暂态过程

1、概 述

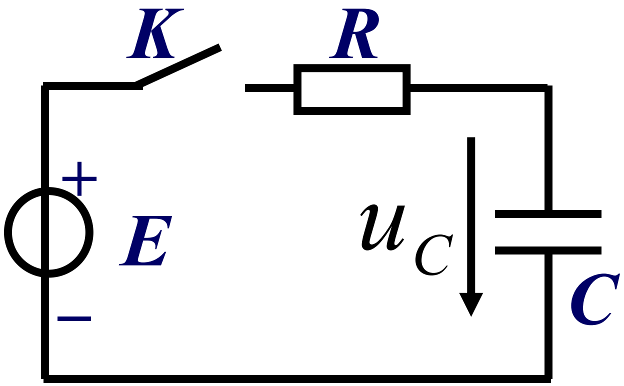
暂态过程：

当电路条件发生变化时电路的状态就会发生变化。当电路中有电容或电感等储能元件存在时，则电路状态的转变就不是突变的，而需要经过一定短暂的时间才能达到稳态——即有一个暂态过程。

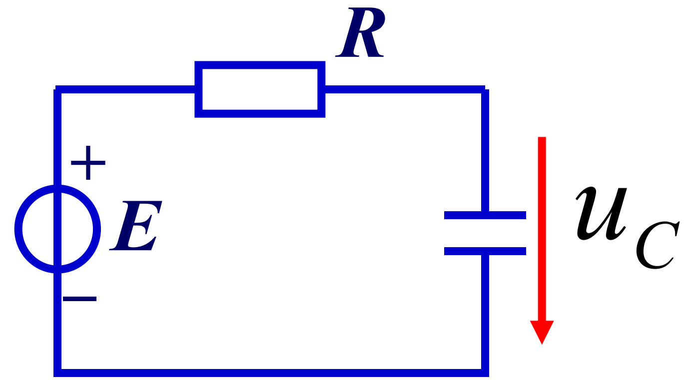
电路条件发生变化：

指电路接入电源、从电源断开、电路参数改变等

"稳态"与"暂态"的概念：



开关K闭合

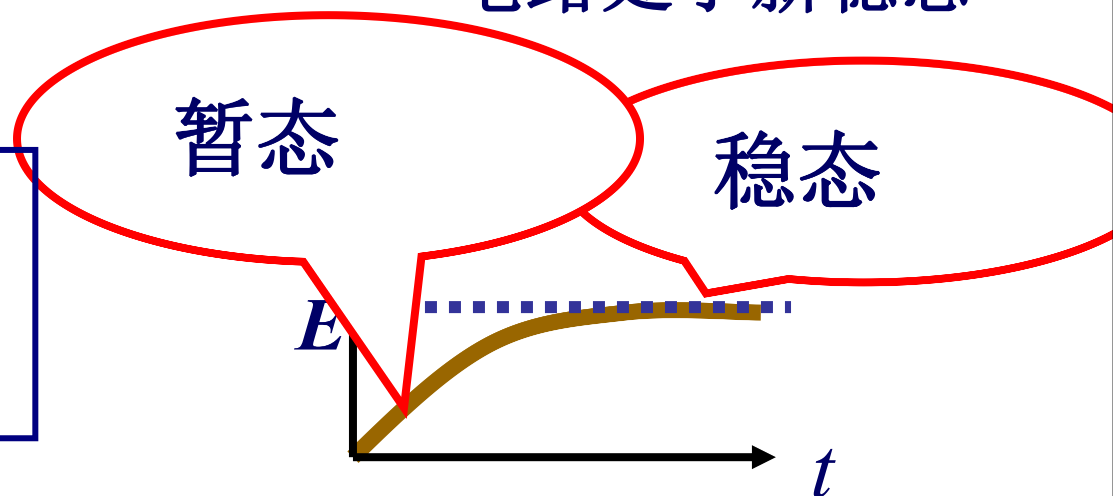


电路处于旧稳态

电路处于新稳态

过渡（暂态）过程：

旧稳态 → 新稳态



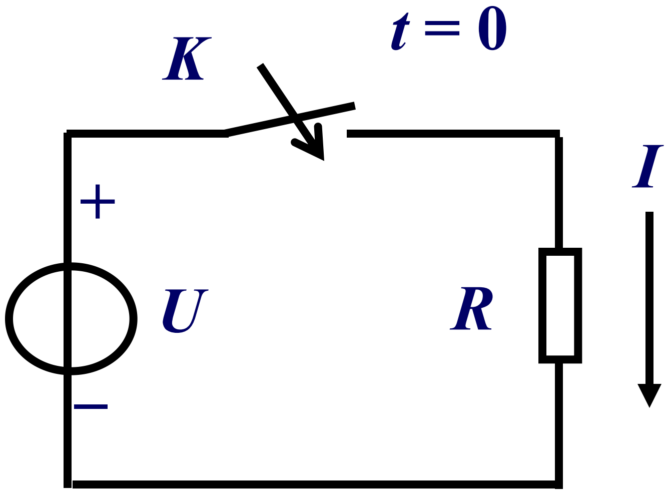
暂态过程的基本假设

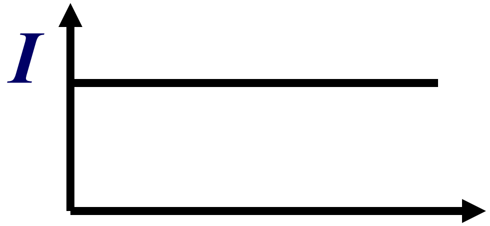
电路的某处联结或元件的参数发生变化瞬间，电容上的电压、电感中的电流不能发生突变。

