交流电及其简单电路

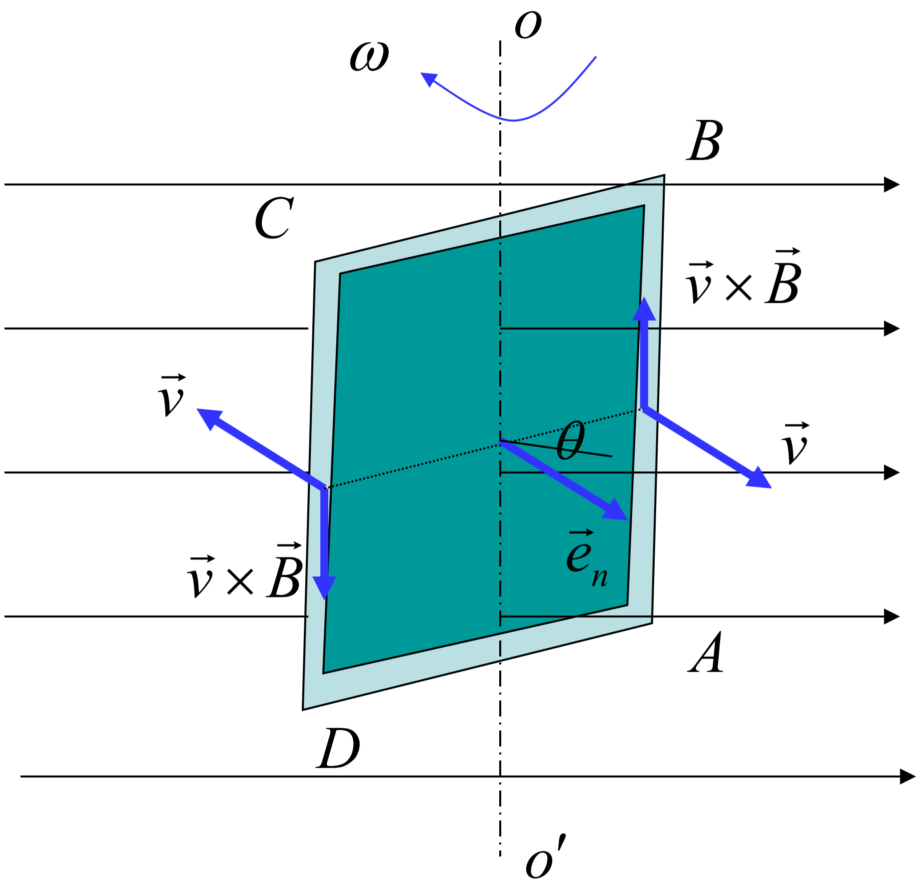
交流电概述

在一个电路里，如果电源的电动势e（t）随时间作周期性变化，则各段电路中的电压和电流都将随时间作周期性变化，这种电路叫做交流电路。交流电路广泛地应用于电力工程，无线电电子技术和电磁测量中。

1. 在电力系统中，从发电到输配电，都用的是交流电。这里的电源是交流发电机。在前面我们介绍过一个最简单的交流发电机，它是靠线圈在磁场中转动而获得的交变的感应电动势的。交流发电机产生的交变电动势随时间变化的关系图，基本上是正弦或余弦函数的波形，这样的交流电叫做简谐交流电。

在磁场中转动的线圈内的感应电动势

设矩形线圈***ABCD***的匝数为N，面积为S，使这线圈在匀强磁场中绕固定的轴线***OO*** 转动，磁场 $\vec{B}$ 与OO'轴垂直。当 $t=0$ 时，$\vec{B}$ 与 $\vec{e}_n$之间的夹角为零，经过时间 t，$\vec{B}$ 与 $\vec{e}_n$之间的夹角为 θ。



$$\Phi = BS\cos\theta \qquad \varepsilon_i = -N\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = NBS\sin\theta\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$$

