磁场的能量

电场具有物质性　　电场具有能量　$w_e = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$

磁场具有物质性　　磁场具有能量　$w_m = ?$

在静电场曾经讲过电容器充电后，储存一定的能量

当电容器两极板之间电压为 U 时，所储存的电能为

$$W_e = \frac{1}{2} C U^2$$

C 是电容器的电容

平行板电容器静电场的能量：

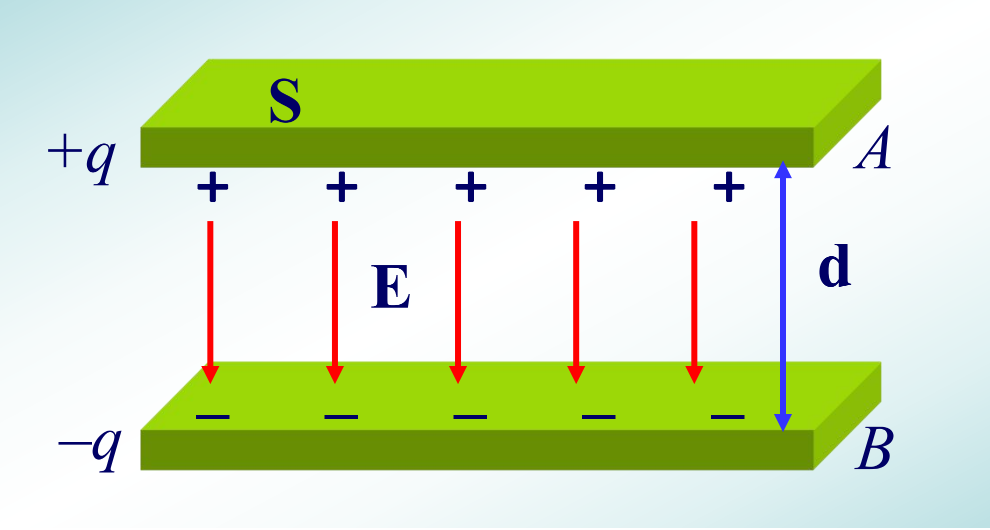
电能贮藏在平行板电容器中，静电场能量的为

$$W=\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 Sd=\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 V$$