原因是：自然界物体所具有的能量不能突变，能量的积累或释放需要一定的时间。

暂态过程要涉及许多随时间变化的量，为明确区分它们，分别用小写字母表示随时间变化的量，用大写字母表示不随时间变化的量。

纯电阻电路

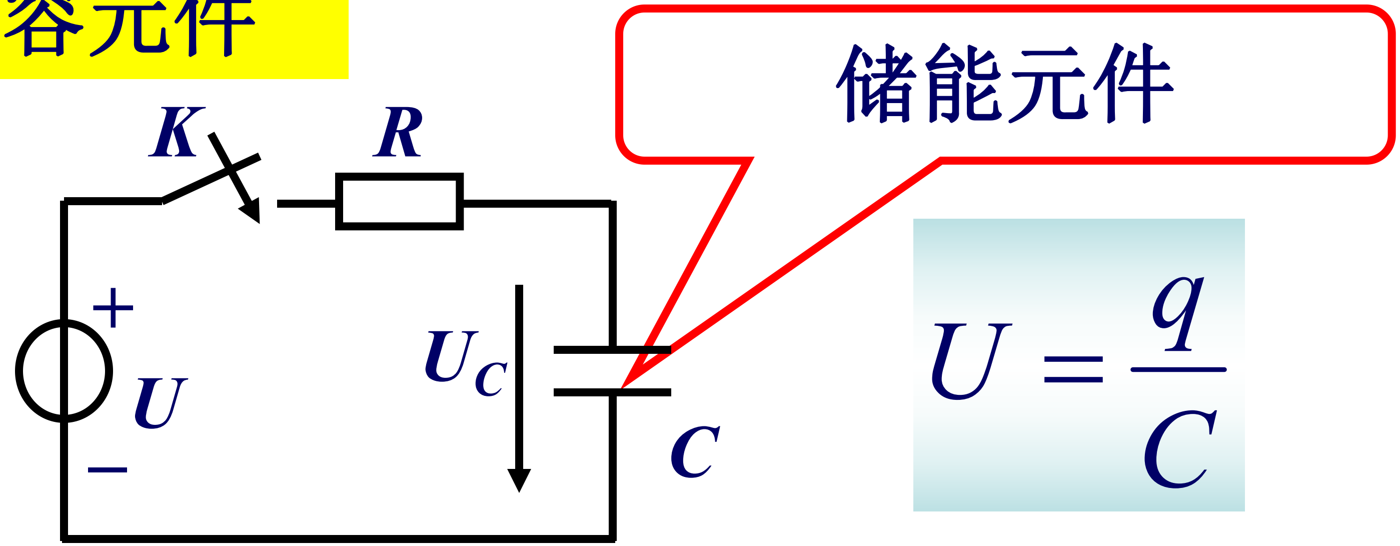




无过渡过程

电阻是耗能元件，其上电流随电压比例变化，不存在过渡过程。

电容元件



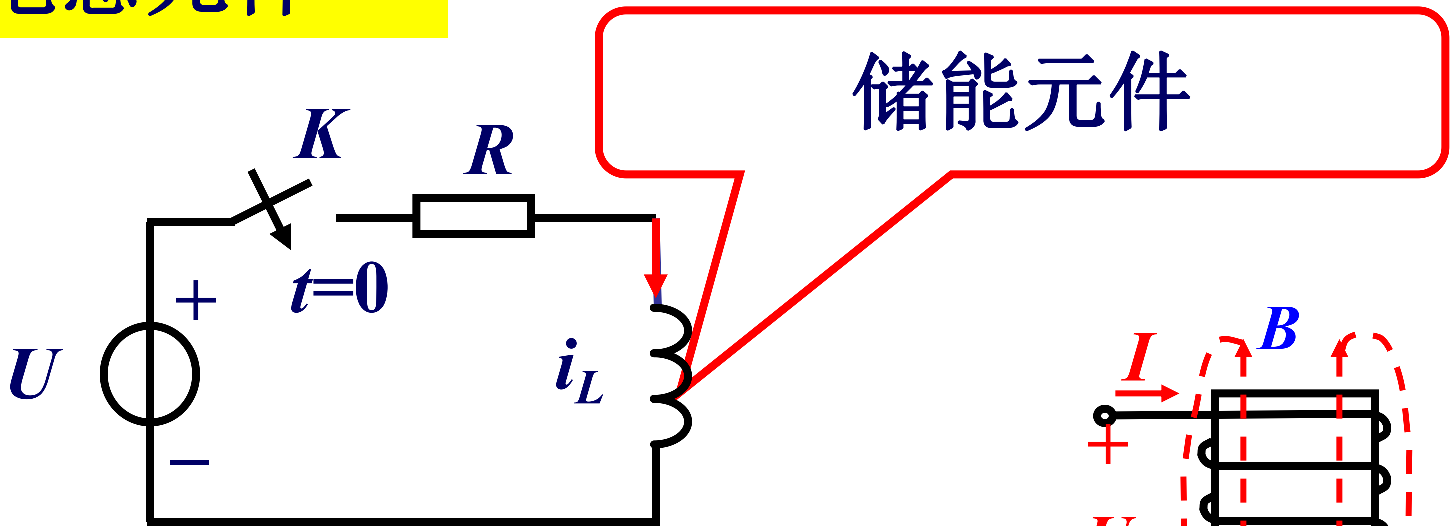
$$U = \frac{q}{C}$$

电容为储能元件，它储存的能量为电场能量，其大小为：

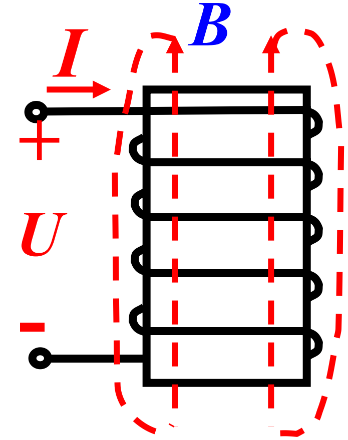
$$W_C = \int_0^t U\,I\,dt = \frac{1}{2} C U^2$$

