交流电路的复数解法

一、交流电路的复数解法

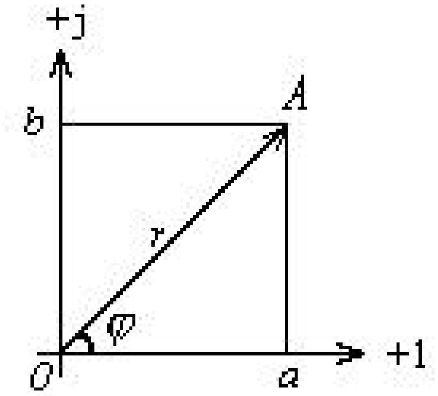
矢量图解法比较直观，运算简单。但在一些复杂的电路中，特别是要用交流电路的基尔霍夫方程组才能解决的复杂电路，矢量图往往无法预先画出，采用矢量图解法就甚感困难。这里我们介绍另一种普遍性计算方法，即借助复数理论讨论简谐交流电路，这种方法称复数解法。用复数表示，交流电路的各种公式都写成和直流电路十分相似的形式，这是复数解法的一个很大优点。

复数

复数的实部、虚部和模

虚单位，数学上用i来代表它，因为在电工中i代表电流，所以改用j代表虚单位，即

$$j=\sqrt{-1}$$



有向线段的复数表示

如图4.5所示，有向线段A可用下面的复数表示为 $A=a+jb$

由图可见， $r=\sqrt{a^2+b^2}$

r表示复数的大小，称为复数的模。有向线段与实轴正方向间的夹角，称为复数的幅角，用 φ表示，规定幅角的绝对值小于 180°。

复数的直角坐标式 ：

$$A=a+jb=r\cos\varphi+jr\sin\varphi$$
$$=r(\cos\varphi+j\sin\varphi)$$

复数的指数形式 ：

$$A=re^{j\varphi}$$

一、简谐量的复数表示法及一些重要概念

复数法的基本原则是把所有的简谐量都用对应的复数来表示。

$$u(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi_u) \longleftrightarrow \tilde{U} = U_m e^{j(\omega t + \varphi_u)}$$

$$i(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi_i) \longleftrightarrow \tilde{I} = I_m e^{j(\omega t + \varphi_i)}$$

$\tilde{U}$ 称为复电压，$\tilde{I}$ 称为复电流

同一段电路上的 $\tilde{U}$ 和 $\tilde{I}$ 的比值：

$$\tilde{U} \big/ \tilde{I} = \frac{U_m e^{j(\omega t + \varphi_u)}}{I_m e^{j(\omega t + \varphi_i)}} = \frac{U_m}{I_m} e^{j(\varphi_u - \varphi_i)} = Z e^{j\varphi}$$

它是一个复数, 它的模等于这段电路的阻抗 $Z = \frac{U_m}{I_m}$

它的辐角为 $\varphi = \varphi_u - \varphi_i$

我们把这个复数记作 $\tilde{Z}$ ，即 $\tilde{Z} = Ze^{j\varphi}$

复数 $\tilde{Z}$ 完全概括了这段电路本身的两个方面基本性质—阻抗和位相差，它叫做这段电路的复阻抗，知道了复阻抗，这段电路的性质就完全清楚了。

由上面可得：$\tilde{U} = \tilde{I}\tilde{Z}$ 或 $\frac{\tilde{U}}{\tilde{I}} = \tilde{Z}$

该公式同直流电路的欧姆定律具有完全相同的形式，可见引入复阻抗的概念是大有好处的。

纯元件的复阻抗

（1）电阻元件：$Z_R = R, \varphi = 0, \quad \therefore \widetilde{Z}_R = R$

（2）电容元件：

$$Z_C = \frac{1}{\omega C}, \varphi = -\frac{\pi}{2} \therefore \widetilde{Z}_C = \frac{1}{\omega C} e^{-j\pi/2} = \frac{-j}{\omega c} = \frac{1}{j\omega c}$$

（3）电感元件：

$$Z_L = \omega L, \varphi = \frac{\pi}{2} \therefore \widetilde{Z}_L = \omega L e^{j\pi/2} = j\omega L$$

上述结果表明：$\widetilde{Z}_R$ 为正实数；$\widetilde{Z}_C$ 为负虚数；$\widetilde{Z}_L$ 为正虚数。

二、串联、并联电路的复数解法

1、串联电路

$$u(t)=u_1(t)+u_2(t)$$ （瞬时值关系）

用相应的复电压来代替它们，则有 $\tilde{U}=\tilde{U}_1+\tilde{U}_2$

设各段的复阻抗为 $\tilde{Z}_1$ 、$\tilde{Z}_2$ ，整个电路的复阻抗为 $\tilde{Z}$

$$\because \tilde{U}_1=\tilde{I}_1\tilde{Z}_1 \quad \tilde{U}_2=\tilde{I}_2\tilde{Z}_2 \quad \tilde{U}=\tilde{I}\tilde{Z}$$

