

数学物理方法

Xiping Hu

2020 年 1 月 3 日

1 勒让德方程

1.1 在 $x = 0$ 的邻域求解勒让德方程

l 阶勒让德方程

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + l(l+1)y = 0$$

的解法为：设

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$$

则

$$y(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots$$

$$y'(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3 + \cdots$$

$$y''(x) = 2a_2 + 3 \cdot 2a_3x + 4 \cdot 3a_4x^2 + 5 \cdot 4a_5x^3 + \cdots$$

代入方程，比较系数，得到奇数项和偶数项

1.2 勒让德多项式

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{dx^l} (x^2 - 1)^l$$

1.3 广义傅立叶级数的展开

$$\begin{cases} f(x) = \sum_0^{\infty} f_l P_l(x) \\ f_l = \frac{2l+1}{2} \int_{-1}^{+1} f(x) P_l(x) dx \end{cases}$$