

## 《电动力学》课后习题——第三章 静磁场

物理 (4+4) 1801 胡喜平 学号 U201811966

网站 <https://hxp.plus/> 邮件 [hxp201406@gmail.com](mailto:hxp201406@gmail.com)

2020 年 11 月 19 日

**3.1** 试用  $\vec{A}$  表示一个沿着  $z$  方向的均匀的恒定磁场  $\vec{B}_0$ , 写出  $\vec{A}$  的两种不同的表示式, 证明二者之差是无旋场。

**解** 磁矢势的定义为

$$\nabla \times \vec{A} = \vec{B}$$

其中

$$\vec{B} = B_0 \hat{z}$$

所以

$$\nabla \cdot \vec{A} = \left( \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \vec{i} + \left( \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \vec{j} + \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \vec{k}$$

其中两组磁矢势为

$$\vec{A}_1 = -B_0 y \hat{x} + 2z \hat{y} + 2y \hat{z}$$

$$\vec{A}_2 = 2z \hat{x} + B_0 x \hat{y} + 2x \hat{z}$$

两组磁矢势的差为

$$\vec{A}_1 - \vec{A}_2 = (-B_0 y - 2z) \hat{x} + (2z - B_0 x) \hat{y} + (2y - 2x) \hat{z}$$

很容易看出

$$\nabla \times (\vec{A}_1 - \vec{A}_2) = 0$$

**3.3** 假设有无穷长的线电流  $I$  沿着  $z$  轴流动, 以  $z < 0$  空间充满磁导率为  $\mu$  的均匀介质,  $z > 0$  区域为真空, 试用唯一性定理求次感应强度  $\vec{B}$ , 然后求解磁化电流分布。

**解** 使用柱坐标, 介质在下真空在上, 交界处  $z = 0$ , 空间中的点和原点距离为  $r$ 。磁场环路定理为

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I$$

空间磁场强度的分布为

$$\vec{H} = \frac{I}{2\pi r}$$

因此磁感应强度为

$$B = \begin{cases} \frac{\mu_0 I}{2\pi r} & z > 0 \\ \frac{\mu I}{2\pi r} & z < 0 \end{cases}$$

磁感应强度的方向由右手螺旋定则确定。取一个四角坐标为  $(r, \delta z)$ 、 $(r + \delta r, \delta z)$ 、 $(r + \delta r, -\delta z)$ 、 $(r, -\delta z)$  的小积分面, 当  $z > 0$  时有磁极化电流, 密度为  $\alpha_M$ , 则

$$\left( \frac{\mu_0 I}{2\pi r} - \frac{\mu I}{2\pi r} \right) \times 2\delta z \delta r = \mu_0 \alpha_M \times 2\delta z \delta r$$

因此

$$\alpha_M = \frac{I}{2\pi r} \left( 1 - \frac{\mu}{\mu_0} \right)$$

方向为  $\vec{e}_r$  的反方向, 因此

$$\vec{\alpha}_M = \frac{I}{2\pi r} \left( \frac{\mu}{\mu_0} - 1 \right) \vec{e}_r$$

**3.7** 半径为  $a$  的无限长圆柱导体上有恒定电流  $\vec{J}$  均匀分布于截面上, 试解磁矢势  $\vec{A}$  的微分方程, 设导体的磁导率为  $\mu_0$ , 导体外的磁导率为  $\mu$

**解** 体系是上下平移对称的, 只需要极坐标。极坐标下的拉普拉斯算子为

$$\nabla^2 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$$

磁矢势微分方程为

$$\nabla^2 \vec{A} = -\mu \vec{J}$$

由于系统轴对称

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial A_i}{\partial r} \left( r \frac{\partial A_i}{\partial r} \right) &= -\mu_0 J \\ \frac{1}{r} \frac{\partial A_o}{\partial r} \left( r \frac{\partial A_o}{\partial r} \right) &= 0 \end{aligned}$$

$A_o$  是导体外磁矢势,  $A_i$  是导体内磁矢势, 当  $r = a$  时, 边值关系为

$$\begin{aligned} \vec{A}_i &= \vec{A}_o \\ \hat{r} \times \left( \frac{1}{\mu} \nabla \times \vec{A}_o \right) - \hat{r} \times \left( \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \vec{A}_i \right) &= \alpha_M \end{aligned}$$

