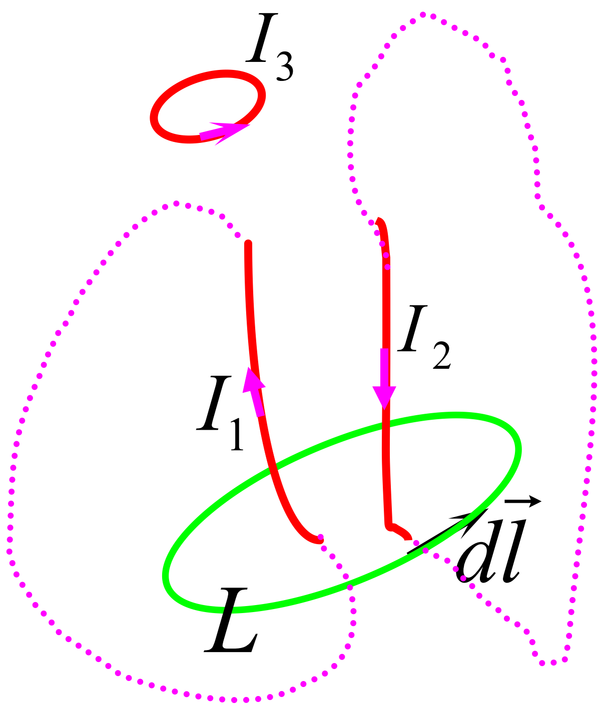
安培环路定理：

对称性和拓扑的应用

一、安培环路定理

在磁场中，沿任一闭合曲线$\vec{B}$矢量的线积分（也称$\vec{B}$矢量的环流），等于真空中的磁导率μ_0乘以穿过以这闭合曲线为边界所张任意曲面的各恒定电流的代数和。



$$\oint_L \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \mu_0 \sum I$$

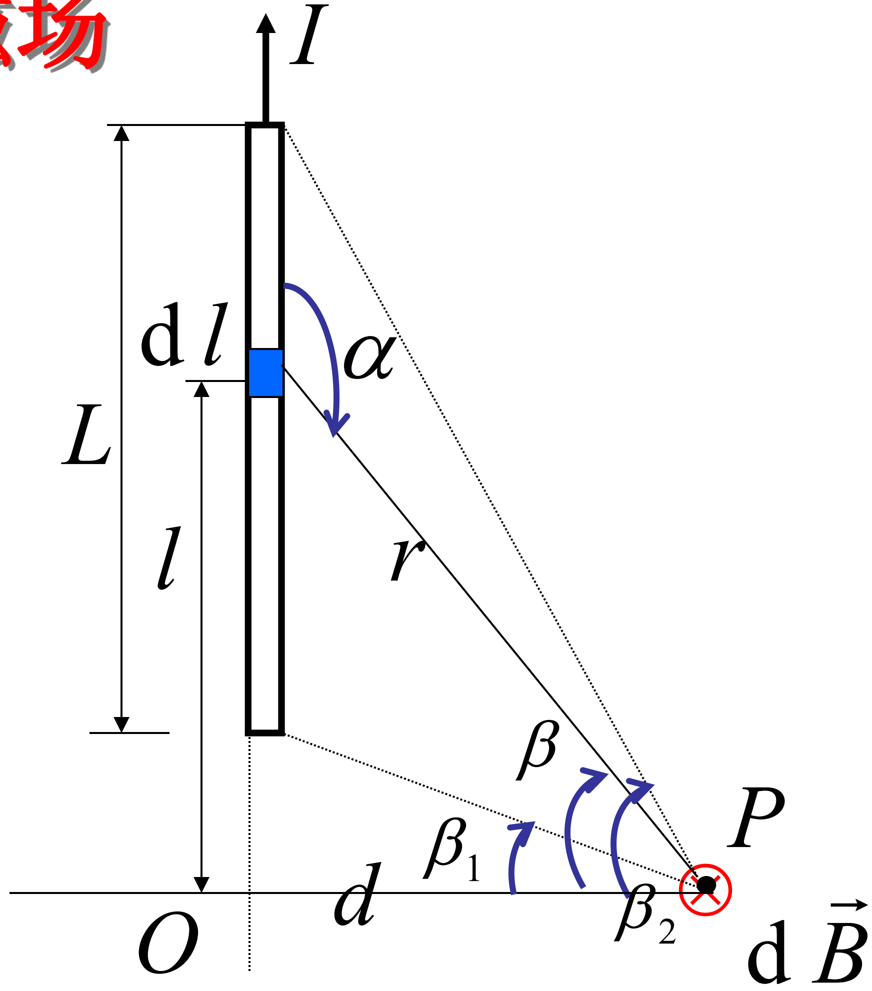
电流I的正负规定：

积分路径的绕行方向与电流成右手螺旋关系时，电流I为正值；反之I为负值。

1. 长直电流的磁场

回忆：长直导线的磁场

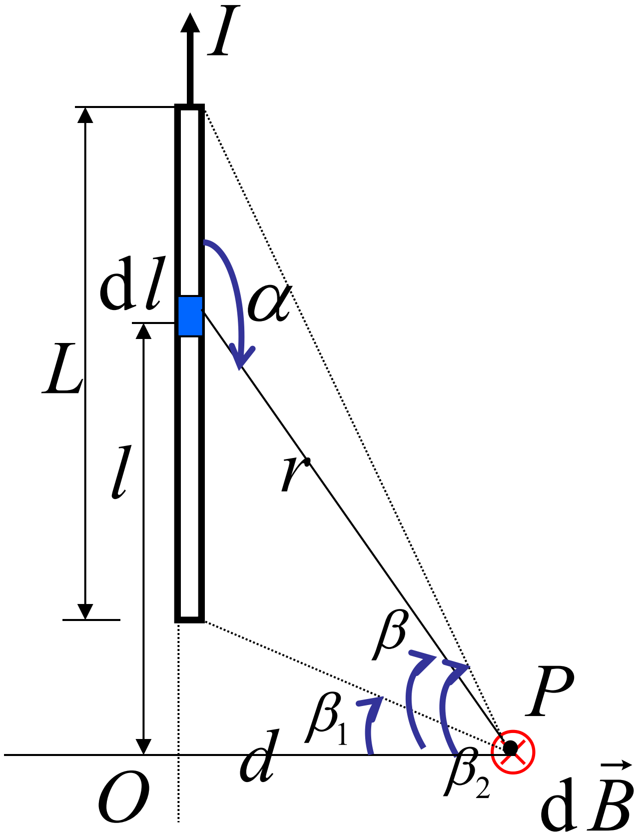
设有长为L的载流直导线，通有电流I。与导线垂直距离为d的p点的磁感强度：



$$B=\frac{\mu_0 I}{4\pi d}\left(\sin\beta_2-\sin\beta_1\right)$$

导线无限长，即

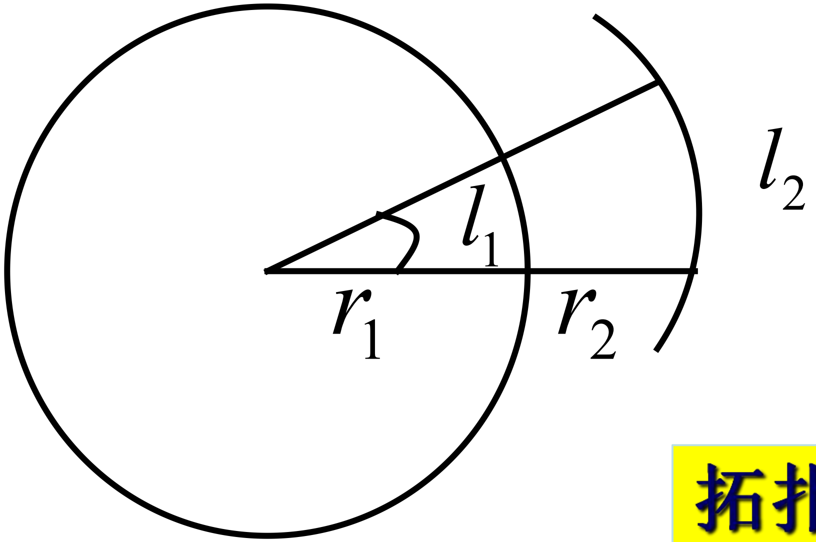
$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi d}$$



