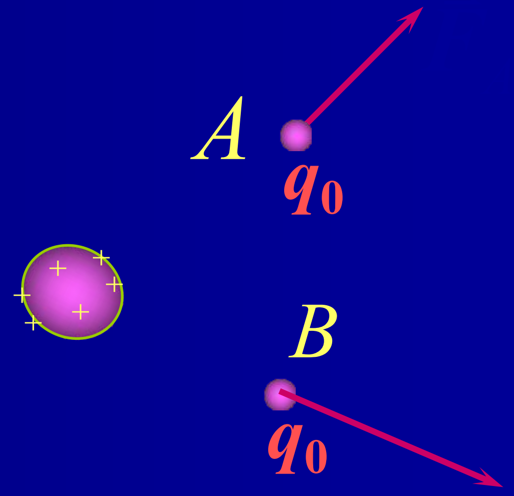
电场强度的计算

描述电场的物理量——电场强度

电场中某点的电场强度等于单位正电荷在该点所受的电场力。

$$\boxed{\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0}}$$



电场强度的计算

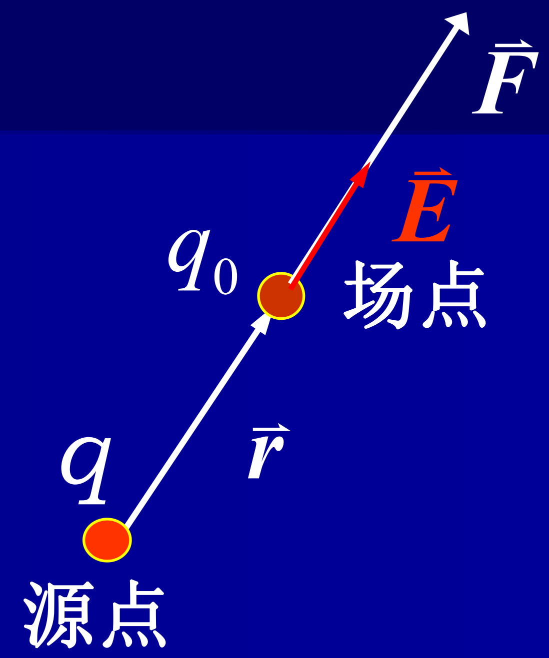
（1）点电荷的电场

（2）场强叠加原理和点电荷系的电场

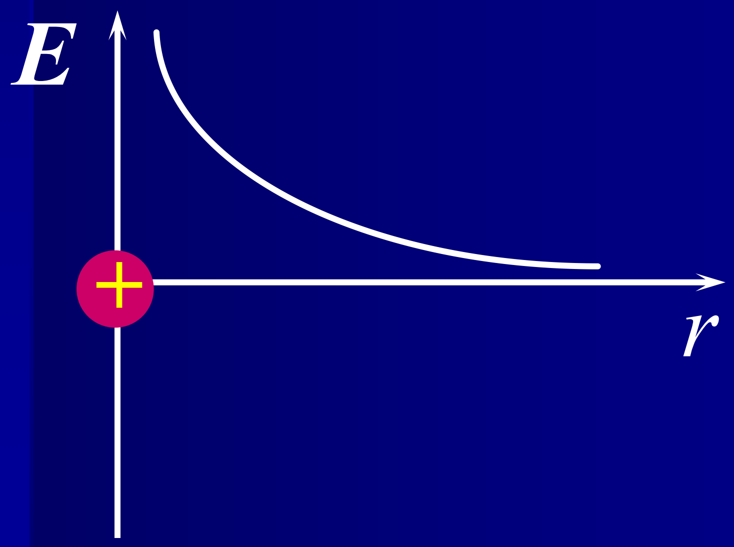
（3）连续分布电荷的电场

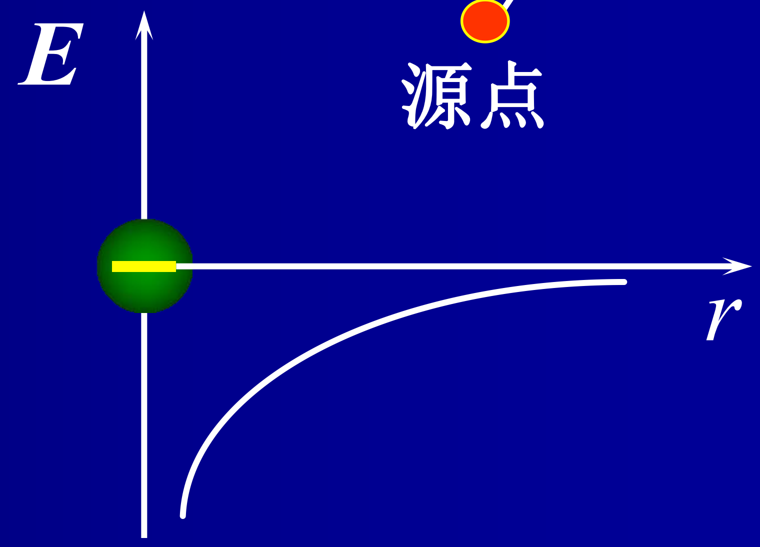
（1）点电荷的电场

$$\vec{F}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_0 q}{r^3}\vec{r},\quad \vec{r}=r\vec{e}_r$$



$$\vec{E}=\frac{\vec{F}}{q_0}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^3}\vec{r}$$