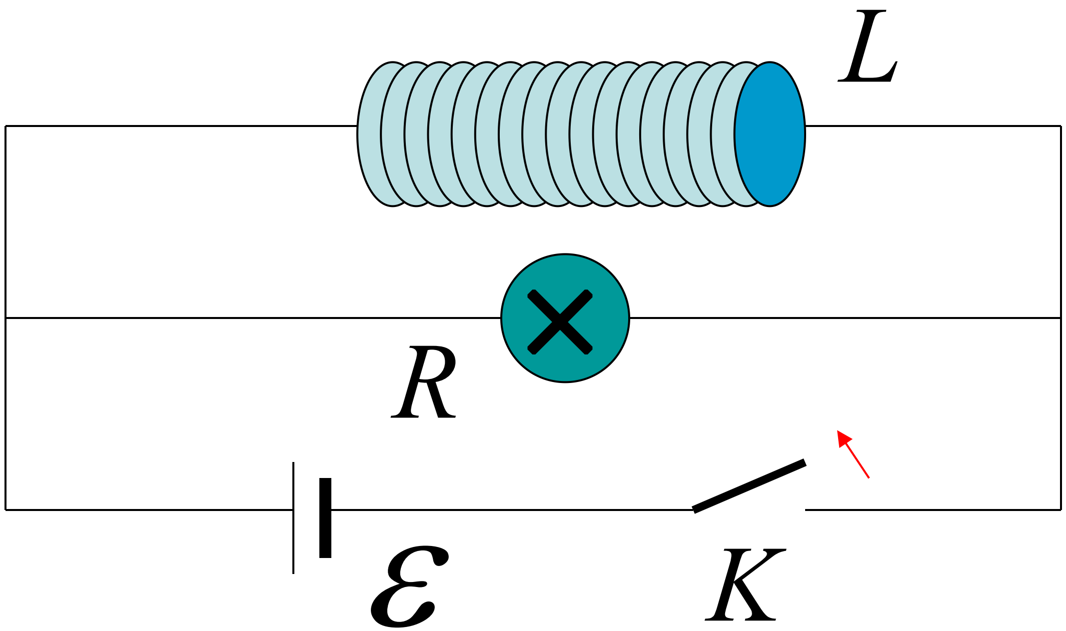
$$W_e=\frac{1}{2}CU^2$$

该体系静电场能量的体密度为

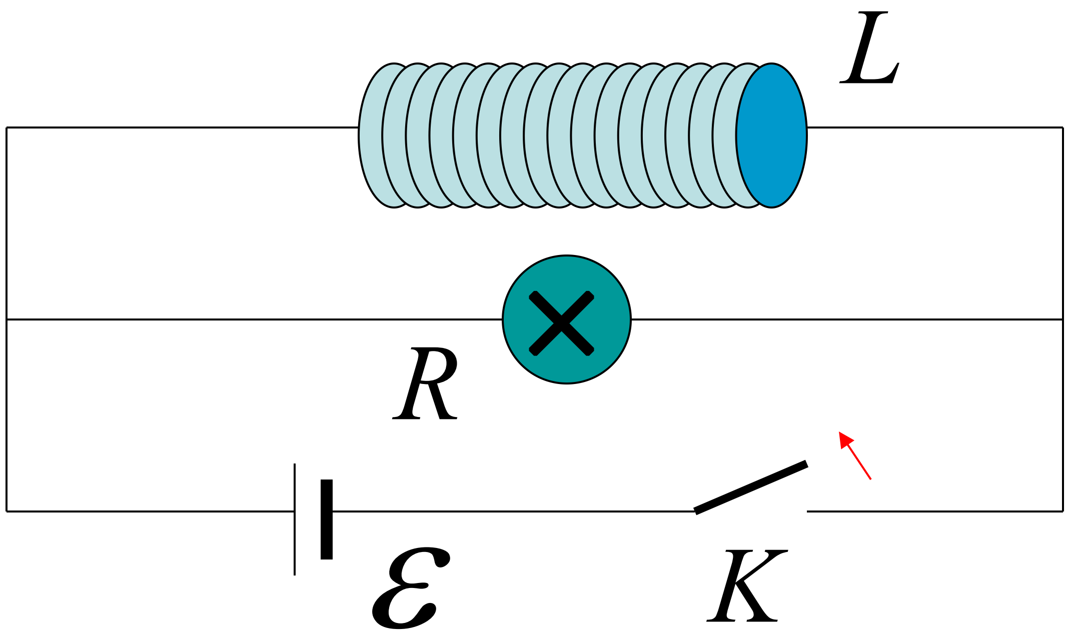
$$w_e=\frac{W}{V}=\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$$



