普通物理I PHYS1181.02

彭鹏

Office: 物质学院8号楼301室
Email: pengpeng@shanghaitech.edu.cn

研究方向: 超快光谱、X射线阿秒脉冲产生、阿秒瞬态吸收光谱、
强场激光物理、飞秒激光成丝。
https://spst.shanghaitech.edu.cn/2021/0115/c2349a59066/page.htm

刚体绕定轴转动的功和能

(1) 刚体转动动能 $E_k = \frac{1}{2} J\omega^2$

(2) 力矩的功 $A = \int_{\theta_1}^{\theta_2} M \mathrm{d}\theta$

(3) 刚体绕定轴转动的动能定理 $\int_{\theta_1}^{\theta_2} M d\theta = \frac{1}{2} J\omega_2^2 - \frac{1}{2} J\omega_1^2$

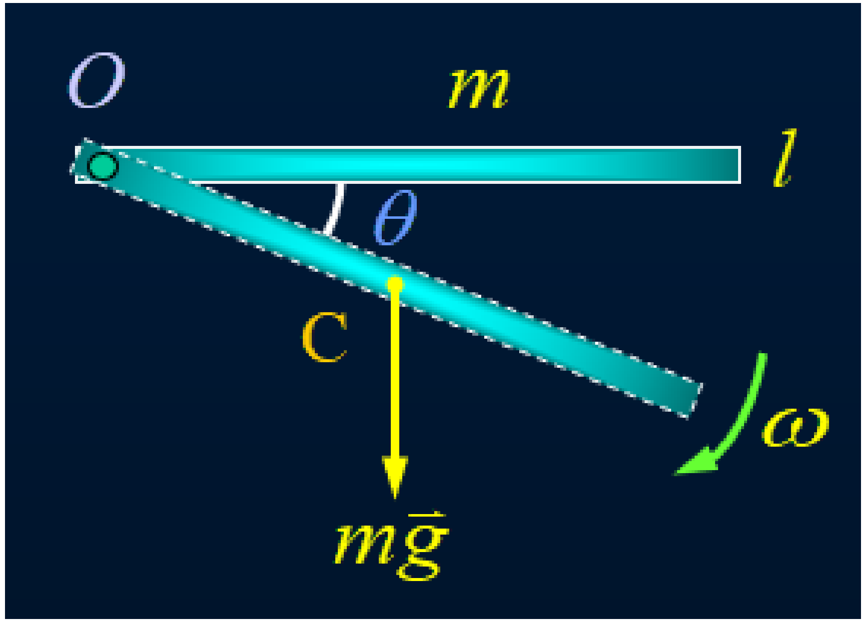
(4) 刚体的重力势能 $E_p = mgh_C$

(5) 机械能守恒定律

当 $A_{外} + A_{非保内} = 0$ **时，** $E = E_k + E_p =$ **常量**

例 **如图，一质量为m，长度为l的均质细杆，可绕通过其一端O且与杆垂直的光滑水平轴转动。若将此杆在水平位置时由静止释放。**

求 **当杆转到与水平方向成角$\theta = \pi/6$时的角速度。**

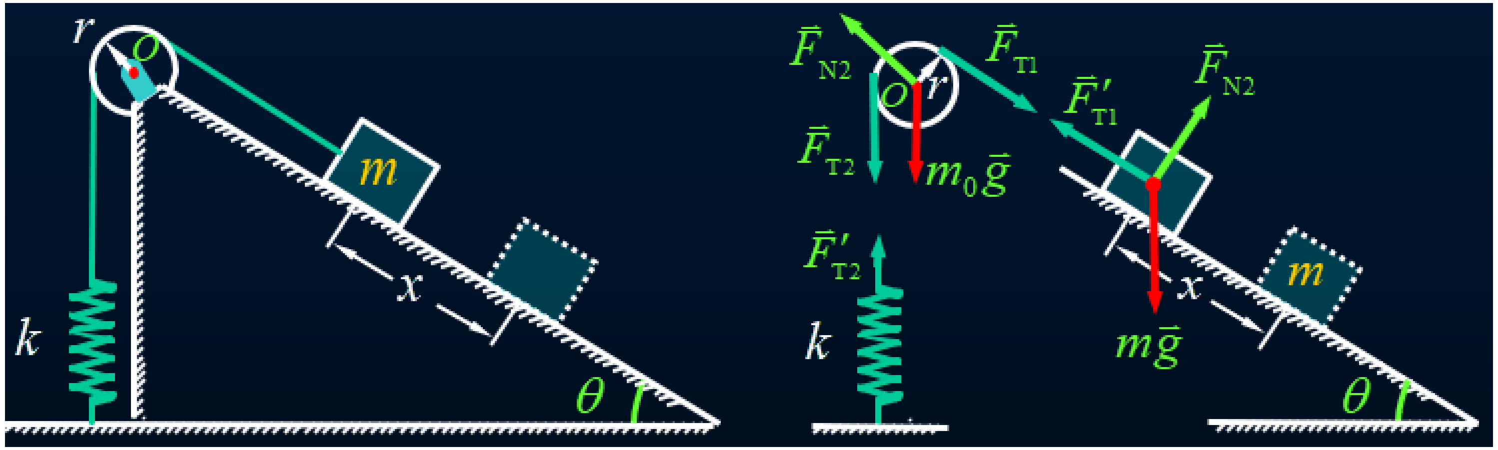


例 如图，系统由静止开始释放，释放时弹簧处于自然状态。已知滑轮半径为 $r = 0.3\text{m}$，转动惯量为 $J = 0.5\text{kg}\cdot\text{m}^2$。滑块的质量为 $m = 2\text{kg}$，斜面倾角为 $\theta = 37^0$，弹簧的劲度系数为 $k = 20\text{N}\cdot\text{m}^{-1}$。滑块与斜面、滑轮与轴承之间的摩擦均可忽略不计，轻绳不可伸长。

求 (1) 当滑块沿斜面滑下 1.0m时，它的速率多大?

(2) 滑块沿斜面将下滑多远?

(3) 当滑块速率达到最大值时，它已滑下多远?



上海科技大学
ShanghaiTech University

主要内容：

1. 刚体绕定轴转动的角动量定理

2. 角动量守恒定律

3. 角动量守恒定律在工程技术上的应用

上海科技大学 ShanghaiTech University

◆ **刚体绕定轴转动的角动量**

在刚体上任取一质点*P*

质点*P*对*z*轴的角动量为

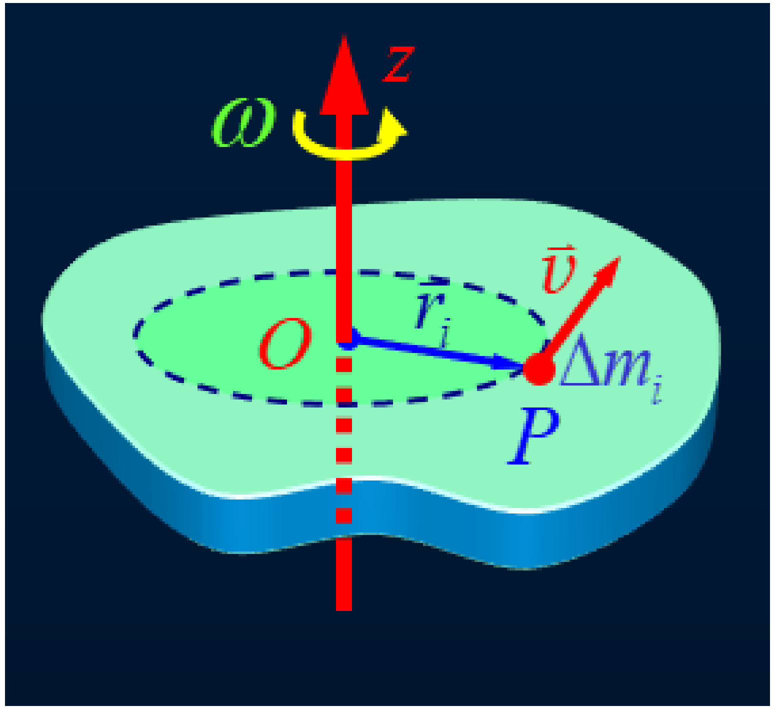
$$L_i = \Delta m_i v_i r_i \quad = \Delta m_i r_i^2 \omega$$

$$L = \sum_i L_i \quad = \sum_i \Delta m_i v_i r_i$$

$$= (\sum_i \Delta m_i r_i^2)\omega$$

$$\boxed{L = J\omega}$$

(刚体绕定轴转动的角动量)