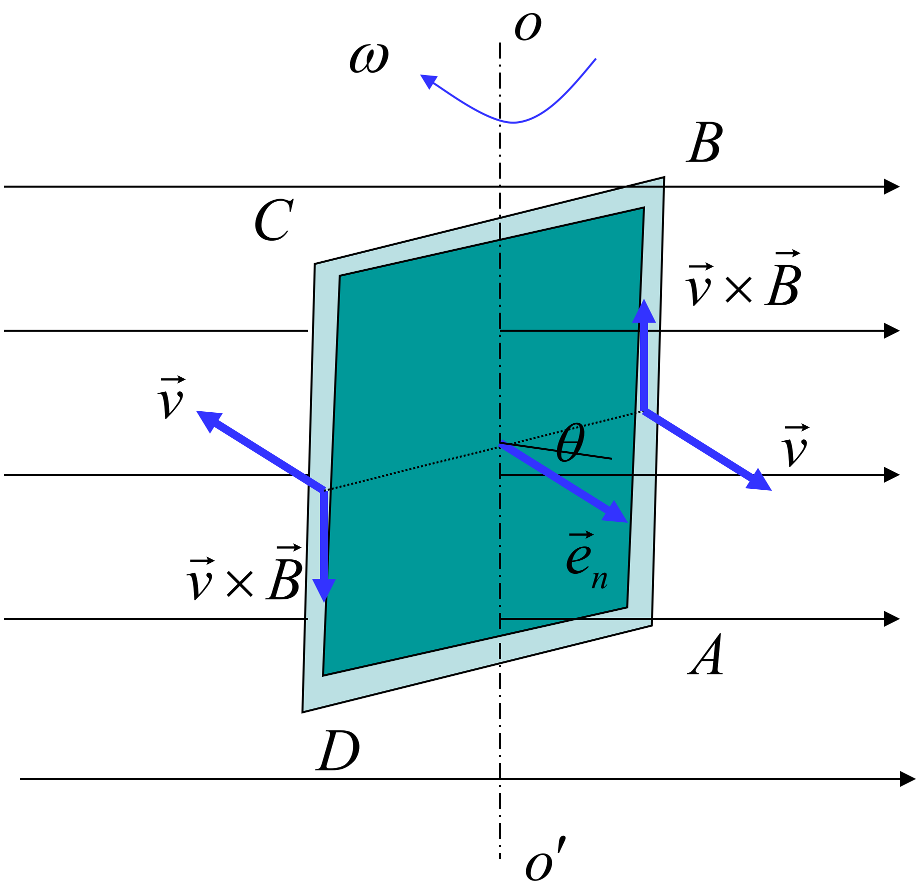
$$\because \theta = \omega t$$

$$\therefore \varepsilon_i = NBS\sin\omega t$$

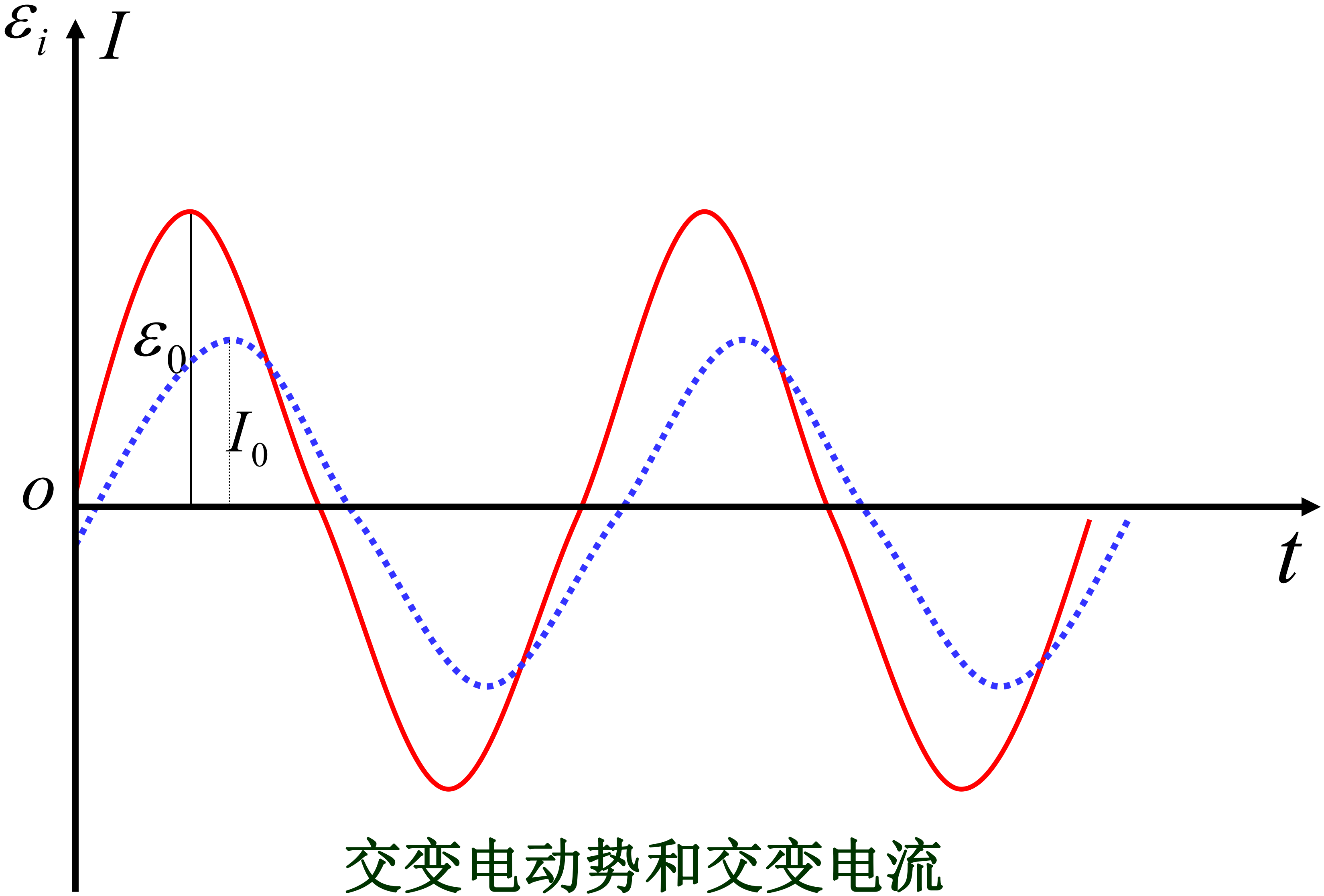
令$NBS\omega = \varepsilon_0$

则$\varepsilon_i = \varepsilon_0 \sin\omega t$

$$I = I_0 \sin(\omega t - \varphi)$$



在匀强磁场内转动的线圈中所产生的电动势是随时间作周期性变化的，这种电动势称为**交变电动势**。在交变电动势的作用下，线圈中的电流也是交变的，称为**交变电流或交流**。



交变电动势和交变电流

2. 在无线电电子设备中的各种电讯号，大多数也是交流电讯号。这里电讯号的来源是多种多样的。在收音机、电视机中通过天线接收了从电台发射到空间的电磁波，形成整机的讯号源。

3. 在许多电子测量仪器（如交流电桥、示波器、频率计、Q表等）中，交流电源来自各种讯号发生器。这些讯号发生器自身也是一些特殊的电子电路，靠它激发的自生振荡，为其它测量仪器提供交流电动势。

实际中不同场合应用的交流随时间变化的波形是多种多样的：

（1）市电是每秒50周的简谐波；

（2）电子示波器用来扫描的讯号是锯齿波；

（3）电子计算机中采用的讯号是矩形脉冲；

（4）激光通讯用来载波的是尖脉冲；

（5）广播电台发射的讯号在中波段是535KC—1605KC的调幅波（即振幅随时间变化的简谐波）；

（6）电视台和通讯系统发射的讯号兼有调幅和调频波（即频率随时间变化的简谐波）。

虽然交流电的波形多种多样, 但其中最重要的是简谐交流电，这是因为：

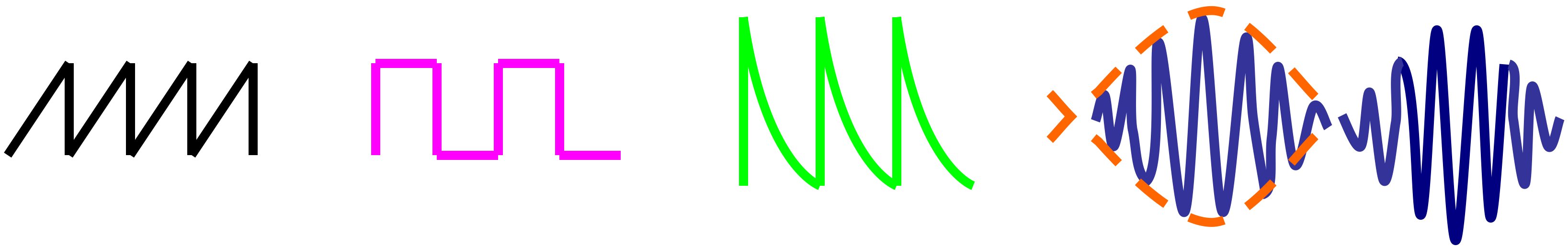
不同频率的简谐交流电在电路中彼此独立，互不干扰。因为当有不同频率的简谐成分同时存在时，我们可以一个个单独处理。

