普通物理I PHYS1181.02

彭鹏

Office: 物质学院8号楼301室
Email: pengpeng@shanghaitech.edu.cn

研究方向: 超快光谱、X射线阿秒脉冲产生、阿秒瞬态吸收光谱、强场激光物理、飞秒激光成丝。
https://spst.shanghaitech.edu.cn/2021/0115/c2349a59066/page.htm

1. 考试时间：**2024.11.20，10:15-12:15**，120分钟，允许使用计算器。

2. 考试地点：**教学中心102教室。**

3. 闭卷考试，除携带必要考试用具外，书籍、笔记、掌上电脑和其他电子设备等物品一律按要求放在指定位置。

4. 请严格遵守考场纪律，禁止任何形式的作弊行为。

回顾1

1. 物理学的研究范围（空间10^{-15}-10^{26} m 、时间10^{-25}-10^{18} s ）。

2. 三次工业革命背后的物理学推动。

3. 物理量（长度、时间、质量）。

4. 误差、不确定度。

5. 矢量运算（加、减、点乘、叉乘）。

回顾2

1. 质点、参考系、坐标系

2. 位置矢量与运动方程 $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$

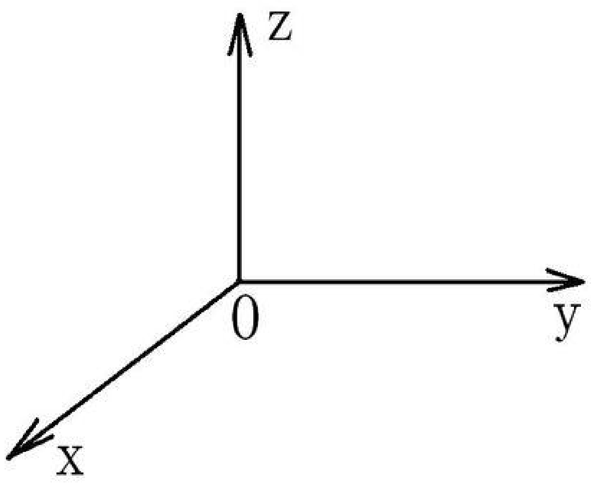
3. 位移与路程 $\Delta\vec{r} = \vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)$

4. 速度、加速度 $\vec{v} = \lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} \qquad \vec{a} = \lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2}$

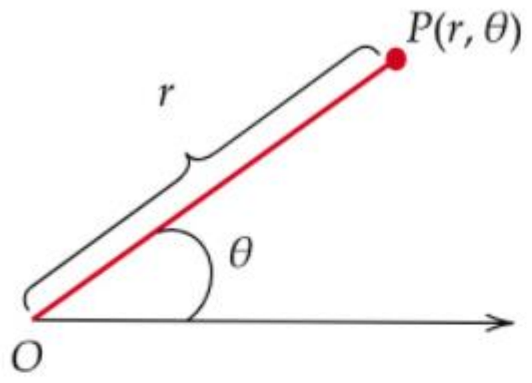
5. 匀加速直线运动 $v = v_0 + at, \qquad x = v_0 t + \mathrm{a}t^2/2, \quad v^2 - v_0^2 = 2ax$

6. 平面极坐标系 $\vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta = \vec{v}_r + \vec{v}_\theta \quad \vec{a} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\vec{e}_r + \left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}\right)\vec{e}_\theta$

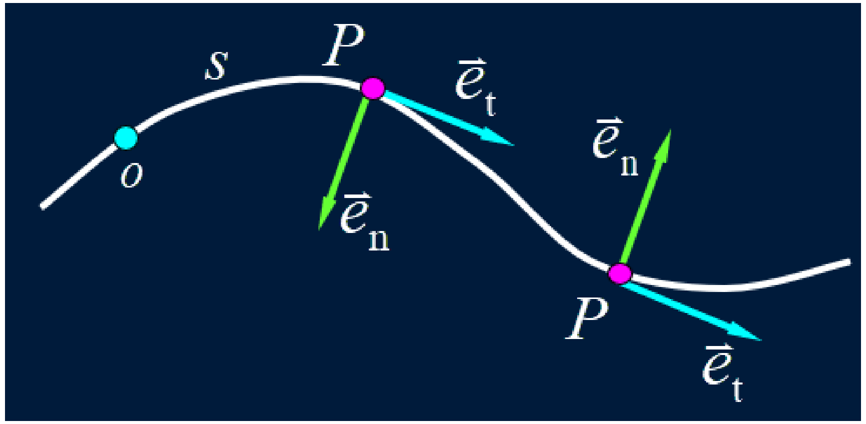
回顾3



直角坐标系



极坐标系



自然坐标系

$$\vec{v} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k}$$

$$\vec{a} = \frac{dv_x}{dt}\vec{i} + \frac{dv_y}{dt}\vec{j} + \frac{dv_z}{dt}\vec{k}$$

$$\vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta = \vec{v}_r + \vec{v}_\theta$$

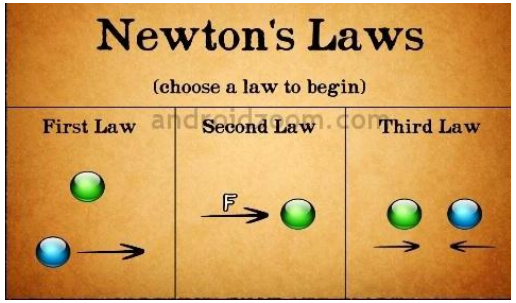
$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\vec{e}_\theta$$

$$\vec{v} = v\vec{e}_t = \frac{ds}{dt}\vec{e}_t$$

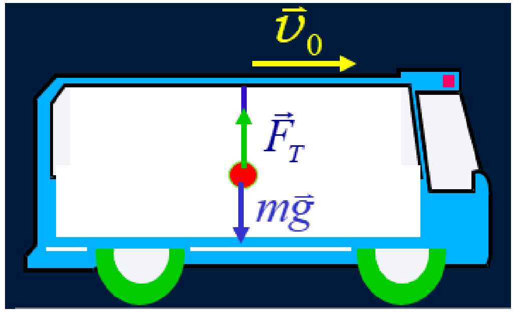
$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(v\vec{e}_t)}{dt} = \frac{dv}{dt}\vec{e}_t + \frac{v^2}{\rho}\vec{e}_n$$