因为能量的存储和释放需要一个过程，所以有电容的电路存在过渡过程。

电感元件



$$\varepsilon = -L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}$$

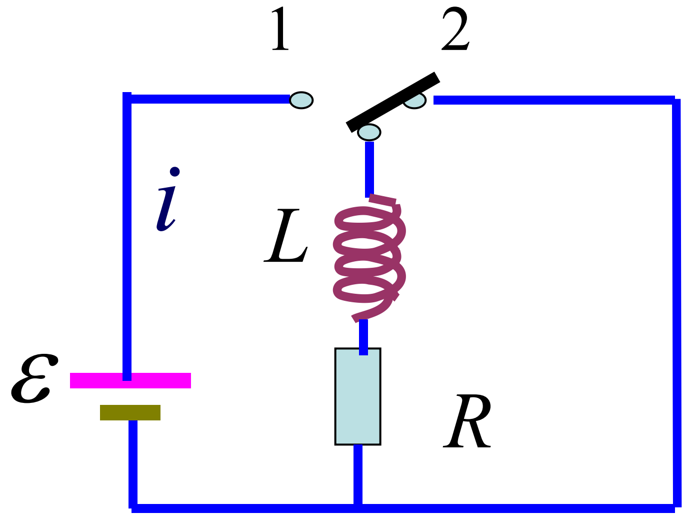


电感为储能元件，它储存的能量为磁场能量，

因为能量的存储和释放需要一个过程，所以有电感的电路存在过渡过程。

2、 RL电路的暂态过程

RL电路与直流电源接通，如图所示，若把开关K拔向1时作为时间的起点（即t=0），我们感兴趣的是这一时刻后，电路中的电流随时间变化的规律，即想求出函数i（t）。

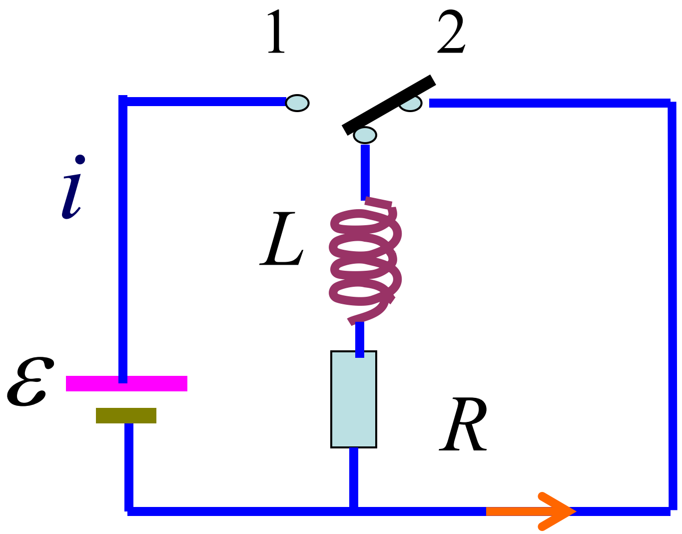


设电源的电动势为 ε，内阻为零，可得:

$$\varepsilon+\varepsilon_L=iR,$$

$$\because\ \varepsilon_L=-L\frac{di}{dt},$$

$$\therefore\ L\frac{di}{dt}+Ri=\varepsilon.$$



这就是电路中变化着的瞬时电流i所满足的方程，可以写成:

$$L\frac{di}{dt}+Ri=\varepsilon$$

$$\frac{di}{i-\frac{\varepsilon}{R}}=-\frac{R}{L}dt,$$

数学推导:

$$L\frac{di}{dt}+Ri=\varepsilon$$

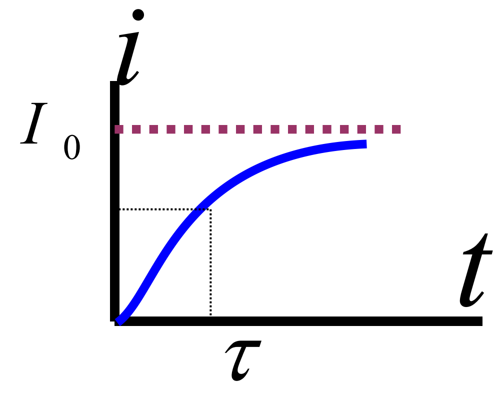
$$\frac{di}{i-\frac{\varepsilon}{R}}=-\frac{R}{L}dt\ ,\quad \ln\left(i-\frac{\varepsilon}{R}\right)=-\frac{R}{L}t+C_1$$