因为复电流 $\tilde{I}$ 是共同的，代入消去 $\tilde{I}$

$$\Rightarrow \tilde{Z}=\tilde{Z}_1+\tilde{Z}_2$$

2、并联电路

$$i(t)=i_1(t)+i_2(t)$$（瞬时值关系）

用相应的复电流来代替它们，则有：$\tilde{I}=\tilde{I}_1+\tilde{I}_2$

设各分支的复阻抗为 $\tilde{Z}_1$ 、 $\tilde{Z}_2$ ，整个电路的复阻抗为 $\tilde{Z}$

$$\tilde{I}_1=\frac{\tilde{U}}{\tilde{Z}_1}\quad \tilde{I}_2=\frac{\tilde{U}}{\tilde{Z}_2}\quad \tilde{I}=\frac{\tilde{U}}{\tilde{Z}}$$

因为复电压 $\tilde{U}$ 是共同的，代入消去 $\tilde{U}$

$$\Rightarrow \frac{1}{\tilde{Z}}=\frac{1}{\tilde{Z}_1}+\frac{1}{\tilde{Z}_2}$$

结果表明：交流电路复阻抗的串、并联公式和直流电路电阻的串、并联公式完全一样。

交流串、并联电路

- 用复数法计算简单电路时，电路的电压、电流关系与直流电路一样

- 串联电路

$$\tilde{I} = \tilde{I}_1 = \tilde{I}_2,$$

$$\tilde{U} = \tilde{U}_1 + \tilde{U}_2 = \tilde{I}\tilde{Z}_1 + \tilde{I}\tilde{Z}_2 = \tilde{I}\tilde{Z}$$

$$\tilde{Z} = \tilde{Z}_1 + \tilde{Z}_2$$

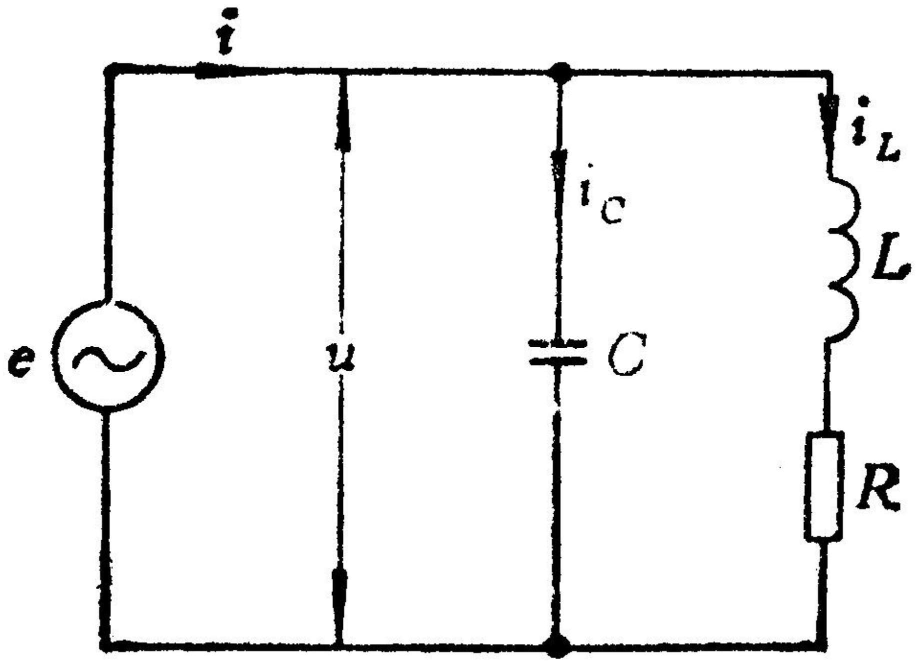
- 并联电路

$$\tilde{U} = \tilde{U}_1 = \tilde{U}_2,$$

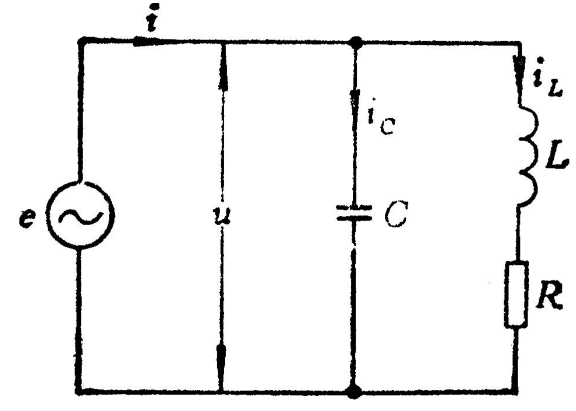
$$\tilde{I} = \tilde{I}_1 + \tilde{I}_2,$$

