

单摆周期测量实验

【实验目的】

1. 用单摆测定重力加速度 g ;
2. 学习用最小二乘法作直线拟合;
3. 学习使用计时仪器（秒表、电子计时器）

【实验原理】

1) 周期与摆角的关系

在忽略空气阻力和浮力的情况下，由单摆振动时能量守恒，可以得到质量为 m 的小球在摆角为 θ 处动能和势能之和为常量，即：

$$\frac{1}{2}mL^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + mgL(1 - \cos\theta) = E_0 \quad (1)$$

式中， L 为单摆摆长， θ 为摆角， g 为重力加速度， t 为时间， E_0 为小球的总机械能。因为小球在摆幅为 θ_m 处释放，则有：

$$E_0 = mgL(1 - \cos\theta_m)$$

代入（1）式，解方程得到

$$\frac{\sqrt{2}}{4}T = \sqrt{\frac{L}{g}} \int_0^{\theta_m} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_m}} \quad (2)$$

（2）式中 T 为单摆的振动周期。

令 $k = \sin(\theta_m/2)$ ，并作变换 $\sin(\theta/2) = k \sin\varphi$ 有

$$T = 4\sqrt{\frac{L}{g}} \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}}$$

这是椭圆积分，经近似计算可得到

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \left[1 + \frac{1}{4}\sin^2\left(\frac{\theta_m}{2}\right) + \dots \right] \quad (3)$$

在传统的手控计时方法下，单次测量周期的误差可达 0.1-0.2s，而多次测量又面临空气阻尼使

摆角衰减的情况，因而（3）式只能考虑到一级近似，不得不将 $\frac{1}{4}\sin^2(\frac{\theta_m}{2})$ 项忽略。但是，当单摆

振动周期可以精确测量时，必须考虑摆角对周期的影响，即用二级近似公式。在此实验中，测出不

同的 θ_m 所对应的二倍周期 $2T$ ，作出 $2T - \sin^2(\frac{\theta_m}{2})$ 图，并对图线外推，从截距 $2T$ 得到周期 T ，

进一步可以得到重力加速度 g 。

2) 周期与摆长的关系

如果在一固定点上悬挂一根不能伸长无质量的线，并在线的末端悬一质量为 m 的质点，这就构成一个单摆。当摆角 θ_m 很小时（小于 3° ），单摆的振动周期 T 和摆长 L 有如下近似关系：

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \text{ 或 } T^2 = 4\pi^2 \frac{L}{g} \quad (4)$$

当然，这种理想的单摆实际上是不存在的，因为悬线是有质量的，实验中又采用了半径为 r 的金属小球来代替质点。所以，只有当小球质量远大于悬线的质量，而它的半径又远小于悬线长度时，才能将小球作为质点来处理，并可用（4）进行计算。但此时必须将悬挂点与球心之间的距离作为摆长，即 $L=L_l+r$ ，其中 L_l 为线长。如固定摆长 L ，测出相应的振动周期 T ，即可由（4）式求 g 。

也可逐次改变摆长 L ，测量各相应的周期 T ，再求出 T^2 ，最后在坐标纸上作 T^2 - L 图。如图是一条直线，说明 T^2 与 L 成正比关系。在直线上选取二点 $P_1 (L_1, T_1^2)$ ， $P_2 (L_2, T_2^2)$ ，由二点式求得斜率

$$k = \frac{T_2^2 - T_1^2}{L_2 - L_1}；\text{ 再从 } k = \frac{4\pi^2}{g} \text{ 求得重力加速度，即}$$