平面角

$$\varphi = \frac{l_1}{r_1} = \frac{l_2}{r_2}$$

S : 弧长



拓扑的应用

园环的弧度：

$$\Theta = \frac{2\pi r}{r} = 2\pi$$

（包围顶点）闭合曲线的弧度：

$$\Theta = \oint_L d\varphi = \oint_L \frac{dl'}{r} = 2\pi n, \quad n = 1$$

（不包围顶点）闭合曲线的弧度：

$$\Theta = \oint_L d\varphi = 0$$

思路

一、安培环路定理的证明

1 环路包围电流

- **1.1 圆形环路包围电流**
- **1.2 平面非圆形环路包围电流**
- **1.3 闭合曲线不在垂直于导线的平面内**

2. 环路不包围电流

3. 围绕多根载流导线的任一回路

二、安培环路定理的应用

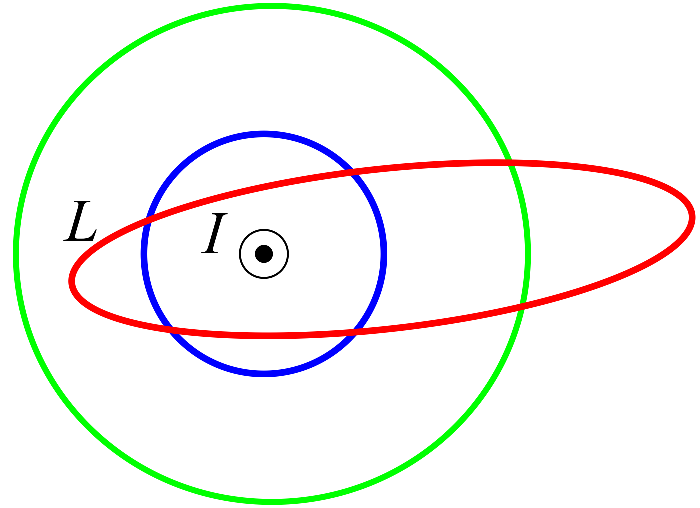
安培, A. -M.

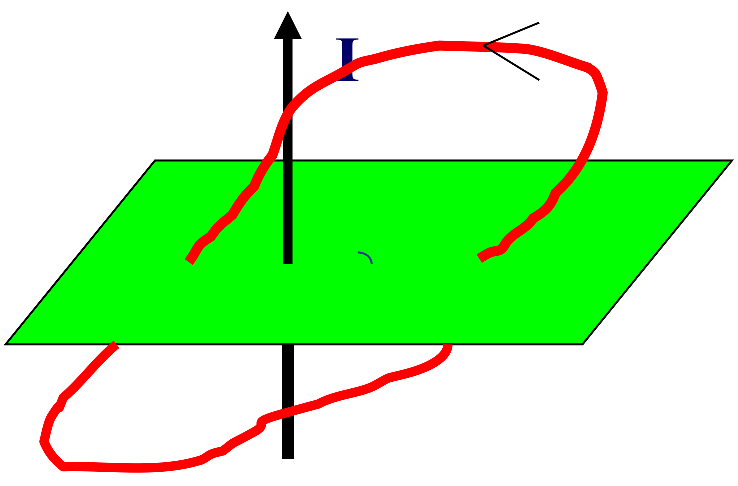
1 环路包围长直导线电流：分三种情况：

1.1 圆形环路包围电流

1.2 平面非圆形环路包围电流

1.3 闭合曲线不在垂直于导线的平面内

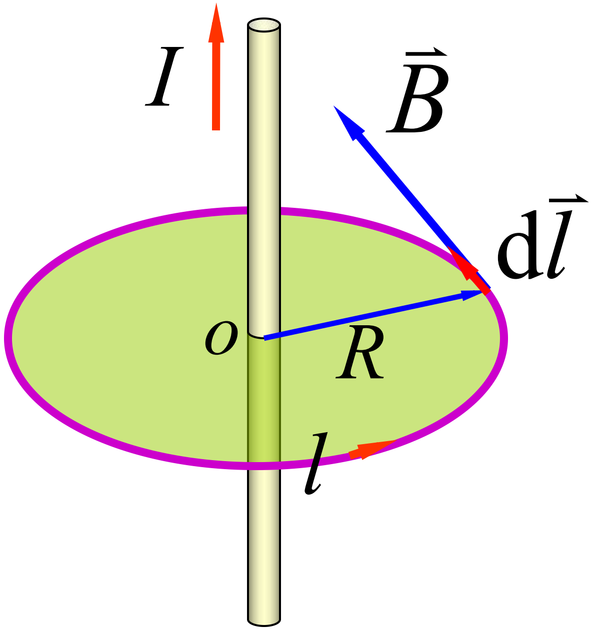




1.1 圆形环路包围电流

载流长直导线的磁感应强度为

$$B=\frac{\mu_0 I}{2\pi R}$$



$$\oint_l \vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=\oint\frac{\mu_0 I}{2\pi R}\mathrm{d}l$$

$$\oint_l \vec{B}\cdot\mathbf{d}\vec{l}=\frac{\mu_0 I}{2\,\boldsymbol{\pi}\,R}\oint_l \mathbf{d}l=\frac{\mu_0 I}{2\,\boldsymbol{\pi}\,R}\cdot 2\pi R$$