$$\frac{1}{\tilde{Z}_1} + \frac{1}{\tilde{Z}_2} = \frac{1}{\tilde{Z}}$$

例题：求*R*、*L*、*C*串并联电路的总阻抗和相位差



- 先算L、R 串联电路的复阻抗Z_{LR}



$$\tilde{Z}_{LR} = \tilde{Z}_L + \tilde{Z}_R = R + j\omega L$$

- 再算总电路复阻抗

$$\tilde{Z}^{-1} = \tilde{Z}^{-1}{}_{LR} + \tilde{Z}^{-1}{}_{C} = \frac{1}{R + j\omega L} + j\omega C$$

$$= \frac{1 - \omega^2 LC + j\omega CR}{R + j\omega L}$$

- 复阻抗

$$\therefore \tilde{Z} = \frac{R + j\omega L}{1 - \omega^2 LC + j\omega CR}$$

求阻抗和幅角

利用复数运算规则

$$\therefore \tilde{Z} = \frac{R + j\omega L}{1 - \omega^2 LC + j\omega CR} = \frac{\tilde{Z}_1}{\tilde{Z}_2} = \frac{Z_1 e^{j\varphi_1}}{Z_2 e^{j\varphi_2}} = \frac{Z_1}{Z_2} e^{j(\varphi_1 - \varphi_2)}$$

模

$$Z = |\tilde{Z}| = \frac{|R + j\omega L|}{|1 - \omega^2 LC + j\omega CR|} = \sqrt{\frac{R^2 + (\omega L)^2}{(1 - \omega^2 LC)^2 + (\omega CR)^2}}$$

幅角

$$\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 = tg^{-1}\frac{\omega L}{R} - tg^{-1}\frac{\omega CR}{1 - \omega^2 LC}$$

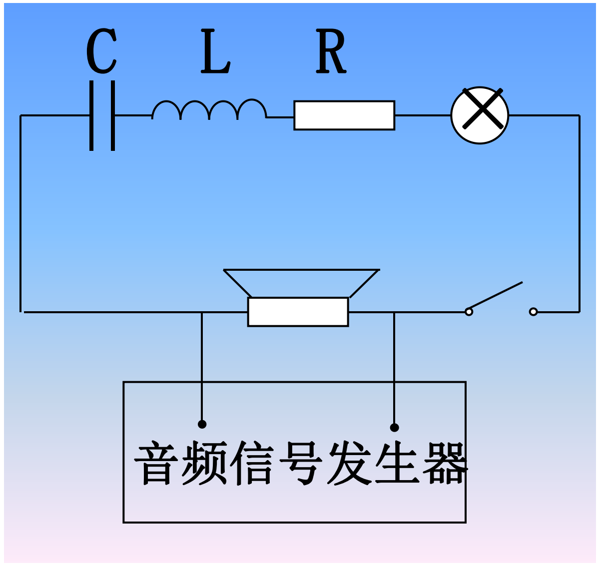
- 用三角恒等式

$$tg^{-1}x - tg^{-1}y = tg^{-1}\frac{x - y}{1 + xy}$$

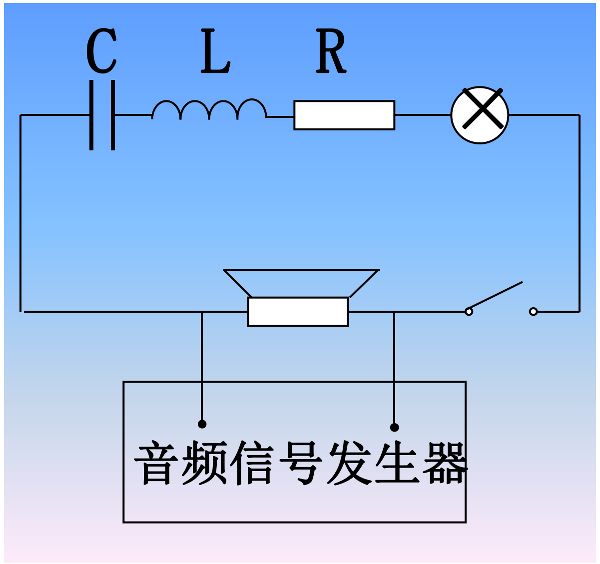
$$\varphi = tg^{-1}\frac{\dfrac{\omega L}{R} - \dfrac{\omega CR}{1 - \omega^2 LC}}{1 + \dfrac{\omega L}{R}\cdot\dfrac{\omega CR}{1 - \omega^2 LC}} = tg^{-1}\frac{\omega L - \omega C[R^2 + (\omega L)^2]}{R}$$