- **刚体的角动量是描述刚体绕定轴转动状态的物理量；**
- **角动量 L=$J\omega$ 与质点动量 p=$m\boldsymbol{v}$ 相对应。**

上海科技大学 ShanghaiTech University

◆ 刚体绕定轴转动的角动量定理

将刚体的角动量对时间求导

$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(J\omega)$$

刚体对确定轴的转动惯量不变，则

$M = J\beta$ （刚体定轴转动定律）

$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} = J\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = J\beta$$

作用在刚体上的合外力矩等于刚体对转轴的转动惯量与所获得的角加速度的乘积。

$$M = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(J\omega)$$

（刚体定轴转动的角动量定理）

作用在绕定轴转动刚体上的合外力矩等于刚体对该轴的角动量对时间的导数。

➢ 说明：可以证明，此式也适用于在物体转动过程中，J发生变化的过程，而$M = J\beta$ 仅适用于转动惯量不变的过程。

积分形式的角动量定理

$$M=\frac{\mathrm{d}(J\omega)}{\mathrm{d}t} \quad \Rightarrow \quad M\mathrm{d}t=\mathrm{d}(J\omega) \qquad (M\mathrm{d}t\text{为元冲量矩})$$

$$\int_{t_1}^{t_2} M\mathrm{d}t=\int_{J\omega_1}^{J\omega_2}\mathrm{d}(J\omega)=J\omega_2-J\omega_1 \qquad \left(\int_{t_1}^{t_2} M\mathrm{d}t\ \text{为冲量矩}\right)$$

(定轴转动角动量定理的积分形式)