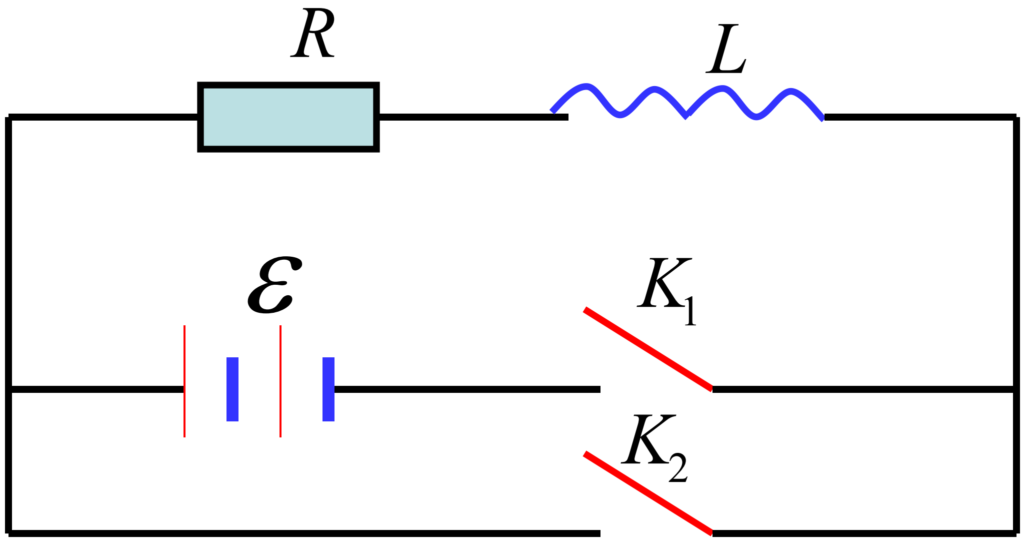
下面通过研究自感现象的能量转化来学习如何描述磁场的能量：



当电键打开后，电源已不再向灯泡供应能量了。它突然闪亮一下，所消耗的能量从哪里来的？



由于使灯泡闪亮的电流是线圈中的自感电动势产生的电流，而这电流随着线圈中的磁场的消失而逐渐消失，所以，可以认为使灯泡闪亮的能量是原来储存在通有电流的线圈中的，或者说是储存在线圈内的磁场中，称为**磁能**。



设电路接通后回路中某瞬时的电流为I，自感电动势为$-L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}$，由欧姆定律得

$$\varepsilon - L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = IR$$

$$\int_0^t \varepsilon I\,\mathrm{d}t = \int_0^{I_0} LI\,\mathrm{d}I + \int_0^t RI^2\,\mathrm{d}t$$

在自感和电流无关的情况下

$$\int_0^t \varepsilon I\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}LI_0^2 + \int_0^t RI^2\,\mathrm{d}t$$

$\int_0^t RI^2\,\mathrm{d}t$是 时间内电源提供的部分能量转化为消耗在电阻 R 上的焦耳–楞次热；

$\frac{1}{2}LI_0^2$是回路中建立电流的暂态过程中电源电动势克服自感电动势所作的功，这部分功转化为载流回路的能量；

当回路中的电流达到稳定值后，断开K_1，并同时接通K_2，这时回路中的电流按指数规律衰减，此电流通过电阻时，放出的焦耳–楞次热为

$$Q=\int_0^{\infty} RI^2\,\mathrm{d}t \quad = RI^2\int_0^{\infty} e^{-2\frac{R}{L}t}\,\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{2}LI_0^2$$

储存的磁能正好等于没有电源时的焦耳热

表明：自感线圈能够储存能量通电过程电源消耗的多余能量就储存在自感线圈中断电过程储存在自感线圈中的这部分能量又释放出来

磁能

$$W_m=\frac{1}{2}LI_0^2$$

$$W_e=\frac{1}{2}CU^2$$

对长直螺线管：

$$\boldsymbol{B}=\mu_0\boldsymbol{nI},\quad \boldsymbol{L}=\mu_0\boldsymbol{n}^2\boldsymbol{V}$$

$$\boldsymbol{W_m}=\frac{1}{2}\boldsymbol{LI}^2=\frac{1}{2}(\mu_0\boldsymbol{n}^2\boldsymbol{V})\cdot(\frac{\boldsymbol{B}}{\boldsymbol{n}\mu_0})^2=\frac{\boldsymbol{B}^2}{2\mu_0}\cdot\boldsymbol{V}$$