谐振电路

当电容C、电感L两类元件同时出现在一个电路中时，就会发生一种新现象——谐振。通常就把这种电路叫做谐振电路，它在实际中有重要的应用。谐振电路主要有串联谐振和并联谐振两种。



串联谐振



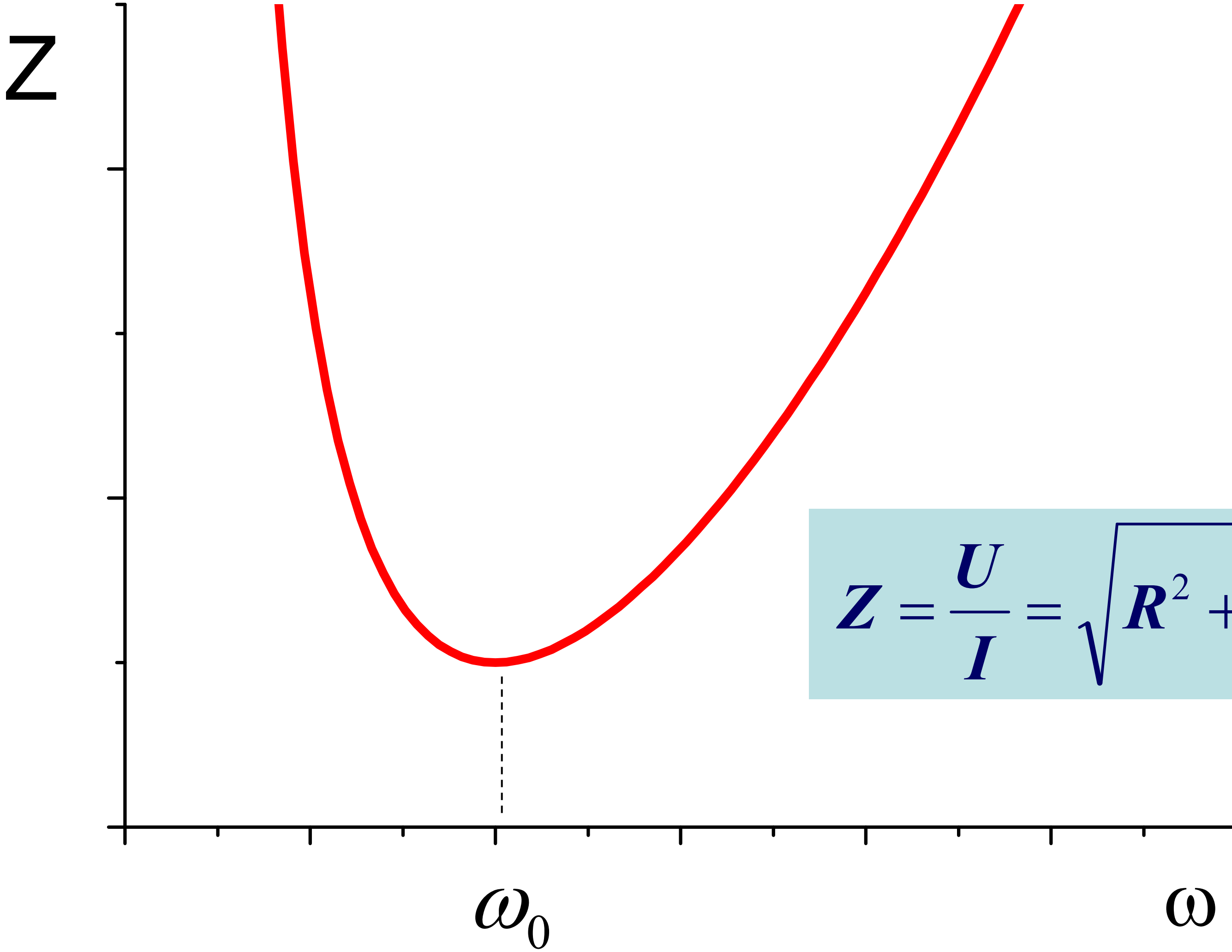
在维持电压不变的情况下，若从低到高地改变音频讯号发生器的频率 f 就会看到，小灯的亮度开始由小变大，到某个频率 f_0 后发生转折，又由大变小。这表示，LCR电路中的电流 I 随频率不是单调变化的，而是在$f=f_0$处有极大值I_M，或者说电路的总阻抗Z在此时有个极小值Z_m。这种现象叫做**谐振**。 f_0称为谐振频率。

$$\begin{cases} U_R = IZ_R = IR \\ U_L = IZ_L = \omega LI \\ U_C = IZ_C = \dfrac{I}{\omega C} \end{cases}$$

