹性矩阵，例如平面应力时：

$$\mathbf{D} = \frac{E}{1-\nu^2}\begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}$$

4. 刚度矩阵推导

通过虚功原理或最小势能原理，单元刚度矩阵为：

$$\mathbf{K}^e = \int_{\Omega_e} \mathbf{B}^T\mathbf{D}\mathbf{B}\, d\Omega$$

对于 CST 单元，$\mathbf{B}$ 和 $\mathbf{D}$ 为常数，且厚度 t 均匀时：

$$\mathbf{K}^e = tA\,\mathbf{B}^T\mathbf{D}\mathbf{B}$$

5. 组装与求解

将各单元刚度矩阵组装成全局刚度矩阵 $\mathbf{K}$，并求解平衡方程：

$$\mathbf{K}\mathbf{d} = \mathbf{F}$$

其中 $\mathbf{F}$ 为节点载荷向量，$\mathbf{d}$ 为全局位移向量。

使用

1. 使用 E 是弹性模量，ν 是泊松比计算 $\mathbf{D}$ 矩阵
2. 根据坐标计算出 $A, \mathbf{B}$
3. 根据初始条件和设定计算出 $\mathbf{F}$
4. 联立矩阵求解出 $\mathbf{d}$