$$i-\frac{\varepsilon}{R}=C_2e^{-\frac{R}{L}t}$$

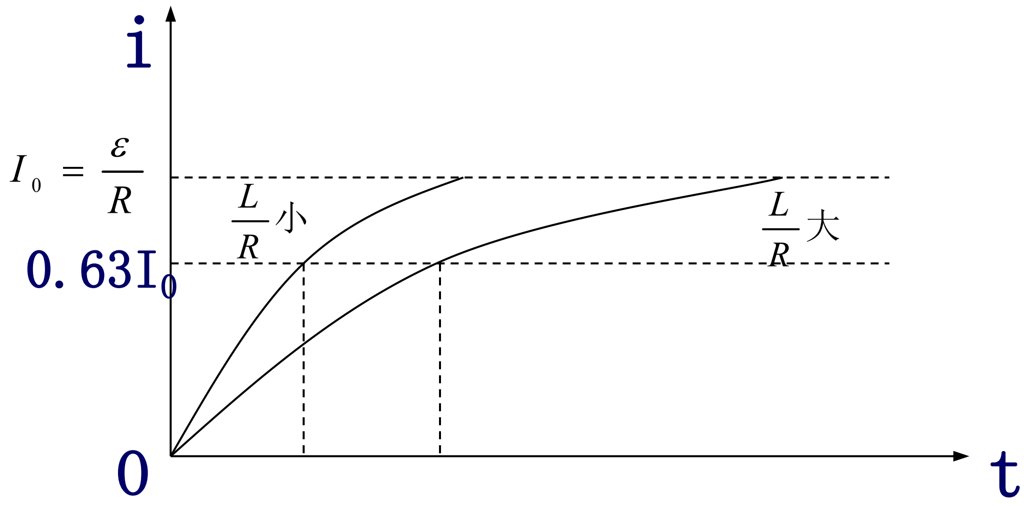
初值条件 $t=0,\ \ i=0,\ \ c_2=-\frac{\varepsilon}{R}$

$$i=\frac{\varepsilon}{R}\left(1-e^{-\frac{R}{L}t}\right)=I_0\left(1-e^{-\frac{R}{L}t}\right)$$

$$i=\frac{\varepsilon}{R}\left(1-e^{-\frac{R}{L}t}\right)=I_0\left(1-e^{-\frac{R}{L}t}\right)$$



根据得到的结果画出$\frac{L}{R}$不同值时电流i随时间t变化的曲线，由图可看出，接通电源后，电流要经过一段指数式上升过程，最后达到稳定值$I_0=\frac{\varepsilon}{R}$比值$\frac{L}{R}$决定了电流i上升的快慢程度，它具有时间的量纲。通常令 $\tau=\frac{L}{R}$ ，称为RL电路的时间常数。

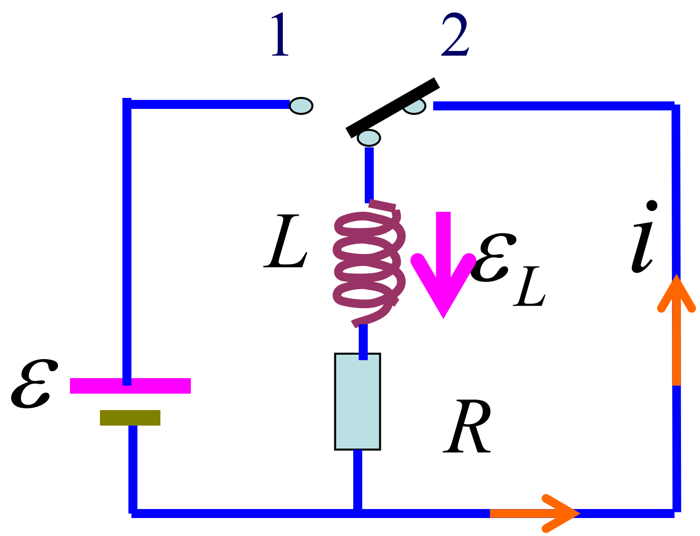


从上式看出，τ 值大（即电路的L大、R小）电流增长慢，达到稳定值时间长；τ 值小（即L小，R大）电流增长快，达到稳定值所需时间短，所以它是标志RL电路中暂态过程持续时间长短的特征量。

$$当\ t=\tau\quad 时\ i=\frac{\varepsilon}{R}\left(1-e^{-1}\right)=\frac{\varepsilon}{R}\left(1-0.37\right)=0.63I_0$$

这就是说，τ 等于电流从零增加到稳定值的63%所需的时间。
当 $t=5\tau$ 时，可算出i=0.994I。，此时i已足够接近I。，
故可认为暂态过程已结束。

