《电动力学》课后习题——第二章 静电场

物理（4+4）1801　胡喜平　学号 U201811966

网站 https://hxp.plus/　邮件 hxp201406@gmail.com

2020 年 11 月 19 日

3.1　试用 $\vec{A}$ 表示一个沿着 z 方向的均匀的恒定磁场 $\vec{B}_0$，写出 $\vec{A}$ 的两种不同的表示式，证明二者之差是无旋场。

解　磁矢势的定义为

$$\nabla \times \vec{A} = \vec{B}$$

其中

$$\vec{B} = B_0 \hat{z}$$

所以

$$\nabla \cdot \vec{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\vec{\imath} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\vec{\jmath} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\vec{k}$$

其中两组磁矢势为

$$\begin{aligned}\vec{A}_1 &= -B_0 y\hat{x} + 2z\hat{y} + 2y\hat{z} \\ \vec{A}_2 &= 2z\hat{x} + B_0 x\hat{y} + 2x\hat{z}\end{aligned}$$

两组磁矢势的差为

$$\vec{A}_1 - \vec{A}_2 = (-B_0 y - 2z)\,\hat{x} + (2z - B_0 x)\,\hat{y} + (2y - 2x)\,\hat{z}$$

很容易看出

$$\nabla \times \left(\vec{A}_1 - \vec{A}_2\right) = 0$$

3.3 假设有无穷长的线电流 I 沿着 z 轴流动，以 $z<0$ 空间充满磁导率为 μ 的均匀介质，$z>0$ 区域为真空，试用唯一性定理求次感应强度 $\vec{B}$，然后求解磁化电流分布。

解 使用柱坐标，介质在下真空在上，交界处 $z=0$，空间中的点和原点距离为 r。磁场环路定理为

$$\oint \vec{H}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \mu_0 I$$

空间磁场强度的分布为

$$\vec{H} = \frac{I}{2\pi r}$$

因此磁感应强度为

$$B = \begin{cases} \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r} & z>0 \\ \dfrac{\mu I}{2\pi r} & z<0 \end{cases}$$

磁感应强度的方向由右手螺旋定则确定。取一个四角坐标为 $(r,\delta z)$、$(r+\delta r,\delta z)$、$(r+\delta r,-\delta z)$、$(r,-\delta z)$ 的小积分面，当 $z>0$ 时有磁极化电流，密度为 α_M，则

$$\left(\frac{\mu_0 I}{2\pi r} - \frac{\mu I}{2\pi r}\right) \times 2\delta z \delta r = \mu_0 \alpha_M \times 2\delta z \delta r$$

因此

$$\alpha_M = \frac{I}{2\pi r}\left(1-\frac{\mu}{\mu_0}\right)$$

方向为 $\vec{e}_r$ 的反方向，因此

$$\vec{\alpha}_M = \frac{I}{2\pi r}\left(\frac{\mu}{\mu_0}-1\right)\vec{e}_r$$

3.7 半径为 a 的无限长圆柱导体上有恒定电流 $\vec{J}$ 均匀分布于截面上，试解磁矢势 $\vec{A}$ 的微分方程，设导体的磁导率为 μ_0，导体外的磁导率为 μ

解 体系是上下平移对称的，只需要极坐标。极坐标下的拉普拉斯算子为

$$\nabla^2 = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\right) = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$$

磁矢势微分方程为

$$\nabla^2\vec{A} = -\mu\vec{J}$$

由于系统轴对称

$$\begin{aligned} \frac{1}{r}\frac{\partial A_i}{\partial r}\left(r\frac{\partial A_i}{\partial r}\right) &= -\mu_0 J \\ \frac{1}{r}\frac{\partial A_o}{\partial r}\left(r\frac{\partial A_o}{\partial r}\right) &= 0 \end{aligned}$$

A_o 是导体外磁矢势，A_i 是导体内磁矢势，当 $r=a$ 时，边值关系为

$$\begin{aligned} &\vec{A}_i = \vec{A}_o \\ &\hat{r}\times\left(\frac{1}{\mu}\nabla\times\vec{A}_o\right) - \hat{r}\times\left(\frac{1}{\mu_0}\nabla\times A_i\right) = \alpha_M \end{aligned}$$