可推广到一般情况

磁场能量密度：单位体积内的磁场能量。

$$w_m=\frac{B^2}{2\mu_0}$$

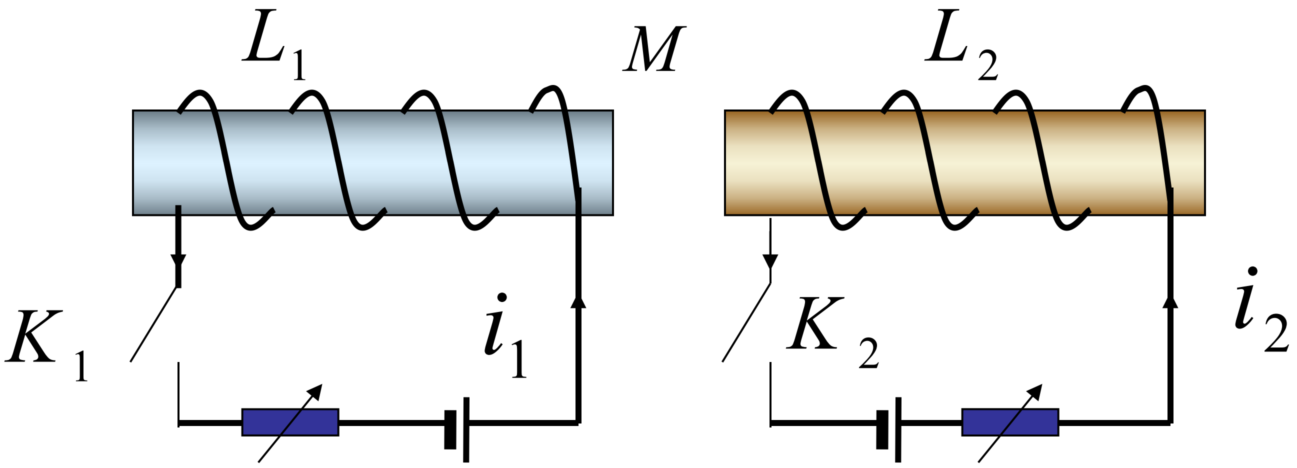
磁场能量：

$$W_m=\int_V w_m\mathrm{d}V=\int_V\frac{B^2}{2\mu_0}\mathrm{d}V$$

电场能量与磁场能量比较

电场能量	磁场能量
电容器储能 $\frac{1}{2}CV^2=\frac{1}{2}QV=\frac{Q^2}{2C}$	自感线圈储能 $\frac{1}{2}LI^2$
电场能量密度 $w_e=\frac{1}{2}\varepsilon_0E^2$	磁场能量密度 $w_m=\frac{B^2}{2\mu_0}$
电场能量 $W_e=\int_V w_e\mathrm{d}V$	磁场能量 $W_m=\int_V w_m\mathrm{d}V$
能量法求 C	能量法求 L

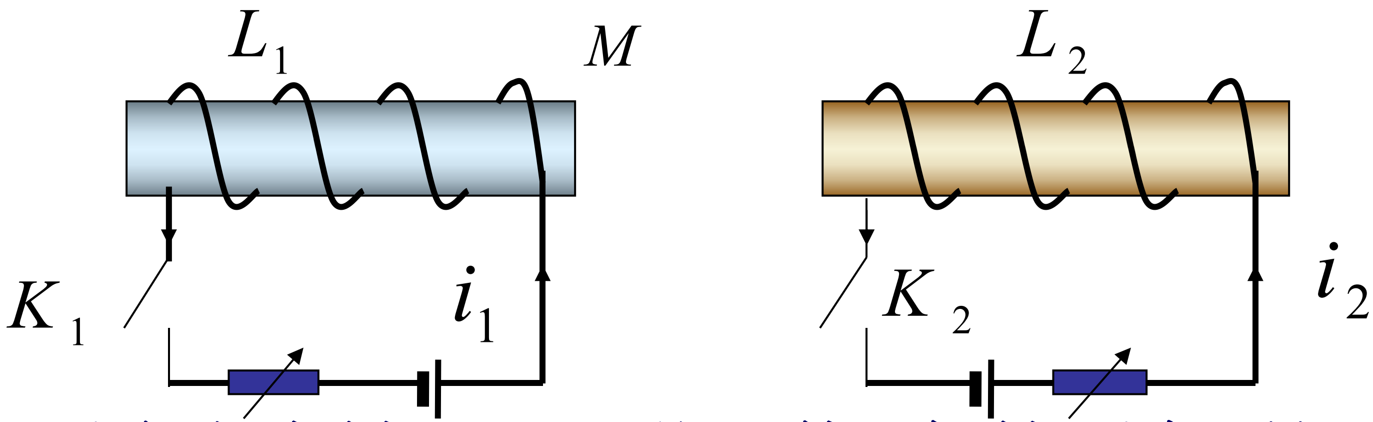
例1 求两个相互邻近的电流回路的磁场能量，这两个回路的电流分别是I_1和I_2。