因此以后各节只讨论简谐交流电，它是处理一切交流电问题的基础。

简谐交流电的电动势 $e(t) = \varepsilon_o \cos(\omega t + \varphi_e)$

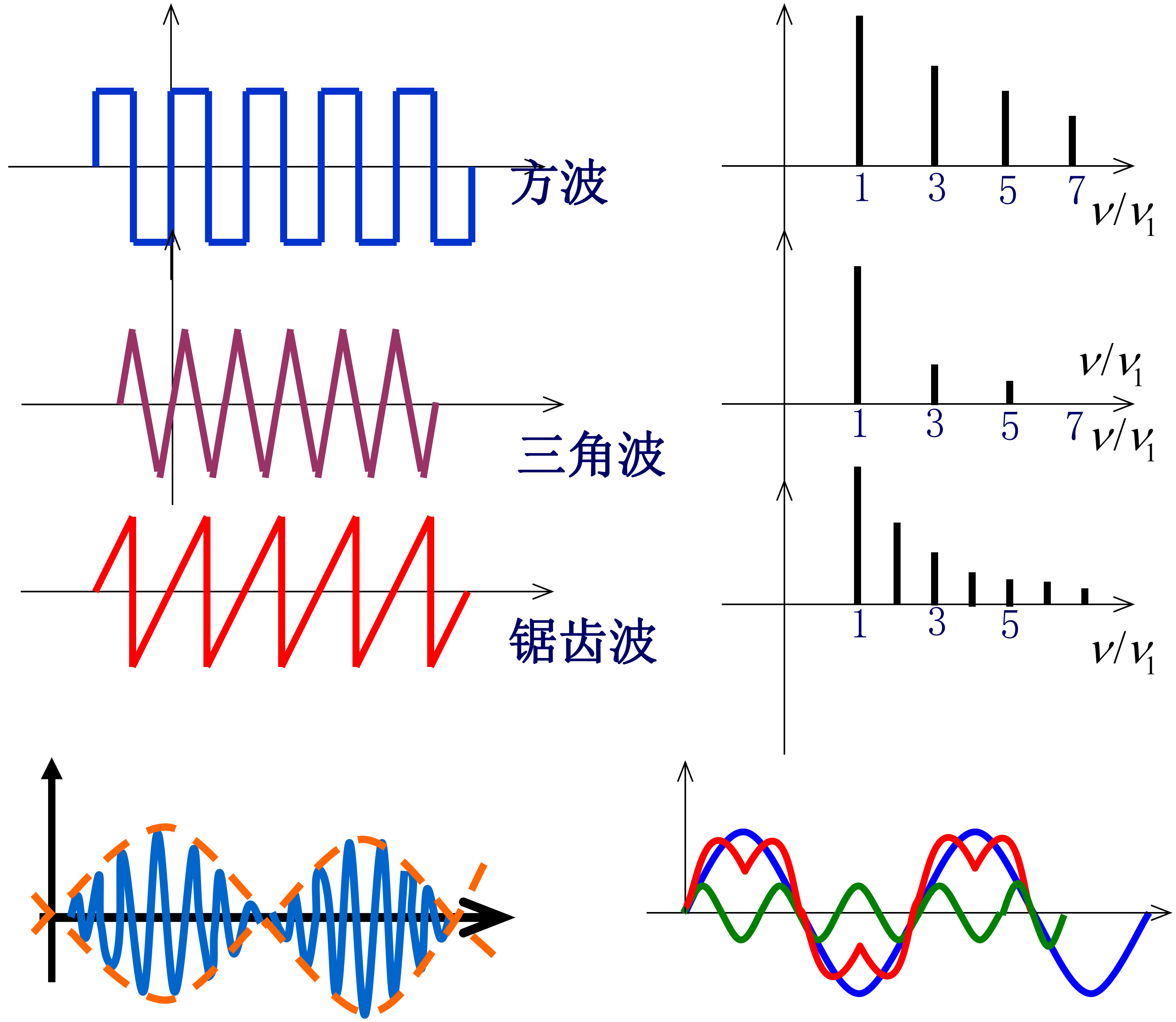
简谐交流电电压 $u(t) = U_o \cos(\omega t + \varphi_u)$

简谐交流电的电流 $i(t) = I_o \cos(\omega t + \varphi_i)$



不同频率的简谐波，在线性电路中彼此独立，互不干扰。所以简谐交流电的分析和计算，同样可应用于复杂波形的交流电，如常用的锯齿波、矩形脉冲、尖脉冲、调幅波和调频波等。

连续谱和离散谱

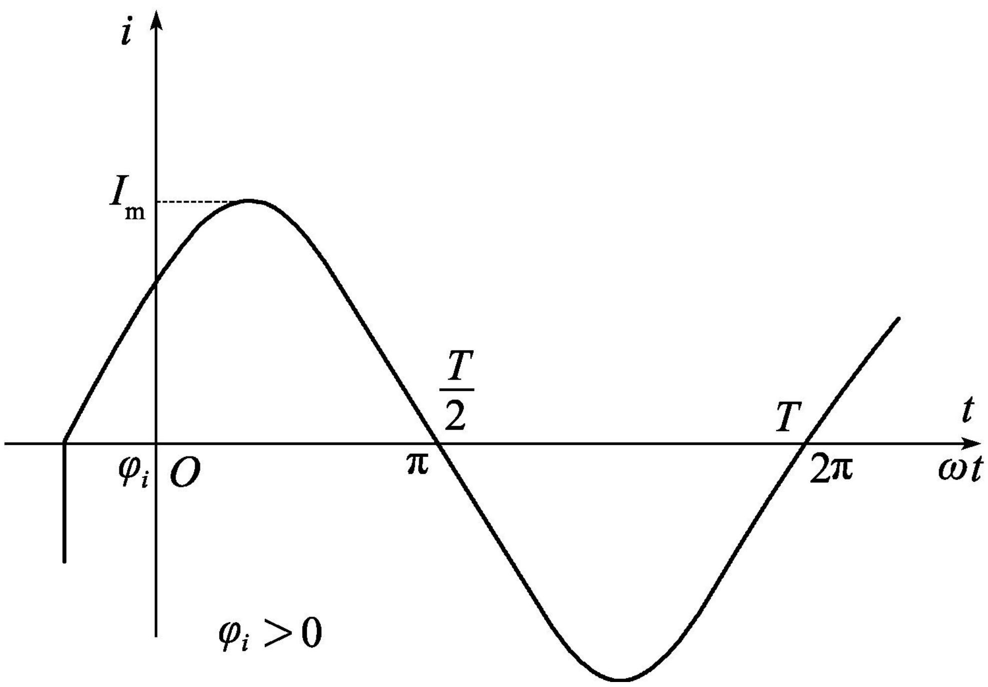


交流电的三要素：

幅值（峰值）Um

角频率 $\omega = \dfrac{2\pi}{T} = 2\pi f$

相位 φ



1. 频率：　是角频率（圆频率），它与频率f之间的关系是　$\omega = 2\pi f$，f的含义是单位时间内交流电作周期性变化的次数，频率表示交流电瞬时值变化的快慢单位：$rad \cdot s^{-1}, Hz$。例如市电的频率为50Hz，有的国家发电厂发出的交流电频率为60Hz。