$$\oint_l \vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=\mu_0 I$$

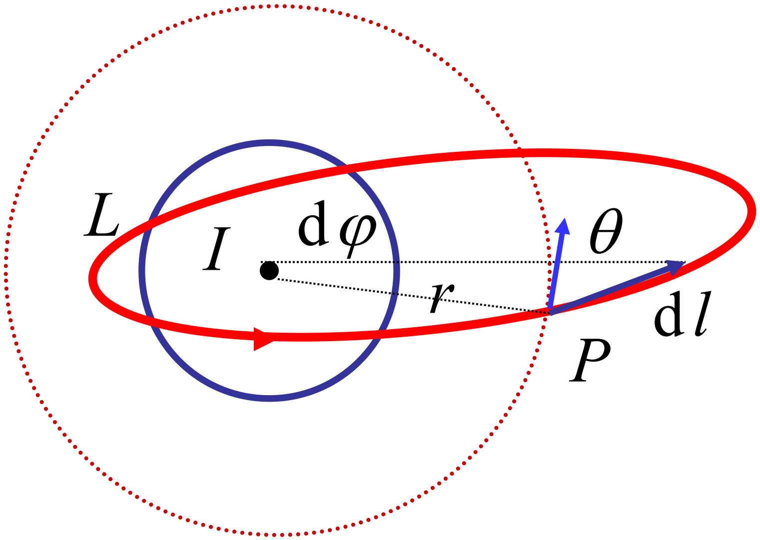
设闭合回路 l 为圆形回路

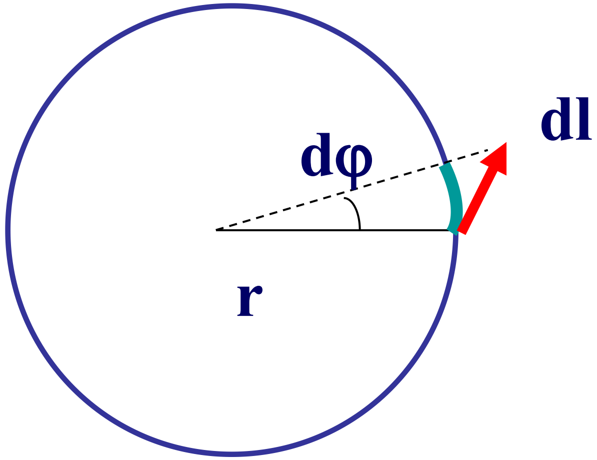
（ l 与 I 成右螺旋）

1.2 平面非圆形环路包围电流

在垂直于导线的平面内任作的环路上取一点，到电流的距离为r，磁感应强度的大小：

$$B=\frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$





在环路上任取线元dl，其在磁场方向投影为

$$\mathrm{d}l\cos\theta=r\mathrm{d}\varphi$$

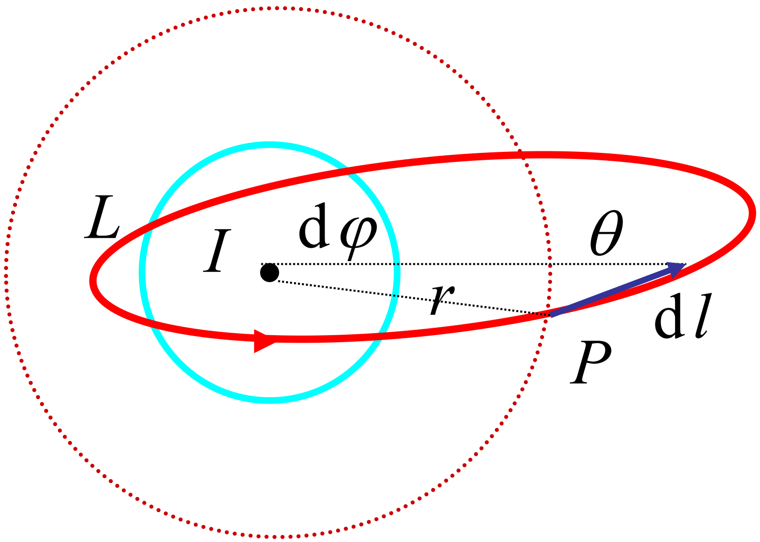
利用几何关系： $\mathbf{d}l\,\mathbf{cos}\,\theta = r\mathbf{d}\varphi$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

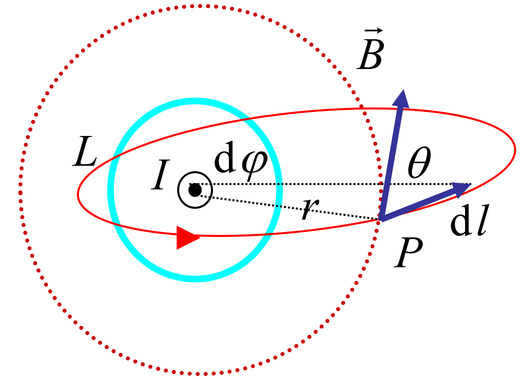
$$\oint_L \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \oint_L B\cos\theta \mathrm{d}l = \oint_L Br\ \mathrm{d}\varphi$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{r} r\,\mathrm{d}\varphi = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi$$

$$= \mu_0 I$$



1.3 闭合曲线不在垂直于导线的平面内：



$$\oint_L \vec{B}\cdot \mathbf{d}\vec{l} = \oint_L \vec{B}\cdot(\mathbf{d}\,\vec{l}_{\perp} + \mathbf{d}\,\vec{l}_{//})$$

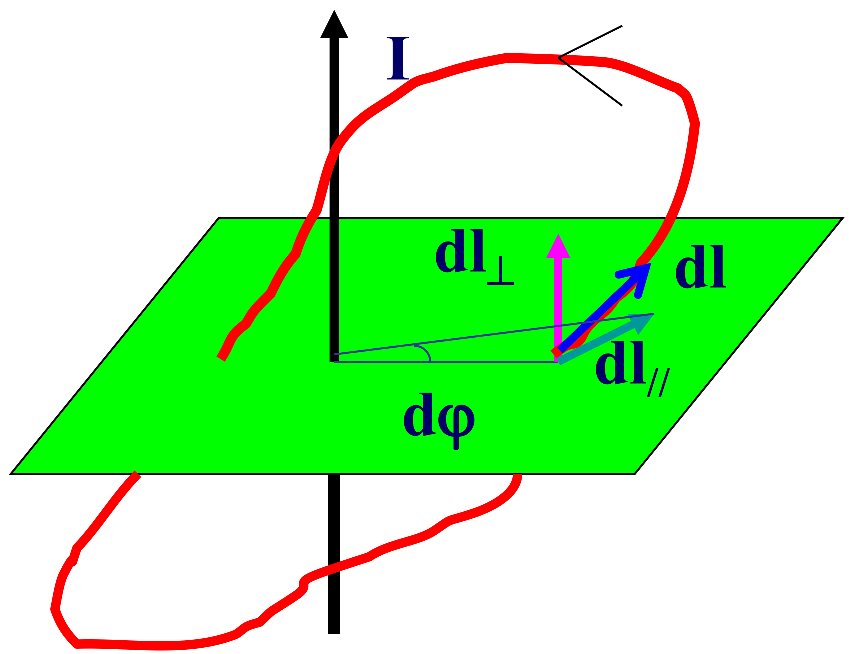
$$\mathbf{d}l_{//}\cos\theta = r\mathbf{d}\varphi$$

$$= \oint_L B\cos 90^{\circ}\,\mathbf{d}l + \oint_L B\cos\theta\,\mathbf{d}l_{//}$$

$$= 0 + \oint_L Br\,\mathrm{d}\varphi$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{r} r\,\mathrm{d}\varphi$$

$$= \mu_0 I$$



如果沿同一路径但改变

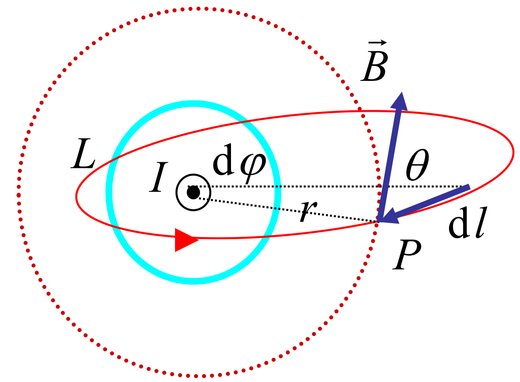
绕行方向积分：

$$\oint_L \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \oint_L B\cos(\pi-\theta)\,\mathrm{d}l$$

