《量子力学教程》课后习题——第一章 绪论

物理（4+4）1801　胡喜平　学号 U201811966

网站 https://hxp.plus/　邮件 hxp201406@gmail.com

2020 年 9 月 13 日

1.1 黑体辐射公式为

$$\rho_\nu \,\mathrm{d}\nu = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \cdot \frac{1}{\exp\left[\dfrac{h\nu}{k_B T}\right] - 1} \,\mathrm{d}\nu$$

其中 $\rho_\nu \,\mathrm{d}\nu$ 是频率在 ν 到 $\nu + \mathrm{d}\nu$ 之内辐射能量密度。频率 ν 和波长 λ 的关系为

$$\nu = \frac{c}{\lambda}$$

因此

$$\mathrm{d}\nu = -\frac{c}{\lambda^2} \,\mathrm{d}\lambda$$

设波长在 λ 到 $\lambda + \mathrm{d}\lambda$ 之间的辐射能量密度为 ρ_λ，则

$$\rho_\lambda \,\mathrm{d}\lambda = \frac{8\pi h}{c^3} \cdot \frac{c^3/\lambda^3}{\exp\left[\dfrac{hc}{k_B} \cdot \dfrac{1}{\lambda T}\right] - 1} \cdot \left(\frac{c}{\lambda^2} \,\mathrm{d}\lambda\right) = 8\pi hc \cdot \frac{\lambda^{-5}}{\exp\left[\dfrac{hc}{k_B} \cdot \dfrac{1}{\lambda T}\right] - 1} \,\mathrm{d}\lambda$$

求极大值需要 $\dfrac{\mathrm{d}\rho_\lambda}{\mathrm{d}\lambda} = 0$，即

$$\left\{\exp\left[\frac{hc}{k_B} \cdot \frac{1}{\lambda T}\right] - 1\right\} \left(-5\lambda^{-6}\right) - \lambda^{-5} \cdot \exp\left[\frac{hc}{k_B} \cdot \frac{1}{\lambda T}\right] \cdot \frac{hc}{k_B} \cdot \frac{1}{T} \cdot \left(-\frac{1}{\lambda^2}\right) = 0$$

化简后得到

$$\left\{5 - \frac{hc}{k_B} \cdot \frac{1}{\lambda T}\right\} \cdot \exp\left[\frac{hc}{k_B} \cdot \frac{1}{\lambda T}\right] = 5$$

令 $\alpha = \dfrac{hc}{k_B} \cdot \dfrac{1}{\lambda T}$，化简得到

$$5 + (-\alpha) = 5\mathrm{e}^{-\alpha}$$

用计算器解得 $\alpha = 4.96$，即

$$\frac{hc}{k_B} \cdot \frac{1}{\lambda T} = 4.96$$

则

$$\lambda T = \frac{hc}{k_B \alpha} = 2.9 \times 10^3 \ \mathrm{m} \cdot \mathrm{K}$$

1.2 电子的德布罗意波长为

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2mE}} = 0.708 \ \mathrm{nm}$$

1.3 氦原子由两个质子两个中子组成，它的质量为

$$m = 2m_p + 2m_n$$

氢原子的德布罗意波长为

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2mE}} = \frac{h}{\sqrt{6\left(m_p + m_n\right) k_B T}} = 1.26 \ \mathrm{nm}$$

1.4 (1) 波尔-索末菲量子化条件为

$$\oint m \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \, \mathrm{d}x = \oint m \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 \mathrm{d}t = \left(n + \frac{1}{2}\right) \mathrm{h}$$

即

$$\oint E - E_p \, \mathrm{d}t = \oint E_k \, \mathrm{d}t = \oint \frac{1}{2} m \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 \mathrm{d}t = (2n+1) \, \mathrm{h}$$

其中 E 是简谐振子总能量，E_k 是动能，E_p 是势能，设简谐运动

$$m \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 = kx$$

则

$$x = A \cos\left(\omega t\right)$$

其中

$$\omega^2 = \frac{k}{m}$$

量子化条件可以展开为

$$\oint E \, \mathrm{d}t - \oint \frac{1}{2} k x^2 \, \mathrm{d}t = \frac{2\pi E}{\omega} - \oint \frac{1}{2} k \cdot A^2 \cos^2\left(\omega t\right) \mathrm{d}t = \frac{2\pi E}{\omega} - \frac{\pi}{\omega} \cdot \frac{1}{2} k A^2 = \frac{2\pi}{\omega} E - \frac{\pi}{\omega} E = \frac{\pi}{\omega} E$$

因此

$$\frac{\pi}{\omega} E = (2n+1) \, \mathrm{h}$$

简谐振子能量表达式

$$E = (2n+1)\,\mathrm{h}\cdot\frac{\omega}{\pi} = \left(n+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega$$

1.5 光子波长最大的情况下能量最小，恰好等于电子能量

$$\frac{hc}{\lambda_{max}} = m_e c^2$$

计算得出光子最大波长

$$\lambda_{max} = \frac{h}{m_e c} = 2.243\times10^{-12}\ \mathrm{m}$$