解： 为了求出此状态时的磁能，设想I_1和I_2是按下述步骤建立的。

（1）先合上电键K_1，使i_1从零增大到I_1。这一过程中由于自感L_1的存在，由电源 ε_1 作功而储藏到磁场中的能量为

$$W_1=\frac{1}{2}L_1I_1^2$$

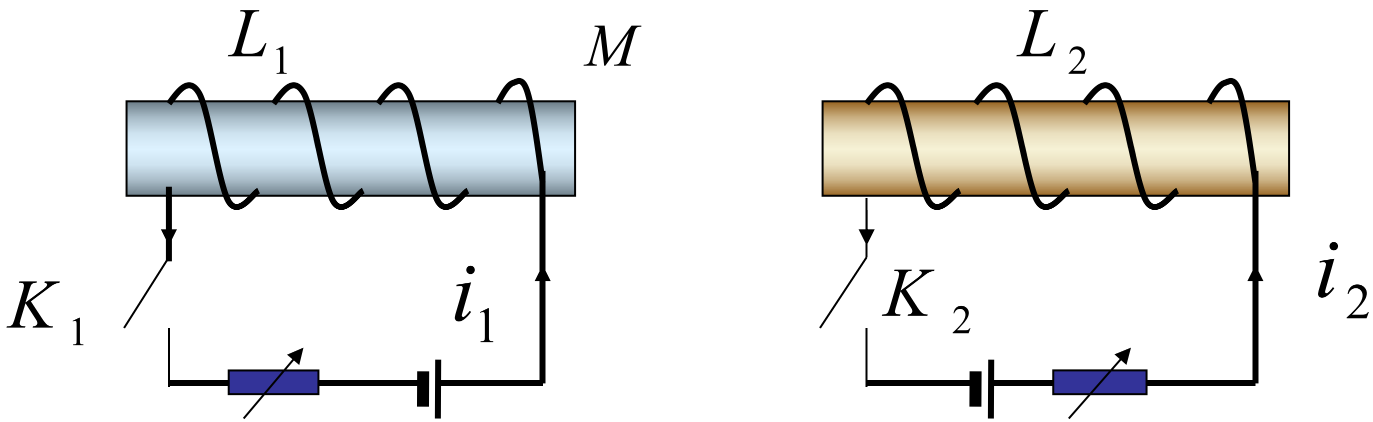


（2）再合上电键K_2，调节R_1使I_1保持不变，这时i_2由零增大到I_2。这一过程中由于自感L_2的存在，由电源ε_2作功而储藏到磁场中的能量为

$$W_2 = \frac{1}{2} L_2 I_2^2$$

注意到当i_2增大时，在回路1中会产生互感电动势ε_{12}

$$\varepsilon_{12} = -M_{12} \frac{\mathrm{d} i_2}{\mathrm{d} t}$$

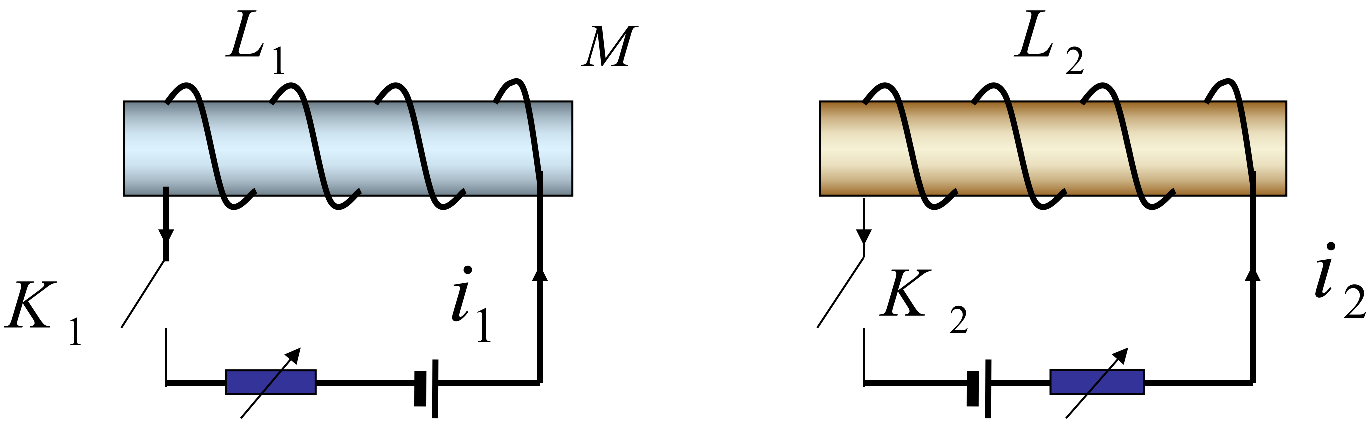


要保持电流I_1不变，电源 ε_1 还必须反抗此电动势作功。这样由于互感的存在，由电源 ε_1作功而储藏到磁场中的能量为