$$= \oint_L -B\cos\theta\,\mathrm{d}l$$

$$= -\int_0^{2\pi} \frac{\mu_0 I}{2\pi}\,\mathrm{d}\varphi$$

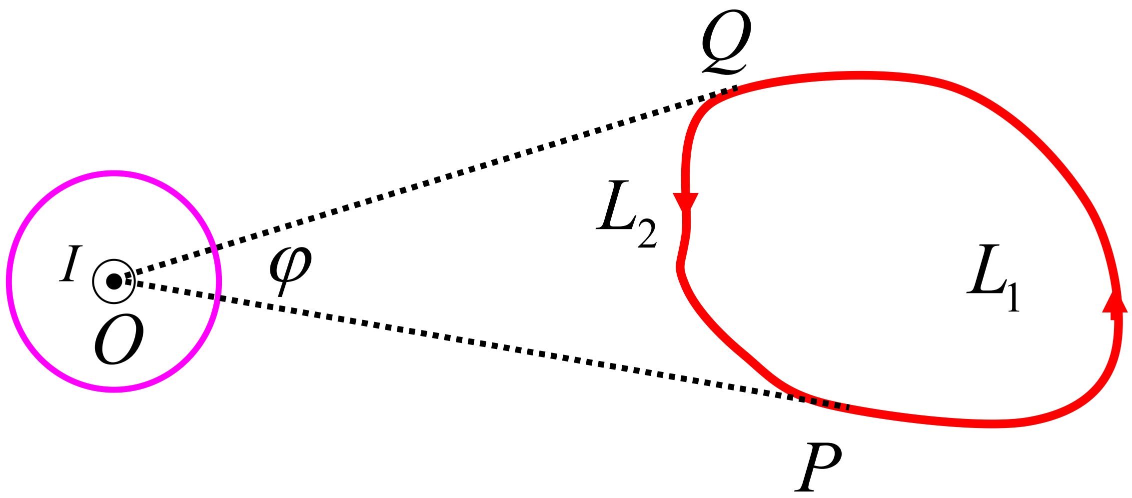
$$= -\mu_0 I$$



表明：磁感应强度矢量的环流与闭合曲线的形状无关，它只和闭合曲线内所包围的电流有关。

1.2 环路不包围电流

$$\mathbf{d}l\cos\theta = r\mathbf{d}\varphi$$



$$\oint_L \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \oint_{L_1}\vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} + \oint_{L_2}\vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

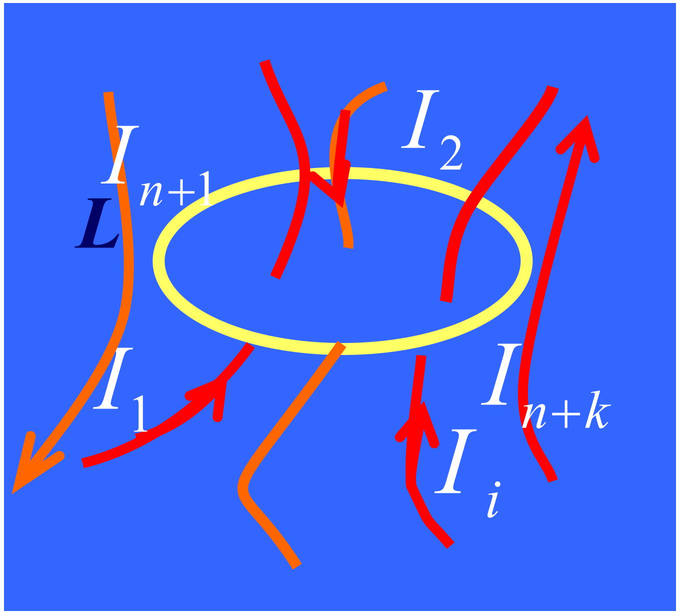
$$= \frac{\mu_0 I}{2\pi}\left(\int_{L_1}\mathrm{d}\varphi - \int_{L_2}\mathrm{d}\varphi\right) = 0$$

表明：闭合曲线不包围电流时，磁感应强度矢量的环流为零。

(1.3) 任一回路

I_i，$i=1,2,\ldots,n$，　　　穿过回路L

I_i，$i=n+1,n+2,\ldots,n+k$ 不穿过回路L



$$\oint_L \vec{B}_i \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_i \qquad i = 1,2,\cdots,n$$

$$\oint_L \vec{B}_i \cdot d\vec{l} = 0 \qquad i = n+1, n+2,\cdots,n+k$$

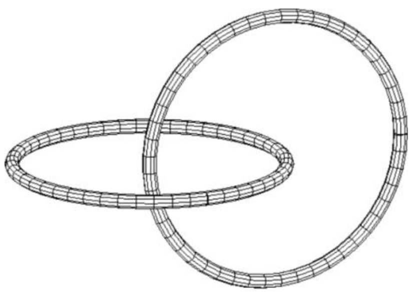
穿过回路的电流

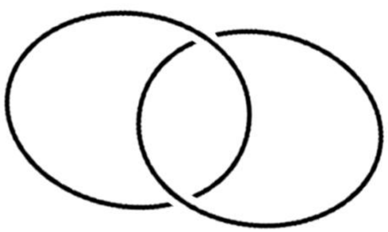
所有电流的总场

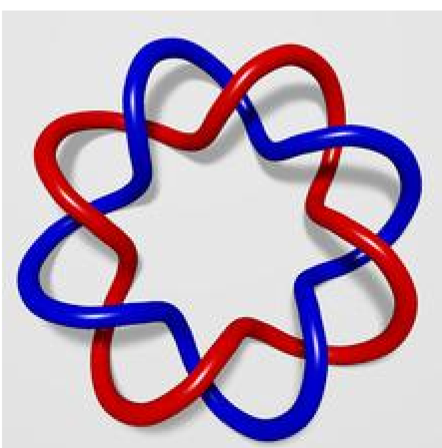
任意回路

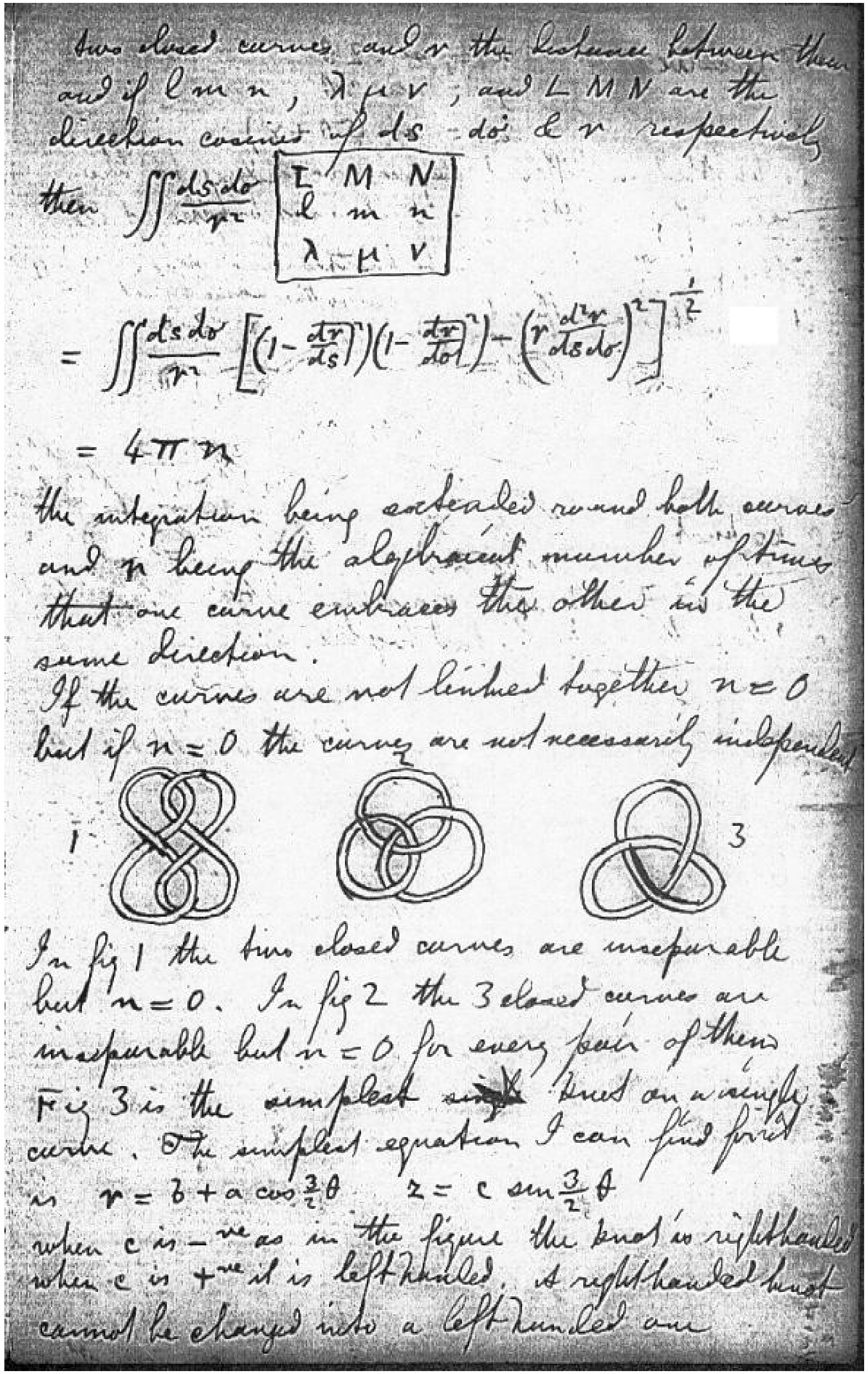
$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_o \sum_i I_i$$