1. 牛顿三定律

牛顿第一定律：
任何物体都保持静止或作匀速直线运动状态，直到其它物体的作用迫使它改变这种状态为止。



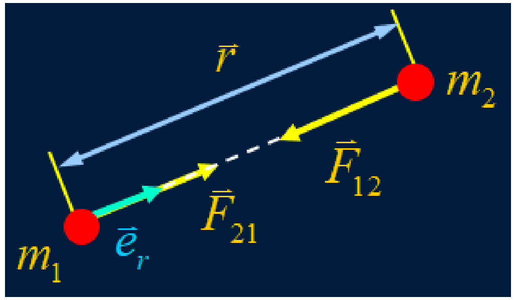
牛顿第二定律：
运动的改变和所加的力成正比;并且发生在这力所沿的直线的方向上。



牛顿第三定律：
每一个作用总有一个相等的反作用与它对抗；或者说，两个物体之间的相互作用永远相等，且指向对方。

2. 惯性系

牛顿定律适用的参考系。
相对于惯性系作匀速直线运动的参考系都是惯性系，作变速运动的参考系为非惯性系。



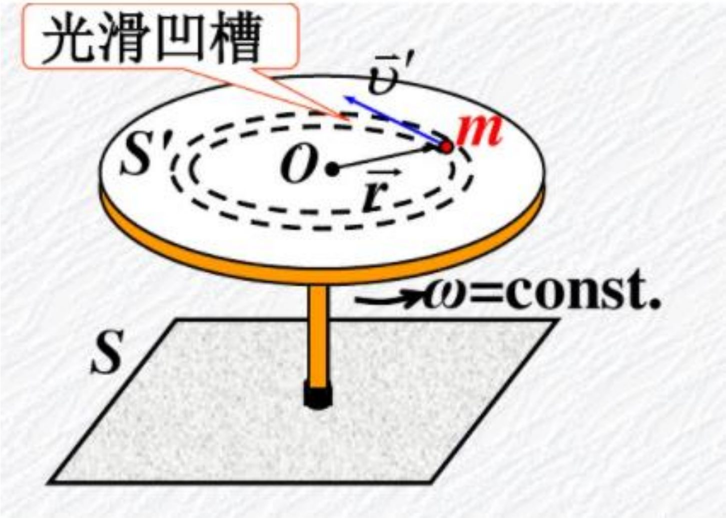
3. 万有引力、弹性力、摩擦力

回顾4

1. 四种基本相互作用
（万有引力、电磁力、弱力、强力）

力的种类	相互作用的粒子	力的强度	力程
万有引力	一切质点	10^{-38}	无限远
弱力	大多数粒子	10^{-6}	小于10^{-17}m
电磁力	电荷	10^{-2}	无限远
强力	核子、介子等	1*	10^{-15}m

2. 非惯性系、惯性力



$$\vec{F}_i = 2m\vec{v}'\times\vec{\omega} + m\omega^2\vec{r}$$

科里奥利力 + 惯性离心力

3. 功 $\mathrm{d}A = \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{r}$ $A_{ab} = \int_a^b \mathrm{d}A = \int_{r_a}^{r_b} \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int_a^b F\cos\theta \mathrm{d}s$

功是过程量，是力的一种空间累积效应

保守力：做功与路径无关，如：重力，引力，弹性力
非保守力：做功不仅与始末位置有关，还与路径有关的。如：摩擦力。

4. 动能 $E_{\mathrm{k}} = \frac{1}{2}mv^2$

质点动能定理 $A_{ab} = E_{kB} - E_{kA}$

净合外力对质点所做的功等于质点动能的增量。

回顾5

1. 保守力和势能

势能 （针对保守力）

$$A_{ab} = -\Delta E_p = E_{pA} - E_{pB}$$

确定势能的值，选取势能0点

◆ 力学中常见势能的表达式

重力势能	$E_p = mgy$	取地面为重力势能零点（即$y=0$处）
万有引力势能	$E_p = -\frac{Gm_s m}{r}$	取无穷远处为引力势能零点（即$r=\infty$处）
弹性势能	$E_p = \frac{1}{2}kx^2$	取弹簧自然长度时的端点为弹性势能零点（即$x=0$处）

由势能求保守力

$$\vec{F}_c = -\left(\frac{\partial E_p}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial E_p}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial E_p}{\partial z}\vec{k}\right)$$

$$F_x = -\frac{\partial E_p}{\partial x} \qquad F_y = -\frac{\partial E_p}{\partial y} \qquad F_z = -\frac{\partial E_p}{\partial z}$$

2. 质点系

质点系的动能定理：外力的总功与内力的总功之代数和等于质点系动能的增量。

$$A_{ex} + A_{in} = E_{kB} - E_{kA}$$

质点系的功能原理：质点系机械能的增量等于外力的功和非保守内力的功的总和。

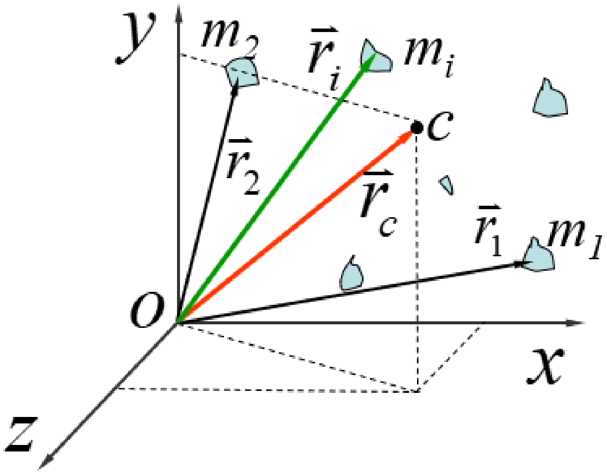
$$\boxed{A_{外} + A_{非保守内力} = \Delta E}$$

3. 质心系

质心的位矢 $\vec{r}_C = \dfrac{1}{m}\sum_i m_i \vec{r}_i$

质心的速度 $\vec{v}_C = \dfrac{d\vec{r}_C}{dt}$

质心的加速度 $\vec{a}_C = \dfrac{d\vec{v}_C}{dt}$



质心运动定理： 作用在系统上的合外力等于系统的总质量乘以质心的加速度。

$$\vec{F}^{ex} = m'\frac{d\vec{v}_C}{dt} = m'\vec{a}_C$$

上海科技大学 ShanghaiTech University

冲量

冲量：作用力与作用时间的乘积。

（反映力对时间的累积效应）

元冲量： $\mathrm{d}\vec{I} = \vec{F}\mathrm{d}t$

动量

质点的运动状态 $\vec{p} = m\vec{v}$ （状态量）

动量：运动质点的质量与其速度的乘积。

动量定理

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{F}\mathrm{d}t = \int_{\vec{v}_1}^{\vec{v}_2} \mathrm{d}(m\vec{v}) = m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1$$ （动量定理积分形式）