$$W_{12} = -\int \varepsilon_{12} I_1 \,\mathrm{d}t = \int M_{12} I_1 \frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} \mathrm{d}t$$

$$= \int_0^{I_2} M_{12} I_1 \,\mathrm{d}i = M_{12} I_1 \int_0^{I_2} \mathrm{d}i_2$$

$$= M_{12} I_1 I_2$$

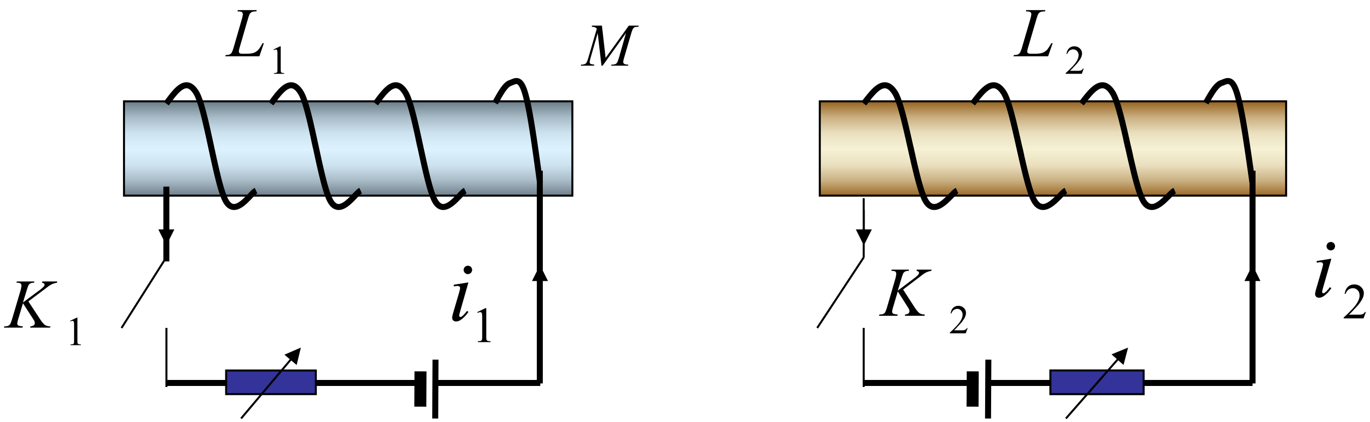


经过上述两个步骤后，系统达到电流分别是I_1和I_2的状态，这时储藏到磁场中的能量为

$$W_m = W_1 + W_2 + W_{12}$$
$$= \frac{1}{2}L_1 I_1^2 + \frac{1}{2}L_2 I_2^2 + M_{12} I_1 I_2$$