定轴转动刚体在某段时间内所受合外力矩的冲量矩等于刚体在同一时间内角动量的增量。

- 说明：**可以证明，对转动惯量J可变化的质点系或非刚体，在定轴转动时，角动量定理仍成立，即有**

$$\int_{t_1}^{t_2} M\mathrm{d}t=J_2\omega_2-J_1\omega_1$$

角动量守恒定律

当 $M = 0$ 时，有 $J\omega =$ 常量 （角动量守恒定律）

当作用在定轴转动物体上的合外力矩为零时，物体在运动过程中的角动量保持不变。

➢ 讨论

- **角动量守恒不仅适用于刚体，也同样适用于非刚体。**

(1)对于刚体角动量守恒时，转动惯量和角速度均保持不变，刚体绕定轴作匀角速转动；

(2)对非刚体，角动量守恒时，转动惯量和角速度同时改变，但两者乘积不变：当J变大时，角速度变小；当J变小时，角速度变大。

花样滑冰运动员通过改变身体姿态（转动惯量）来改变转速

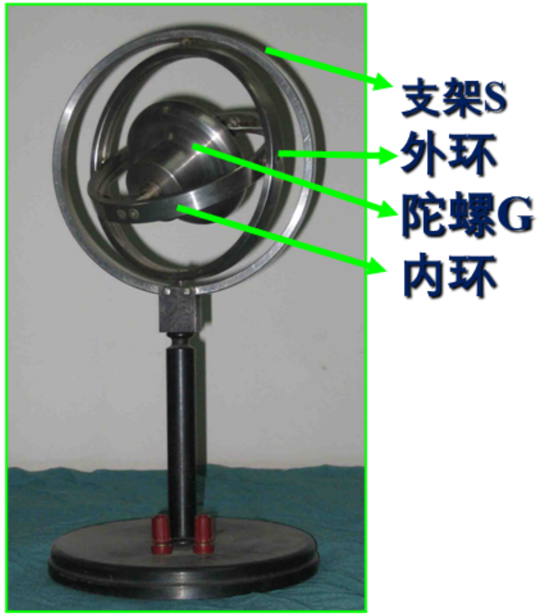
- 角动量守恒不仅适用于宏观物体，也同样适用于天体运动和微观粒子的运动。

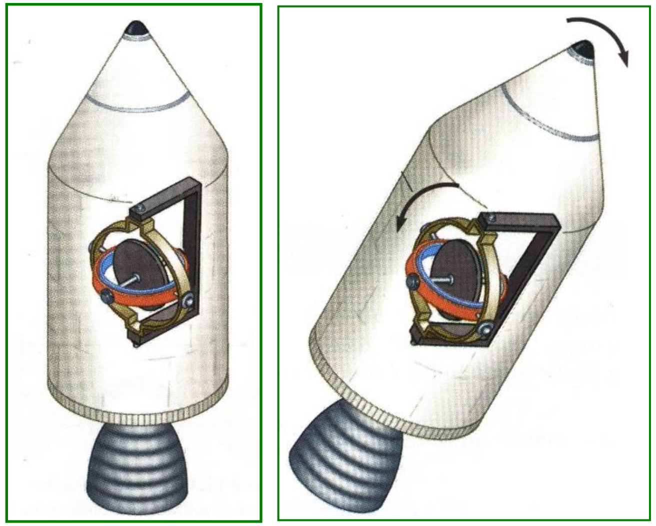
◆ 陀螺仪与导航

- 陀螺仪：**能够绕其对称轴高速旋转的厚重的对称刚体。**

- 陀螺仪的特点：**具有轴对称性和绕对称轴有较大的转动惯量。**

- **陀螺仪的定向特性：由于不受外力矩作用，陀螺角动量的大小和方向都保持不变；无论怎样改变框架的方向，都不能使陀螺仪转轴在空间的取向发生变化。**





https://zhuanlan.zhihu.com/p/25929610

脚踏车不倒

◆ 直升机螺旋桨的设置

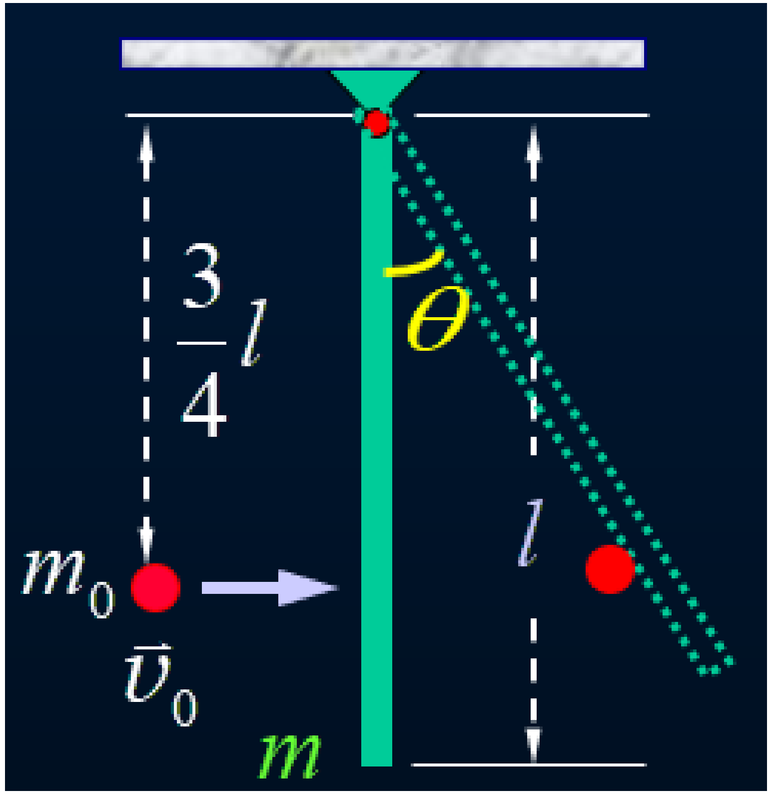
- 尾桨的设置：**直升机发动后机身要在旋翼旋转相反方向旋转，产生一个向下的角动量。为了不让机身作这样的反向旋转，在机身尾部安装一个尾桨，尾桨的旋转在水平面内产生了一个推力，以平衡单旋翼所产生的机身扭转作用。**

- 对转螺旋桨的设置：**双旋翼直升机则无需尾桨，它在直立轴上安装了一对对转螺旋桨，即在同轴心的内外两轴上安装了一对转向相反的螺旋桨。工作时它们转向相反，保持系统的总角动量仍然为零。**

例 **一质量为m，长度为l的均质细杆可绕一水平轴自由转动。开始时杆子处于铅垂状态。现有一质量为m_0的橡皮泥以速度v_0与细杆在其$3l/4$处发生完全非弹性碰撞且和杆子粘在一起。**

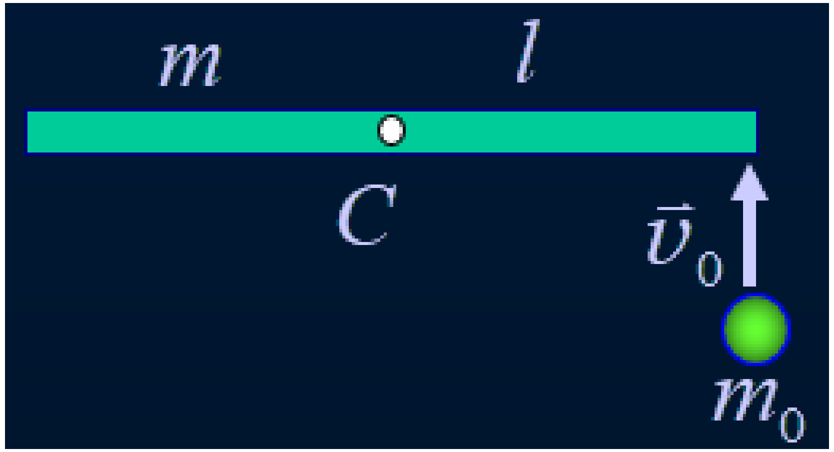
求 **(1) 碰撞后系统的角速度ω;**

(2) 碰撞后细杆能上摆的最大角度θ_0。



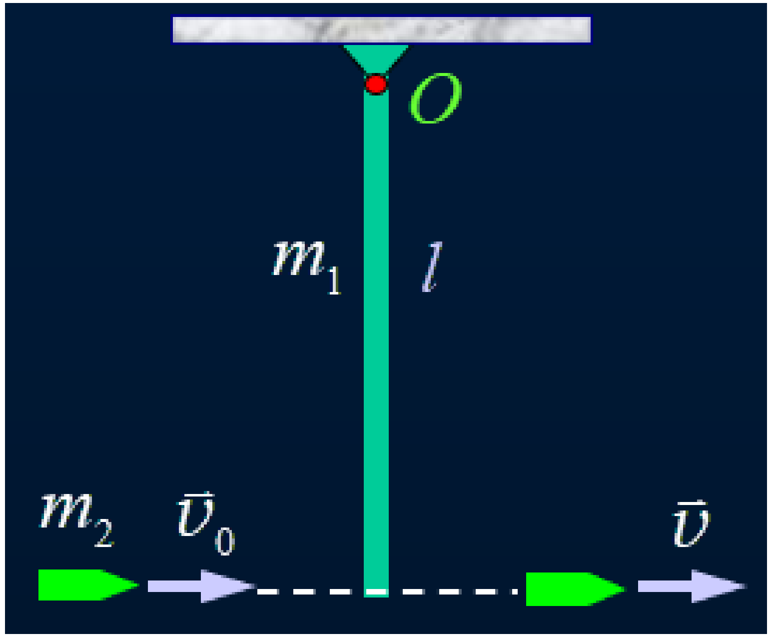
例 **如图，在光滑水平面上放一质量为m、长为l的均质细棒，细棒可绕中心固定的光滑竖直轴转动，细棒开始静止。若有一质量为m_0的小球，以垂直于细棒的水平速度v_0冲击细棒的一个顶端，设冲击是完全弹性碰撞。**

求 **碰撞后小球的反弹速度v和细棒的角速度ω。**



例 **如图，一质量为m_1，长度为l的均质细棒，可绕过其顶端的光滑水平轴自由转动。质量为m_2的子弹以水平速度v_0射入静止的细棒下端，穿出后子弹的速度减小为$v_0/4$。**

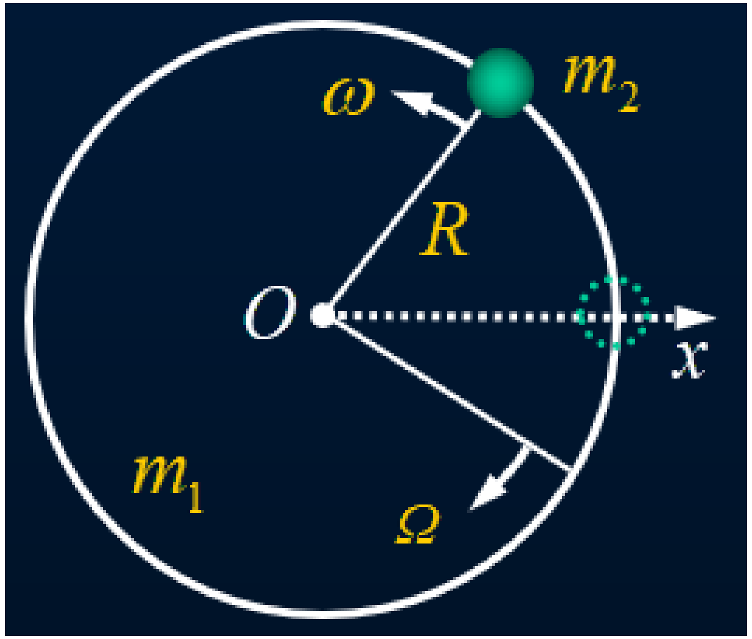
求 **子弹穿出后棒所获得的角速度ω。**



上海科技大学
ShanghaiTech University

例 **如图，一个质量为m_1，半径为R 的圆形水平转台可绕通过其中心的光滑竖直轴转动。质量为m_2的人站在转台的边缘，开始时，人和转台都相对于地面静止。**

求 **当人沿转台边缘走完一周时，转台对地面转过的角度。**



质点的运动规律与刚体的定轴转动规律的比较

质点的运动		刚体的定轴转动	
速度	$\vec{v}=\dfrac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}$	角速度	$\omega=\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$
加速度	$\vec{a}=\dfrac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2}$	角加速度	$\beta=\dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}$
质量	m	转动惯量	$J=\int r^2\mathrm{d}m$
力	$\vec{F}$	力矩	M
运动规律	$\vec{F}=m\vec{a}$	转动定律	$M=J\beta$
动量	$\vec{p}=m\vec{v}$	动量	$\vec{p}=\sum\Delta m_i\vec{v}_i$
角动量	$\vec{L}=\vec{r}\times\vec{p}$	角动量	$L=J\omega$
动量定理	$\vec{F}=\dfrac{\mathrm{d}(m\vec{v})}{\mathrm{d}t}$	角动量定理	$M=\dfrac{\mathrm{d}(J\omega)}{\mathrm{d}t}$