(2)电场强度叠加原理和点电荷系的场强

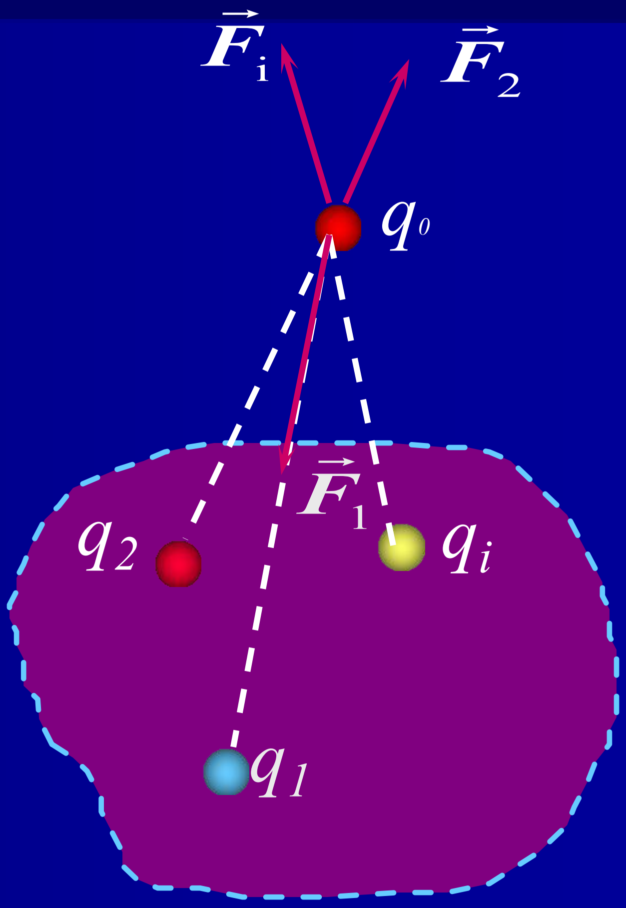
$$\vec{F}=\vec{F}_1+\vec{F}_2+\cdots+\vec{F}_n=\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i$$

$\vec{F}_i$ —— q_i 对 q_0 的作用

$$\vec{E}=\frac{\vec{F}}{q_0}=\frac{\vec{F}_1+\vec{F}_2+\cdots+\vec{F}_n}{q_0}$$

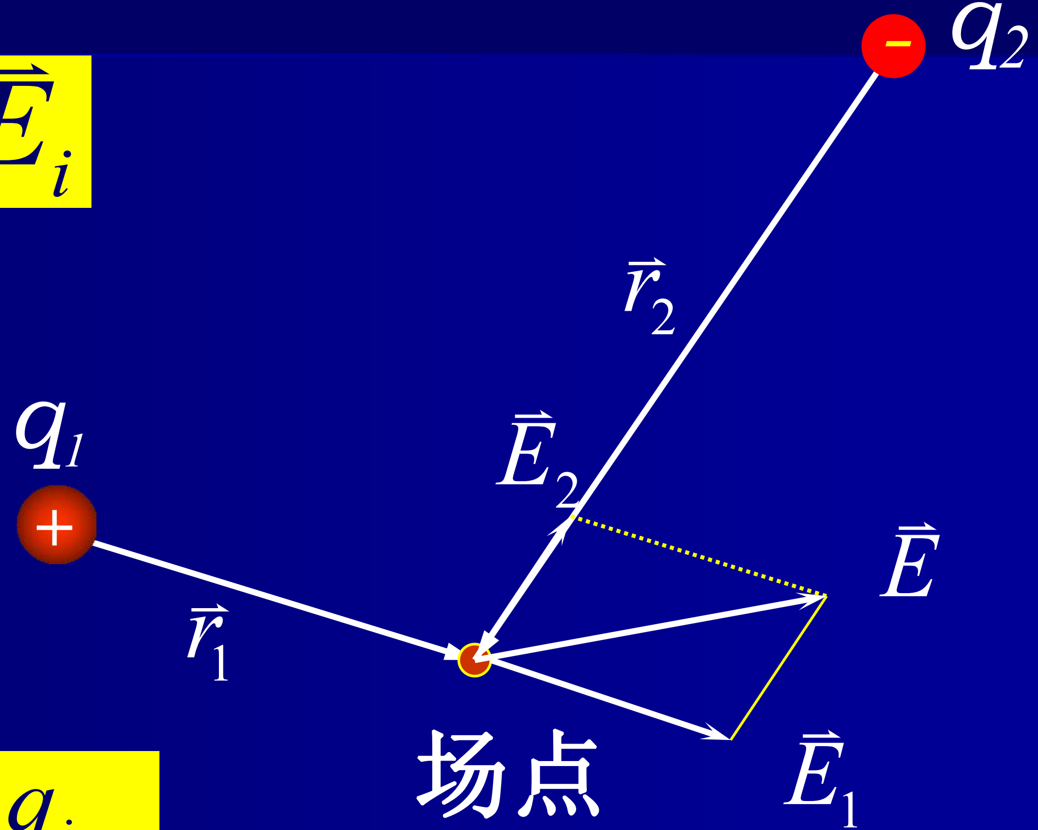
$$=\vec{E}_1+\vec{E}_2+\cdots+\vec{E}_n$$

电场强度叠加原理 $\boxed{\vec{E}=\sum\vec{E}_i}$



点电荷系的电场

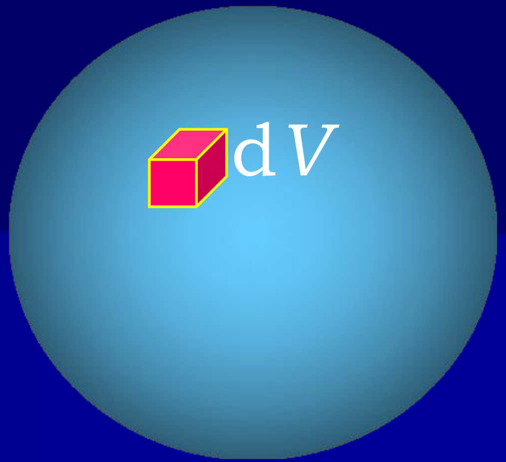
$$\vec{E} = \sum \vec{E}_i$$



$$\vec{E}_i = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_i}{r_i^3} \vec{r}_i$$

