《量子力学教程》课后习题——第三章 量子力学中的力学量

物理（4+4）1801　胡喜平　学号 U201811966

网站 https://hxp.plus/　邮件 hxp201406@gmail.com

2020 年 11 月 4 日

3.1

$$\overline{U} = \frac{1}{2}m\omega\overline{x^2} = \frac{1}{2}m\omega^2\frac{\alpha}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\alpha^2x^2}x^2\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\alpha^2x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}m\omega^2\frac{\alpha}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{\alpha}\frac{1}{2\alpha^2} = \frac{1}{4}\frac{m\omega^2}{\alpha^2}$$

其中用到高斯积分公式

$$\int_{-\infty}^{+\infty}x^{2n}\mathrm{e}^{-\alpha x^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\frac{(2n-1)!!}{(2\alpha)^n}$$

同理

$$\begin{aligned}\overline{T} &= \frac{\alpha}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\alpha^2x^2}\frac{-\hbar}{2m}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\alpha^2x^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{\alpha\hbar}{2m\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\alpha x^2}\cdot\alpha^2\left(\alpha^2x^2-1\right)\cdot\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\alpha^2x^2}\,\mathrm{d}x\\ &= -\frac{\alpha^3\hbar}{2m\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\alpha^2x^2-1\right)\mathrm{e}^{-\alpha^2x^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{\alpha^2\hbar}{2m\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\alpha^2x^2-1\right)\mathrm{e}^{-\alpha^2x^2}\,\mathrm{d}\left(\alpha x\right)\\ &= -\frac{\alpha^2\hbar}{2m\sqrt{\pi}}\left[\frac{\sqrt{\pi}}{2}-\sqrt{\pi}\right] = \frac{1}{4}\frac{\hbar\alpha^2}{m} = \frac{\hbar\omega}{4}\end{aligned}$$

动量的概率密度为

$$c\left(p\right) = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\mathrm{e}^{ipx/h}\sqrt{\frac{\alpha}{\pi^{1/2}}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\alpha^2x^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\frac{1}{\alpha\hbar\sqrt{\pi}}}\mathrm{e}^{-\frac{p^2}{2\alpha^2\hbar^2}}$$

动量概率的分布函数为

$$w\left(p\right) = \left|c\left(p\right)\right|^2 = \frac{1}{\alpha\hbar\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{p^2}{\alpha^2\hbar^2}}$$

3.2　r 的期望值为

$$\overline{r} = \iiint\psi\left(r\right)r\psi\left(r\right)\sin\theta r^2\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\phi = \frac{3}{2}a_0$$

势能 U 的期望值为

$$\overline{U} = \iint\mathrm{d}\Omega\int_0^{\infty}\psi\left(r\right)-\frac{e_s^2}{r}\psi\left(r\right)r^2\,\mathrm{d}r = -\frac{e_s^2}{a_0}$$

动能 T 的期望值为

$$\overline{T}=\iint\mathrm{d}\Omega\int_0^\infty\left[\psi\left(r\right)\frac{-\hbar}{2mr}\frac{\partial^2}{\partial r^2}r\psi\left(r\right)\right]r^2\,\mathrm{d}r=\frac{e_s^2}{2a_0}$$

在最概然半径处，径向概率取级值

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left[w\left(r\right)\right]=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left[R^2\left(r\right)r^2\right]=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left[\frac{4\mathrm{e}^{-2r/a_0}}{a_0^3}r^2\right]=0\Rightarrow r=a_0$$

动量分布的概率幅为

$$c\left(p\right)=\iiint\frac{1}{\left(\sqrt{2\pi\hbar}\right)^3}\mathrm{e}^{-i\frac{p\cdot r}{\hbar}}\psi\left(r\right)\mathrm{d}r$$

动量的概率密度为

$$w\left(p\right)=\left|c\left(p\right)\right|^2=\frac{8a_0^3\hbar^5}{\pi^2\left(\hbar^2+a_0^2p^2\right)^4}$$

3.3 概率流密度公式为

$$\vec{J}=\frac{i\hbar}{2m}\left(\psi\nabla\psi^*-\psi^*\nabla\psi\right)$$

其中

$$\nabla\psi_{nlm}=\left(-1\right)^m N_{lm}\left[e_rP_l^m\mathrm{e}^{im\phi}\frac{\partial R_{nl}}{\partial r}+e_\theta\frac{R_{nl}\mathrm{e}^{im\phi}}{r}\frac{\partial P_l^m}{r\sin\theta}+e_\phi\frac{R_{nl}P_l^m}{r\sin\theta}\frac{\partial\mathrm{e}^{im\phi}}{\partial\phi}\right]$$

因此

$$\vec{J}\left(\vec{r},t\right)=\frac{i\hbar}{2m_e}\left[\left(N_{lm}R_{nl}P_l^m\right)^2\left(\frac{-2im}{r\sin\theta}\right)e_\varphi\right]=\frac{\hbar m}{m_er\sin\theta}\left|\psi_{nlm}\right|^2e_\varphi$$

即

$$\begin{aligned}&J_{er}=0\\&J_{e\varphi}=\frac{\hbar m}{m_er\sin\theta}\left|\psi_{nlm}\right|^2e_\varphi\end{aligned}$$

3.4

$$\mathrm{d}M=J_er\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\cdot\pi r^2\sin^2\theta=-\frac{\pi e\hbar m}{m_e}w_{nl}r^2\sin\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta$$

$$M=\iint\mathrm{d}M=-\frac{e\hbar m}{2m_e}$$

3.5 转子的哈密顿算符为

$$H=L^2/\left(2I\right)$$

定轴转动，薛定谔方程为

$$\frac{\hat{L}^2}{2I}\psi=-\frac{\hbar^2}{2I}\frac{\mathrm{d}^2\psi}{\mathrm{d}\varphi^2}=E\left(\varphi\right)$$

和一维粒子相同可以解出

$$E_m=\frac{m^2\hbar^2}{2I}$$

定点转动时

$$-\frac{\hbar^2}{2I}\nabla^2\psi=E\psi$$

边界条件为

$$\psi\left(\theta,\varphi+2\pi\right)=\psi\left(\theta,\varphi\right)$$

且在无穷远处有界，因此

$$E_l=\frac{l\left(l+1\right)\hbar^2}{2I}$$

3.6 函数是周期函数，只需要在一个周期内求动能和动量的期望

$$A^2=\frac{1}{\int_0^{\pi/k}\left|\psi\left(x\right)\right|^2\mathrm{d}x}=\frac{2k}{\pi}$$

$$\overline{p}=\int_0^{\pi/k}\psi^*\left(x\right)\left(-i\hbar\right)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\psi\left(x\right)\mathrm{d}x=0$$

$$\overline{T}=\overline{\frac{p^2}{2m}}=\int_0^{\pi/k}\psi^*\left(x\right)\frac{-\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\psi\left(x\right)\mathrm{d}x=\frac{5\pi\hbar^2k}{16m}A^2=\frac{5\hbar^2k^2}{8m}$$