质点的运动规律与刚体的定轴转动规律的比较（续）

质点的运动		刚体的定轴转动	
动量守恒	$\sum F_i = 0$时 $\sum m_i v_i =$ 恒量	角动量守恒	$M = 0$时 $\sum J\omega =$ 恒量
力的功	$A_{ab} = \int_a^b \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r}$	力矩的功	$A_{ab} = \int_{\theta_1}^{\theta_2} M \mathrm{d}\theta$
动能	$E_k = \frac{1}{2} m v^2$	转动动能	$E_k = \frac{1}{2} J\omega^2$
动能定理	$A = \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2$	动能定理	$A = \frac{1}{2} J\omega_2^2 - \frac{1}{2} J\omega_1^2$
重力势能	$E_p = mgh$	重力势能	$E_p = mgh_c$
机械能守恒	$A_{外} + A_{非保内} = 0$时 $E_k + E_p =$ 恒量	机械能守恒	$A_{外} + A_{非保内} = 0$时 $E_k + E_p =$ 恒量

平衡与弹性

1. 平衡条件
2. 应变
3. 应力
4. 胡克定律
5. 杨氏模量

平衡

质点 -- { x, y, z} 三个运动自由度

质点系 – {x, y, z} *n 个运动自由度

刚体 – {x, y, z} + {α, β, γ} 六个运动自由度 -- 刚体的运动可以分解为质心的平动 + 绕质心的转动

质点的平衡 -- 牛顿第一定律： 合力为零

刚体的平衡 – 合力为零 + 合力矩为零

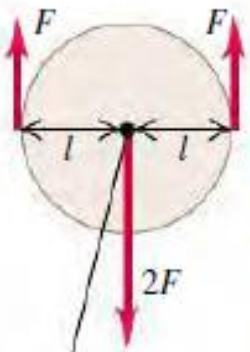
First condition for equilibrium: For the center of mass of a body at rest to remain at rest ... $\sum \vec{F} = 0$ ... *net external force* on the body must be *zero*.

Second condition for equilibrium: For a nonrotating body to remain nonrotating ... $\sum \vec{\tau} = 0$ ... *net external torque around any point* on the body must be *zero*.

上海科技大学
ShanghaiTech University

合力为0+合力距为0

(a) This body is in static equilibrium.



Axis of rotation (perpendicular to figure)

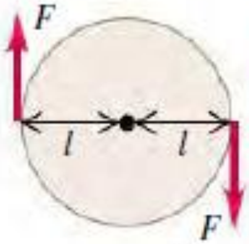
Equilibrium conditions:

First condition satisfied: Net force = 0, so body at rest has no tendency to start moving as a whole.

Second condition satisfied: Net torque about the axis = 0, so body at rest has no tendency to start rotating.

合力为0+合力距不为0

(b) This body has no tendency to accelerate as a whole, but it has a tendency to start rotating.

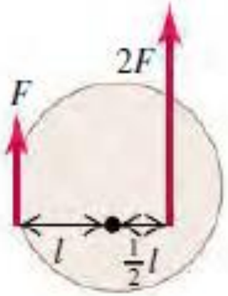


First condition satisfied: Net force = 0, so body at rest has no tendency to start moving as a whole.

Second condition NOT satisfied: There is a net clockwise torque about the axis, so body at rest will start rotating clockwise.

合力不为0+合力距为0

(c) This body has a tendency to accelerate as a whole but no tendency to start rotating.



First condition NOT satisfied: There is a net upward force, so body at res will start moving upward.

Second condition satisfie Net torque about the axis = so body at rest has no tendency to start rotating.

质心

$$x_{cm} = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3 + \cdots}{m_1 + m_2 + m_3 + \cdots} = \frac{\sum_i m_i x_i}{\sum_i m_i}$$

$$y_{cm} = \frac{m_1y_1 + m_2y_2 + m_3y_3 + \cdots}{m_1 + m_2 + m_3 + \cdots} = \frac{\sum_i m_i y_i}{\sum_i m_i} \quad \text{(center of mass)}$$

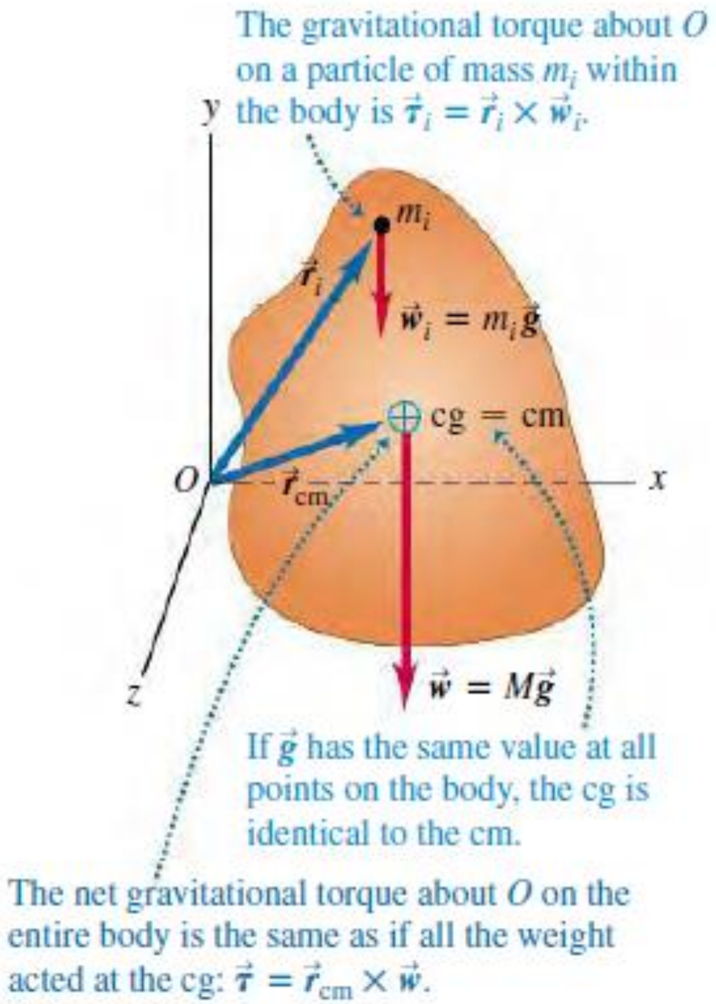
$$z_{cm} = \frac{m_1z_1 + m_2z_2 + m_3z_3 + \cdots}{m_1 + m_2 + m_3 + \cdots} = \frac{\sum_i m_i z_i}{\sum_i m_i}$$