作用在质点上的合力在某一时间内的冲量等于质点在同一时间内动量的增量。

动量守恒定理

当合外力 $\Sigma\vec{F}_i = 0$ 则 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Sigma\vec{p}_i = 0$

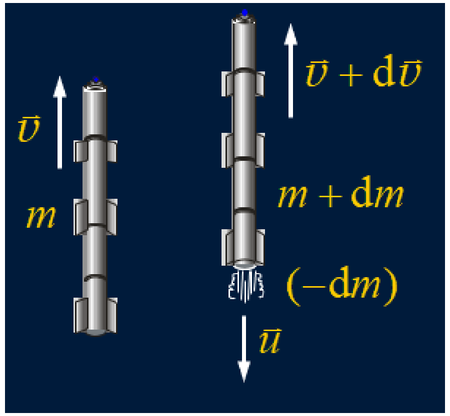
$\Sigma\vec{p}_i = \Sigma m_i\vec{v}_i =$ 常矢量 （质点系的动量守恒定律）

质点系所受合外力为零时，质点系的总动量保持不变。

回顾6

1. 火箭发射原理

$$v_{\mathrm{f}} = v_{\mathrm{i}} + v_{\mathrm{r}} \ln \frac{m_{\mathrm{i}}}{m_{\mathrm{f}}}$$



2. 碰撞问题

- 完全弹性碰撞：碰撞前后，动量守恒，总动能不变。
- 非完全弹性碰撞：碰撞前后，动量守恒，总动能有改变（转化为热、声等能）。
- 完全非弹性碰撞：碰撞前后，动量守恒，总动能有改变，并以共同的速度运动。
- 恢复系数：碰撞后两球的分离速度与碰撞前两球的接近速度的比值。

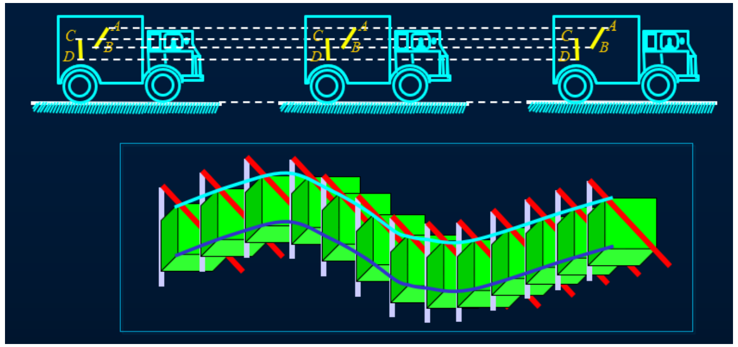
$$e = \frac{\mathrm{v}_2 - \mathrm{v}_1}{\mathrm{v}_{10} - \mathrm{v}_{20}}$$

3. 刚体

1. 刚体模型

刚体：在力的作用下，大小和形状都始终保持不变的物体。

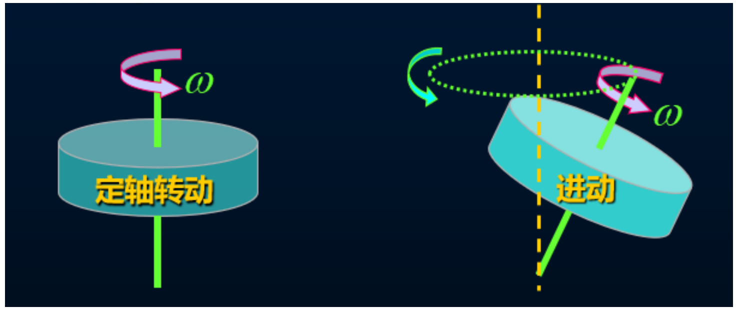
2. 刚体的平动



平动：刚体运动时，若在其内部所作的任何一条直线，在运动中都始终保持与自身平行的运动形式。

3. 刚体的转动

转动: 刚体上的各质点都绕同一直线作圆周运动的运动形式。



3. 刚体的角坐标、角位移、角速度、角加速度

(1) 角坐标θ

$$\theta = \theta(t)$$

(2) 角速度ω

$$\omega = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$$

(3) 角加速度β

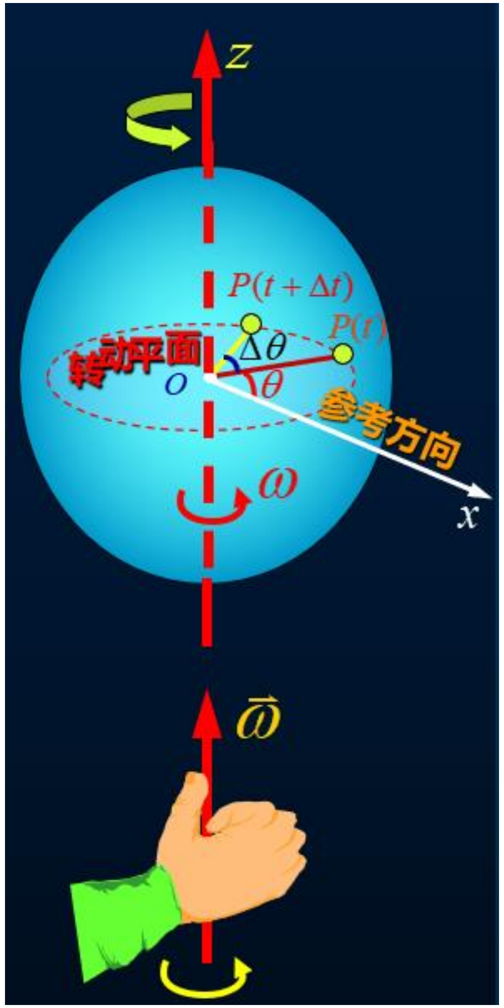
$$\beta = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}$$

(4) 线量和角量的关系

$$s = r\Delta\theta \qquad v = r\omega \qquad a_{\mathrm{t}} = r\beta \qquad a_{\mathrm{n}} = r\omega^2$$