2. 峰值和有效值：　简谐量在一个周期所能达到的最大瞬时值，称为简谐量的幅值（或峰值），它们的意义是瞬时值随时间变化的幅度。

在电工测量中，常使用交流电流表和电压表。但所测得的读数都是“有效值”。平常我们说交流电压是220V也是指有效值，今后在交流电路问题中不加解释给的读数一律指有效值。所谓交流电的有效值，是指在一个周期内，一交流电流在电阻R上所产生的焦耳热与多大数值的稳恒电流在该电阻上产生的热量相等。

$$I^2RT=\int_0^T i^2Rdt \Rightarrow I=\sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i^2dt}$$

对简谐交流电而言，有效值等于峰值的 $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ，即70%左右。

通常说市电电压220V就是有效值,其峰值为

$$U_o=\sqrt{2}U=311$$

3. 位相：　　表示交流电在某一时刻达到的状态，即它不仅决定瞬时值的大小和方向，而且还能表示出简谐量变化的趋势（是变大或变小）。在研究单一简谐交流电时，初位相的作用尚不明显，如果要比较两个或两个以上的交流电时，则其重要意义就显示出来了，要用到位相差的概念，位相差是不随时间改变的常数，它表示两个简谐量在变化过程中位相相差的程度。

两个同频率的交流电

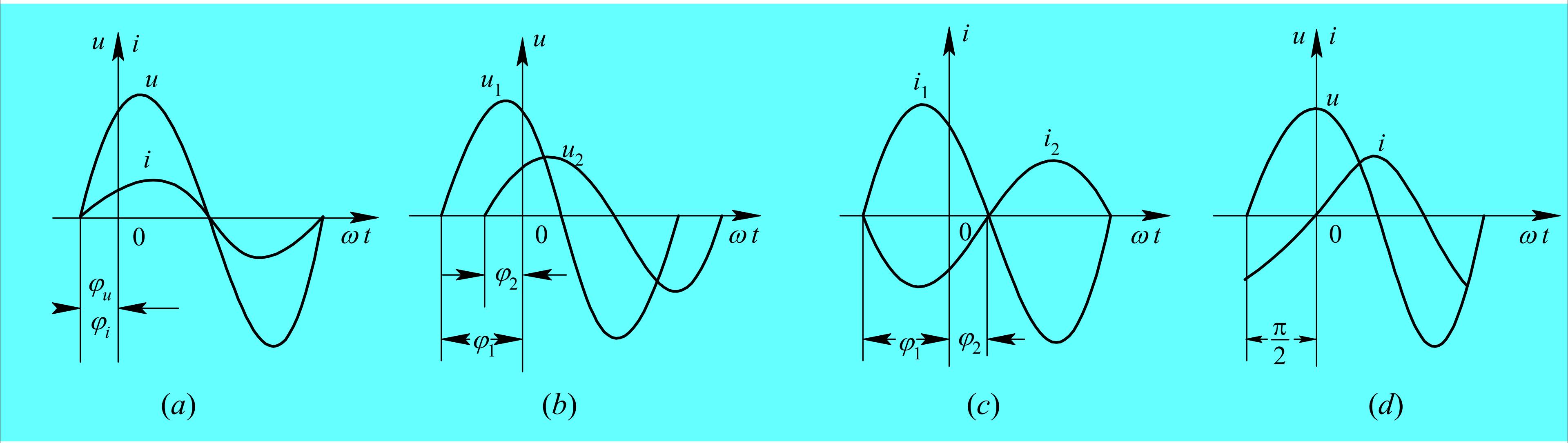
$$u_1(t)=U_{1m}\ \sin(\omega t+\varphi_1)$$