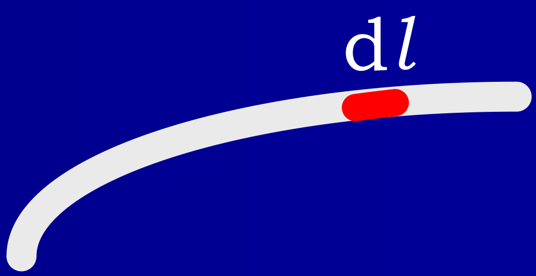
（3）连续带电体的电场：体分布、面分布、线分布

电荷体密度 $\rho=\lim\limits_{\Delta_\tau\to 0}\frac{\Delta q}{\Delta V}$

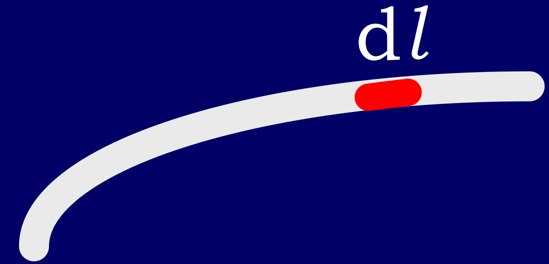


电荷面分密度 $\sigma=\lim\limits_{\Delta_S\to 0}\frac{\Delta q}{\Delta S}$

电荷线分布密度 $\eta=\lim\limits_{\Delta_l\to 0}\frac{\Delta q}{\Delta l}$



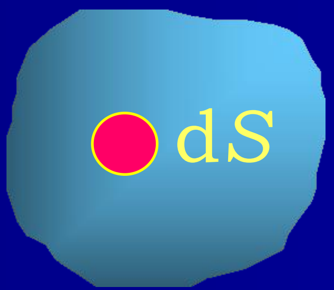
所以，电荷元： $\mathrm{d}q$

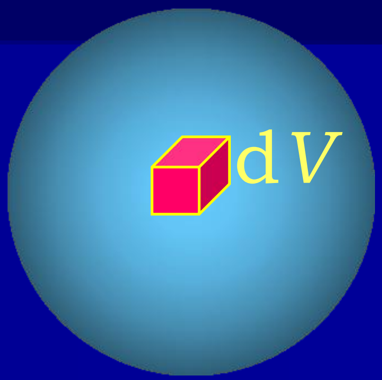


电荷线分布　$\mathrm{d}q = \eta \mathrm{d}l$

电荷面分布　$\mathrm{d}q = \sigma \mathrm{d}S$

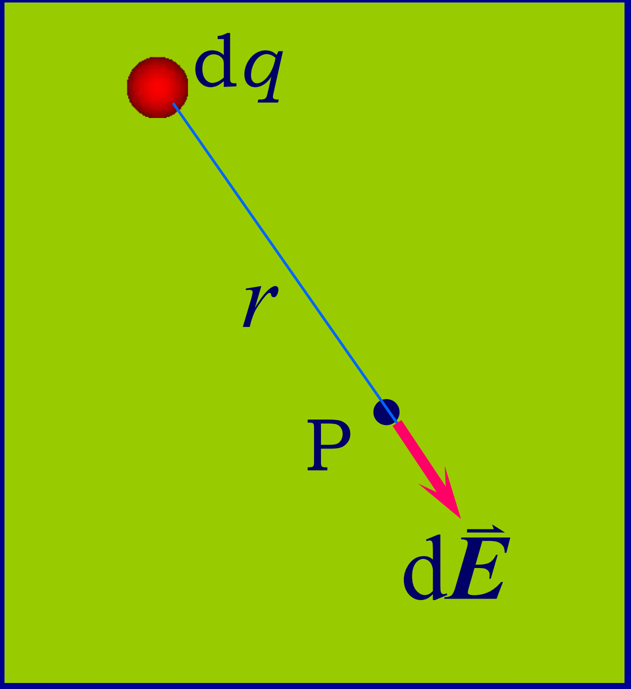
电荷体分布　$\mathrm{d}q = \rho \mathrm{d}V$





$$\boxed{\mathrm{d}\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathrm{d}q}{r^3}\vec{r}}$$

计算时将上式在坐标系中进行分解，再对坐标分量积分。



•线电荷分布的带电体的电场

$$\vec{E} = \int_l \frac{\eta dl}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\vec{r}$$