由于系统是轴对称的, 而且电流只有径向方向, 且磁矢势的零点选择在任何地方都不影响, 在边界

$$\begin{aligned} A_i &= A_o = 0 \\ \frac{1}{\mu} \frac{dA_o}{dr} &= \frac{1}{\mu_0} \frac{dA_i}{dr} \end{aligned}$$

对磁矢势微分方程进行积分, 得到

$$\begin{aligned} r \frac{\partial A_i}{\partial r} + \frac{1}{2} \mu_0 J r^2 &= C_1 \Rightarrow \frac{\partial A_i}{\partial r} = -\frac{1}{2} \mu_0 J r - \frac{C_1}{r} \Rightarrow A_i = -\frac{\mu_0}{4} J r^2 - C_1 \ln r + C_3 \\ r \frac{\partial A_o}{\partial r} &= C_2 \Rightarrow \frac{\partial A_o}{\partial r} = \frac{C_2}{r} \Rightarrow A_o = C_2 \ln r + C_4 \end{aligned}$$

带入  $r = a$  时的边界条件和  $r = 0$  时磁矢势是有限值的条件

$$\begin{aligned} C_1 &= 0 \\ -\frac{\mu_0}{4} J a^2 - C_1 \ln a + C_3 &= 0 \\ C_2 \ln a + C_4 &= 0 \\ \frac{C_2/a}{\mu} &= \frac{-\frac{\mu_0}{2} J a - C_1/a}{\mu_0} \end{aligned}$$

解得

$$\begin{aligned} C_1 &= 0 \\ C_2 &= -\frac{\mu}{2} J a^2 \\ C_3 &= \frac{\mu_0}{4} J a^2 \\ C_4 &= \frac{\mu}{2} J a^2 \ln a \end{aligned}$$

所以

$$A_i = \frac{\mu_0}{4} J (a^2 - r^2)$$

$$A_o = \frac{\mu}{2} J a^2 (\ln a - \ln r)$$

**3.9** 将一个磁导率为  $\mu$ , 半径为  $R_0$  的球体, 放入均匀磁场  $\vec{H}_0$  内, 求总磁感应强度  $\vec{B}$  和诱导磁矩  $\vec{m}$

**解** 用磁标势, 球里面的磁标势为  $\varphi_i$ , 球外边的磁标势为  $\varphi_o$

$$\nabla^2 \varphi_i = \nabla^2 \varphi_o = 0$$

$r = R_0$  时有边界条件

$$\varphi_i = \varphi_o$$

$$\mu \frac{\partial \varphi_i}{\partial r} = \mu_0 \frac{\partial \varphi_o}{\partial r}$$

设

$$\varphi_i = \sum_n a_n r^n P_n(\cos \theta)$$

$$\varphi_o = -H_0 r P_1(\cos \theta) + \sum_n \frac{b_n}{r^{n+1}} P_n(\cos \theta)$$

代入边界条件

$$\sum_n a_n R^n P_n(\cos \theta) = -H_0 R P_1(\cos \theta) + \sum_n \frac{b_n}{R^{n+1}} P_n(\cos \theta)$$

$$\frac{\mu}{\mu_0} \sum_n n a_n R^{n-1} P_n(\cos \theta) = -H_0 P_1(\cos \theta) - \sum_n (n+1) \frac{b_n}{R^{n+2}} P_n(\cos \theta)$$

比较系数得出

$$a_1 R = -H_0 R + \frac{b_1}{R^2}$$

$$\frac{\mu}{\mu_0} a_1 = -H_0 - 2 \frac{b_1}{R^3}$$

和

$$a_n = b_n = 0 \quad n \neq 1$$

解得

$$\begin{aligned}a_1 &= -\frac{3\mu_0}{2\mu_0 + \mu} H_0 \\b_1 &= \frac{\mu - \mu_0}{2\mu_0 + \mu} H_0 R_0^3 \\a_n &= b_n = 0 \quad n \neq 1\end{aligned}$$