Position vector of center of mass of a system of particles

Position vectors of individual particles

$$\vec{r}_{cm} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + m_3\vec{r}_3 + \cdots}{m_1 + m_2 + m_3 + \cdots} = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum_i m_i}$$

Masses of individual particles



重力的力矩

$$\vec{\tau}_i = \vec{r}_i \times \vec{w}_i = \vec{r}_i \times m_i\vec{g}$$

The *total* torque due to the gravitational forces on all the particles is

$$\begin{aligned}\vec{\tau} = \sum_i \vec{\tau}_i &= \vec{r}_1 \times m_1\vec{g} + \vec{r}_2 \times m_2\vec{g} + \cdots \\ &= (m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + \cdots) \times \vec{g} \\ &= \left(\sum_i m_i\vec{r}_i\right) \times \vec{g}\end{aligned}$$

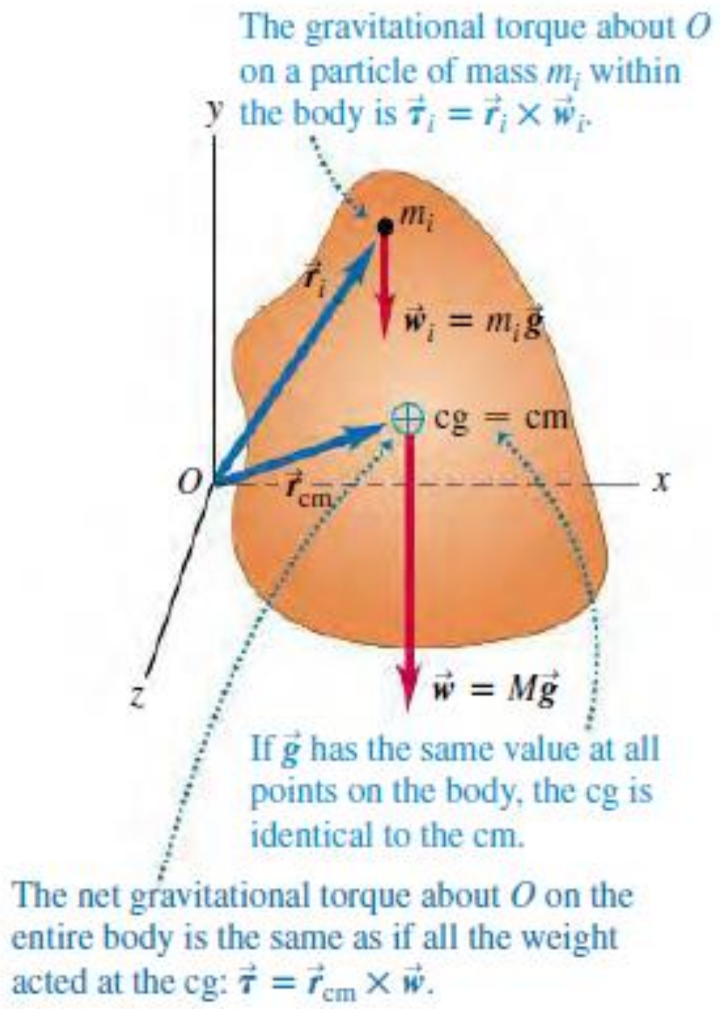
When we multiply and divide this by the total mass of the body,

$$M = m_1 + m_2 + \cdots = \sum_i m_i$$

we get

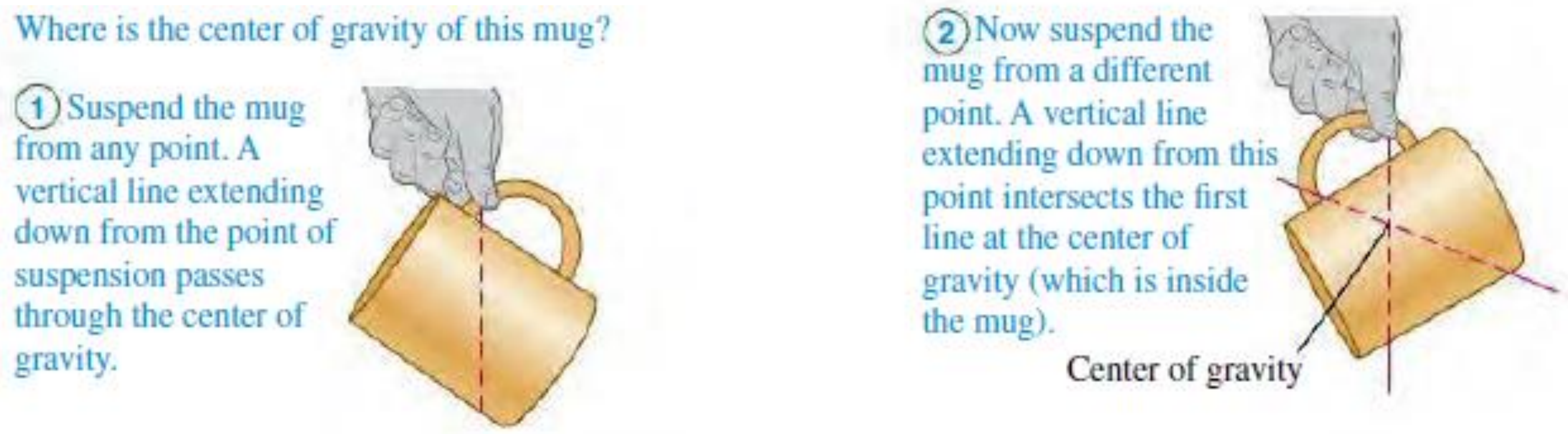
$$\vec{\tau} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + \cdots}{m_1 + m_2 + \cdots} \times M\vec{g} = \frac{\sum_i m_i\vec{r}_i}{\sum_i m_i} \times M\vec{g}$$