真正的拓扑性质









two closed curves and r the distance between them and if $l\ m\ n$, $\lambda\ \mu\ \nu$, and $L\ M\ N$ are the direction cosines of ds $d\sigma$ & r respectively

then $$\iint \frac{ds\,d\sigma}{r^2} \begin{vmatrix} L & M & N \\ l & m & n \\ \lambda & \mu & \nu \end{vmatrix}$$

$$= \iint \frac{ds\,d\sigma}{r^2} \left[\left(1-\frac{dr}{ds}^2\right)\left(1-\frac{dr}{d\sigma}^2\right)-\left(r\frac{d^2r}{ds\,d\sigma}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= 4\pi n$$

the integration being extended round both curves and n being the algebraical number of times ~~that~~ one curve embraces the other in the same direction.

If the curves are not linked together $n = 0$ but if $n = 0$ the curves are not necessarily independent

In fig 1 the two closed curves are inseparable but $n = 0$. In fig 2 the 3 closed curves are inseparable but $n = 0$ for every pair of them

Fig 3 is the simplest ~~single~~ knot on a single curve. The simplest equation I can find for it is $r = b + a\cos\frac{3}{2}\theta$ $\quad z = c\sin\frac{3}{2}\theta$

when c is $-^{ve}$ as in the figure the knot is righthanded when c is $+^{ve}$ it is lefthanded. A righthanded knot cannot be changed into a lefthanded one

Proposition 3.5 (Gauss, 1832).

(i) $$\iint \frac{l(x'-x)(dydz'-dzdy')+(y'-y)(dzdx'-dxdz')+(z'-z)(dxdy'-dydx')}{[(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2]^{3/2}}$$

$$= V; \tag{3.1}$$

(ii) $$V = 4m\pi, \tag{3.2}$$

where $m = m(C, C')$ *is the linking number of* C *and* C';

(iii) $$m(C, C') = m(C', C). \tag{3.3}$$

Definition 5.2. The *linking number* $Lk^{(1)} = Lk^{(1)}(\gamma_1, \gamma_2)$ of γ_1 and γ_2 is defined by

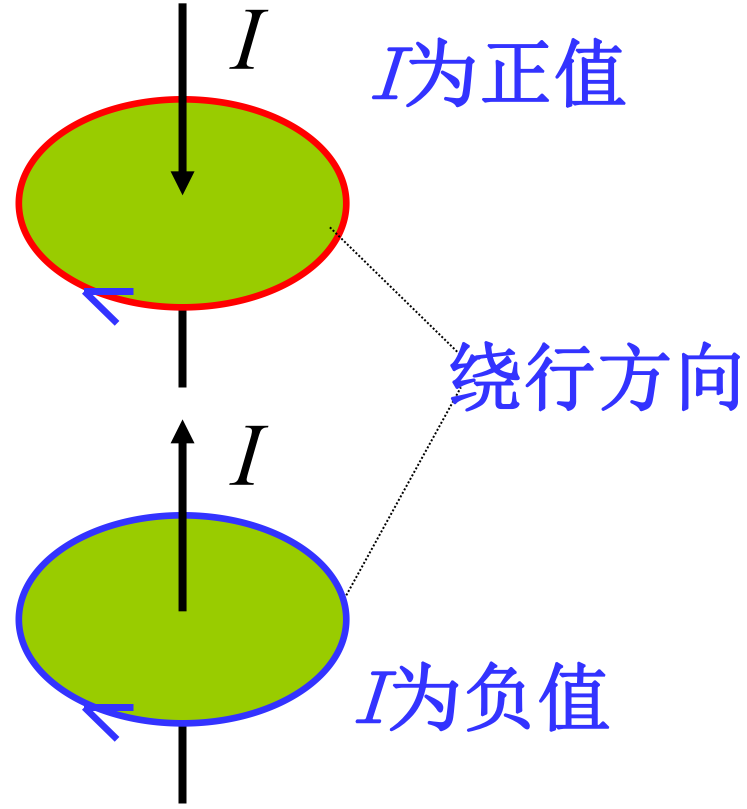
$$Lk^{(1)}(\gamma_1, \gamma_2) := \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_1', \mathbf{r}_2')}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3} dt_1 dt_2. \tag{5.3}$$

2. 安培环路定理

在磁场中，沿任一闭合曲线 $\vec{B}$ 矢量的线积分（也称 $\vec{B}$ 矢量的环流），等于真空中的磁导率 μ_0 乘以穿过以这闭合曲线为边界所张任意曲面的各恒定电流的代数和。