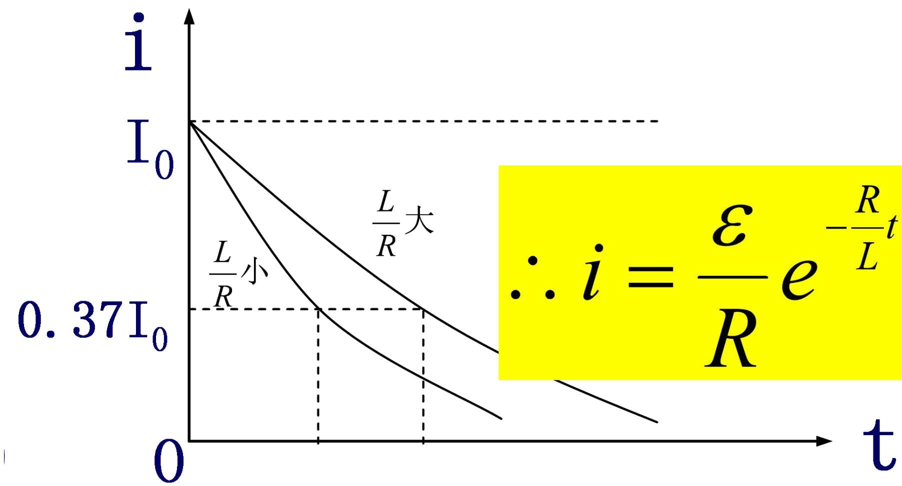
当开关倒向2时，电路的电压从 ε 变到 0



$$-\varepsilon_L + iR = 0$$

$$L\frac{di}{dt} + iR = 0$$

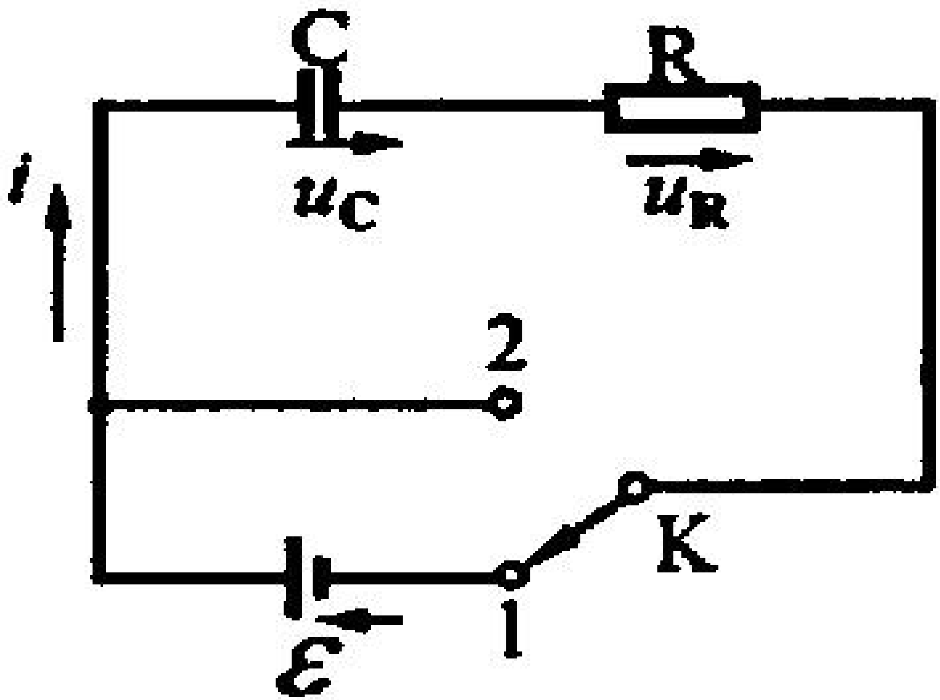
$$i = \frac{\varepsilon}{R}e^{-\frac{R}{L}t}$$



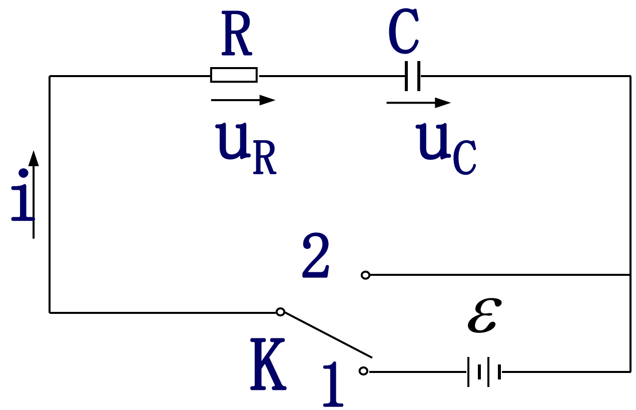
$$\therefore i = \frac{\varepsilon}{R}e^{-\frac{R}{L}t}$$

所以将电源撤去时，电流下降也按指数递减，递减的快慢用同一时间常数 $\tau = \dfrac{L}{R}$ 来表征。

3、 RC电路的暂态过程



如图所示，设原先电容器不带电，
当电键k拔向1时，对电容器充电。



当电键k拔向1时，对电容器充电，瞬时电流为i。这时有如下关系：

$$u_c + iR = \varepsilon, \; i = \frac{dq}{dt}, \; Cu_c = q, \; \therefore i = C\frac{du_c}{dt}, \; \therefore RC\frac{du_c}{dt} + u_c = \varepsilon$$