(5) 匀变速定轴转动

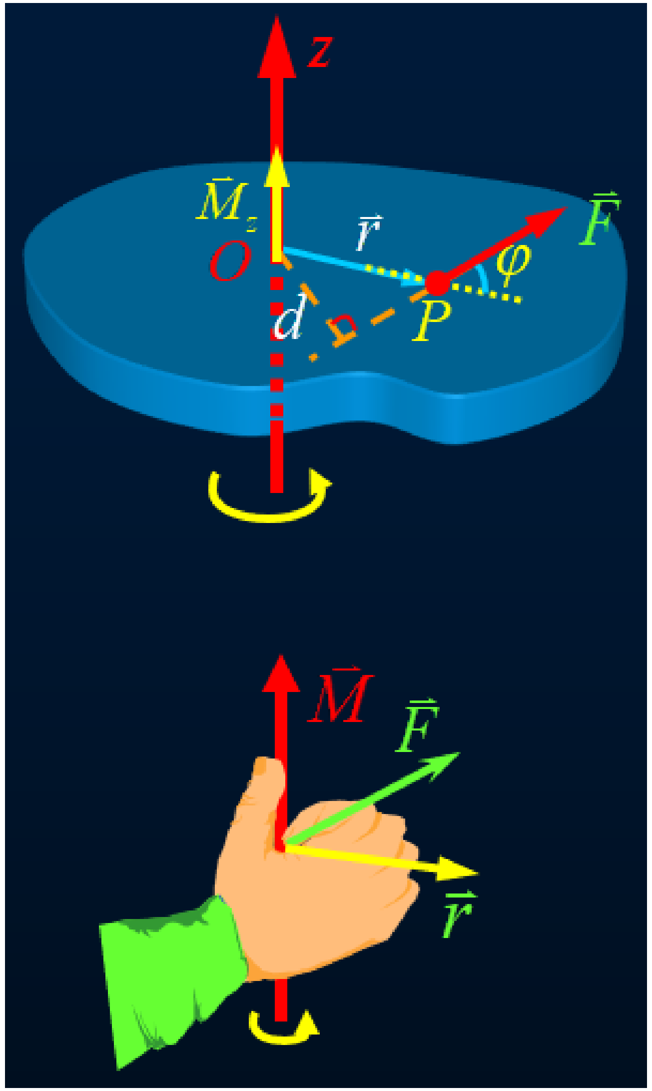
$$\omega = \omega_0 + \beta t \qquad \theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\beta t^2 \qquad \omega^2 = \omega_0^2 + 2\beta(\theta - \theta_0)$$



4. 力矩、刚体定轴转动定律、转动惯量

- **对于刚体的定轴转动，力矩M_z也可认为是矢量。即** $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}_{\perp}$

  方向：满足右手螺旋法则。



刚体定轴转动定律

$M = J\beta$ **（刚体定轴转动定律）**

作用在刚体上的合外力矩等于刚体对转轴的转动惯量与所获得的角加速度的乘积。

转动惯量

- 转动惯量的定义

刚体对某转轴的转动惯量 J 等于刚体内每个质点的质量与这个质点到该转轴垂直距离平方乘积之和。

- 计算转动惯量的基本公式

对质量离散分布的质点系 $J=\sum_i \Delta m_i r_i^2$

对质量连续分布的刚体 $J=\int r^2 \mathrm{d}m$

$$J=\begin{cases}\int_L r^2\lambda \mathrm{d}l & \text{质量线分布，}\lambda\text{为线密度(}\ \lambda=\frac{m}{L}\ \text{)}\\ \int_S r^2\sigma \mathrm{d}S & \text{质量面分布，}\sigma\text{为面密度(}\ \sigma=\frac{m}{S}\ \text{)}\\ \int_V r^2\rho \mathrm{d}V & \text{质量体分布，}\rho\text{为体密度(}\ \rho=\frac{m}{V}\ \text{)}\end{cases}$$

常见刚体的转动惯量

刚体（质量为m）	转轴位置	转动惯量
细棒（棒长为l）	通过中心与棒垂直	$J_C=\frac{1}{12}ml^2$
	通过端点与棒垂直	$J_D=\frac{1}{3}ml^2$
细圆环（半径为R）	通过中心与环面垂直	$J_C=mR^2$
	直径	$J_x=J_y=\frac{1}{2}mR^2$
薄圆盘（半径为R）	通过中心与盘面垂直	$J_C=\frac{1}{2}mR^2$
	直径	$J_x=J_y=\frac{1}{4}mR^2$
空心圆柱（内外半径为R_1和R_2）	对称轴	$J_C=\frac{1}{2}m(R_1^2+R_2^2)$
球壳（半径为R）	中心轴	$J_C=\frac{2}{3}mR^2$
球体（半径为R）	中心轴	$J_C=\frac{2}{5}mR^2$

回顾7

刚体绕定轴转动的功和能

(1) 刚体转动动能 $E_k = \frac{1}{2}J\omega^2$

(2) 力矩的功 $A = \int_{\theta_1}^{\theta_2} M\mathrm{d}\theta$

(3) 刚体绕定轴转动的动能定理 $\int_{\theta_1}^{\theta_2} M\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2}J\omega_2^2 - \frac{1}{2}J\omega_1^2$

(4) 刚体的重力势能 $E_p = mgh_C$

(5) 机械能守恒定律

当 $A_{外} + A_{非保内} = 0$ 时， $E = E_k + E_p =$ 常量

刚体绕定轴转动的角动量

(1) 刚体的角动量 $L = J\omega$

(2) 刚体的角动量定理 $M = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(J\omega)$

(3) 角动量守恒定律

当 $M = 0$ 时， $J\omega =$ 常量

质点的运动规律与刚体的定轴转动规律的比较

质点的运动		刚体的定轴转动	
速度	$\vec{v}=\dfrac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}$	角速度	$\omega=\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$
加速度	$\vec{a}=\dfrac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2}$	角加速度	$\beta=\dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}$
质量	m	转动惯量	$J=\int r^2\mathrm{d}m$
力	$\vec{F}$	力矩	M
运动规律	$\vec{F}=m\vec{a}$	转动定律	$M=J\beta$
动量	$\vec{p}=m\vec{v}$	动量	$\vec{p}=\sum\Delta m_i\vec{v}_i$
角动量	$\vec{L}=\vec{r}\times\vec{p}$	角动量	$L=J\omega$
动量定理	$\vec{F}=\dfrac{\mathrm{d}(m\vec{v})}{\mathrm{d}t}$	角动量定理	$M=\dfrac{\mathrm{d}(J\omega)}{\mathrm{d}t}$