$$u_2(t)=U_{2m}\ \sin(\omega t+\varphi_2)$$

相位差 $\varphi_{12}=(\omega t+\varphi_1)-(\omega t+\varphi_2)=\varphi_1-\varphi_2$

由此得：相位差＝初相之差

相位关系：



(a)u和i同相； (b)u1超前u2；
(c)i1和i2反相；(d)u和i正交。

交流电路中的基本参数：阻抗、相位差

描述交流电路中各类元件的特性只需要两个独立的变量：电压与电流之间的峰值之比(即有效值之比)，称为该元件的**阻抗**；另一个是二者**相位差**：

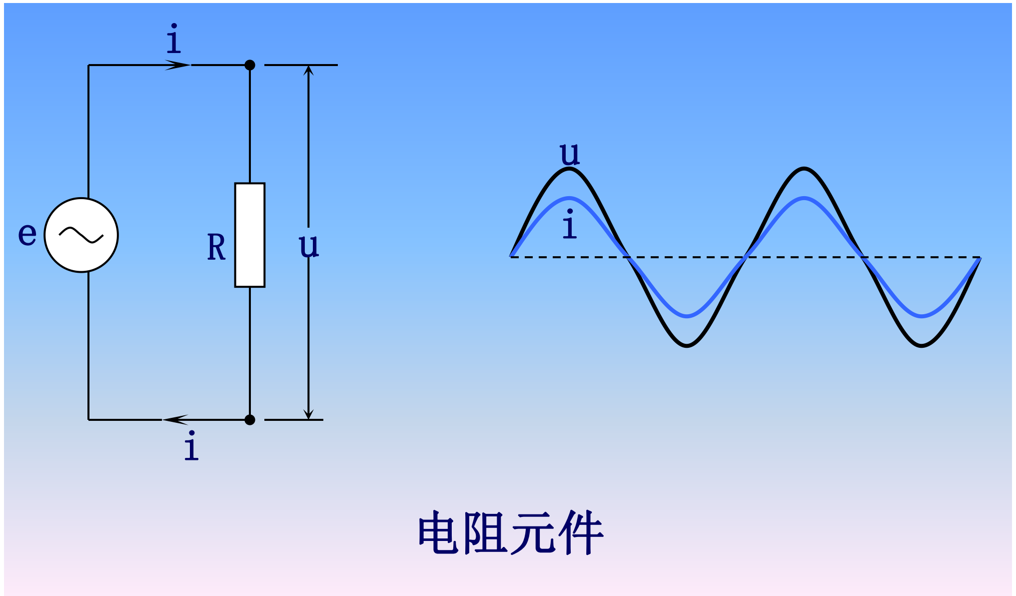
阻抗　峰值　有效值

$$Z=\frac{U_o}{I_o}=\frac{U}{I}$$

电压与电流的相位差

$$\varphi=\varphi_u-\varphi_i$$

交流电路中的电阻元件



$$Z_R = \frac{u}{i} = R$$

$$\varphi = \varphi_u - \varphi_i = 0$$

由欧姆定律，可知电阻等于电压与电流的比值。
设电流的初相位为零：

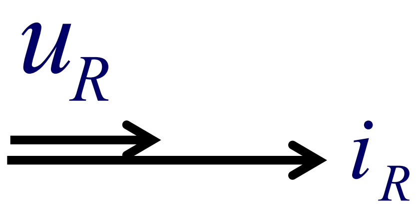
$$i(t) = I_o \cos \omega t$$

电阻上的电压与电流同相位。

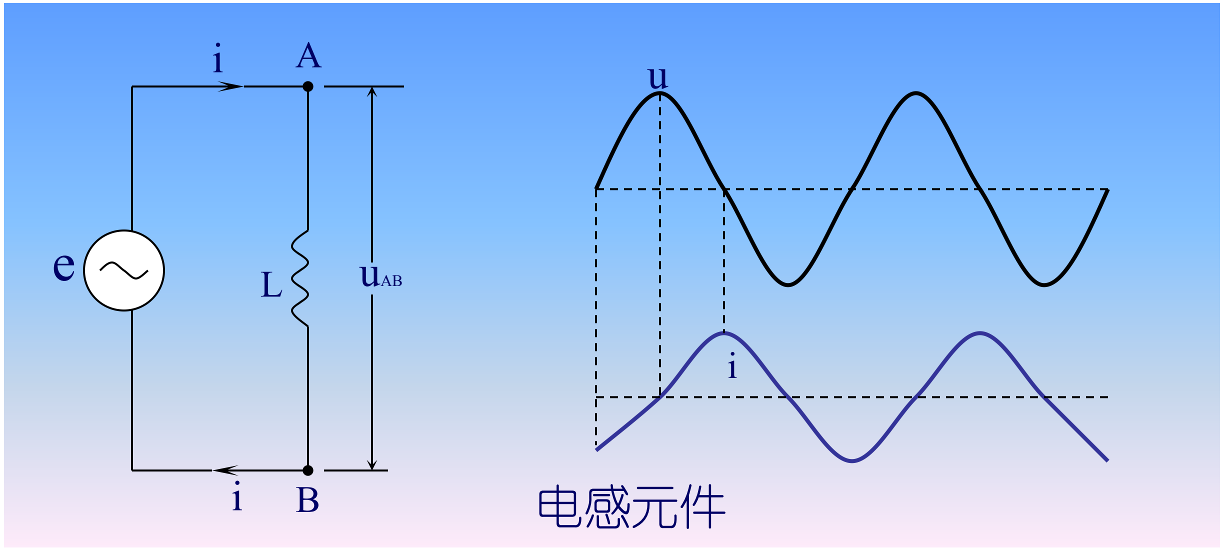
$$u(t) = i(t)R = I_0 R \cos \omega t = U_o \cos \omega t$$

$$\therefore Z_R = \frac{U_o}{I_o} = \frac{U}{I} = R$$

$$\varphi_R = \varphi_u - \varphi_i = 0$$



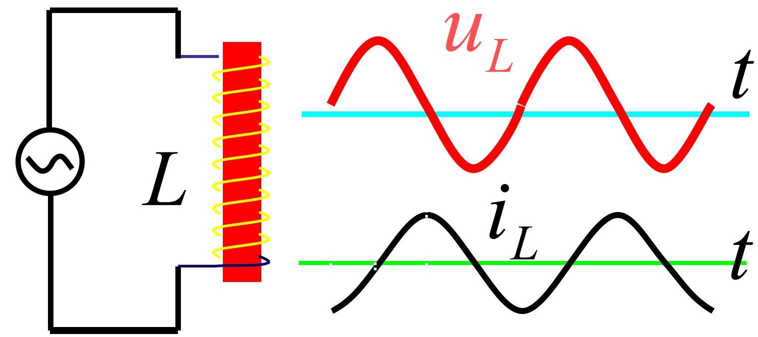
交流电路中的电感元件



$$Z_L = \frac{U_m}{I_m} = \omega L$$

$$\varphi = \varphi_u - \varphi_i = \frac{\pi}{2}$$

若： $i(t) = I_o \cos \omega t$



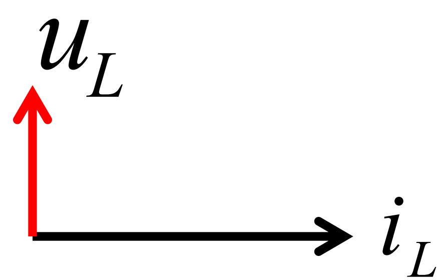
$$\because \quad u_L = L \frac{di}{dt}$$

$$\therefore u_L(t) = \omega L I_o \cos(\omega t + \frac{\pi}{2}) = U_o \cos(\omega t + \varphi_u)$$

感抗

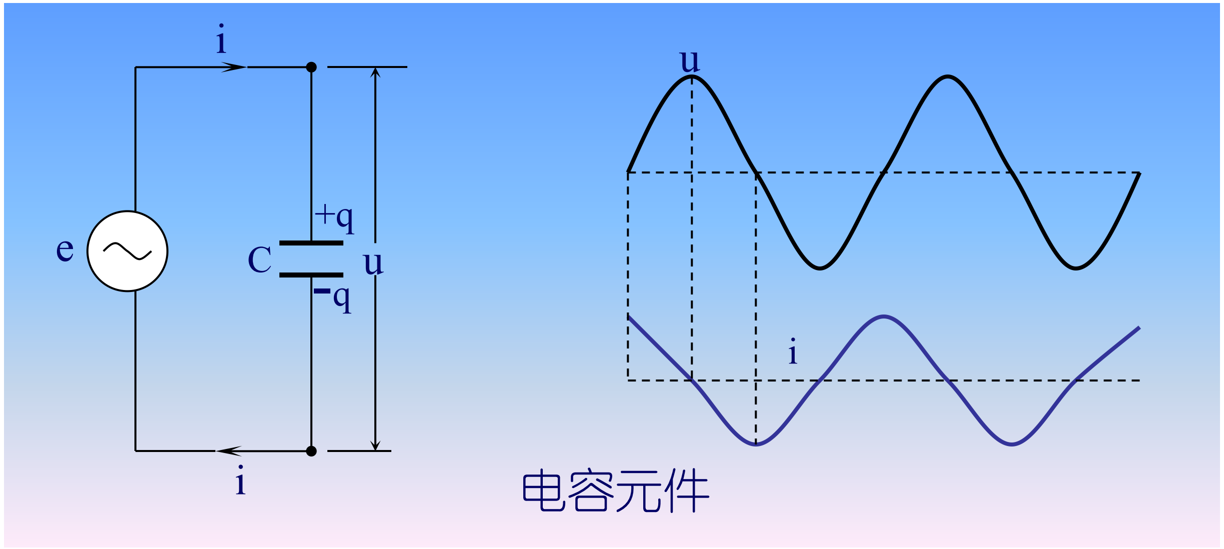
$$Z_L = \omega L$$

$$\varphi_L = \varphi_u - \varphi_i = \frac{\pi}{2}$$



电压超前于电流π/2

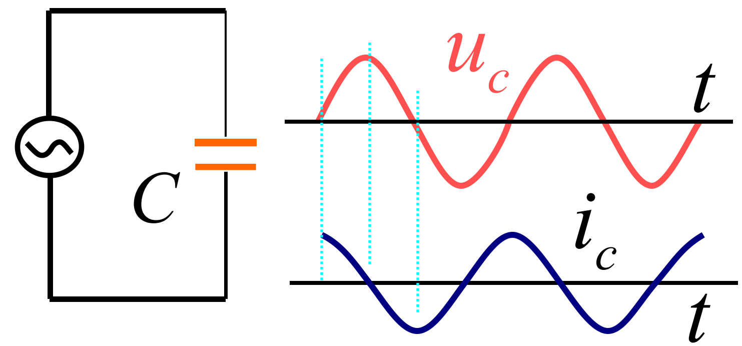
交流电路中的电容元件



$$Z_C = \frac{U_m}{I_m} = \frac{1}{\omega C}$$

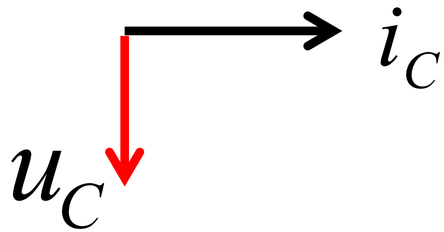
$$\varphi = \varphi_u - \varphi_i = -\frac{\pi}{2}$$