上式即为 u_c 所满足的方程，可求得其解为：

$$u_c(t) = \varepsilon\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)$$

$\tau = RC$ 的值称为RC电路的时间常数。

下面介绍放电过程：

$$iR + u_c = 0,$$

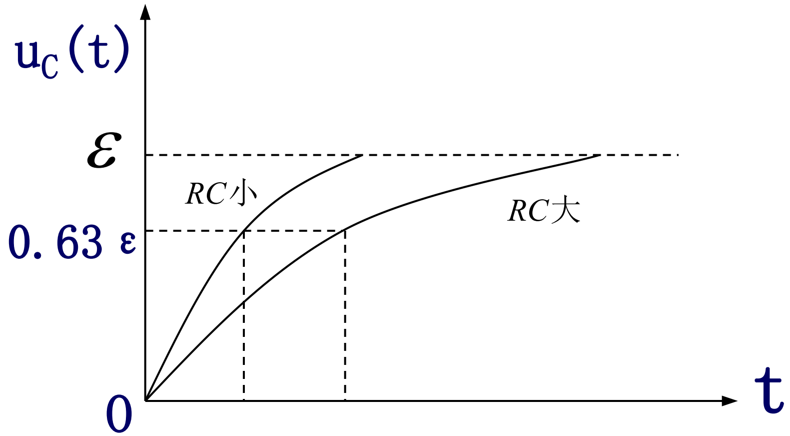
得其一般解为：$u_c(t) = Ae^{-\frac{t}{RC}}$

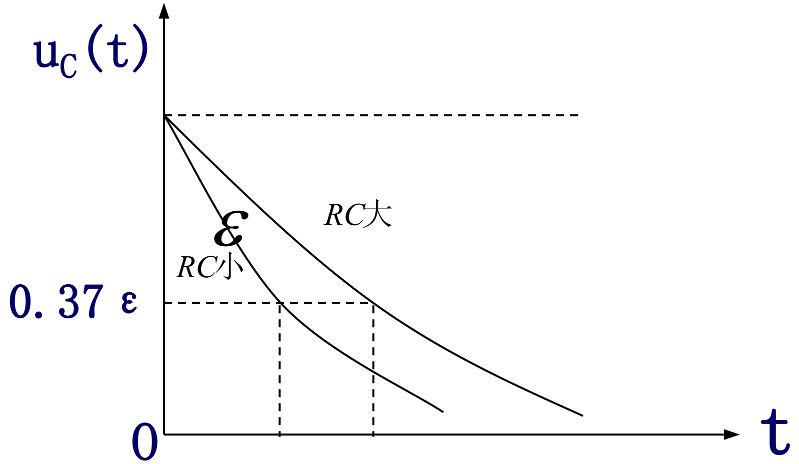
初始条件 $u_c(0) = \varepsilon$ ，

得，

$$A = \varepsilon$$

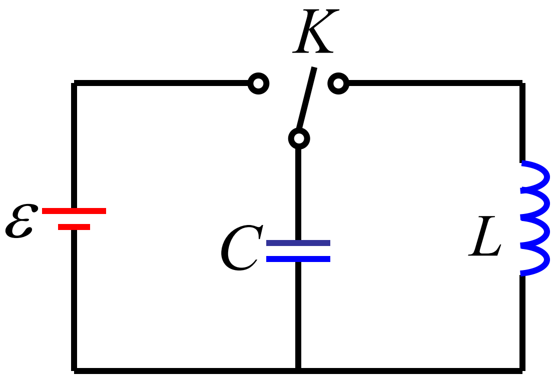
故得解：$\boxed{u_c(t) = \varepsilon e^{-\frac{t}{RC}}}$





4、LC振荡电路的物理和数学分析

电路中电压和电流的周期性变化称为电磁振荡。



*LC*振荡电路

向左合上开关K，使电源给电容器充电，然后将开关K 接通LC 回路，出现电磁振荡效应。

$$L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}+\frac{q}{C}=0$$

设某一时刻电容器极板上电量为q, 电路中电流为i, 取LC 回路的顺时针方向为电流正向，得到

$$L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}+\frac{q}{C}=0, \qquad \mathrm{i}=\frac{\mathrm{d}\,\mathrm{q}}{\mathrm{d}\,\mathrm{t}}$$

$$\Rightarrow \frac{\mathrm{d}^2 q}{\mathrm{d}t^2}=-\frac{1}{LC}q \qquad \Rightarrow q=Q_0\cos(\omega t+\phi_0)$$

$$\omega^2$$

Q_0是电荷振幅，ϕ_0是振荡初相，均由初始条件确定。

LC 回路自由振荡角频率 $\qquad \omega^2=1/LC$

$$\Rightarrow T=2\pi\sqrt{LC}$$

将电量表达式对时间求导，得到电流表达式：

$$i=\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}=-\omega Q_0\sin(\omega t+\phi_0)=I_0\cos(\omega t+\phi_0+\pi/2)$$