•面电荷分布的带电体的电场

•体电荷分布的带电体的电场

计算时将上式在坐标系中进行分解，再对坐标分量积分，即先分后和：

$$E_x = \int dE_x, \quad E_y = \int dE_y$$

解题思路及步骤：

关键是得到电荷元的微分形式，即dq

注意使用对称性

1、确定电荷密度；

2、建立坐标系；

3、求电荷元电量dq；

4、根据库仑定律确定电荷元的电场强度dE；

5、确定dE在坐标系中分量形式；

6、积分求场强分量；

7、求总场的大小和方向

例1. 求电偶极子中垂面上的电场。

解：

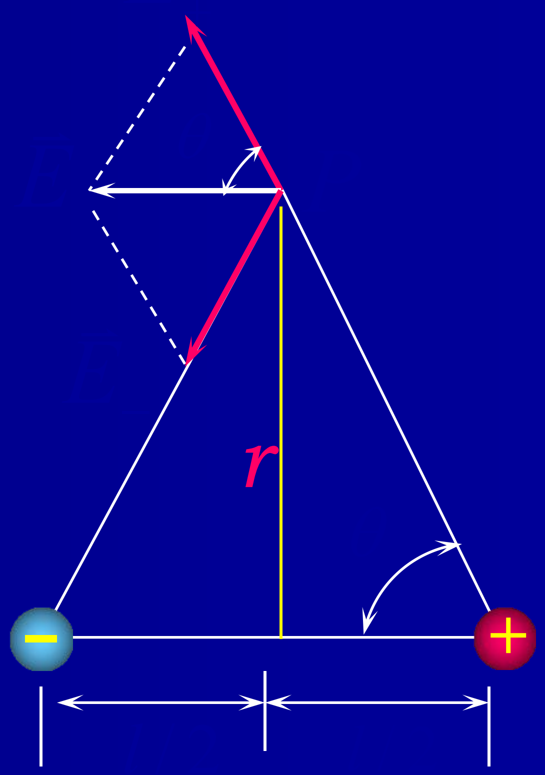
$$E_- = E_+ = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{[r^2 + (\frac{l}{2})^2]}$$

$$E = 2E_+ \cos\theta$$

$$= 2\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{[r^2 + (\frac{l}{2})^2]}$$

$$\times \frac{\frac{l}{2}}{[r^2 + (\frac{l}{2})^2]^{1/2}}$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{ql}{(r^2 + l^2/4)^{3/2}}$$

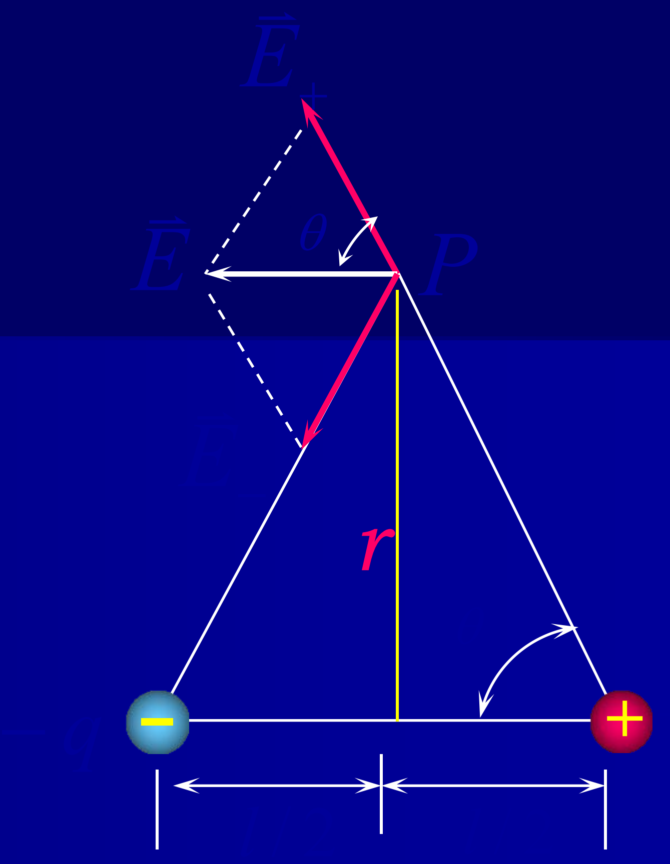


用矢量形式表示为：

$$\vec{E} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{P}}{(\mathbf{r}^2+\mathbf{l}^2/4)^{3/2}}$$

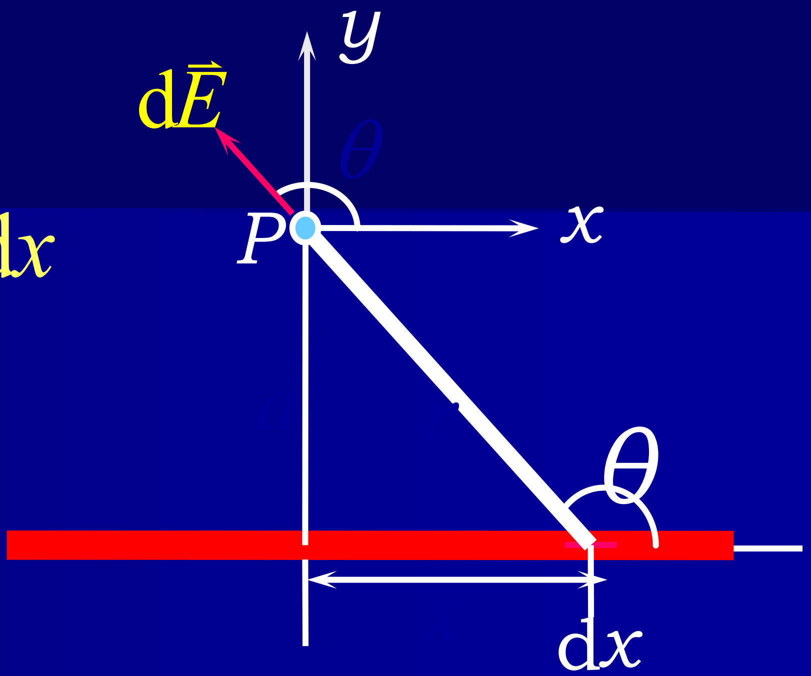
若 $r >> l$ $\quad \boxed{\vec{E} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{P}}{r^3}}$

电偶极矩（电矩） $\vec{P} = q\vec{l}$



例2. 求一均匀带电直线周围的电场

解：建立直角坐标系



取线元 $\mathrm{d}x$ 带电 $\mathrm{d}q = \lambda \mathrm{d}x$

$$\mathrm{d}E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\lambda \mathrm{d}x}{r^2}$$