$$\because i(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta q}{\Delta t}=\frac{dq}{dt}$$



$$\because u_C=\frac{q(t)}{C}$$

若：$u_C(t)=U_o\cos(\omega t+0)$



则：$i_C(t)=\omega CU_o\cos(\omega t+\frac{\pi}{2})=I_o\cos(\omega t+\varphi_i)$

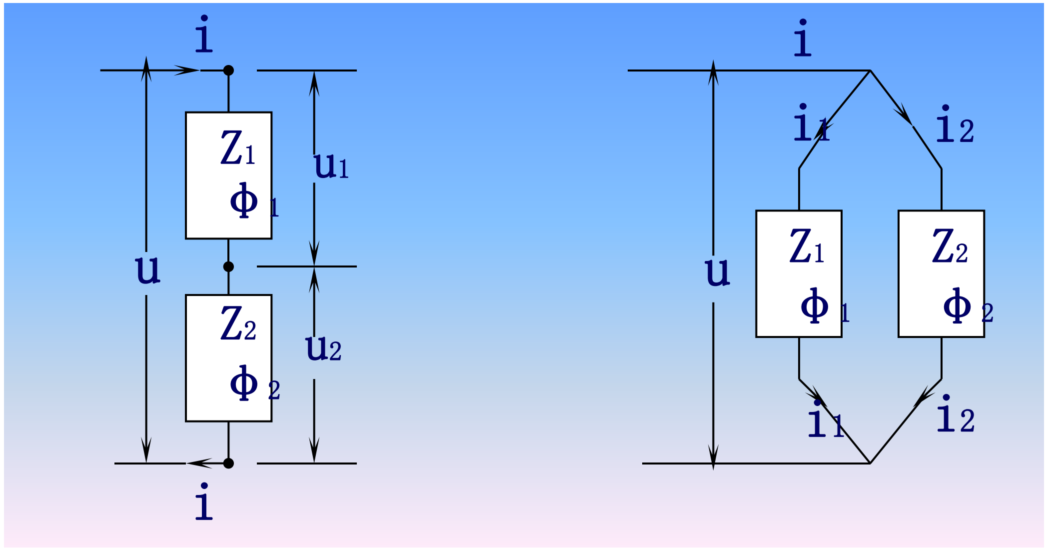
容抗 $\therefore Z_C=\dfrac{1}{\omega C}$

电流超前于电压π/2

$$\varphi_C=\varphi_u-\varphi_i=-\frac{\pi}{2}$$

简单交流电路的矢量图解法

一、用矢量图解法计算串、并联电路



图示分别为两个元件（Z_1， ϕ_1）、（Z_2， ϕ_2）的串、并联电路。和直流电路中电阻的串、并联一样，交流电压、电流在任何时刻t的瞬时值都满足如下的关系：

（1）串联电路中，通过各元件的电流i（t）是一样的，而电路两端的总电压u（t）等于各元件上分电压u_1（t）、u_2（t）之和，即 $u(t)=u_1(t)+u_2(t)$

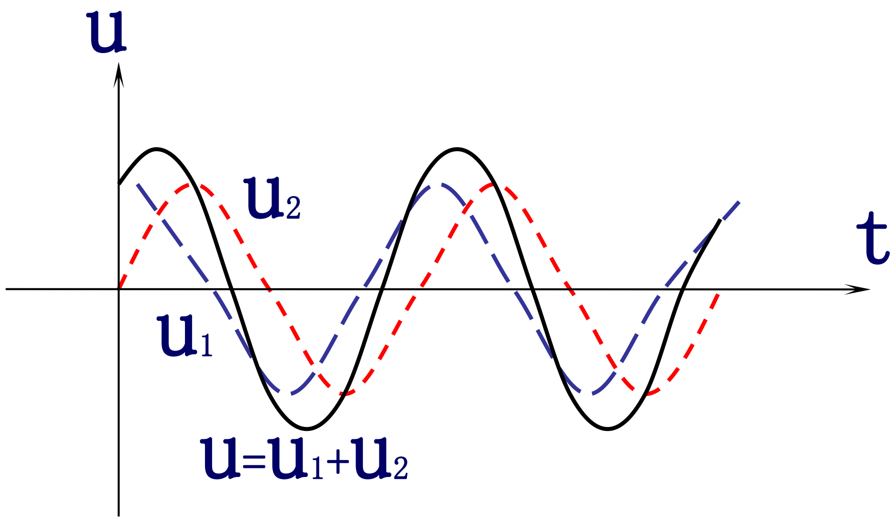
（2）并联电路中，各元件两端的电压u(t)是共同的，而总电流i（t）等于通过各元件得分电流i_1（t)、i_2(t)之和，即 $i(t)=i_1(t)+i_2(t)$

然而实验表明：对于有效值来说，一般在串联电路中

$U \neq U_1 + U_2$，在并联电路中 $I \neq I_1 + I_2$（为什么？）

那么，有效值的叠加又服从怎样的规律呢？

二、用矢量图解法计算同频简谐量的叠加



在解决交流电路的串联、并联问题时，我们总是遇到同频率简谐量的叠加问题，这类问题可表述如下：

设两个同频简谐量：

$$u_1(t) = A_1\cos(\omega t + \varphi_1)$$

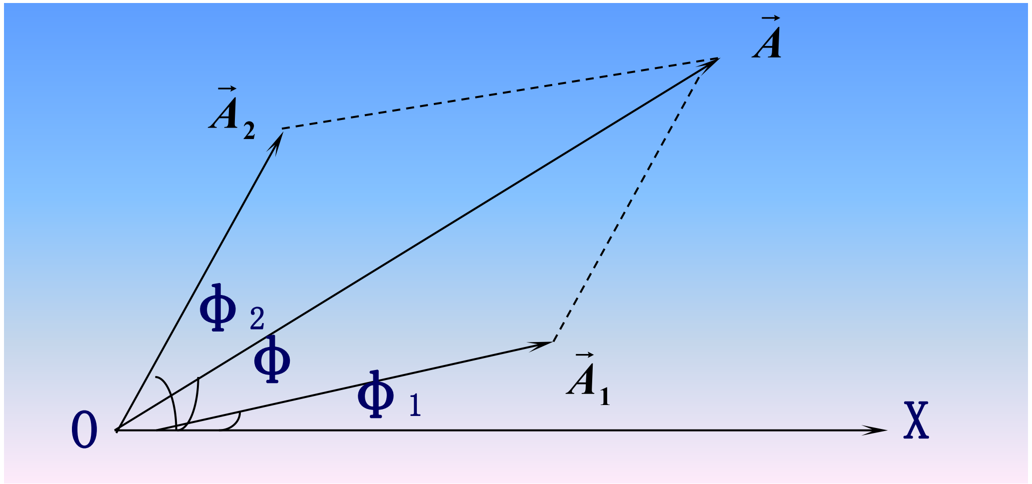
$$u_2(t) = A_2\cos(\omega t + \varphi_2)$$