$$\vec{\tau} = \vec{r}_{cm} \times M\vec{g} = \vec{r}_{cm} \times \vec{w}$$

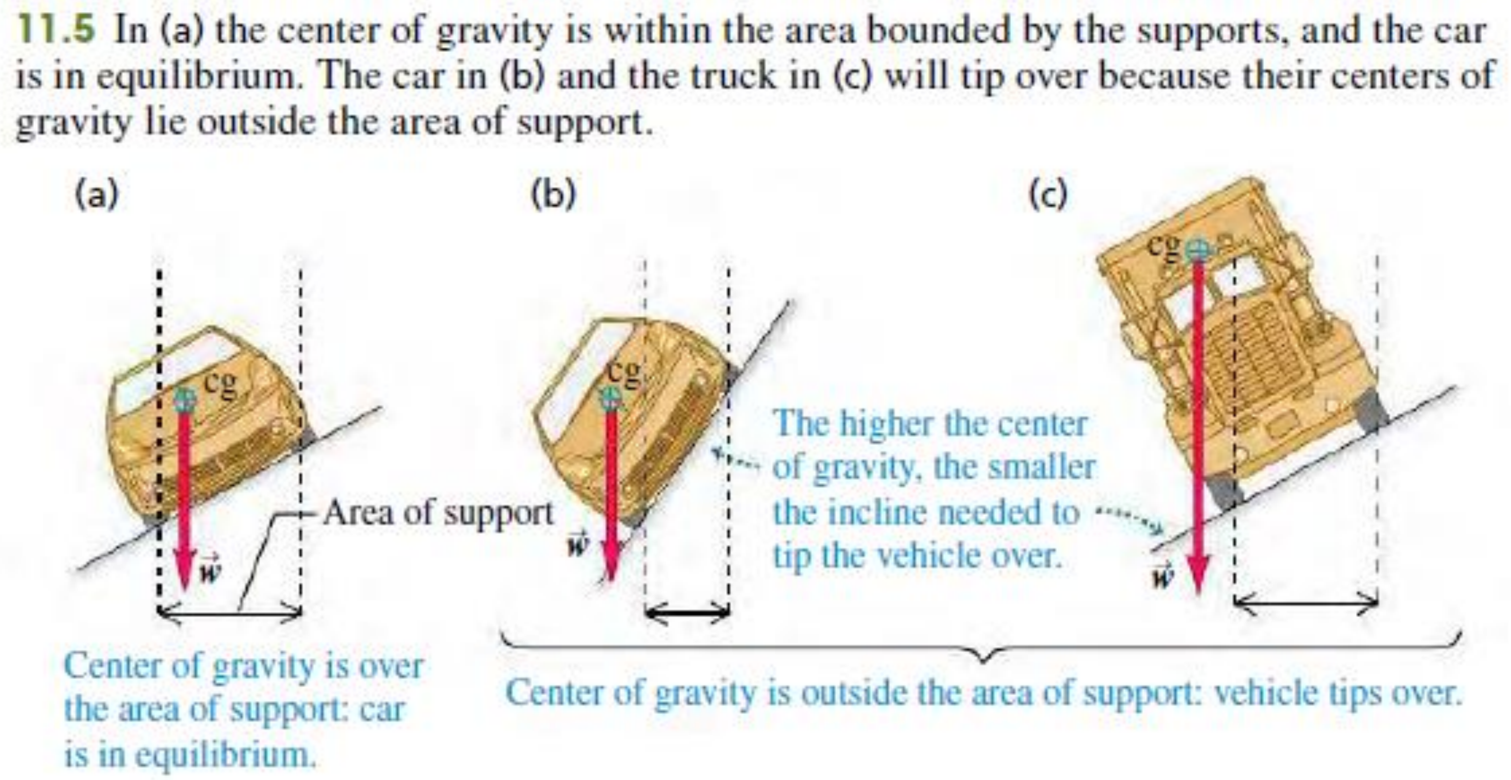


平衡条件判断重心位置

$$\vec{\tau} = \vec{r}_{cm} \times M\vec{g} = \vec{r}_{cm} \times \vec{w}$$



重心位置判断能否平衡

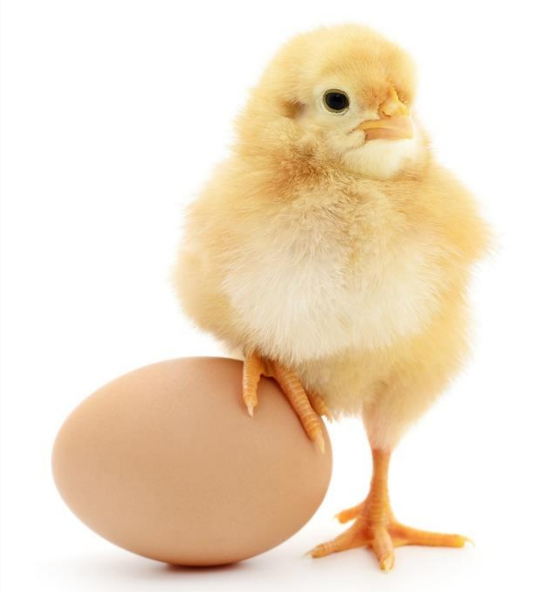


平衡：重心在支撑范围内　　　不平衡：重心超出支撑范围

降低重心+增加支持区域面积

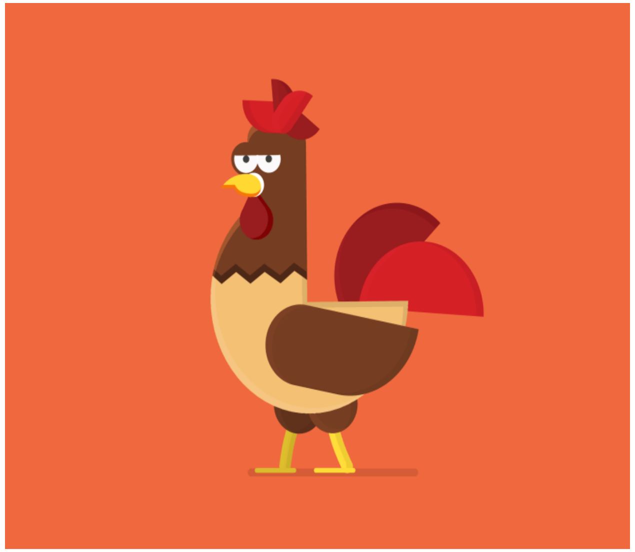
四腿的动物脚比较小

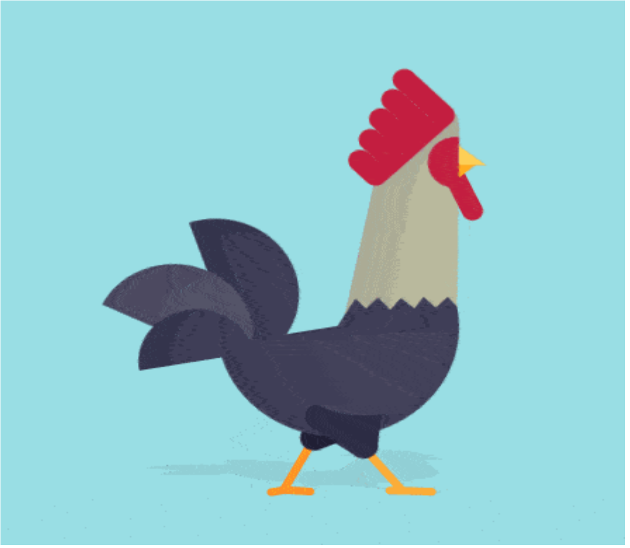
两腿的动物脚比较大

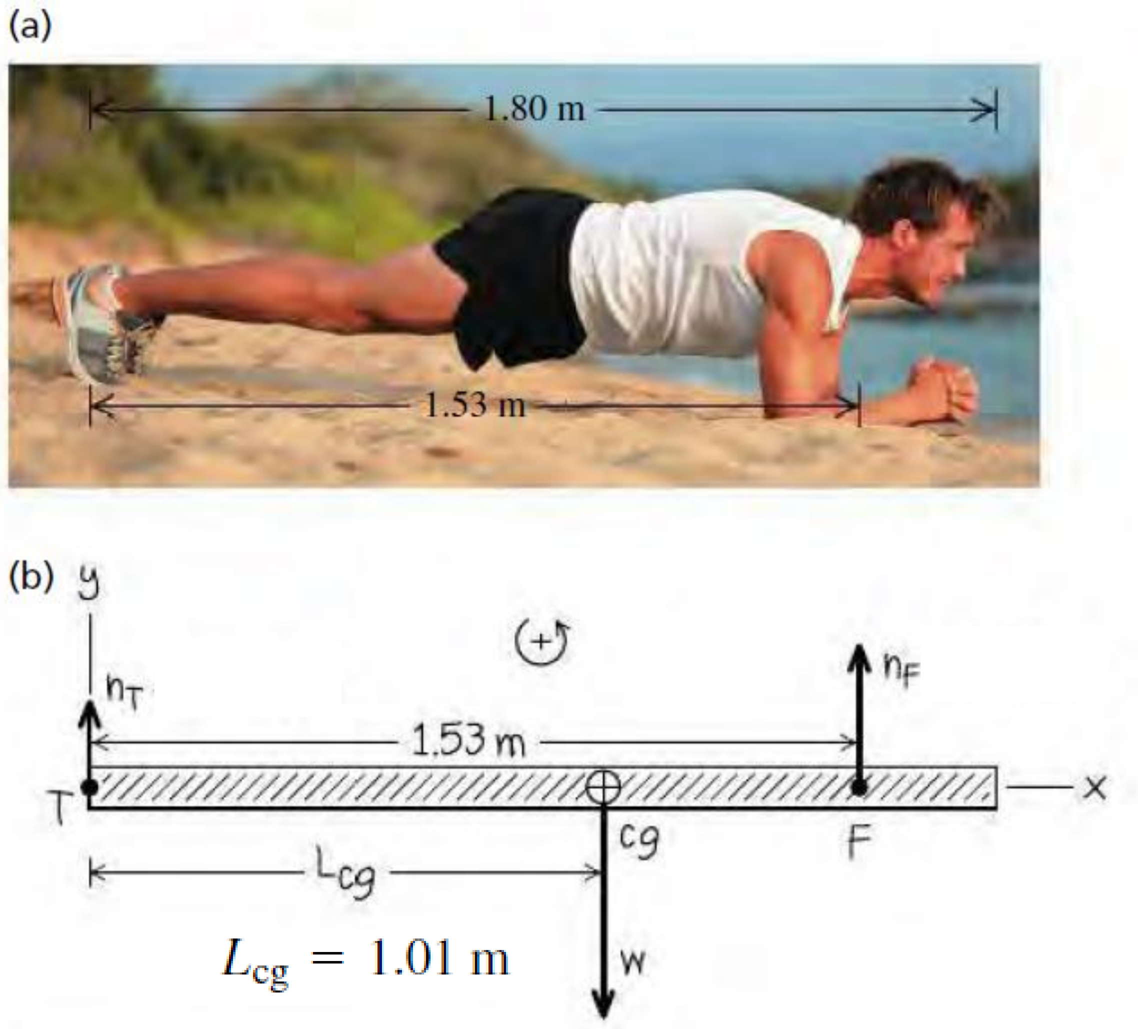


人维持平衡

鸡摆动头部维持平衡







$$\sum \tau_R = 0.340w(0) - wL_{cg} + 0.660w(1.53\ \mathrm{m}) = 0$$

平板支撑
肘部的支撑力大于脚部的支撑力

应力、应变、胡克定律

Measure of forces applied to deform a body

应力

Hooke's law: $$\frac{\text{Stress}}{\text{Strain}} = \text{Elastic modulus}$$

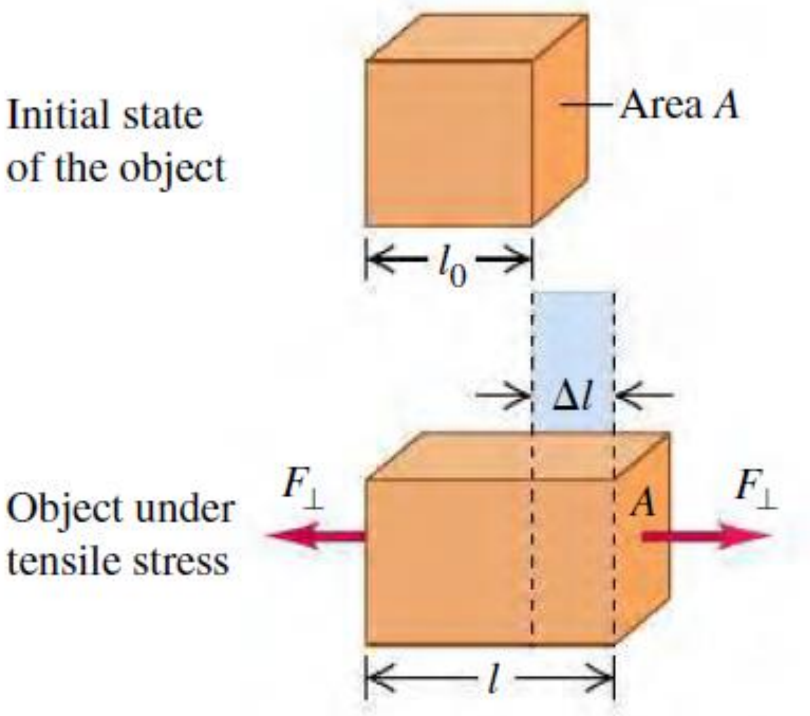
弹性模量

Property of material of which body is made

应变

Measure of how much deformation results from stress