$$\oint_L \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \mu_0 \sum I$$

电流 I 的正负规定：积分路径的绕行方向与电流成右手螺旋关系时，电流 I 为正值；反之 I 为负值。



$$\oint_L \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \mu_0 \sum I$$

物理定义：

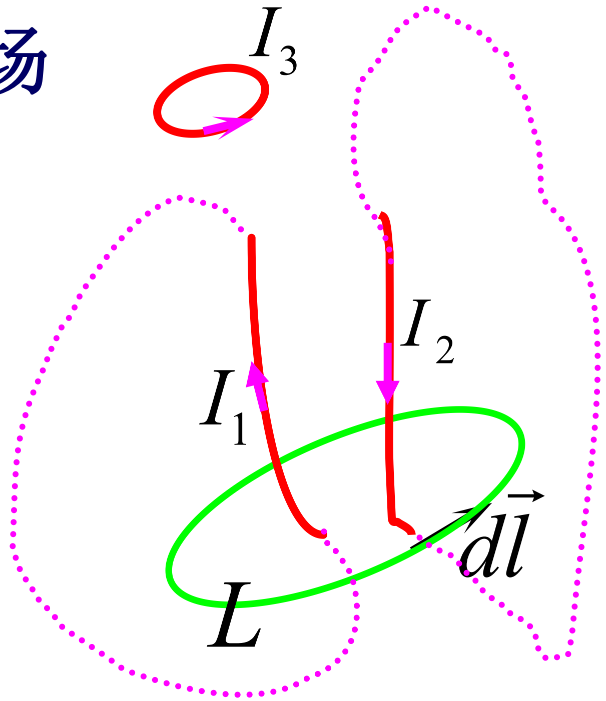
$\vec{\mathbf{B}}$ 空间所有电流共同产生的磁场

L 在场中任取的一闭合线，任意规定一个绕行方向

$\mathrm{d}\vec{\mathbf{l}}$ L上的任一线元

I 空间中的电流

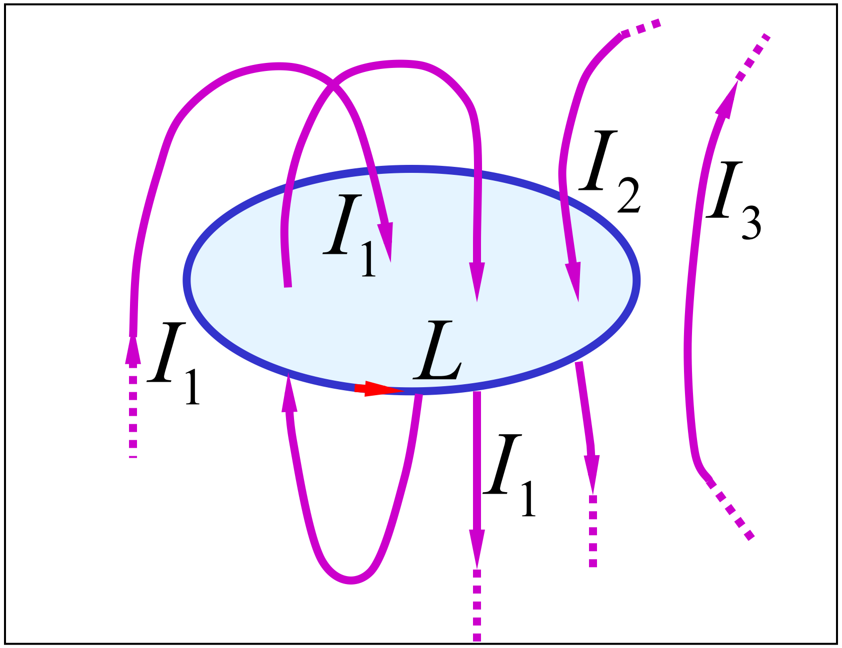
$\sum I$ 环路所包围的所有电流的代数和



例：对于复杂电流：

$$\oint_L \vec{B}\cdot \mathbf{d}\vec{l} = \mu_0(-I_1 + I_1 - I_1 - I_2)$$

$$= -\mu_0(I_1 + I_2)$$



几点注意：

- 环流虽然仅与所围电流有关，但磁场却是所有电流在空间产生磁场的叠加。
- 安培环路定理仅仅适用于恒定电流产生的恒定磁场，恒定电流本身总是闭合的，因此安培环路定理仅仅适用于闭合的载流导线。延伸到无穷远的导线是闭合回路的特例。
- 静电场的高斯定理说明静电场为有源场，环路定理又说明静电场无旋；稳恒磁场的环路定理反映稳恒磁场有旋，高斯定理又反映稳恒磁场无源。

对比：静电场的环路定理

$$\oint_L \vec{E} \cdot \mathbf{d}\vec{l} = 0$$

在静电场中，场强沿任意闭合路径的线积分（称为场强的环流）恒为零。

$$\oint_L \vec{B} \cdot \mathbf{d}\vec{l} = \mu_0 \sum I$$

二、安培环路定理的应用

对称性的应用

(1)分析磁场的**对称性**；

(2)过场点选择适当的路径，使得 $\vec{B}$沿此环路的积分易于计算：$\vec{B}$ 的量值恒定，$\vec{B}$与 $\mathrm{d}\vec{l}$的夹角处处相等；

(3)求出环路积分 $\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l}$

(4)用右手螺旋定则确定所选定的回路包围电流的正负；计算 $\sum I$

(5) 利用安培环路定理 $\oint_L \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \mu_0 \sum I$ 求出磁感应强度B的大小。

例题

- 1、长直圆柱形载流导线内外的磁场
- 2、载流长直螺线管内磁场
- 3、载流长直螺线管外磁场
- 4、载流螺绕环内外的磁场

1. 长直圆柱形载流导线内外的磁场

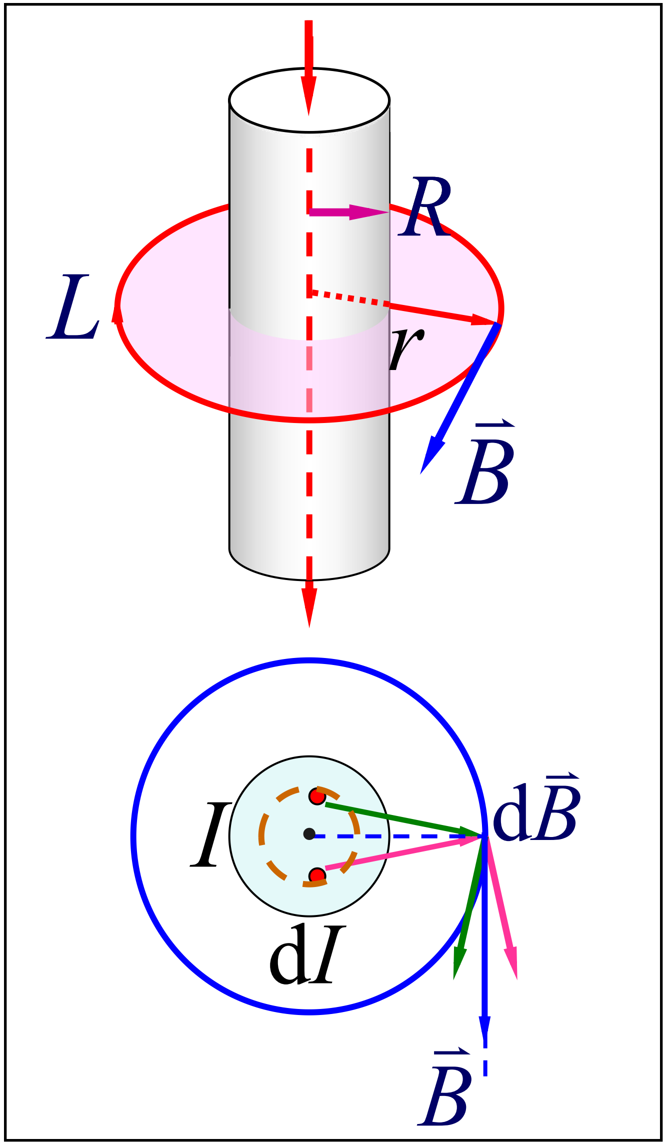
解 1）对称性分析 2）选取回路

$r > R$ $\qquad \oint_l \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \mu_0 I$

$2\pi rB = \mu_0 I \qquad B = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}$

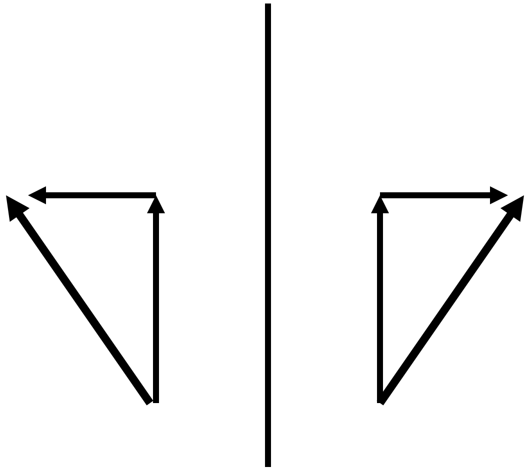
$0 \le r \le R, \qquad \oint_l \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \mu_0 \dfrac{\pi r^2}{\pi R^2} I$