带回磁标势表达式

$$\begin{aligned}\varphi_i &= \sum_n a_n r^n P_n(\cos \theta) = -\frac{3\mu_0}{2\mu_0 + \mu} H_0 r \cos \theta \\ \varphi_o &= -H_0 r P_1(\cos \theta) + \sum_n \frac{b_n}{r^{n+1}} P_n(\cos \theta) = -H_0 r \cos \theta + \frac{\mu - \mu_0}{2\mu_0 + \mu} \cdot \frac{H_0 R_0^3 \cos \theta}{r^2}\end{aligned}$$

重写表达式为矢量形式

$$\begin{aligned}\varphi_i &= -\frac{3\mu_0}{2\mu_0 + \mu} \vec{H}_0 \cdot \vec{r} \\ \varphi_o &= -\vec{H}_0 \cdot \vec{r} + \frac{\mu - \mu_0}{2\mu_0 + \mu} \cdot \frac{R_0^3}{r^3} \vec{H}_0 \cdot \vec{r}\end{aligned}$$

求梯度得到磁感应强度

$$\begin{aligned}\vec{B}_i &= -\mu \nabla \varphi_i = \frac{3\mu\mu_0}{2\mu_0 + \mu} \vec{H}_0 \\ \vec{B}_o &= -\mu_0 \nabla \varphi_o = \mu_0 \vec{H}_0 - \frac{\mu(\mu - \mu_0) R_0^3}{2\mu_0 \mu} \left[ \frac{\vec{H}}{r^3} - \frac{3(\vec{H} \cdot \vec{r}) \vec{r}}{r^5} \right]\end{aligned}$$

介质的磁极化强度

$$\vec{M} = \left( \frac{\mu}{\mu_0} - 1 \right) \frac{B_i}{\mu} = \left( \frac{\mu}{\mu_0} - 1 \right) \frac{3\mu_0}{2\mu_0 + \mu} \vec{H}_0 = \frac{3(\mu - \mu_0)}{2\mu_0 + \mu} \vec{H}_0$$

磁化电流为

$$\frac{4}{3} \pi R_0^3 \vec{M} = \frac{4\pi R_0^3 (\mu - \mu_0)}{2\mu_0 + \mu} \vec{H}_0$$

**3.13** 有一个均匀带电的薄导体壳, 半径为  $R_0$ , 总电荷为  $Q$ , 使球壳自身绕着某一直径以角速度  $\omega$  转动, 求球内外磁场  $\vec{B}$

**解** 在球外, 可以将球看成一个个环形电流, 球面上线电流密度为

$$\alpha_M = \frac{q\omega}{4\pi R_0^2} R_0 \sin \theta \vec{e}_\phi$$

总的磁偶极矩是

$$m = \int_0^\pi \pi (R_0 \sin \theta)^2 \alpha_M R_0 d\theta = \frac{q\omega}{4} R_0^2 \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta = \frac{q\omega R_0^2}{3}$$

方向是和转轴的方向相同。因此球外的磁标势为

$$\varphi_o = \frac{\vec{m} \cdot \vec{R}}{4\pi R^3} = \frac{m \cos \theta}{4\pi R^2}$$

磁感应强度为

$$\vec{B}_o = -\mu_0 \nabla \varphi_o = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[ \frac{3(\vec{m} \cdot \vec{R}) \vec{R}}{R^5} - \frac{\vec{m}}{R^3} \right]$$

设球内磁标势为

$$\varphi_i = \sum_n a_n R^n P_n(\cos \theta)$$

因为球内和球外交界处有自由电流, 不能引入磁标势, 但是可以用 g 磁场边值关系。法向磁场的连续性条件为

$$\sum_n n a_n R_0^{n-1} P_n(\cos \theta) = -2 \frac{m \cos \theta}{4\pi R_0^3}$$

因此

$$\begin{aligned} a_1 &= -\frac{m}{2\pi R_0^3} \\ a_n &= 0 \quad n \neq 1 \end{aligned}$$

因此球内磁标势为

$$\varphi_i = -\frac{m}{2\pi R_0^3} R \cos \theta = -\frac{\vec{m} \cdot \vec{R}}{2\pi R_0^3}$$

磁感应强度为

$$\vec{B}_i = -\mu_0 \nabla \varphi_i = \frac{\mu_0 \vec{m}}{2\pi R_0^3}$$