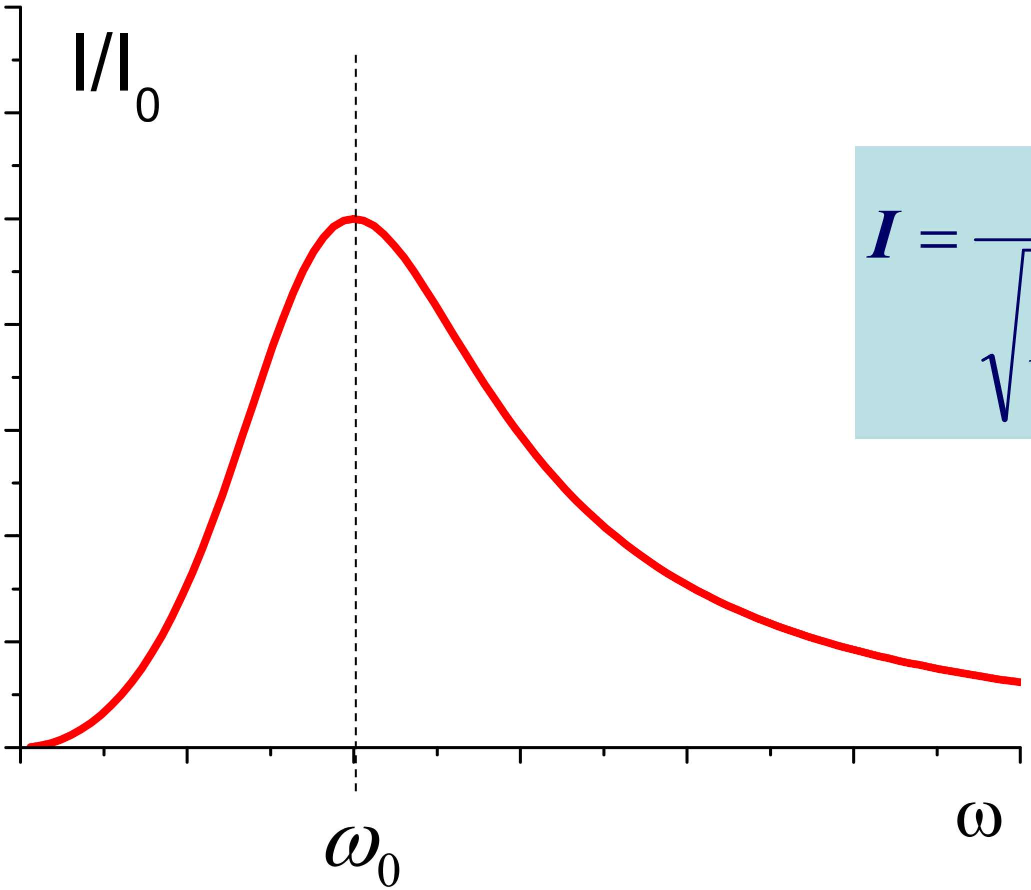
$$\therefore U = \sqrt{U_R^2 + (U_L - U_C)^2} = I\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}$$

$$\mathrm{Z} = \frac{\mathrm{U}}{\mathrm{I}} = \sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}$$