由于系统是轴对称的，而且电流只有径向方向，且磁矢势的零点选择在任何地方都不影响，在边界

$$\begin{aligned} &A_i = A_o = 0 \\ &\frac{1}{\mu}\frac{\mathrm{d}A_o}{\mathrm{d}r} = \frac{1}{\mu_0}\frac{\mathrm{d}A_i}{\mathrm{d}r} \end{aligned}$$

对磁矢势微分方程进行积分，得到

$$\begin{aligned} &r\frac{\partial A_i}{\partial r} + \frac{1}{2}\mu_0 J r^2 = C_1 \Rightarrow \frac{\partial A_i}{\partial r} = -\frac{1}{2}\mu_0 J r - \frac{C_1}{r} \Rightarrow A_i = -\frac{\mu_0}{4}Jr^2 - C_1\ln r + C_3 \\ &r\frac{\partial A_o}{\partial r} = C_2 \Rightarrow \frac{\partial A_o}{\partial r} = \frac{C_2}{r} \Rightarrow A_o = C_2\ln r + C_4 \end{aligned}$$

带入 $r=a$ 时的边界条件和 $r=0$ 时磁矢势是有限值的条件

$$\begin{aligned} &C_1 = 0 \\ &-\frac{\mu_0}{4}Ja^2 - C_1\ln a + C_3 = 0 \\ &C_2\ln a + C_4 = 0 \\ &\frac{C_2/a}{\mu} = \frac{-\frac{\mu_0}{2}Ja - C_1/a}{\mu_0} \end{aligned}$$

解得

$$\begin{aligned} &C_1 = 0 \\ &C_2 = -\frac{\mu}{2}Ja^2 \\ &C_3 = \frac{\mu_0}{4}Ja^2 \\ &C_4 = \frac{\mu}{2}Ja^2\ln a \end{aligned}$$

所以

$$
\begin{aligned}
A_i &= \frac{\mu_0}{4} J \left(a^2 - r^2\right) \\
A_o &= \frac{\mu}{2} J a^2 \left(\ln a - \ln r\right)
\end{aligned}
$$

3.9 将一个磁导率为 μ，半径为 R_0 的球体，放入均匀磁场 $\vec{H}_0$ 内，求总磁感应强度 $\vec{B}$ 和诱导磁矩 $\vec{m}$

解 用磁标势，球里面的磁标势为 φ_i，球外边的磁标势为 φ_o

$$
\nabla^2 \varphi_i = \nabla^2 \varphi_o = 0
$$

$r = R_0$ 时有边界条件

$$
\begin{aligned}
\varphi_i &= \varphi_o \\
\mu \frac{\partial \varphi_i}{\partial r} &= \mu_0 \frac{\partial \varphi_o}{\partial r}
\end{aligned}
$$

设

$$
\begin{aligned}
\varphi_i &= \sum_n a_n r^n P_n \left(\cos\theta\right) \\
\varphi_o &= -H_0 r P_1 \left(\cos\theta\right) + \sum_n \frac{b_n}{r^{n+1}} P_n \left(\cos\theta\right)
\end{aligned}
$$

代入边界条件

$$
\begin{aligned}
\sum_n a_n R^n P_n \left(\cos\theta\right) &= -H_0 R P_1 \left(\cos\theta\right) + \sum_n \frac{b_n}{R^{n+1}} P_n \left(\cos\theta\right) \\
\frac{\mu}{\mu_0} \sum_n n a_n R^{n-1} P_n \left(\cos\theta\right) &= -H_0 P_1 \left(\cos\theta\right) - \sum_n \left(n+1\right) \frac{b_n}{R^{n+2}} P_n \left(\cos\theta\right)
\end{aligned}
$$

比较系数得出

$$
\begin{aligned}
a_1 R &= -H_0 R + \frac{b_1}{R^2} \\
\frac{\mu}{\mu_0} a_1 &= -H_0 - 2\frac{b_1}{R^3}
\end{aligned}
$$

和

$$
a_n = b_n = 0 \quad n \neq 1
$$

解得

$$
\begin{aligned}
a_1 &= -\frac{3\mu_0}{2\mu_0+\mu} H_0 \\
b_1 &= \frac{\mu-\mu_0}{2\mu_0+\mu} H_0 R_0^3 \\
a_n &= b_n = 0 \qquad\qquad n \neq 1
\end{aligned}
$$