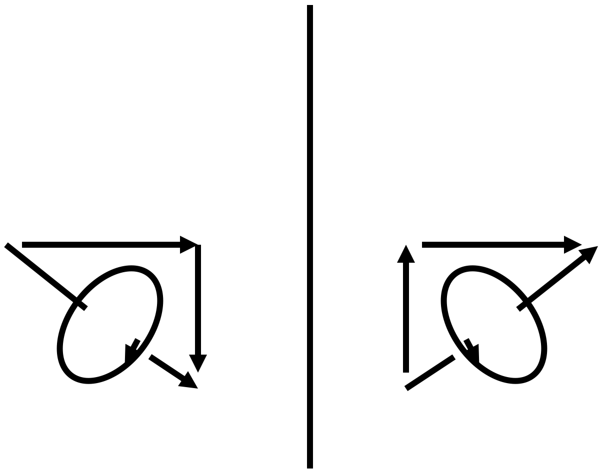
$2\pi rB = \dfrac{\mu_0 r^2}{R^2} I \qquad B = \dfrac{\mu_0 I r}{2\pi R^2}$



物理矢量的镜面反射

极矢量 **轴矢量**





平行于镜面的分量方向相同，

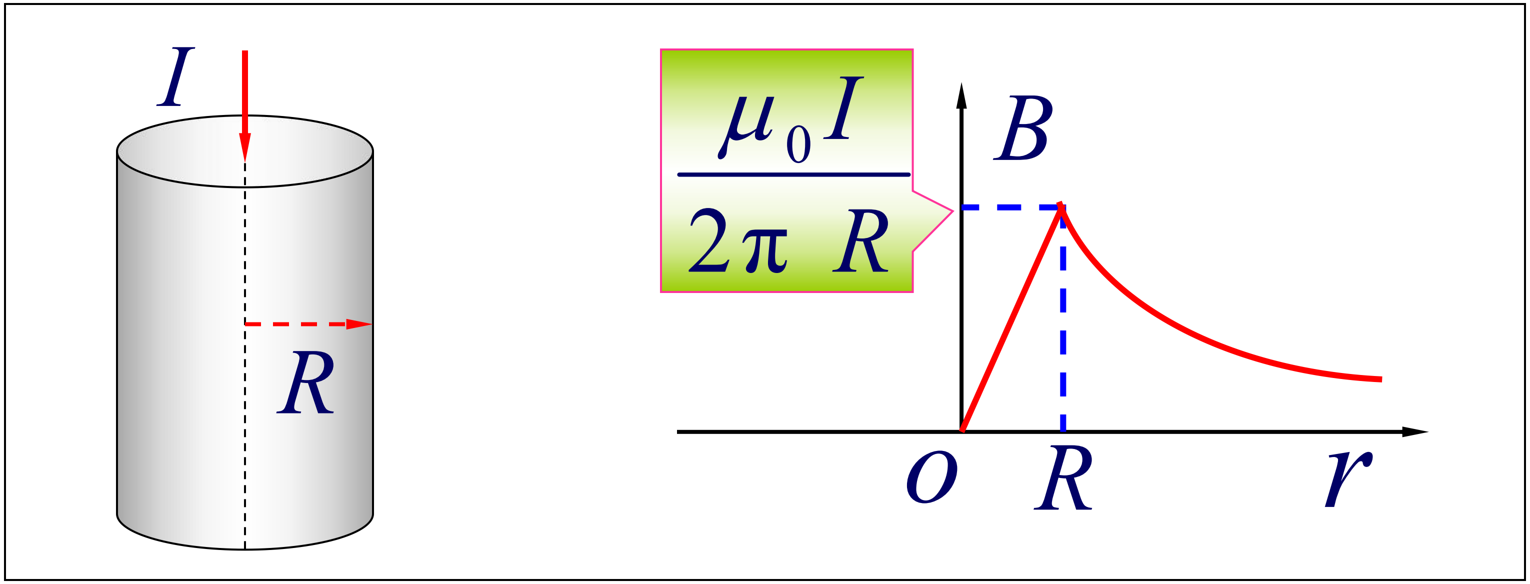
垂直于镜面的分量方向相反。

平行于镜面的分量方向相反，

垂直于镜面的分量方向相同。

$\vec{B}$ 的方向与 I 成右螺旋

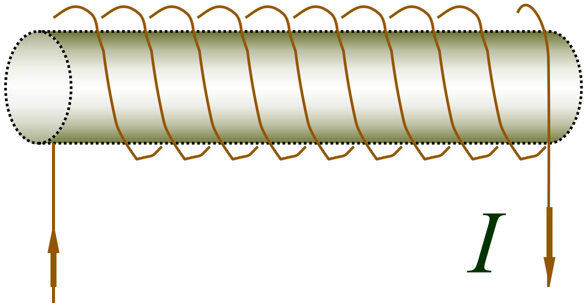
$$\begin{cases} 0 \le r \le R, & B = \dfrac{\mu_0 I r}{2\pi R^2} \\ r > R, & B = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r} \end{cases}$$



2、证明：载流长直螺线管外的磁场为零

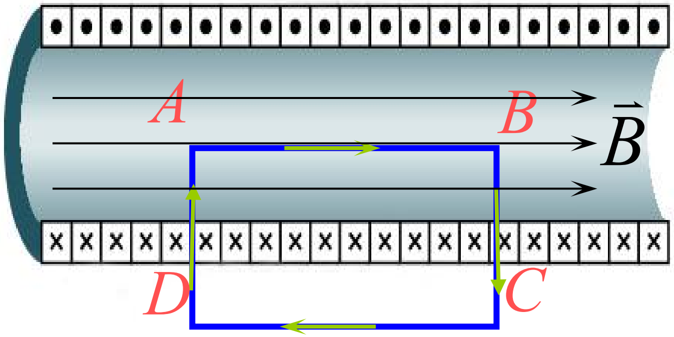
设螺线管每单位长度有线圈n匝。

解 首先进行对称性分析



如图利用安培环路定理

$$\oint_l \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \mu_0 I$$



$$\oint \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \overline{AB}\mu_0 nI$$

$$I \to NI = \overline{AB}n\cdot I$$

$$\oint \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \overline{AB}\mu_0 nI$$

$\vec{B} \perp \mathrm{d}\vec{l}$

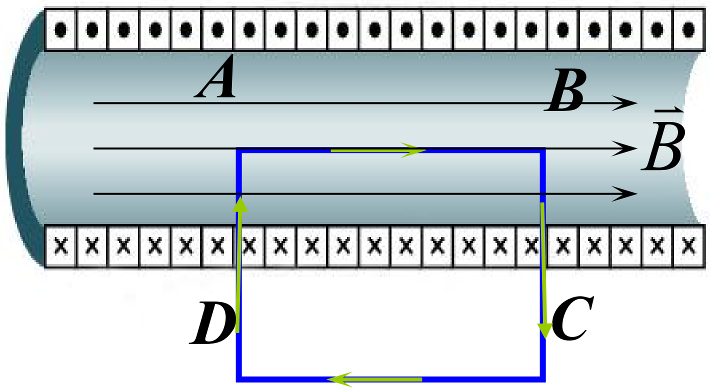
$\vec{B} \perp \mathrm{d}\vec{l}$

$$\oint \vec{B} \cdot \mathbf{d}\vec{l} = \int_{AB} \vec{B} \cdot \mathbf{d}\vec{l} + \int_{BC} \vec{B} \cdot \mathbf{d}\vec{l} + \int_{CD} \vec{B} \cdot \mathbf{d}\vec{l} + \int_{DA} \vec{B} \cdot \mathbf{d}\vec{l}$$

$$= \int_{AB} \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{l} + \int_{CD} \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