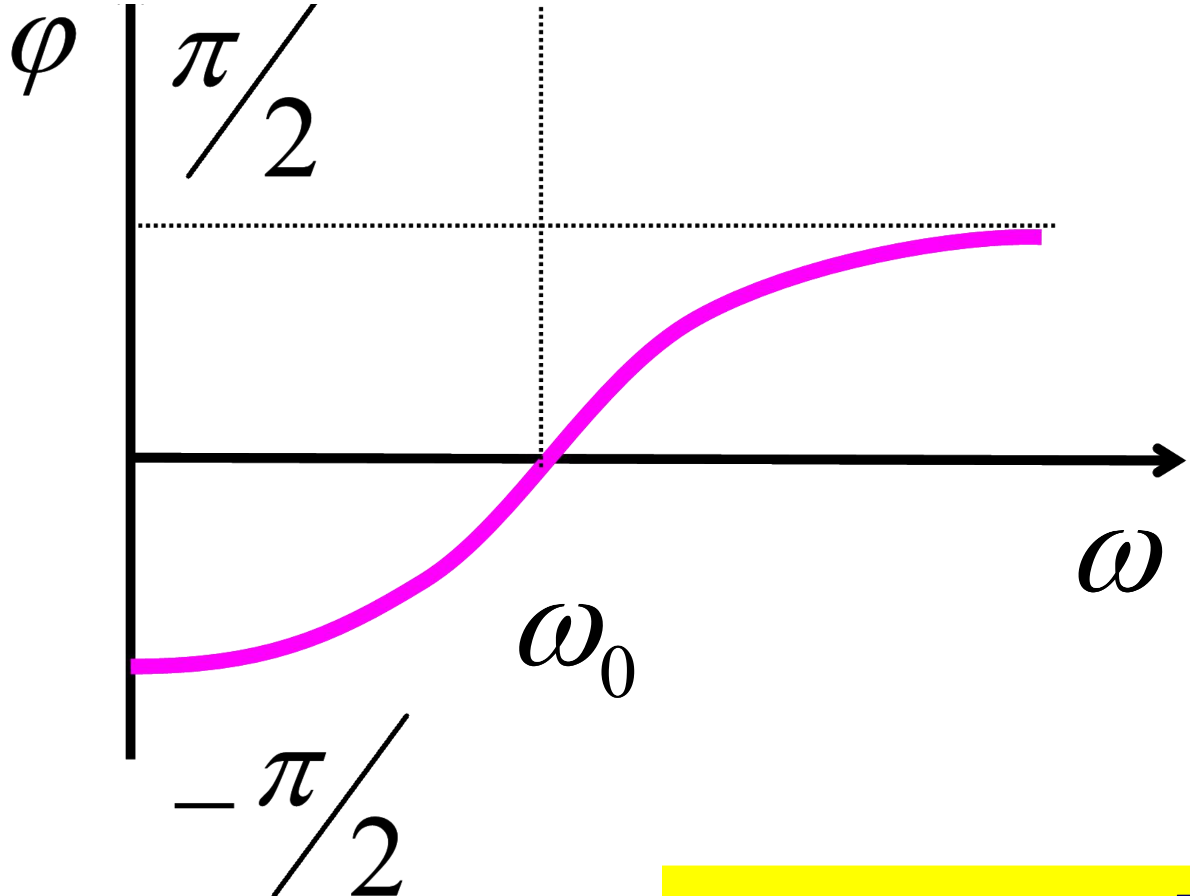
$$\varphi = \mathrm{tg}^{-1}\frac{U_L - U_C}{U_R} = \mathrm{tg}^{-1}\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}$$



$$Z = \frac{U}{I} = \sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}$$



$$I = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$



$$\varphi = \arctan \frac{\omega L - 1/\omega C}{R}$$

根据以上结果，我们来分析串联谐振电路的主要特征：

1、谐振频率

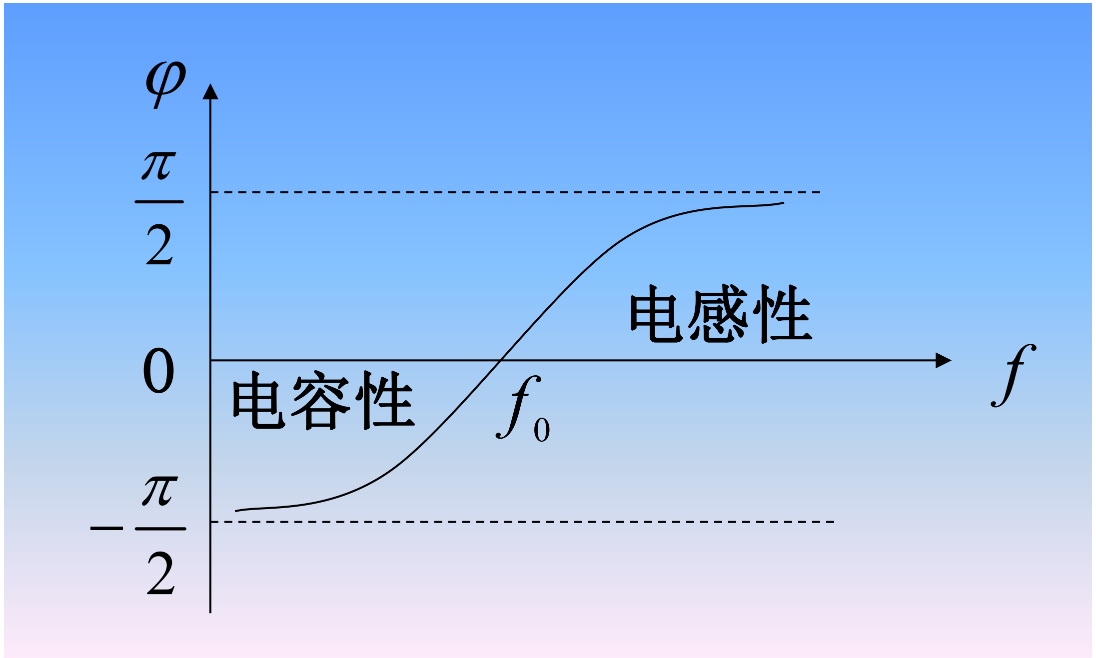
发生谐振时，电路里的等效阻抗最小，电流最大。

$$\omega L=\frac{1}{\omega C}\Rightarrow \omega=\frac{1}{\sqrt{LC}}=\omega_0 \text{ 或 } f=\frac{1}{2\pi\sqrt{\mathrm{LC}}}=f_0$$