带回磁标势表达式

$$
\begin{aligned}
\varphi_i &= \sum_n a_n r^n P_n(\cos\theta) = -\frac{3\mu_0}{2\mu_0+\mu} H_0 r\cos\theta \\
\varphi_o &= -H_0 r P_1(\cos\theta) + \sum_n \frac{b_n}{r^{n+1}} P_n(\cos\theta) = -H_0 r\cos\theta + \frac{\mu-\mu_0}{2\mu_0+\mu}\cdot\frac{H_0 R_0^3\cos\theta}{r^2}
\end{aligned}
$$

重写表达式为矢量形式

$$
\begin{aligned}
\varphi_i &= -\frac{3\mu_0}{2\mu_0+\mu}\vec{H}_0\cdot\vec{r} \\
\varphi_o &= -\vec{H}_0\cdot\vec{r} + \frac{\mu-\mu_0}{2\mu_0+\mu}\cdot\frac{R_0^3}{r^3}\vec{H}_0\cdot\vec{r}
\end{aligned}
$$

求梯度得到磁感应强度

$$
\begin{aligned}
\vec{B}_i &= -\mu\nabla\varphi_i = \frac{3\mu\mu_0}{2\mu_0+\mu}\vec{H}_0 \\
\vec{B}_o &= -\mu_0\nabla\varphi_o = \mu_0\vec{H}_0 - \frac{\mu(\mu-\mu_0)R_0^3}{2\mu_0\mu}\left[\frac{\vec{H}}{r^3} - \frac{3\left(\vec{H}\cdot\vec{r}\right)\vec{r}}{r^5}\right]
\end{aligned}
$$

介质的磁极化强度

$$
\vec{M} = \left(\frac{\mu}{\mu_0}-1\right)\frac{B_i}{\mu} = \left(\frac{\mu}{\mu_0}-1\right)\frac{3\mu_0}{2\mu_0+\mu}\vec{H}_0 = \frac{3(\mu-\mu_0)}{2\mu_0+\mu}\vec{H}_0
$$

磁化电流为

$$
\frac{4}{3}\pi R_0^3\vec{M} = \frac{4\pi R_0^3(\mu-\mu_0)}{2\mu_0+\mu}\vec{H}_0
$$

3.13 有一个均匀带电的薄导体壳，半径为 R_0，总电荷为 Q，使球壳自身绕着某一直径以角速度 ω 转动，求球内外磁场 $\vec{B}$

解 在球外，可以将球看成一个个环形电流，球面上线电流密度为

$$\alpha_M = \frac{q\omega}{4\pi R_0^2} R_0 \sin\theta \vec{e}_\phi$$

总的磁偶极矩是

$$m = \int_0^\pi \pi \left(R_0 \sin\theta\right)^2 \alpha_M R_0 \,\mathrm{d}\theta = \frac{q\omega}{4} R_0^2 \int_0^\pi \sin^3\theta \,\mathrm{d}\theta = \frac{q\omega R_0^2}{3}$$

方向是和转轴的方向相同。因此球外的磁标势为

$$\varphi_o = \frac{\vec{m}\cdot\vec{R}}{4\pi R^3} = \frac{m\cos\theta}{4\pi R^2}$$

磁感应强度为

$$\vec{B}_o = -\mu_0 \nabla\varphi_o = \frac{\mu_0}{4\pi}\left[\frac{3\left(\vec{m}\cdot\vec{R}\right)\vec{R}}{R^5} - \frac{\vec{m}}{R^3}\right]$$

设球内磁标势为

$$\varphi_i = \sum_n a_n R^n P_n\left(\cos\theta\right)$$

因为球内和球外交界处有自由电流，不能引入磁标势，但是可以用 g 磁场边值关系。法向磁场的连续性条件为

$$\sum_n n a_n R_0^{n-1} P_n\left(\cos\theta\right) = -2\frac{m\cos\theta}{4\pi R_0^3}$$

因此

$$\begin{aligned} a_1 &= -\frac{m}{2\pi R_0^3} \\ a_n &= 0 \qquad\qquad n \neq 1 \end{aligned}$$

因此球内磁标势为

$$\varphi_i = -\frac{m}{2\pi R_0^3} R\cos\theta = -\frac{\vec{m}\cdot\vec{R}}{2\pi R_0^3}$$

磁感应强度为

$$\vec{B}_i = -\mu_0 \nabla \varphi_i = \frac{\mu_0 \vec{m}}{2\pi R_0^3}$$