其中$I_0=\omega Q_0$为电流振幅。

从前述分析结果可知，电量和电流都作简谐振动。

设t时刻电容器极板上电量为q，相应的电场能量为：

$$W_\mathrm{e}=\frac{q^2}{2C}=\frac{Q_0^2}{2C}\cos^2(\omega t+\phi_0)$$

此刻电流为i，则线圈中的磁场能量为：

$$W_\mathrm{m}=\frac{1}{2}Li^2=\frac{L\omega^2Q_0^2}{2}\sin^2(\omega t+\phi_0)$$

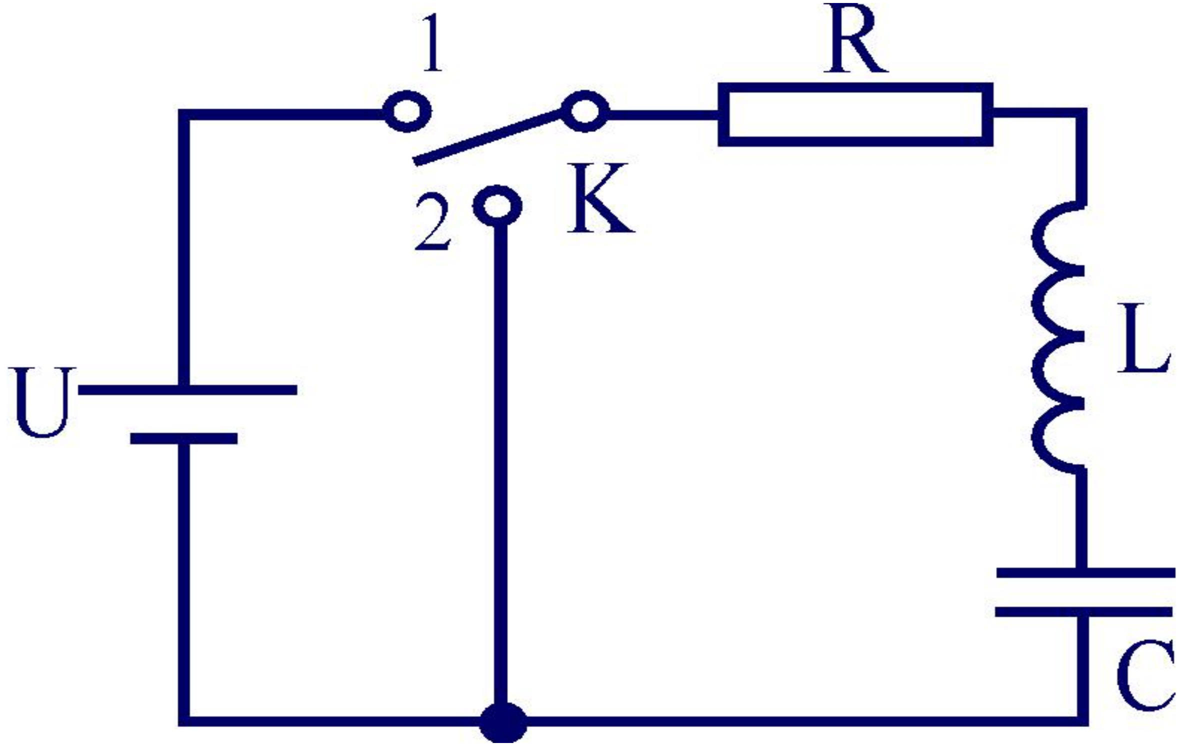
将电场和磁场能量相加，并利用$\omega^2 = 1/LC$，得

$$W = W_{\mathrm{e}} + W_{\mathrm{m}} = \frac{Q_0^2}{2C}$$

上式表明，尽管电能和磁能均随时间变化，但总能量守恒。

5、RLC电路的暂态过程

电路如图所示，与上述**RC**和**LR**电路类似。



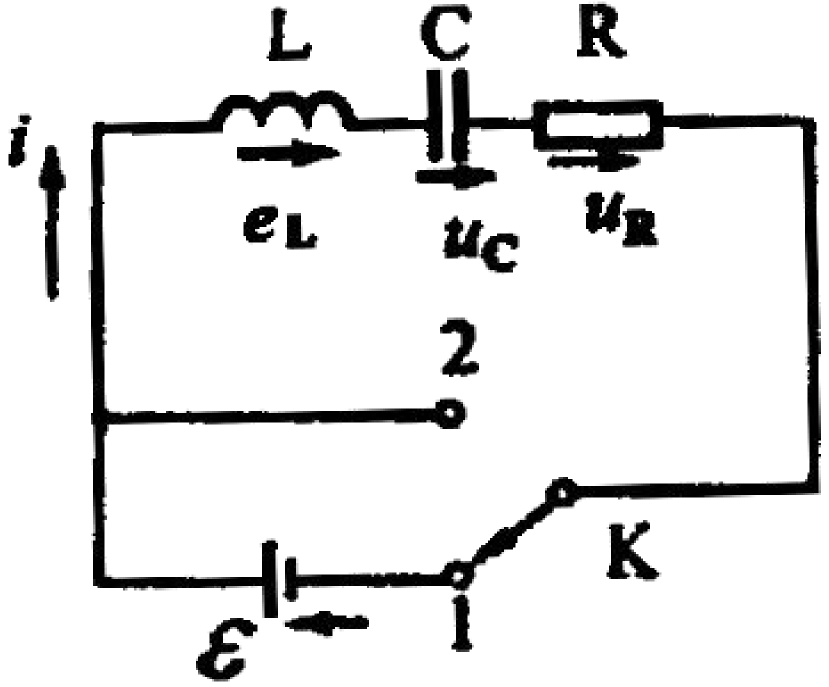
RLC暂态过程的方程式

$$u_R = iR, \quad u_C = \frac{q}{c} \quad u_L = L\frac{di}{dt},$$

$$i = \frac{dq}{dt},$$

$$u_R + u_C + u_L = \begin{cases} \varepsilon \\ 0 \end{cases}$$

$$iR + \frac{q}{c} + L\frac{di}{dt} = \begin{cases} \varepsilon \\ 0 \end{cases}$$



电路的微分方程为：

$$L\frac{di}{dt}+iR+\frac{q}{C}=\begin{cases}\varepsilon\left(K\text{接于 }1\right)\\0\left(K\text{接于 }2\right)\end{cases}$$

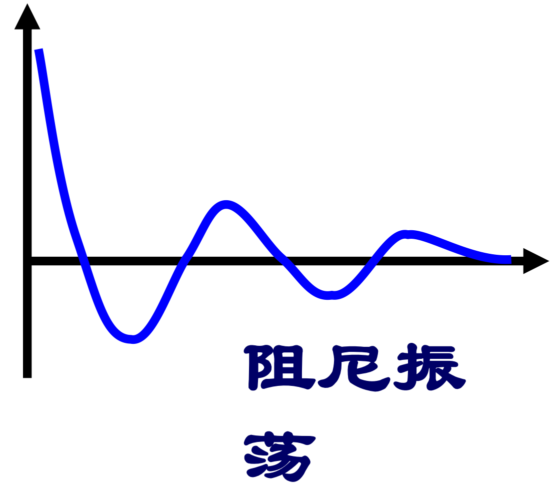
$$i=\frac{dq}{dt}$$

$$\frac{d^2q}{dt^2}+\frac{R}{L}\frac{dq}{dt}+\frac{1}{LC}q=\begin{cases}\dfrac{q_0}{LC}\\0\end{cases}$$