式中的ω_0和 f_0 是由电路的L、C值决定的。当外来交流电的频率 f 与电路的固有频率 f_0 相同时，就会发生谐振现象。

2、位相关系

对于给定的L、C、R，当改变交流电的频率 f 时，电路将表现出不同的性质，如下图所示：



总电压与总电流的相位差

$$\varphi = \arctan\frac{\omega L - 1/\omega C}{R}$$

3、L及C上的电压分配

当电路发生谐振时，在L和C上的电压大小相等，方向相反，从整体上说它们的作用互相抵消，但它们的单独作用却不能忽视。设电路的总电压为U，则

$$I_{\max} = \frac{U}{R},$$

$$U_L = I_{\max} Z_L = \frac{\omega_0 L}{R} U = QU$$

$$U_C = I_{\max} Z_C = \frac{1}{R\omega_0 C} U = \frac{\omega_0 L}{R} U = QU$$

式中 $Q = \dfrac{\omega_0 L}{R} = \dfrac{1}{R\omega_0 C}$,称为 Q值.

由于R<<ω_0L，Q值可以很大，可达几十乃至几百。因此就出现了分电压比总电压大得多的现象，这种现象只能出现在LCR串联电路之中，所以串联谐振又称为电压谐振。

使串联谐振电路产生谐振有两种途径：一种是改变电源的频率，使其与电路的固有频率相等；另一种是改变电路中的电感或电容的数值，即改变电路的固有频率，使其与电源频率相等。改变电感或电容使电路产生谐振的过程，称为调谐。在收音机中就是利用调节可变电容来调谐的。