$$= B \cdot \overline{AB} + B' \cdot \overline{CD}$$

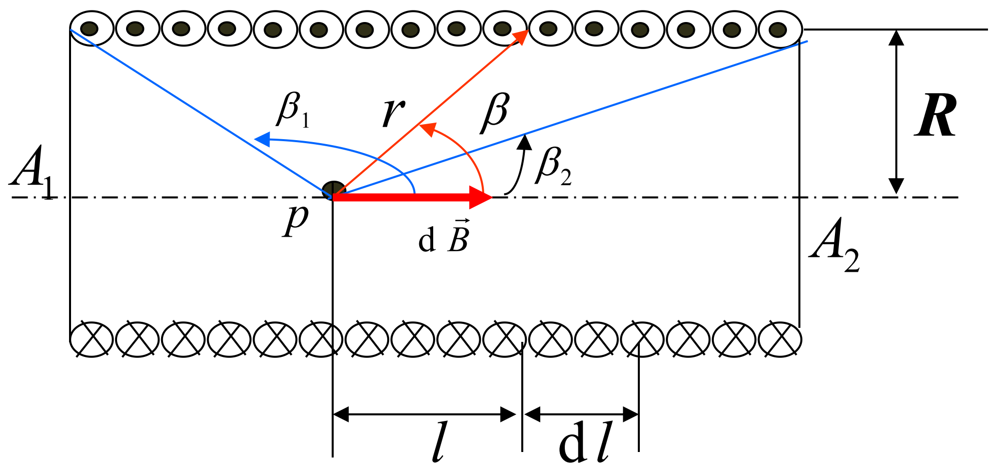
$$\because B = \mu_0 nI \qquad \therefore B' = 0$$



载流长直螺线管外的磁场为零

载流直螺线管中心的磁场

设螺线管的半径为***R***，电流为***I***，每单位长度有线圈***n***匝。



$$B = \frac{\mu_0 nI}{2}(\cos\beta_2 - \cos\beta_1)$$

螺线管无限长

$$\beta_1 \to \pi, \beta_2 \to 0$$

$$B = \mu_0 nI$$

3、载流长直螺线管内磁场处处相等

如图利用安培环路定理

$$\oint \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = 0$$

$\vec{B} \perp \mathrm{d}\vec{l}$

$\vec{B} \perp \mathrm{d}\vec{l}$

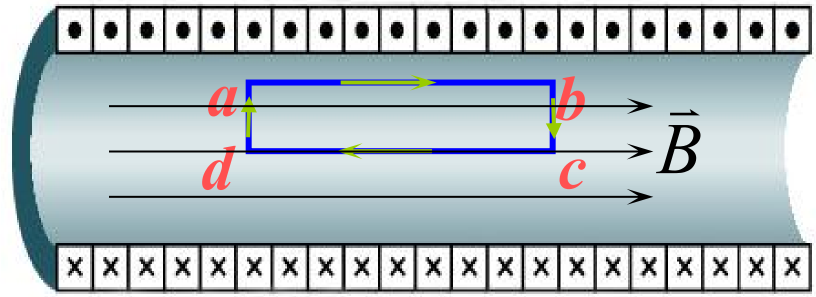
$$\oint \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_{AB} \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{l} + \int_{BC} \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{l} + \int_{CD} \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{l} + \int_{DA} \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

$$= \int_{AB} \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{l} + \int_{CD} \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

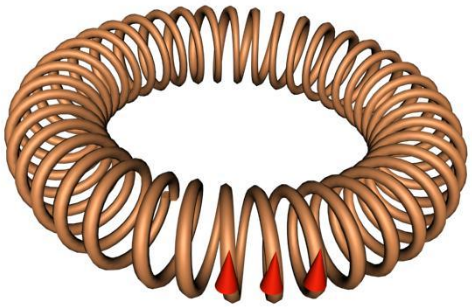
$$= B \cdot \overline{AB} - B' \cdot \overline{CD} = 0$$

$$\because \overline{AB} = \overline{CD}$$

$$\therefore B' = B = \mu_0 n I$$



4、载流螺绕环内的磁场

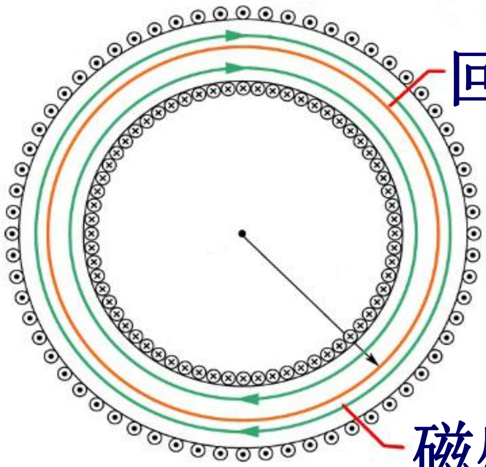


螺线环很细，环的平均半径为***R***，总匝数为***N***，通有电流强度为 ***I***

设螺绕环的半径为$\boldsymbol{R_1}$、$\boldsymbol{R_2}$, 共有N匝线圈。以平均半径***R***作圆为安培回路 ***L***, 得：

$$\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l} = B2\pi R = \mu_o N\cdot I$$

$$B = \mu_o nI \quad R_1 \le R \le R_2 \qquad n = \frac{N}{2\pi R}$$



n 为单位长度上的匝数。

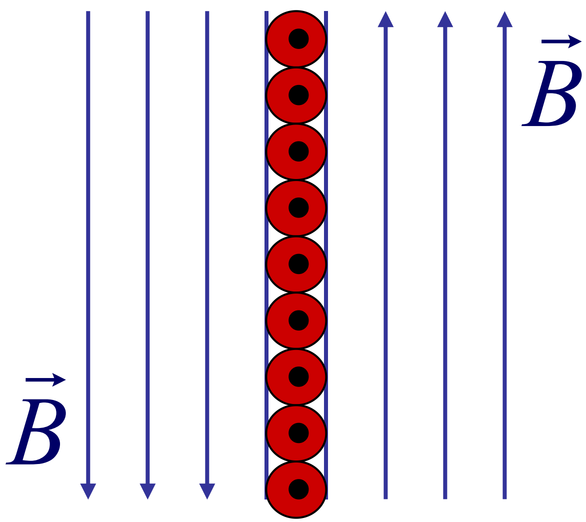
其磁场方向与电流满足右手螺旋。

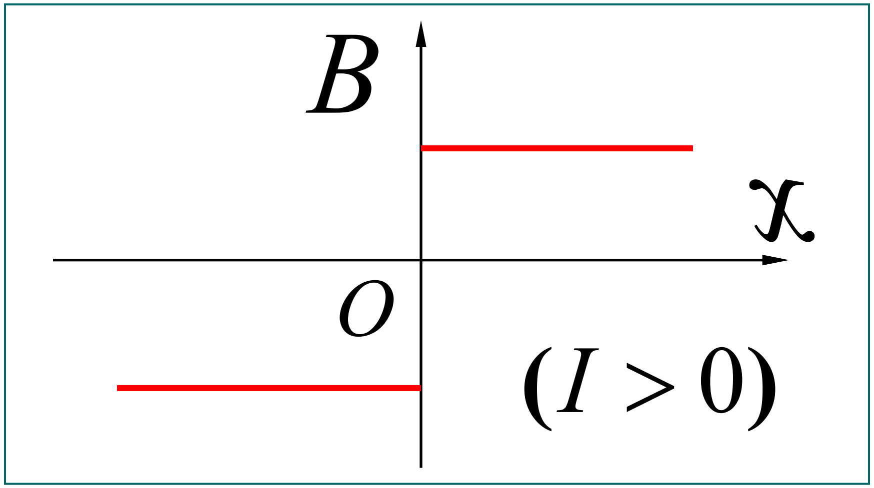
同理可求得 $B = 0, \quad R < R_1$

螺绕环管外磁场为零。

无限大载流平板的磁场分布：对称性分析

$$B = \frac{\mu_0 i}{2}$$





课下作业

- **5.4.2**