将 $\mathrm{d}\vec{E}$ 投影到坐标轴上

$$\mathrm{d}E_x = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\lambda \mathrm{d}x}{r^2} \cos\theta$$

$$\mathrm{d}E_y = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\lambda \mathrm{d}x}{r^2} \sin\theta$$

$$E_x = \int \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\lambda}{r^2} \cos\theta \mathrm{d}x$$

$$E_y = \int \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\lambda}{r^2} \sin\theta \mathrm{d}x$$

积分变量代换

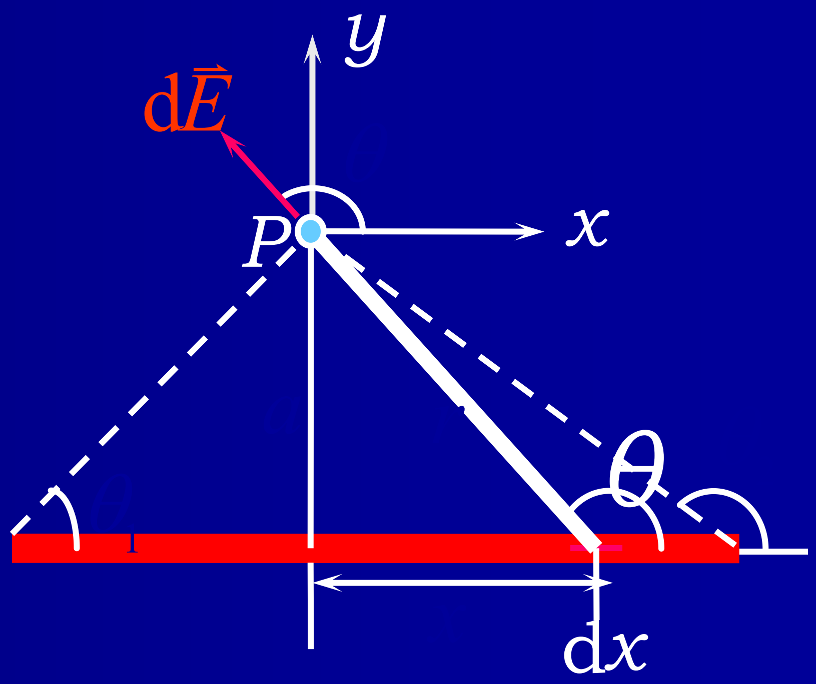
$$E_x = \int \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda}{r^2}\cos\theta \mathrm{d}x$$

$$r = a/\sin\theta = a\csc\theta$$

$$\boxed{x = -a \times ctg\,\theta}$$

$$dx = ad\theta/\sin^2\theta$$

$$= a\csc^2\theta d\theta$$



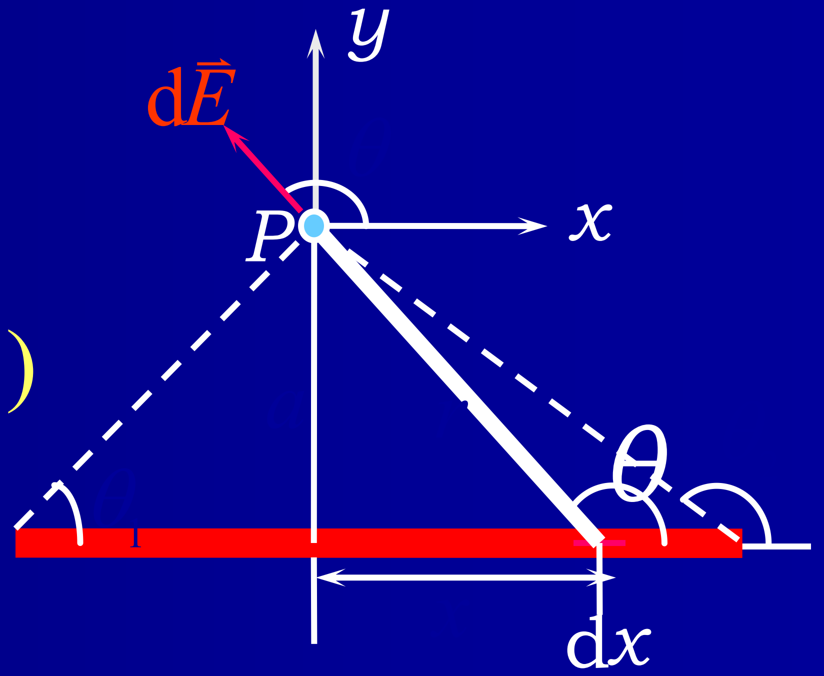
代入积分表达式

$$E_x = \int \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda}{r^2}\cos\theta \mathrm{d}x = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\frac{\cos\theta}{a^2\csc^2\theta}a\csc^2\theta d\theta$$

$$E_x = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\frac{\cos\theta}{a^2\csc^2\theta}a\csc^2\theta\mathrm{d}\theta$$

$$= \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 a}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\cos\theta\mathrm{d}\theta$$

$$= \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 a}(\sin\theta_2 - \sin\theta_1)$$



同理可算出 $E_y = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 a}(\cos\theta_1 - \cos\theta_2)$

$$E_x = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 a}(\sin\theta_2 - \sin\theta_1)$$

$$E_y = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 a}(\cos\theta_1 - \cos\theta_2)$$