Tensile stress and strain
拉伸应力和应变



$$\text{Tensile stress} = \frac{F_\perp}{A} \qquad \text{Tensile strain} = \frac{\Delta l}{l_0}$$

$$\text{Tensile stress} = \frac{F_\perp}{A}$$

$$1 \text{ pascal} = 1 \text{ Pa} = 1 \text{ N/m}^2$$

人站在地面上：65Kg*9.8N/Kg/(8X24X2 cm^2) = 1.7e4 N/m^2

$$\text{Tensile strain} = \frac{l - l_0}{l_0} = \frac{\Delta l}{l_0}$$

1m的刚性材料 – 一般“常规受力”弹性形变在 十微米 (e-5m)量级

杨氏模量 - Young’s modulus

Young’s modulus for tension

Force applied perpendicular to cross section

Original length (see Fig. 11.14)

$$Y = \frac{\text{Tensile stress}}{\text{Tensile strain}} = \frac{F_\perp/A}{\Delta l/l_0} = \frac{F_\perp}{A}\frac{l_0}{\Delta l}$$

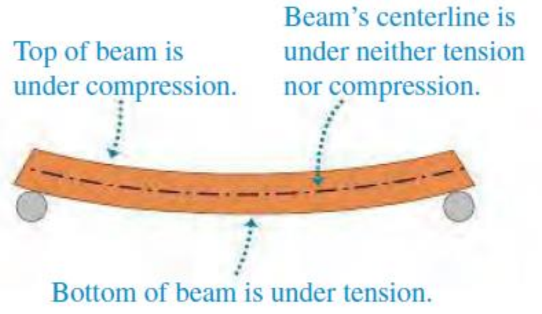
Elongation (see Fig. 11.14)

Cross-sectional area of object

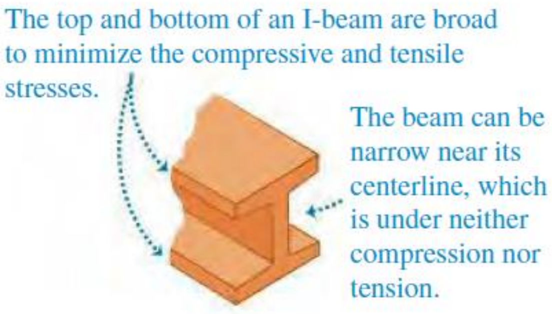
Y 越小，材料越容易变形。

Y 一样，同样受力，面积越小越容易变形。

(a)