$$g = 4\pi^2 \frac{L_2 - L_1}{T_2^2 - T_1^2}$$

【实验仪器】

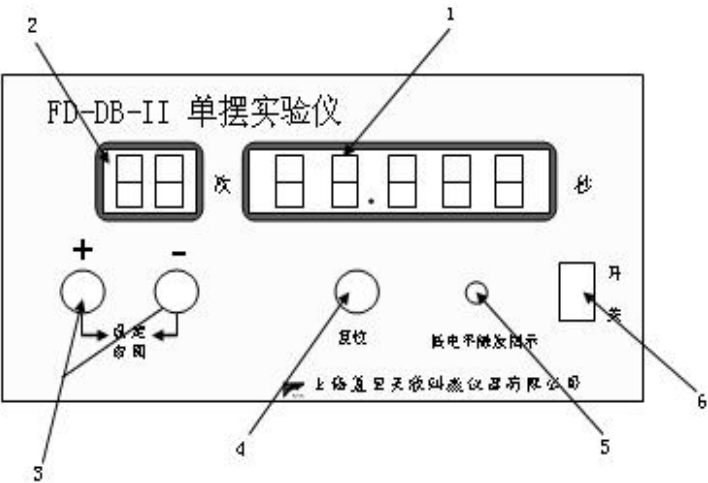


图 1 计时计数毫秒仪

- 1、计时显示 2、周期显示 3、周期设定
4、复位 5、底电平指示 6、电源开关

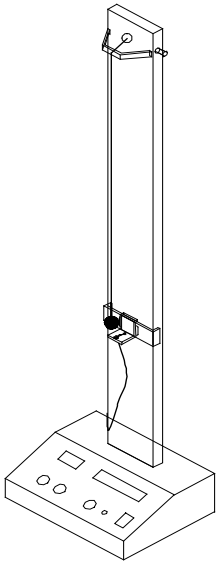


图 2 实验装置简图

本试验仪采用 UGN3109 型集成开关霍尔传感器（简称：集成霍尔开关）与 HTM 电子计时器实现自动计时。如图 4 所示，集成霍尔开关应放置在小球正下方约 1.0cm 处， 1.1cm 为集成霍尔开关的导通（或截至）距离。钕铁硼小磁钢放在小球的正下方，当小磁钢随小球从集成霍尔开关上方经过时，由于霍尔效应，会使集成霍尔开关的 V_{out} 端输出一个信号给计时器，计时器便开始计时。当磁钢经半个周期回复至平衡位置时，又产生一信号让计时器停止计时。所以单摆摆动 1 个周期，在计时器上反映 2 个周期。

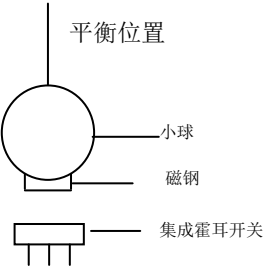


图 3 自动计时装备

HTM 电子计时器精度为 0.001s ，采用单片机计时原理，有周期次数预置功能，从 $0\sim 66$ 次，可以任意调节计时次数，以便按实验要求的精度进行周期测量。

【实验内容】

- 1) 测量摆角与周期之间的关系，作 $2T - \text{Sin}^2(\theta/2)$ 关系图，求出重力加速度 g 。
- 2) 验证摆长与周期之间的关系，求出重力加速度 g 。

(一) 固定摆长，改变摆角求得 g:

- (1) 测量摆线长度 L_1 及小球半径 L_2 ，算出总的摆长 $L=L_1+L_2$ 。
- (2) 将小球拉开一端距离，并测量悬线下端点离中心位置的水平距离 x 。
- (3) 放开小球，让小球在传感器所在铅垂面内摆动，由计时器测出摆动 2 个周期的时间。
- (4) 将小球拉回原位，重复步骤 (3) 4 次。
- (5) 取不同的水平距离（悬线下端点离中心位置），重复步骤 (3)、(4)。
- (6) 处理数据，做 $2T-\sin^2(\theta_m/2)$ 图，求出 g,并与理论值相比较。

表 1

x/cm	$Sin^2(\theta_m/2)$	$2T/s$					
		第 1 次	第 2 次	第 3 次	第 4 次	第 5 次	平均值

(二) 改变摆长求得 g:

- (7) 测得摆线长度，算出总的摆长。
- (8) 取摆角 $\theta < 3^\circ$ ，测量摆动周期 T 。
- (9) 重复步骤 (2) 4 次。
- (10) 取不同的摆长，重复步骤 (2)、(3)。
- (11) 处理数据，作 T^2-L 图，求出 g，并与理论值相比较。

表 2

L/m	T/s						T^2
	第 1 次	第 2 次	第 3 次	第 4 次	第 5 次	平均值	

【注意事项】

- 1) 小球必须在与支架平行的平面内摆动，不可做椭圆运动。检验办法是检验低电平触发指示灯在小球经过平衡位置时是否闪亮，可知小球是否在一个平面内摆动。
- 2) 集成霍尔传感器与磁钢之间距离在 1.0cm 左右。
- 3) 若摆球摆动时传感器感应不到信号，将摆球上的磁钢换个面装上即可。
- 4) 请勿用力拉动霍尔传感器，以免损坏。
- 5) 由于仪器采用微处理器对外部事件进行计数，有可能受到外部干扰信号的影响使微处理器处于非正常状态，如出现此情况按复位键即可。

【思考题】

传统秒表计时测量 $30T$ 而不是直接测 T 是因为什么原因？本实验中有必要测 $30T$ 吗？