均匀带电直线的总场强：

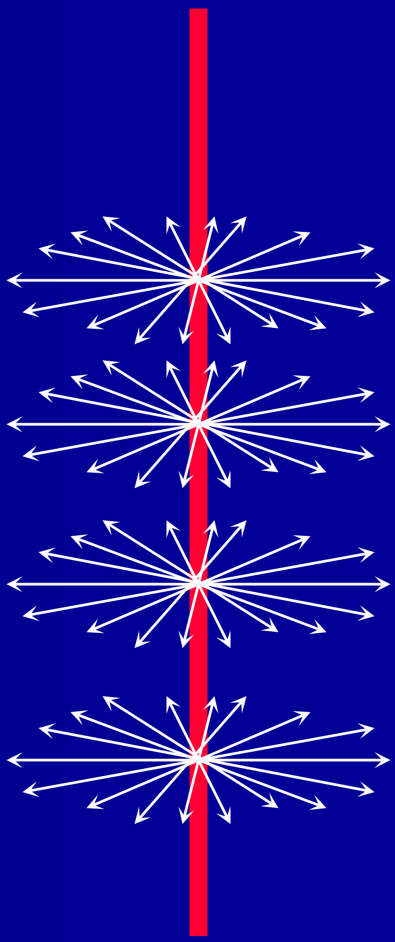
$$\boxed{E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 a}\sqrt{\frac{1}{2}(1 - \cos(\theta_1 - \theta_2))}}$$

极限情况，

当直线长度 $L \to \infty$ ⇒ $\begin{cases} \theta_1 \to 0 \\ \theta_2 \to \pi \end{cases}$

$$E_x = 0$$

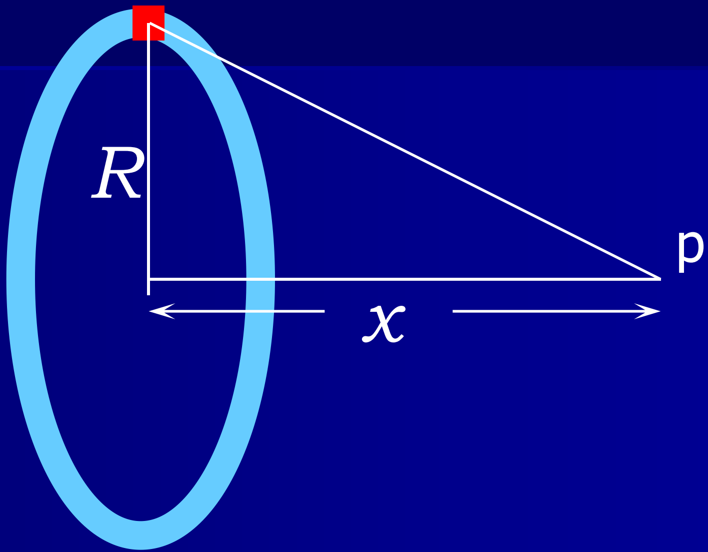
$$E_y = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 a} \times 2 = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 a}$$



记住：无限长均匀带电直线的场强

$$\boxed{E = E_y = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 a}}$$

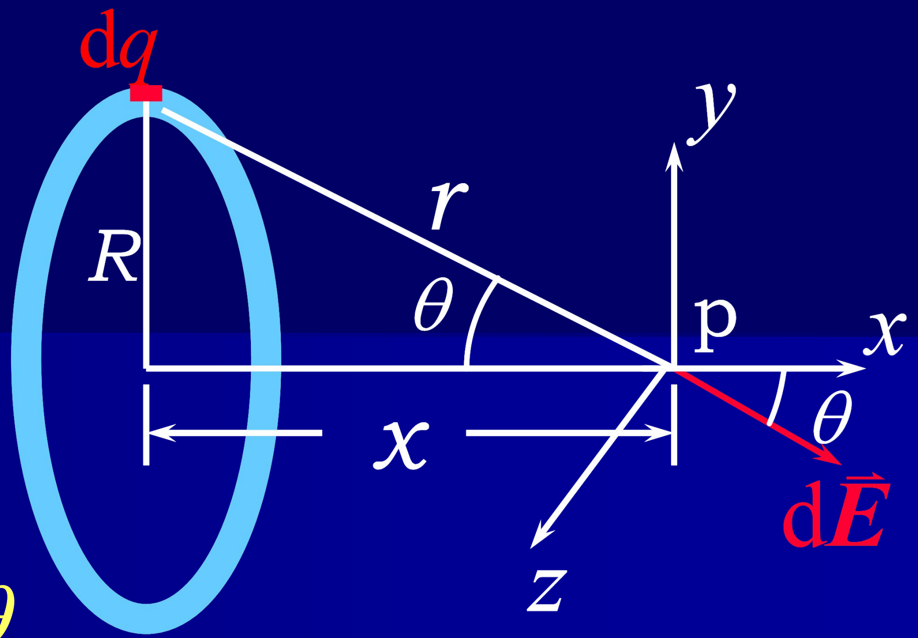
例3 半径为R的均匀带电圆环总电量为q，求轴线上任一点*x*处的电场。（课堂练习）



解：$\mathrm{d}E = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{\mathrm{d}q}{r^2}$