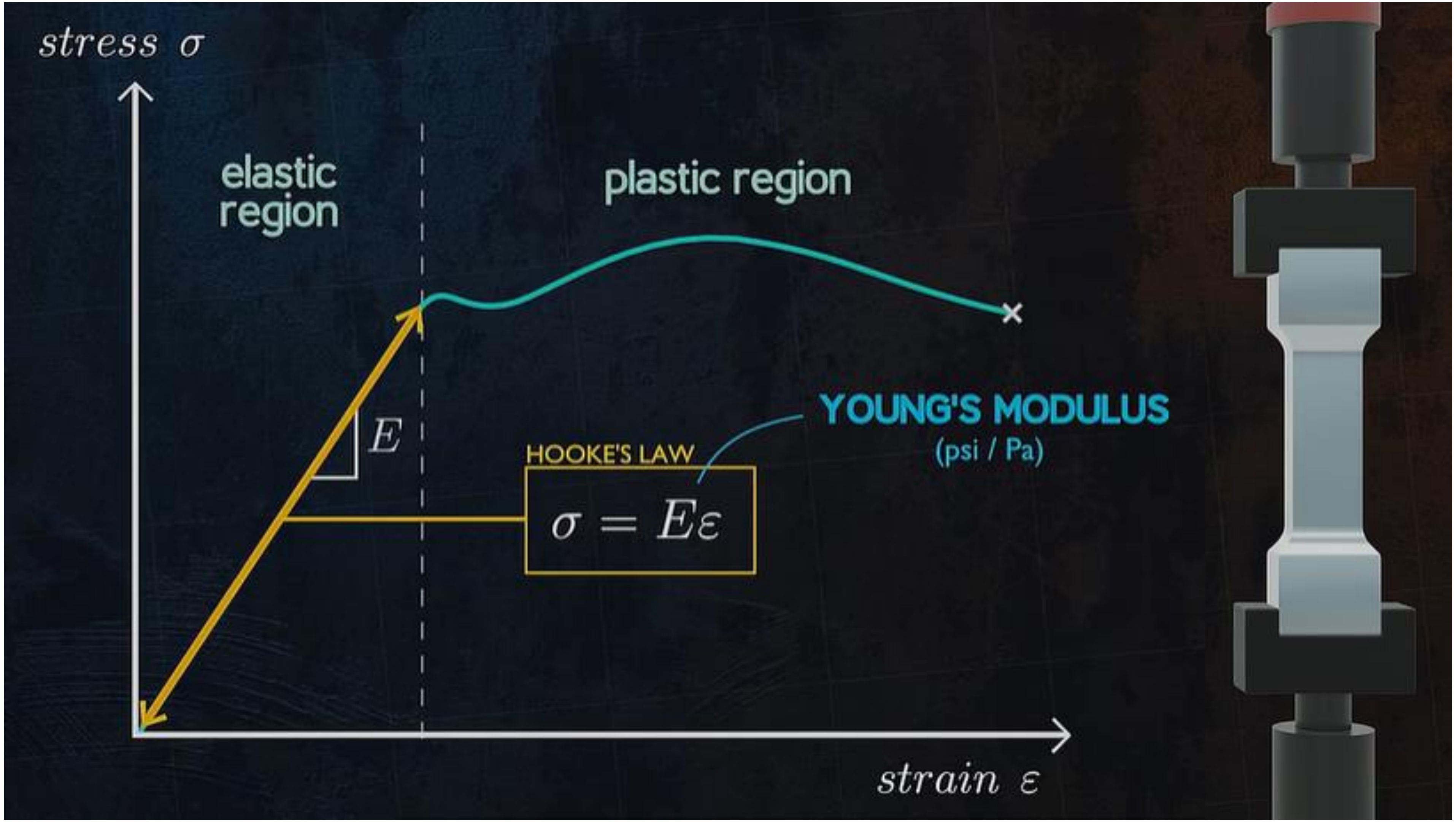


(b)

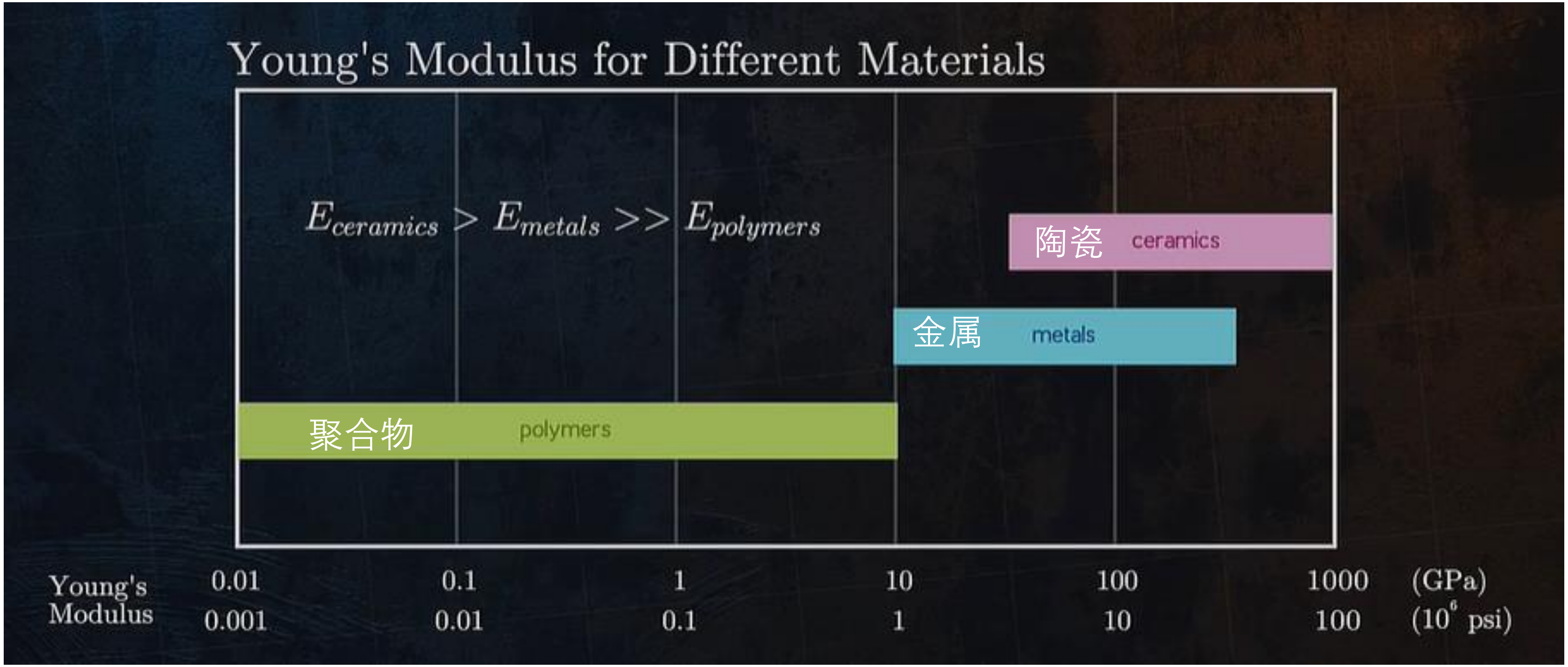


工形钢，上端压缩，下端拉伸，中间受力小

杨氏模量 - Young's modulus



杨氏模量 - Young’s modulus



合理运动，远离伤病

TABLE 11.1 Approximate Elastic Modu

Material	Young's Modulus, Y (Pa)
Aluminum	7.0×10^{10}
Brass	9.0×10^{10}
Copper	11×10^{10}
Iron	21×10^{10}
Lead 铅	1.6×10^{10}
Nickel	21×10^{10}
Silicone rubber 硅胶	0.001×10^{10}
Steel	20×10^{10}
Tendon (typical) 跟腱	0.12×10^{10}