Q值的意义

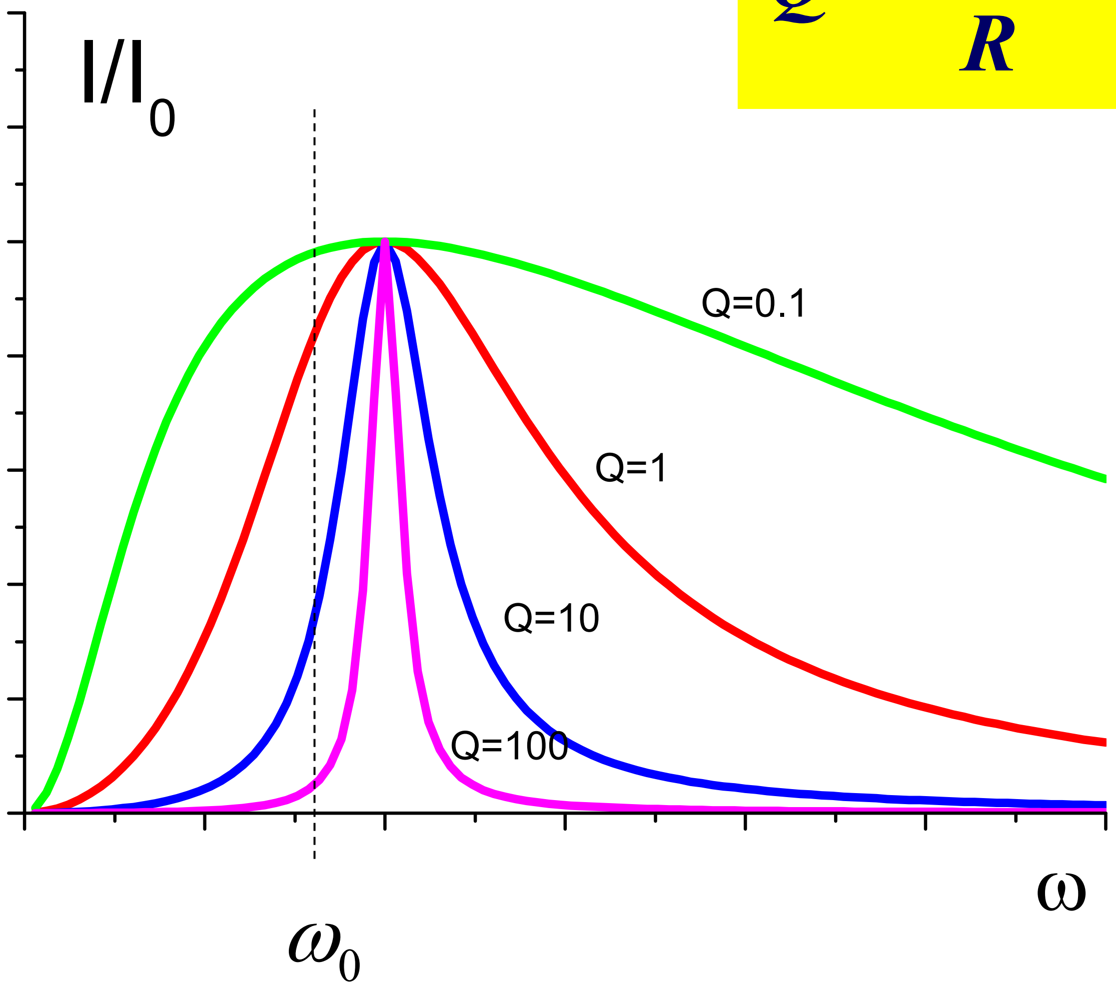
Q值是标志谐振电路性能好坏的一个纯数，因此Q值又称为电路的品质因素，

1、Q值反映了电压分配情况；

2、Q值反映频率选择性的好坏；

3、Q值反映电路中储能和耗能的情况。

$$Q = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{R\omega_0 C}$$



$$I = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}}$$

交流电的功率

一、交流电的功率

交流电在某一元件或组合电路中瞬间消耗的功率p(t) 与直流电路中一样，也等于u(t)和i(t)的乘积：

$$p(t)=u(t)i(t)。$$

与直流电路不同的是，无论u(t)、i(t)还是p(t)都随时间变化。

- 瞬时功率 $P(t)=u(t)i(t)$

设： $i(t)=I_o\cos\omega t$

电压与电流的相位差是 φ

$$u(t)=U_o\cos(\omega t+\varphi)$$

$$P(t)=U_oI_o\cos\omega t\cdot\cos(\omega t+\varphi)$$

$$=\frac{1}{2}U_oI_o\cos\varphi+\frac{1}{2}U_oI_o\cos(2\omega t+\varphi)$$

有效值

$$=UI\cos\varphi+UI\cos(2\omega t+\varphi)$$

平均功率
有功功率
简称功率

$$\overline{P}=\frac{1}{T}\int_o^T u(t)i(t)\cdot dt=UI\cos\varphi$$

纯电阻元件：

$$\varphi = 0 \qquad R_R = R \qquad \overline{P_R} = UI = I^2 R$$

纯电感元件：

$$\varphi = \frac{\pi}{2} \qquad R_L = 0 \qquad \overline{P_L} = 0$$

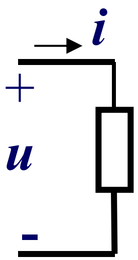
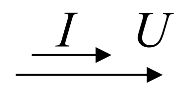
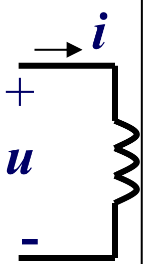
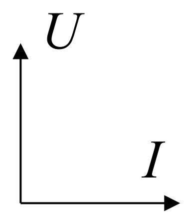
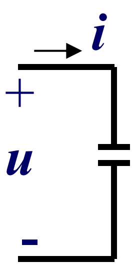
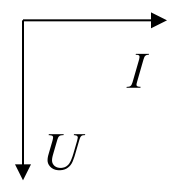
纯电容元件：

$$\varphi = -\frac{\pi}{2} \qquad R_C = 0 \qquad \overline{P_C} = 0$$

纯电感和纯电容的有功电阻都为零，不消耗能量，只是不断地与电源交换能量。实际电路中，电容器与电感的介质损失，也有相当的等效有功电阻。

注意：计算功率不能用复电压和复电流的乘积来代替。

小结

电路参数	电路图(参考方向)	基本关系	阻抗	电压、电流关系			功　率
				瞬时值	有效值	相量图	有功功率
R		$u=iR$	R	设 $i=I\sin\omega t$ 则 $u=U\sin\omega t$	$U=IR$	 u、i 同相	UI I^2R
L		$u=L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$	$\mathrm{j}X_L$	设 $i=I\sin\omega t$ 则 $u=I\omega L$ $\sin(\omega t+90°)$	$U=IX_L$ $X_L=\omega L$	 u领先 i 90°	0
C		$i=C\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$	$-\mathrm{j}X_C$	设 $i=I\sin\omega t$ 则 $u=I\omega C$ $\sin(\omega t-90°)$	$U=IX_C$ $X_C=1/\omega c$	 u落后 i 90°	0

谢谢