这是二阶线性常系数微分方程，方程式解的形式与阻尼度有密切关系。

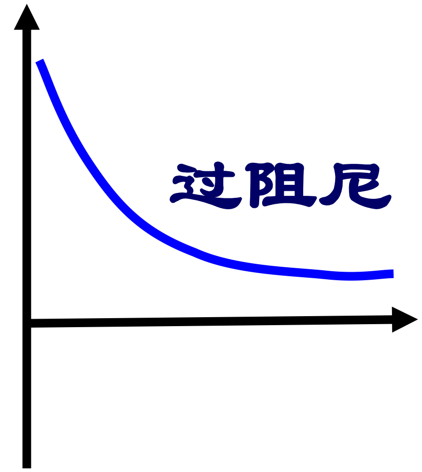
阻尼振荡

每一周期内损失的能量越小，振幅衰减越慢，周期越接近于谐振动。



过阻尼

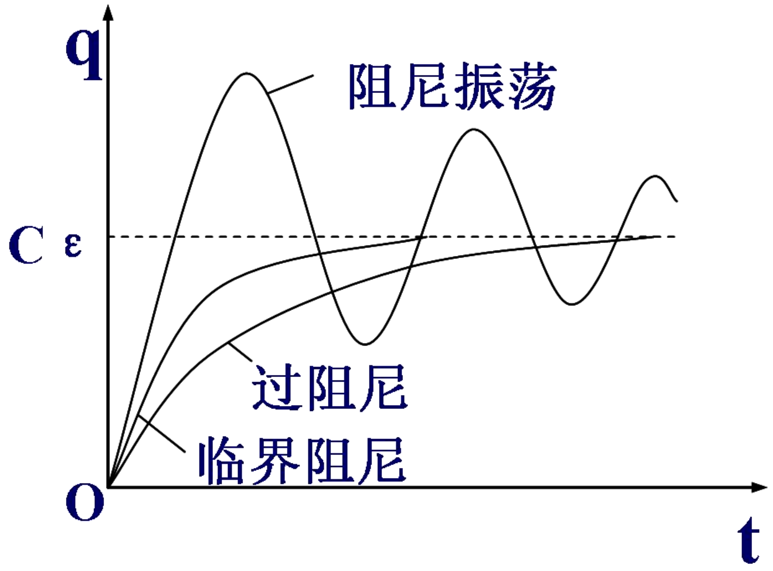
阻尼过大，在未完成一次振动以前，能量就以消耗掉，振动系统将通过非周期运动回到平衡位置

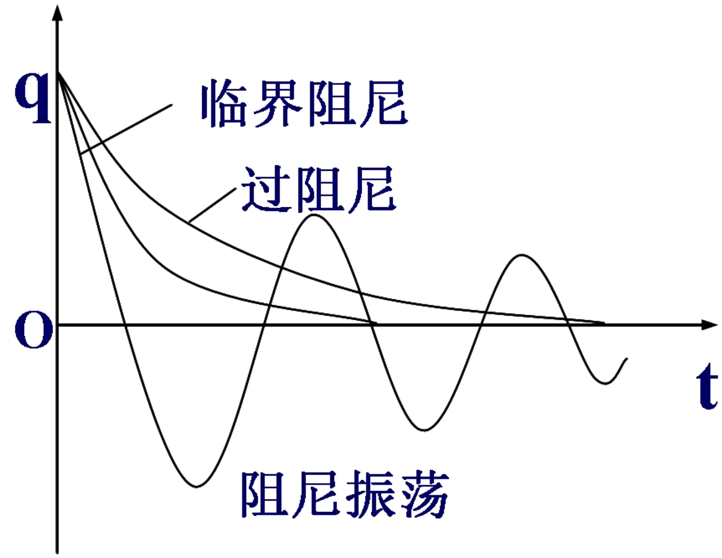


临界阻尼

使系统能以最短时间返回平衡位置，而恰好不作往复运动的阻尼

下图中三条曲线对应三种情形：
分别称为过阻尼、 临界阻尼 和 阻尼振荡。



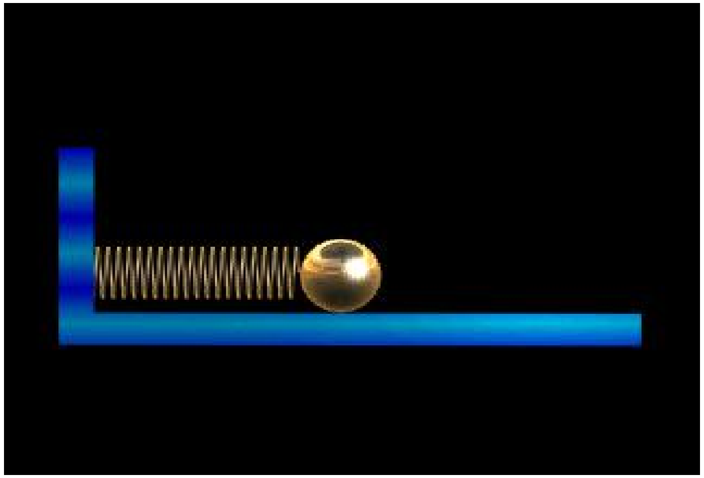


我们知道，电容和电感是储能元件，其中能量的转换是可逆的。而电阻是耗散性元件，其中电能单向地转化为热能。由于阻尼度是与电阻成正比，它的大小反映着电路中能量耗散的情况。

补充： 力电类比

阻尼振动的振动方程：

运动方程：$-kx-\gamma\frac{dx}{dt}=m\frac{d^2x}{dt^2}$



$$\frac{d^2x}{dt^2}+2\beta\frac{dx}{dt}+\omega_0^2x=0$$

$\omega_0=\sqrt{\frac{k}{m}}$ 固有角频率

$\beta=\frac{\gamma}{2m}$ 阻尼因子

鉴于电磁振荡和机械振动的规律类似，应用力电类比可把电磁振荡和机械振动对应起来，具体关系如下表所示：

$$\frac{d^2q}{dt^2}+\frac{R}{L}\frac{dq}{dt}+\frac{1}{LC}q=0$$

$$\frac{d^2\boldsymbol{x}}{dt^2}+2\beta\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}+\omega_0^2\boldsymbol{x}=0$$

机械振动	电磁振荡(串联电路)
位移 x	电荷 q
速度 v	电流 i
质量 m	电感 L
劲度系数 k	电容的倒数 $1/C$
阻力系数 γ	电阻 R
驱动力 F	电动势 ε
弹性势能 $kx^2/2$	电场能量 $q^2/2C$
动能 $mv^2/2$	磁场能量 $Li^2/2$

综上所述，我们在研究暂态过程中要抓住两个要点：

（1）微分方程（新状态决定）；

（2）初始条件（旧状态决定）。

方程反映待求函数在整个暂态过程中所服从的物理规律；初始条件反映待求函数在开关拔动的瞬间所应满足的条件

课下作业

1、6.8.4

2、6.9.7


谢谢