质点的运动规律与刚体的定轴转动规律的比较（续）

质点的运动		刚体的定轴转动	
动量守恒	$\sum F_i = 0$时 $\sum m_i v_i =$ 恒量	角动量守恒	$M = 0$时 $\sum J\omega =$ 恒量
力的功	$A_{ab} = \int_a^b \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r}$	力矩的功	$A_{ab} = \int_{\theta_1}^{\theta_2} M \mathrm{d}\theta$
动能	$E_{\mathrm{k}} = \frac{1}{2} m v^2$	转动动能	$E_{\mathrm{k}} = \frac{1}{2} J\omega^2$
动能定理	$A = \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2$	动能定理	$A = \frac{1}{2} J\omega_2^2 - \frac{1}{2} J\omega_1^2$
重力势能	$E_{\mathrm{p}} = mgh$	重力势能	$E_{\mathrm{p}} = mgh_c$
机械能守恒	$A_{外} + A_{非保内} = 0$时 $E_{\mathrm{k}} + E_{\mathrm{p}} =$ 恒量	机械能守恒	$A_{外} + A_{非保内} = 0$时 $E_{\mathrm{k}} + E_{\mathrm{p}} =$ 恒量

回顾

1.平衡

质点的平衡 -- 牛顿第一定律： 合力为零

刚体的平衡 – 合力为零 + 合力矩为零

2.胡克定律

Measure of forces applied to deform a body

应力

Hooke's law: $\dfrac{\text{Stress}}{\text{Strain}} = \text{Elastic modulus}$

Property of material of which body is made

弹性模量

应变

Measure of how much deformation results from stress

3.杨氏模量

Young's modulus for tension

Force applied perpendicular to cross section

Original length (see Fig. 11.14)

$$Y = \frac{\text{Tensile stress}}{\text{Tensile strain}} = \frac{F_\perp/A}{\Delta l/l_0} = \frac{F_\perp}{A}\frac{l_0}{\Delta l}$$

Cross-sectional area of object

Elongation (see Fig. 11.14)

4.帕斯卡定律

Pressure at depth h in a fluid of uniform density

Uniform density of fluid

$$p = p_0 + \rho g h$$

Depth below surface

Pressure at surface of fluid

Acceleration due to gravity ($g > 0$)

帕斯卡定律：不可压缩静止流体中任一点受外力产生压强增值后，此压强增值瞬时传至静止流体各点。

5.连续性方程

理想流体的连续性方程(连续性原理、流量方程)：

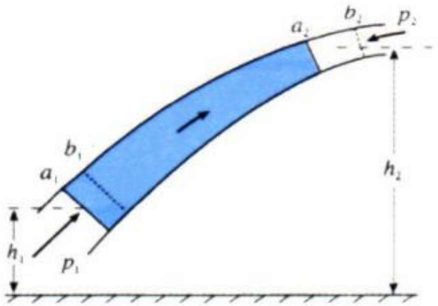
绝对不可压缩、没有粘滞性的流体叫做理想流体

$$\boxed{S\upsilon = \text{恒量}}$$

对于同一流管的任意截面，伯努利方程：

6.伯努利方程

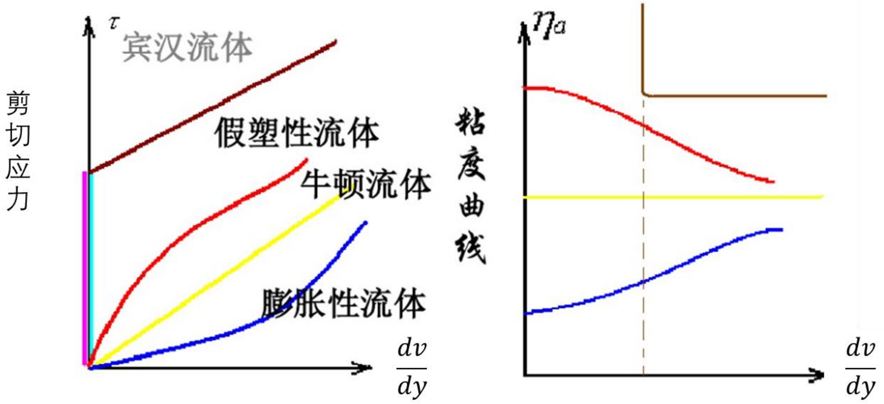
$$\boxed{p + \frac{1}{2}\rho\upsilon^2 + \rho g h = \text{恒量}}$$