求它们的合成：　$u(t)=u_1(t)+u_2(t)$

求得结果为：　$u(t)=A\cos(\omega t+\varphi)$

$$\begin{cases} A^2=A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos(\varphi_2-\varphi_1) \\ \tan\varphi=\dfrac{A_1\sin\varphi_1+A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1+A_2\cos\varphi_2} \end{cases}$$

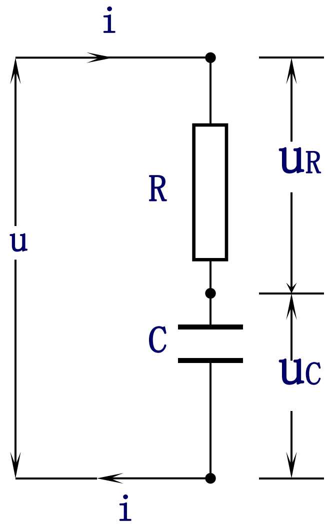
$$\Rightarrow \vec{u}=\vec{u}_1+\vec{u}_2$$

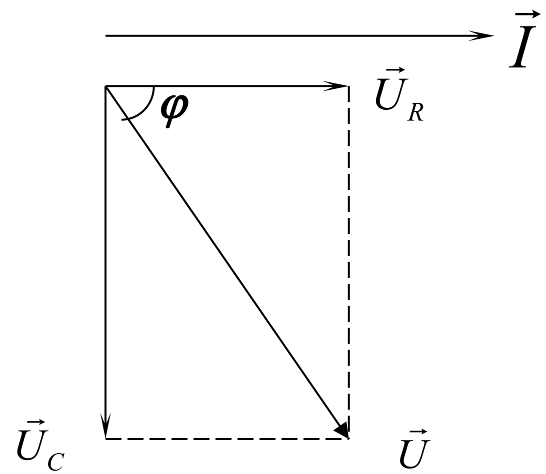


我们采用矢量图解法解决实际问题时，由于代表同频率简谐量矢量之间的相对位置保持不变，因此在讨论它们之间的关系时，可以从中任选一个作为参考矢量（初位相为零），将它画在X轴上，其它就都可画出。

三、串联电路

1、RC串联：





由于通过各元件的电流i（t）是共同的，我们就以它为基准，画一个水平矢量来代表它。 由几何关系得：

$$\boldsymbol{\vec{U} = \vec{U}_C + \vec{U}_R}$$

$$U = \sqrt{U_R^2 + U_C^2}$$

$$\varphi = -tg^{-1}\frac{U_C}{U_R}$$

若 U_C、U_R 代表R、C元件上分电压的有效值，则U就是总电压的有效值， φ 是总电压U(t)与电流之间的位相差。设i（t）的有效值为I，则，

$$U_R = IZ_R = IR \qquad U_C = IZ_C = \frac{I}{\omega C}$$

$$\therefore U_C / U_R = \frac{Z_C}{Z_R} = \frac{1}{\omega CR} \qquad U = \sqrt{U_R^2 + U_c^2} = I\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

总阻抗为：

$$Z = \frac{U}{I} = \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2} \qquad \varphi = -\tan^{-1}\frac{1}{\omega CR}$$

电压落后于电流，所以φ为负

2、RL串联电路：
各元件上电流的瞬时值相同。

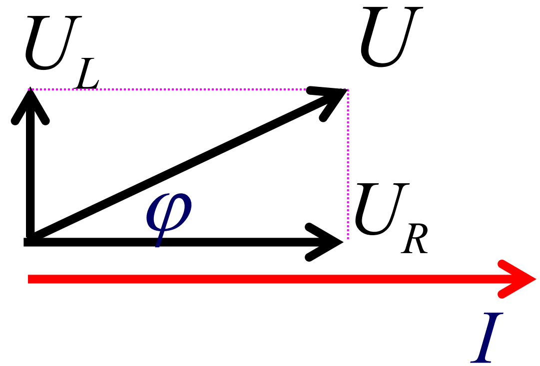
$$i(t) = I_o \cos \omega t$$

$$u(t) = u_R + u_L$$

$$u(t) = U_{Ro} \cos \omega t + U_{Lo} \cos(\omega t + \frac{\pi}{2})$$

$$\omega L I_o$$

$$u(t) = U_o \cos(\omega t + \varphi)$$



$$U_o = \sqrt{U_{Ro}^2 + U_{Lo}^2} = \sqrt{(I_0 R)^2 + (\omega L I_0)^2}$$

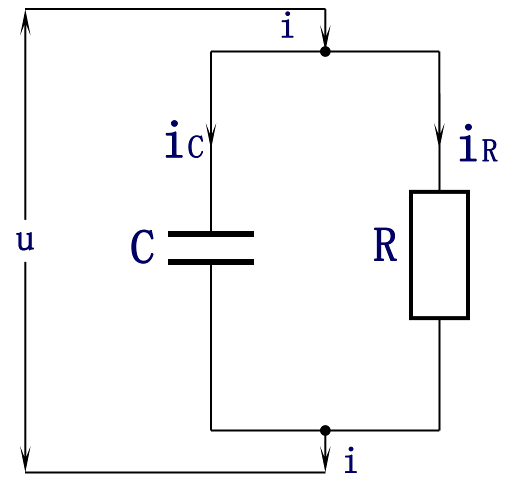
$$Z = \frac{U_o}{I_o} = \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}$$

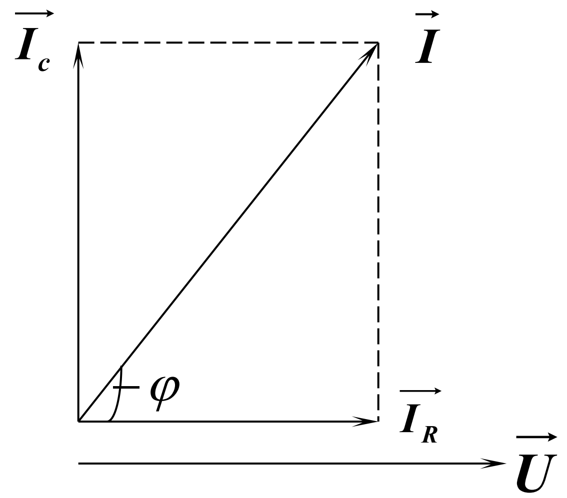
$$\varphi = \arctan\frac{U_{Lo}}{U_{Ro}} = \arctan\frac{Z_L}{Z_R} = \arctan\frac{\omega L}{R}$$