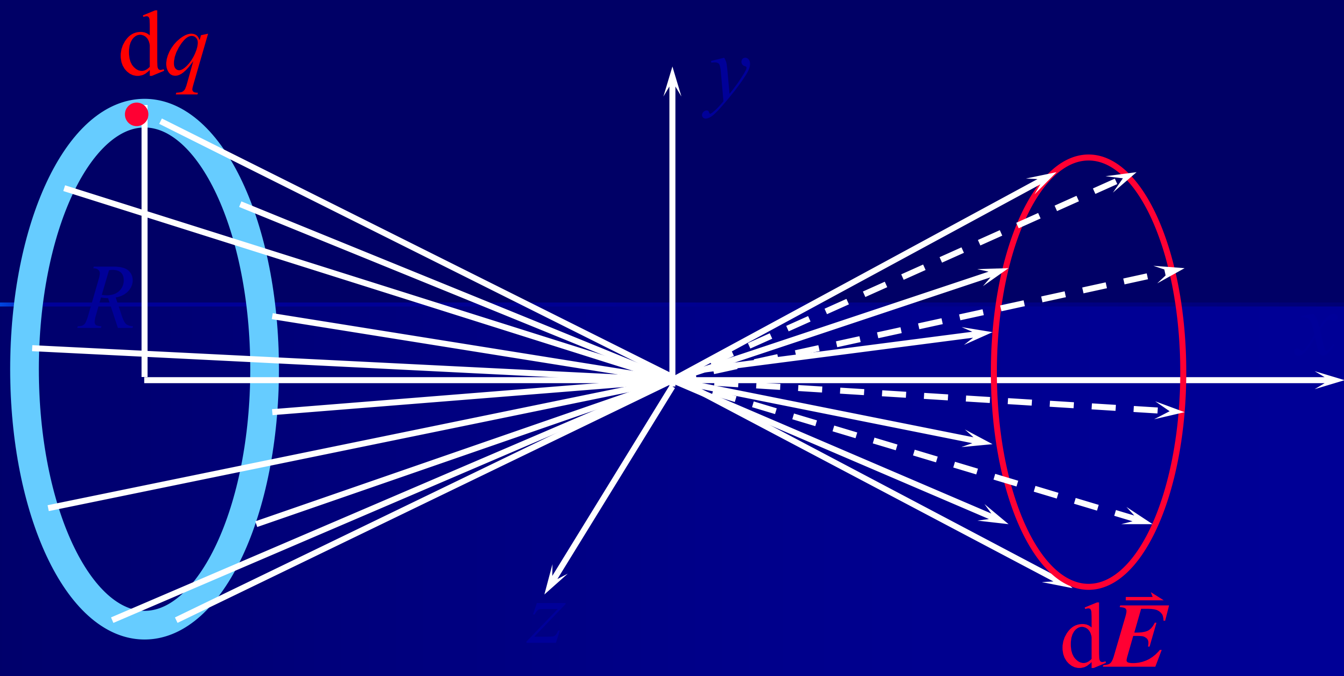
由对称性 $E_y = E_z = 0$

$$E = E_x = \int \mathrm{d}E \cdot \cos\theta$$



$$= \int \frac{\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\mathrm{d}q = \frac{q\,\mathbf{cos}\,\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

$$= \frac{qx/r}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{qx}{4\pi\varepsilon_0 r^3} = \frac{qx}{4\pi\varepsilon_0 (R^2 + x^2)^{3/2}}$$



当dq 位置发生变化时，它所激发的电场 d$\vec{E}$ 矢量构成了一个圆锥面。

所以，由对称性 $E_y = E_z = 0$

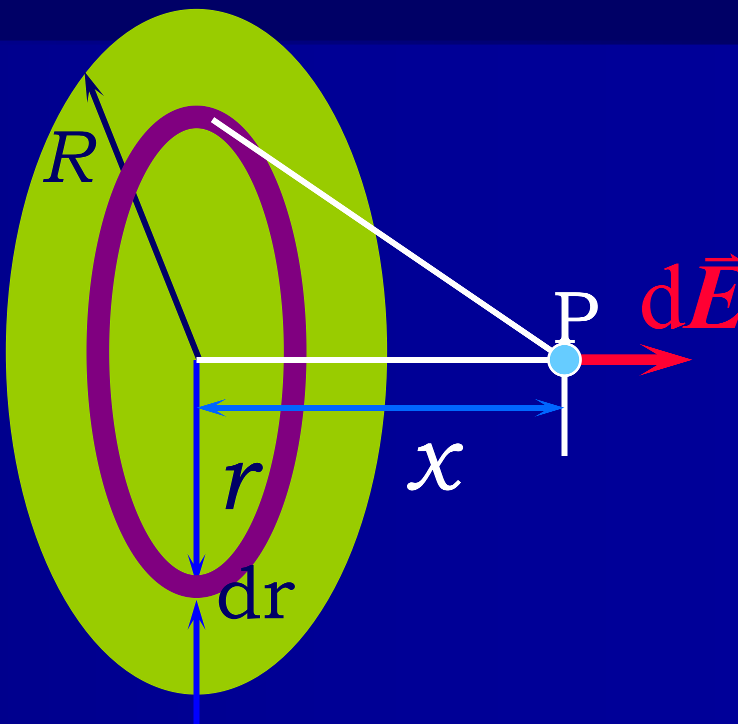
例4 求均匀带电圆盘轴线上任一点的电场。

解：由例3均匀带电圆环轴线上一点的电场

$$E=\frac{xq}{4\pi\varepsilon_0(R^2+x^2)^{3/2}}$$

$$\mathrm{d}E=\frac{x\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0(r^2+x^2)^{3/2}}$$

$$=\frac{x\sigma\cdot 2\pi r\mathrm{d}r}{4\pi\varepsilon_0(r^2+x^2)^{3/2}}$$



$$E=\frac{2\pi\sigma x}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^R\frac{r\mathrm{d}r}{(r^2+x^2)^{3/2}}=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[1-\frac{x}{(R^2+x^2)^{1/2}}\right]$$

$$E=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[1-\frac{x}{(R^2+x^2)^{1/2}}\right]$$