•含义：对于理想流体作稳定流动，在同一流管中任一处，每单位体积流体的动能、势能和该处压强之和是一个恒量。

回顾

1. 牛顿流体和非牛顿流体

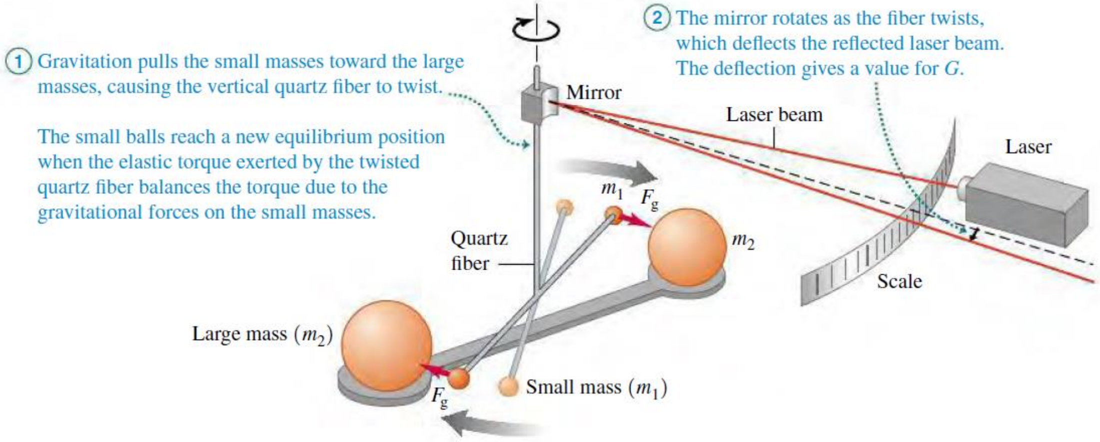


2. 万有引力

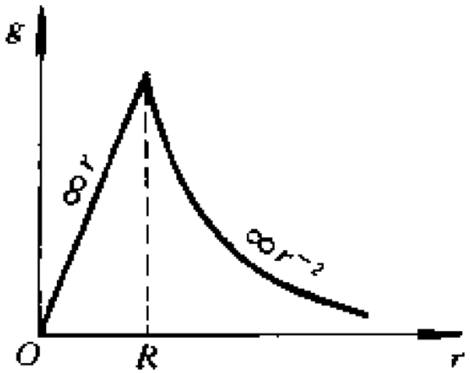
$$F = \frac{GMm}{r^2}$$

3. 万有引力常数

$$G = 6.67384(80) \times 10^{-11}\ \mathrm{N \cdot m^2/kg^2}$$



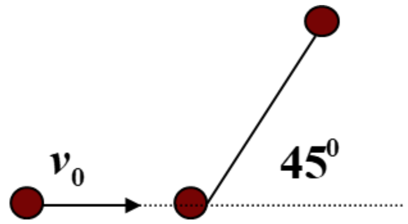
4. 球体内部的物体受到的引力 $F=\frac{4\pi r\rho}{3}Gm$



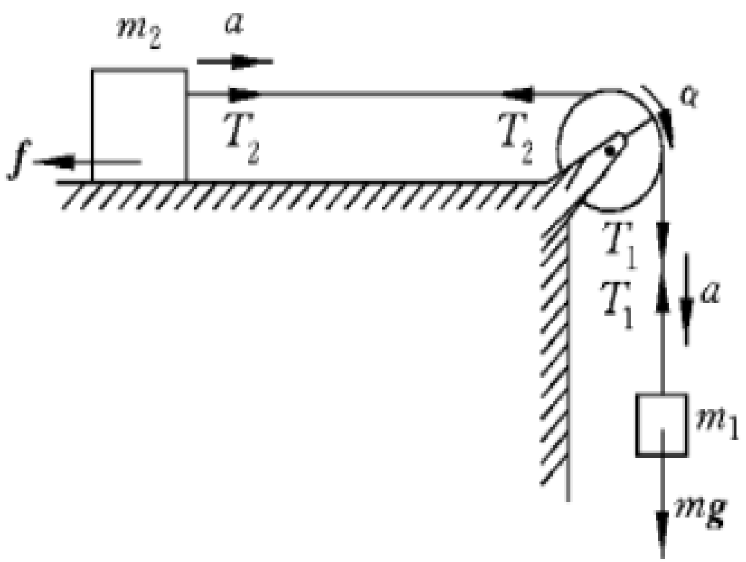
- 地心压强正比于球体半径的平方，密度的平方。
- 约靠近核心，压强越大，密度越高。

2. 一根质量可以忽略的细杆，长度为ℓ,两端各联结质量为m的质点，静止地放在光滑的水平桌面上。另一质量相同的质点以速率v_0沿45^0角与其中一个质点作弹性碰撞，如本题图所示。求碰后杆的角速度。

上海科技大学
ShanghaiTech University



例题7 如图 5.5 所示，两物体质量分别为 m_1 和 m_2，定滑轮的质量为 m，半径为 r，可视作均匀圆盘。已知 m_2 与桌面间的滑动摩擦系数为 μ_k，求 m_1 下落的加速度和两段绳子中的张力各是多少？设绳子和滑轮间无相对滑动，滑轮轴受的摩擦力忽略不计。



例题8 坐在转椅上的人手握哑铃(原书图 5.10)。两臂伸直时,人、哑铃和椅系统对竖直轴的转动惯量为 $J_1=2\ \mathrm{kg\cdot m^2}$。在外人推动后,此系统开始以 $n_1=15\ \mathrm{r/min}$ 转动。当人的两臂收回,使系统的转动惯量变为 $J_2=0.80\ \mathrm{kg\cdot m^2}$ 时,它的转速 n_2 是多大?两臂收回过程中,系统的机械能是否守恒?什么力做了功?做功多少?设轴上摩擦忽略不计。

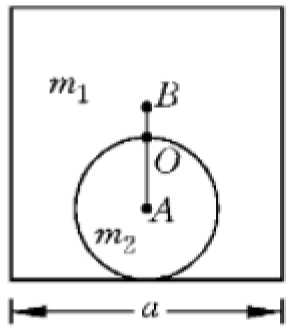
例题9

地球对自转轴的转动惯量是 $0.33MR^2$，其中 M 是地球的质量，R 是地球的半径。求地球的自转动能。 $M = 5.98\times10^{24}$ kg $R = 6.4\times10^{6}$ m

由于潮汐对海岸的摩擦作用，地球自转的速度逐渐减小，每百万年自转周期增加 16 s。这样，地球自转动能的减小相当于摩擦消耗多大的功率？一年内消耗的能量相当于我国 2004 年发电量 7.3×10^{18} J 的几倍？

例题10

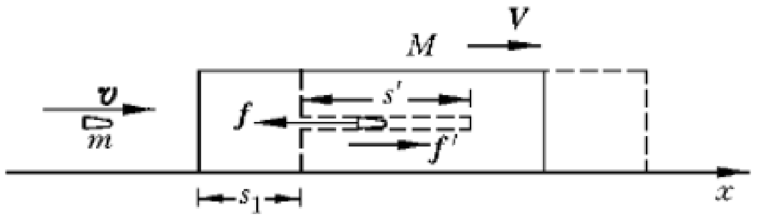
有一正立方体铜块，边长为 a。今在其下半部中央挖去一截面半径为 $a/4$ 的圆柱形洞，求剩余铜块的质心位置。



例题11 如图 4.8 所示，一木块 M 静止在光滑水平面上。一子弹 m 沿水平方向以速度 v 射入木块内一段距离 s' 而停在木块内。

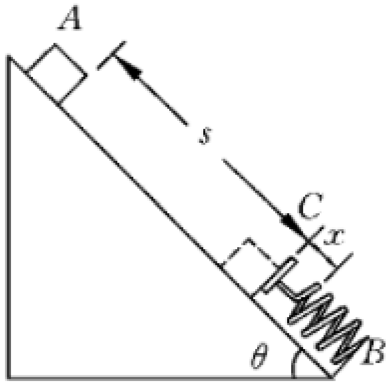
(1) 在这一过程中子弹和木块的功能变化各是多少？子弹和木块间的摩擦力对子弹和木块各做了多少功？