如果上述两个步骤反向进行，则储藏到磁场中的能量为

$$W_m' = \frac{1}{2}L_1 I_1^2 + \frac{1}{2}L_2 I_2^2 + M_{21} I_1 I_2$$



由于两种通电方式的最后状态相同，所以

$$W_m = W'_m \qquad M_{12} = M_{21} = M$$

最后储藏到磁场中的总能量为：

$$W'_m = \frac{1}{2}L_1 I_1^2 + \frac{1}{2}L_2 I_2^2 + M I_1 I_2$$

本章小结

一、电磁感应的基本规律

1.电磁感应现象

- 回路运动，磁场恒定
- 磁场变化，回路不动

2. 法拉第电磁感应定律：

$$\varepsilon = -N\frac{d\Phi}{dt}$$

3. 动生电动势

$$\varepsilon = \oint \vec{E}_k \cdot d\vec{l} = \oint \left(\vec{\upsilon} \times \vec{B}\right) \cdot d\vec{l}$$

4. 感生电动势

$$\varepsilon = \oint \vec{E}_k \cdot d\vec{l} = -\iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

二、互感与自感

1.自感系数

$$\boldsymbol{L} = \frac{\psi}{\boldsymbol{I}}$$

$$\varepsilon = -L\frac{dI}{dt}$$

2.互感系数

$$M = \frac{\psi_2}{I_1}$$

$$\varepsilon_{12} = -M\frac{dI_2}{dt}$$

三、磁场能

1.自感能：

$$W_{ms} = \frac{1}{2} L I^2$$

3.磁场能：

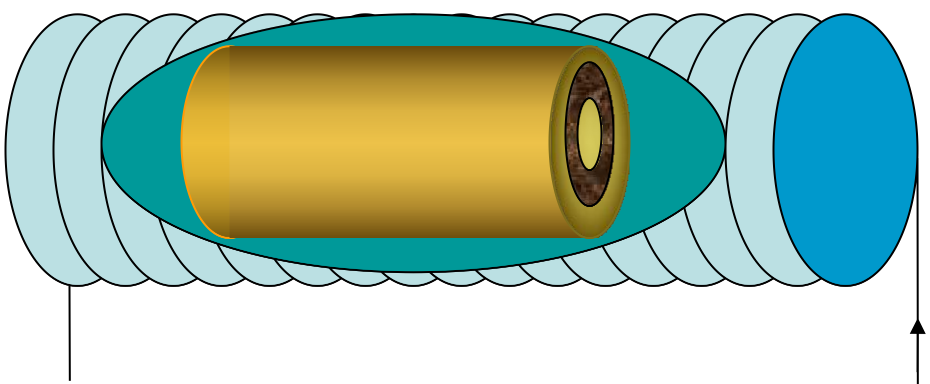
$$w_m = \frac{1}{2\mu_0} B^2$$

$$W_m = \int w_m dV = \frac{1}{2\mu_0} \int B^2 dV$$

课下作业

1. 电子是一个半径为R的小球，并假定电荷均匀分布与其表面。当电子以速度v(v<<c)运动时，当电子周围无限大的空间内建立电磁场。试计算电磁场中的总磁能。

2. 半径为a，长度为L，电导率为σ的圆柱形金属棒放在螺线管内部。螺线管单位长度上的匝数为n，通以交变电流$I=I_0\cos\omega t$，求一个周期内消耗在金属棒内的功率（即发热功率）。



谢谢