讨论：

1. 当 $R >> x$

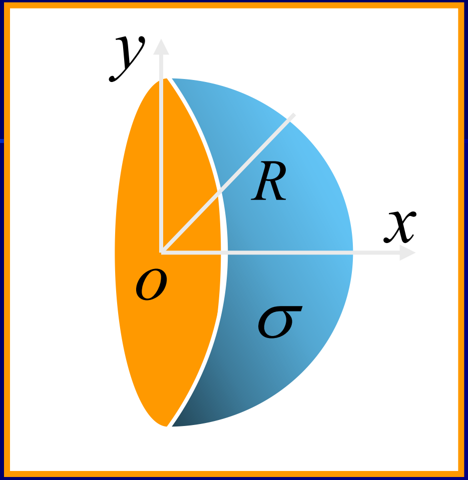
$E=\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}$ 无限大均匀带电平面的场强，匀强电场

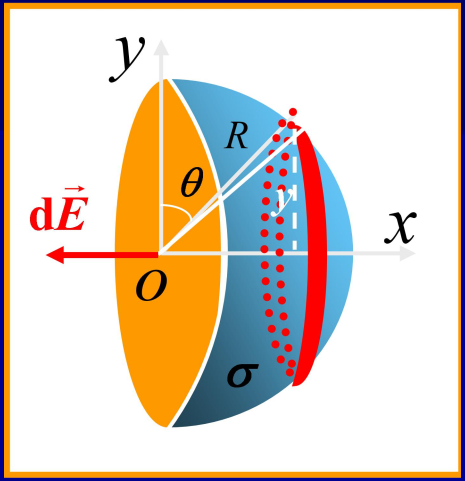
$R << x$

$\because$ $$\frac{x}{(R^2+x^2)^{1/2}}=1-\frac{1}{2}\left(\frac{R}{x}\right)^2$$

$\therefore$ $E=\dfrac{\sigma R^2}{4\varepsilon_0 x^2}=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 x^2}$ 可视为点电荷的电场

课堂练习： 求均匀带电半球面(已知R, σ) 球心处电场 .



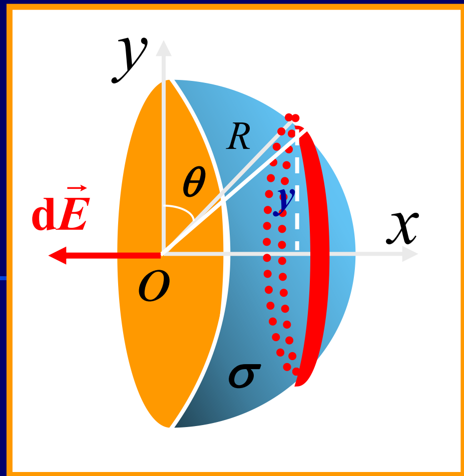


将半球面视为由许多圆环拼成 .

$\mathrm{d}q = \sigma \cdot \mathrm{d}S = \sigma \cdot 2\pi y \mathrm{d}x$ ✗

$\mathrm{d}q = \sigma \cdot 2\pi y \mathrm{d}l = \sigma \cdot 2\pi R\cos\theta \cdot R\mathrm{d}\theta$ ✓

哪一个正确？



$$dE_x = \frac{\sin\theta dq}{4\pi\varepsilon_0 R^2} = \frac{\sigma\cos\theta\sin\theta}{2\varepsilon_0} d\theta$$

其方向取决于 σ 的符号，若 $\sigma > 0$ ，则 沿$-x$ 。

因为各圆环在o 点处 $\mathrm{d}\vec{E}$ 同向，可直接积分 。

$$E = E_x = \int \mathrm{d}E_x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sigma\cos\theta\sin\theta}{2\varepsilon_0} \mathrm{d}\theta$$

沿 $-x$ 方向 。

场源的定性规律

- 二维无限大均匀带电面场强渐进行为
- 一维无限长均匀带电线附近的场强渐进行为

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} \to \frac{1}{r}$$

- 点电荷场强的渐进行为
- 电偶极子场强的渐进行为

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p}{r^3} \to \frac{1}{r^3}$$

- 电四极子场强的渐进行为

$$E \to \frac{1}{r^4}$$

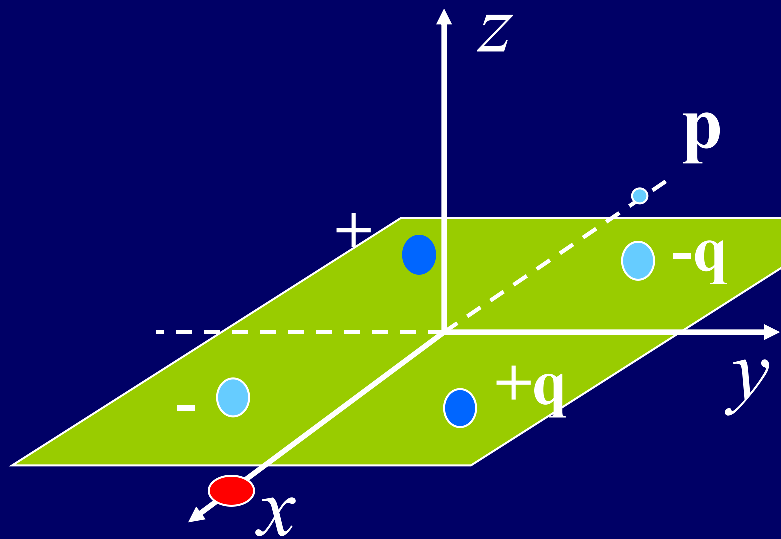
电三极子？

定性和定量的关系

1. 渐进分析
2. 定性分析
3. 物理直觉的建立

课下作业

1、如图四个电荷分布在边长为2a的正方形顶角, 每个电荷的带电量大小为q, 计算在x轴的p点（-h,0, 0 ）电场强度E。



2、1.3.8

3、1.3.9