(2) 证明子弹和木块的总机械能的增量等于一对摩擦力之一沿相对位移 s' 做的功。



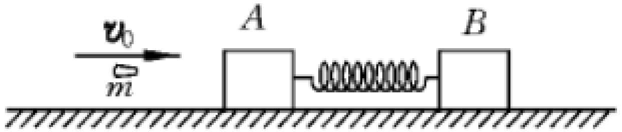
例题12

4.7 如图 4.9 所示，物体 A（质量 $m=0.5$ kg）静止于光滑斜面上。它与固定在斜面底 B 端的弹簧上端 C 相距 $s=3$ m。弹簧的劲度系数 $k=400$ N/m。斜面倾角 $\theta=45°$。求当物体 A 由静止下滑时，能使弹簧长度产生的最大压缩量是多大？



例题13

如图 4.11 所示，一轻质弹簧劲度系数为 k，两端各固定一质量均为 M 的物块 A 和 B，放在水平光滑桌面上静止。今有一质量为 m 的子弹沿弹簧的轴线方向以速度 $\boldsymbol{v}_0$ 射入一物块而不复出，求此后弹簧的最大压缩长度。



例题14

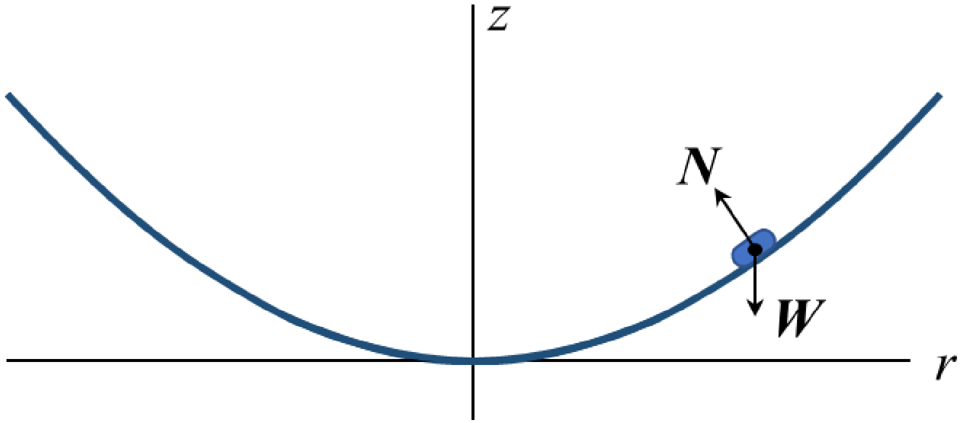
证明：一个运动的小球与另一个静止的质量相同的小球作弹性的非对心碰撞后，它们将总沿互成直角的方向离开

例题15

一个氧原子的质量是 2.66×10^{-26} kg，一个氧分子中两个氧原子的中心相距 1.21×10^{-10} m。求氧分子相对于通过其质心并垂直于二原子连线的轴的转动惯量。如果一个氧分子相对于此轴的转动动能是 2.06×10^{-21} J，它绕此轴的转动周期是多少？

例题16

一卡丁车公司想给他们公司生产的卡丁车制作一个特技广告。该公司决定设计一个碗状的赛场来演示，如图所示。卡丁车会以恒定速度在碗内一个圆形的水平路径上滑行。该公司希望使用该碗型赛场时，不管卡丁车以何速度（或高度）绕碗做水平圆周运动，其绕行一周的时间即周期T都是相同的。求碗的横截面的曲线方程$z(r)$。



例题16 蟹状星云(原书图 5.29)中心是一颗脉冲星,代号 PSR 0531+21。它以十分确定的周期(0.033 s)向地球发射电磁波脉冲。这种脉冲星实际上是转动着的中子星,由中子密聚而成,脉冲周期就是它的转动周期。实测还发现,上述中子星的周期以 1.26×10^{-5} s/a 的速率增大。 a代表1年

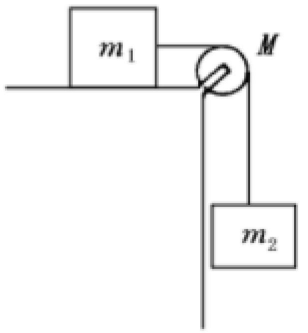
(1) 求此中子星的自转 角加速度

(2) 设此中子星的质量为 1.5×10^{30} kg(近似太阳的质量),半径为 10 km。求它的转动动能以多大的速率(以 J/s 计)减小(这减小的转动动能就转变为蟹状星云向外辐射的能量)。

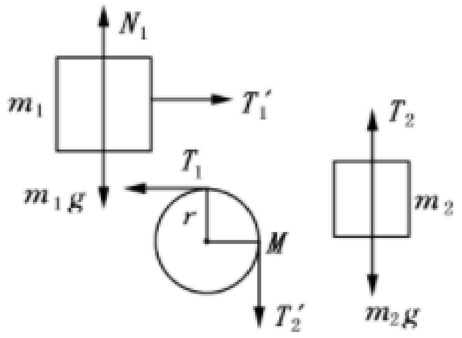
(3) 若这一能量变化率保持不变,该中子星经过多长时间将停止转动。设此中子星可作均匀球体处理。

例题17

计算题3.13图所示系统中物体的加速度．设滑轮为质量均匀分布的圆柱体，其质量为 M ，半径为 r ，在绳与轮缘的摩擦力作用下旋转，忽略桌面与物体间的摩擦，设 $m_1=50$ kg， $m_2=200$ kg, M=15 kg， $r=0.1$ m

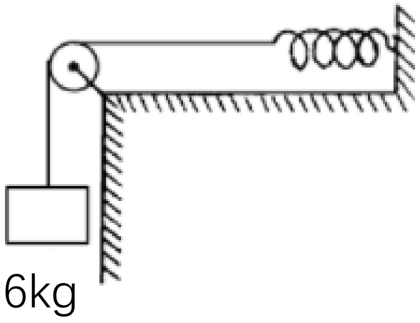


(a)

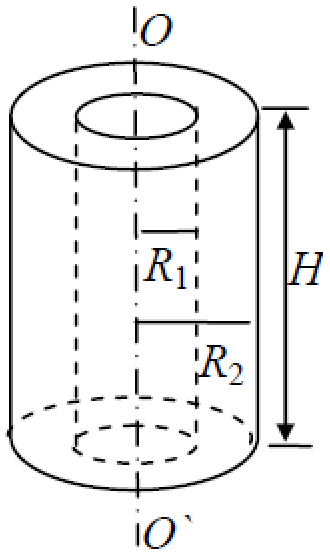


(b)

例题18 弹簧、定滑轮和物体的连接如题3.18图所示，弹簧的劲度系数为2.0 $N \cdot m^{-1}$；定滑轮的转动惯量是0.5$kg \cdot m^2$，半径为0.30m ，问当6.0 kg质量的物体落下0.40m 时，它的速率为多大？假设开始时物体静止而弹簧无伸长.



