《电动力学》课后习题——第二章 静电场

物理（4+4）1801　胡喜平　学号 U201811966

网站 https://hxp.plus/　邮件 hxp201406@gmail.com

2020 年 11 月 19 日

3.1　试用 $\vec{A}$ 表示一个沿着 z 方向的均匀的恒定磁场 $\vec{B}_0$，写出 $\vec{A}$ 的两种不同的表示式，证明二者之差是无旋场。

解　磁矢势的定义为

$$\nabla \times \vec{A} = \vec{B}$$

其中

$$\vec{B} = B_0 \hat{z}$$

所以

$$\nabla \cdot \vec{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \vec{\imath} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \vec{\jmath} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \vec{k}$$

其中两组磁矢势为

$$\begin{aligned} \vec{A}_1 &= -B_0 y \hat{x} + 2z \hat{y} + 2y \hat{z} \\ \vec{A}_2 &= 2z \hat{x} + B_0 x \hat{y} + 2x \hat{z} \end{aligned}$$

两组磁矢势的差为

$$\vec{A}_1 - \vec{A}_2 = \left(-B_0 y - 2z\right) \hat{x} + \left(2z - B_0 x\right) \hat{y} + \left(2y - 2x\right) \hat{z}$$

很容易看出

$$\nabla \times \left(\vec{A}_1 - \vec{A}_2 \right) = 0$$

3.3 假设有无穷长的线电流 I 沿着 z 轴流动，以 $z<0$ 空间充满磁导率为 μ 的均匀介质，$z>0$ 区域为真空，试用唯一性定理求次感应强度 $\vec{B}$，然后求解磁化电流分布。

解 使用柱坐标，介质在下真空在上，交界处 $z=0$，空间中的点和原点距离为 r。磁场环路定理为

$$\oint \vec{H}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \mu_0 I$$

空间磁场强度的分布为

$$\vec{H} = \frac{I}{2\pi r}$$

因此磁感应强度为

$$B = \begin{cases} \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r} & z>0 \\ \dfrac{\mu I}{2\pi r} & z<0 \end{cases}$$

磁感应强度的方向由右手螺旋定则确定。取一个四角坐标为 $(r,\delta z)$、$(r+\delta r,\delta z)$、$(r+\delta r,-\delta z)$、$(r,-\delta z)$ 的小积分面，当 $z>0$ 时有磁极化电流，密度为 α_M，则

$$\left(\frac{\mu_0 I}{2\pi r} - \frac{\mu I}{2\pi r}\right)\times 2\delta z\delta r = \mu_0\alpha_M \times 2\delta z\delta r$$

因此

$$\alpha_M = \frac{I}{2\pi r}\left(1-\frac{\mu}{\mu_0}\right)$$

方向为 $\vec{e}_r$ 的反方向，因此

$$\vec{\alpha}_M = \frac{I}{2\pi r}\left(\frac{\mu}{\mu_0}-1\right)\vec{e}_r$$

3.7 半径为 a 的无限长圆柱导体上有恒定电流 $\vec{J}$ 均匀分布于截面上，试解磁矢势 $\vec{A}$ 的微分方程，设导体的磁导率为 μ_0，导体外的磁导率为 μ

解 体系是上下平移对称的，只需要极坐标。极坐标下的拉普拉斯算子为

$$\nabla^2 = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\right) = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$$

磁矢势微分方程为

$$\nabla^2\vec{A} = -\mu\vec{J}$$

3.9 将一个磁导率为 μ，半径为 R_0 的球体，放入均匀磁场 $\vec{H}_0$ 内，求总磁感应强度 $\vec{B}$ 和诱导磁矩 $\vec{m}$

解

3.13 有一个均匀带电的薄导体壳，半径为 R_0，总电荷为 Q，使球壳自身绕着某一直径以角速度 ω 转动，求球内外磁场 $\vec{B}$

解