电压超前于电流所以φ为正

四、并联电路

1、RC并联电路





在并联电路中，各元件上的电压是共同的，我们就以它为基准，画一个水平矢量来代替它。

在并联电路中，各元件上的电压是共同的，我们就以它为基准，画一个水平矢量 $\vec{U}$ 来代替它。

$$I=\sqrt{I_R^2+I_C^2} \qquad I_R=\frac{U}{R} \qquad I_C=\frac{U}{Z_C}=\omega CU$$

$$\therefore I=U\sqrt{\frac{1}{R^2}+\frac{1}{Z_C^2}}=U\sqrt{\frac{1}{R^2}+(\omega C)^2}=\frac{U}{Z}$$

式中 $Z=\dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{1}{R^2}+\dfrac{1}{Z_C^2}}}$ 为RC并联电路的等效阻抗。

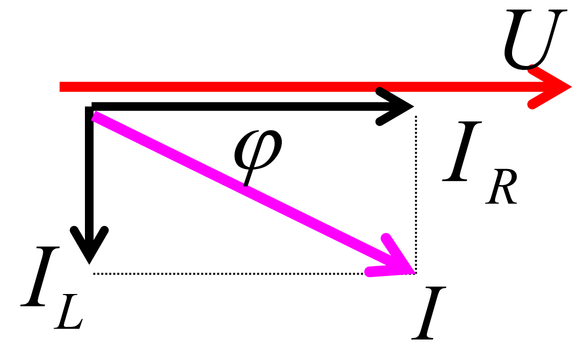
$$\varphi=-tg^{-1}\frac{I_C}{I_R}=-tg^{-1}RC\omega$$

电压落后于电流，所以φ为负

2、RL并联电路，各元件上电压的瞬时值相同

总电流是通过各元件电流的瞬时值之和

$$I=\sqrt{I_R^2+I_L^2}=U\sqrt{\frac{1}{R^2}+\frac{1}{\omega^2L^2}}$$



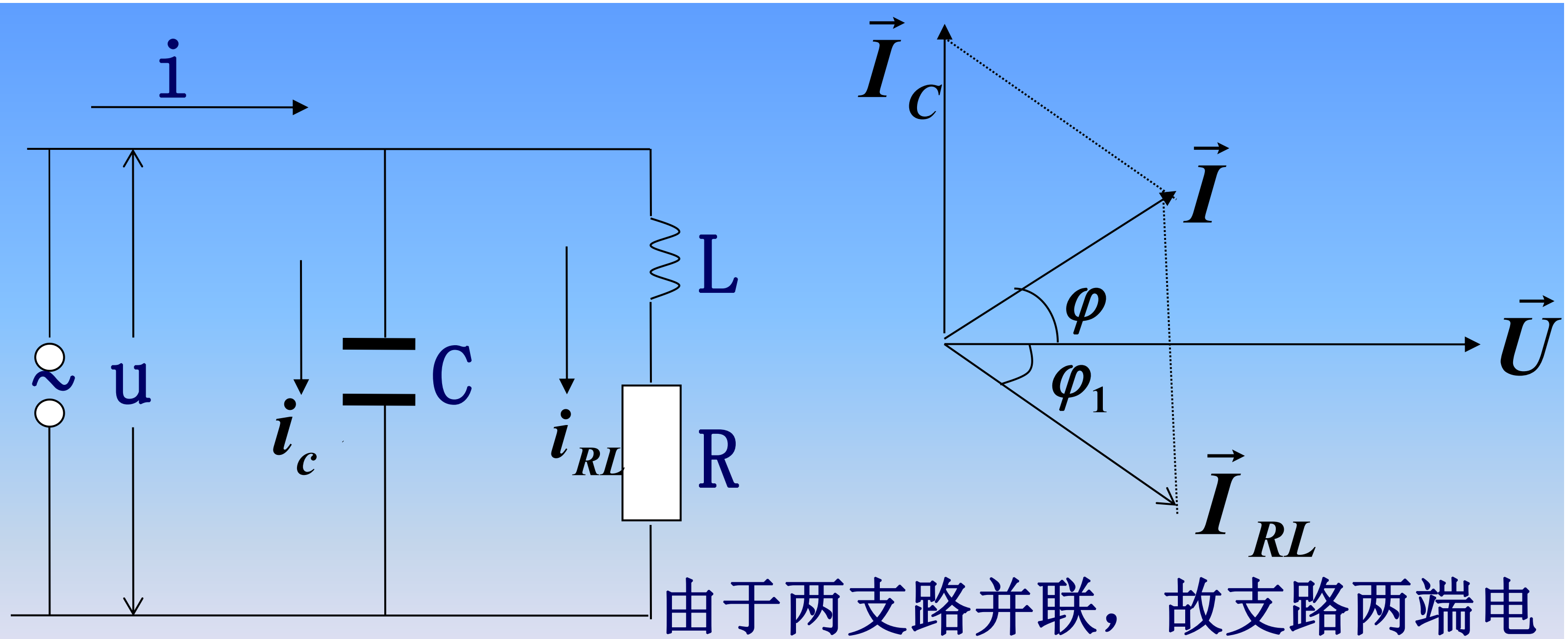
$$Z=\frac{U}{I}=\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{R^2}+\frac{1}{\omega^2L^2}}}$$

$$\varphi=arctg\frac{I_L}{I_R}=arctg\frac{R}{\omega L}$$

电压超前于电流
所以φ为正

五、混联电路

既有串联又有并联的电路称为混联电路。



由于两支路并联，故支路两端电压相等，选电压矢量作参考矢量

利用三角函数关系可得： $$I=\sqrt{I_C^2+I_{RC}^2+2I_CI_R\cos\left(\frac{\pi}{2}+\varphi_1\right)}$$

$$\varphi=tg^{-1}\frac{I_C-I_{RL}\sin\varphi_1}{I_{RL}\cos\varphi_1}$$

从RL串联电路的研究中已知： $$I_{RL}=\frac{U}{\sqrt{R^2+(\omega L)^2}}, \quad ctg\,\varphi_1=\frac{R}{\omega L}$$

从纯电容电路的研究中已知： $$I_C=\omega CU$$

代入 $$Z=\frac{U}{I}=\sqrt{\frac{R^2+(\omega L)^2}{(\omega CR)^2+(1-\omega^2LC)^2}}$$

$$\varphi=tg^{-1}\frac{\omega L-\omega C\left(R^2+\omega^2L^2\right)}{R}$$


谢谢