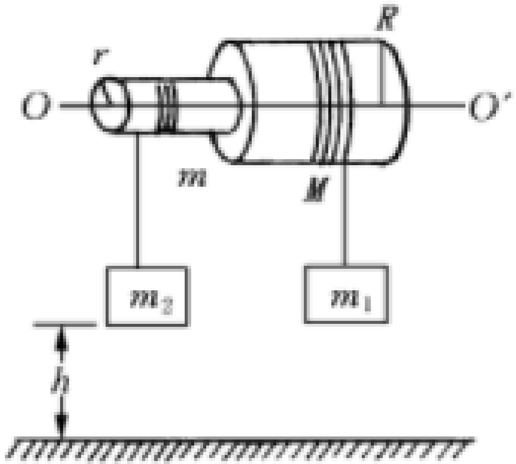
例22 质量为 M 的空心圆柱体，品质均匀分布，其内外半径为 R_1 和 R_2，求对通过其中心轴的转动惯量.



例题19 固定在一起的两个同轴均匀圆柱体可绕其光滑的水平对称轴 OO' 转动．设大小圆柱体的半径分别为 R 和 r，质量分别为 M 和 m．绕在两柱体上的细绳分别与物体 m_1 和 m_2 相连，m_1 和 m_2 则挂在圆柱体的两侧，如题3.12图所示．设 R =0.20m，r =0.10m，m =4 kg，M =10 kg，$m_1=m_2$ =2 kg，且开始时 m_1，m_2 离地均为 h =2m．求：

(1) 柱体转动时的角加速度；

(2) 两侧细绳的张力．

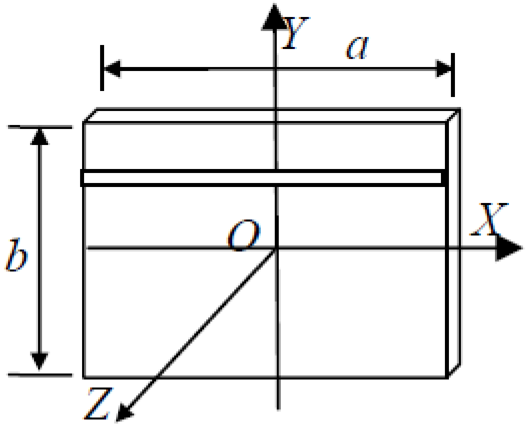


例23 一矩形均匀薄板，边长为 a 和 b，质量为 M，中心 O 取为原点，坐标系 $OXYZ$ 如图所示．试证明：

（1）薄板对 OX 轴的转动惯量为

$$I_{OX}=\frac{1}{12}Mb^2$$；

（2）薄板对 OZ 轴的转动惯量为 $I_{OZ}=\frac{1}{12}M(a^2+b^2)$．



[证明] 薄板的面积为 $S = ab$，

质量面密度为 $\sigma = M/S$.

（1）在板上取一长为 a，宽为 $\mathrm{d}y$ 的矩形元，其面积为 $\mathrm{d}S = a\mathrm{d}y$，

其品质为 $\mathrm{d}m = \sigma \mathrm{d}S$，

绕 X 轴的转动惯量为 $\mathrm{d}I_{OX} = y^2\mathrm{d}m = \sigma a y^2 \mathrm{d}y$，

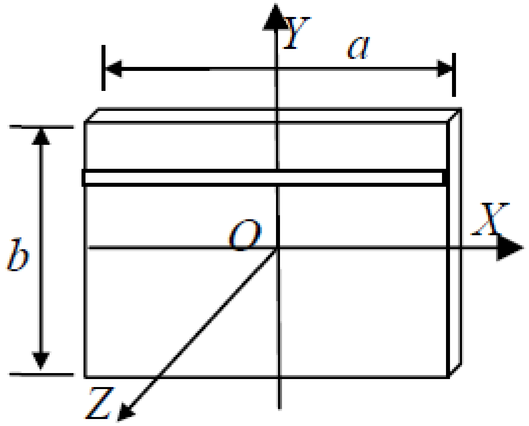
积分得薄板对 OX 轴的转动惯量为

$$I_{OX} = \sigma a \int_{-b/2}^{b/2} y^2 \mathrm{d}y = \sigma a \frac{1}{3} y^3 \Big|_{-b/2}^{b/2}$$

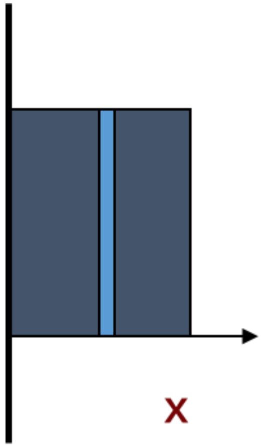
$$= \frac{1}{12}\sigma a b^3 = \frac{1}{12} M b^2 .$$

同理可得薄板对 OY 轴的转动惯量为

$$I_{OY} = \frac{1}{12} M a^2 .$$



3. 质量为M的均匀正方形薄板，边长为L，可自由地绕一铅垂边旋转。一质量为m、速度为v的小球垂直于板面撞在它的对边上。设碰撞是完全弹性的，问碰撞后板和小球将怎样运动?



4. 一磨轮直径0.10m，质量25kg，以50r/s的转速转动。用工具以200N的正压力作用在轮边上，使它在10s内停止。求工具与磨轮之间的摩擦系数。

8. 一截面为A的柱形桶内盛水的高度为H，底部有一小孔，水从这里流出。设水柱的最小截面积为S，求容器内只剩下一半水和水全部流完所需的时间t1和t2。