2020-2021 学年第一学期期末考试试卷

一、填空题(25 分，每题 5 分，共 5 题)

1、极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x}-\sin x-1}{1-\sqrt{1-x^{2}}}=$________.

2、设 $f(x)=\begin{cases}x^{2}+2x,x\leqslant 0\\ \ln(1+ax),x>0\end{cases}$ 在 x=0 可导，则 a=________.

3、设函数 f(x)在 x_0 可导，且 $f'(x_0)=0$，则 $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{f(x_0+t)-f(x_0-3t)}{t}=$________.

4、$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\displaystyle\int_{0}^{x}\sin(x-t)^{2}dt=$________.

5、已知微分方程 $y''+4y=x\cos x$，则其通解为________.

二、选择题(25 分，每题 5 分，共 5 题)

6、当 $x\to 1$ 时，函数 $\dfrac{x^{2}-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}$ 的极限.

A.等于 2　　B.等于 0　　C.为∞　　D.不存在但不为∞

7、设 $f(x)=x^{3}\sin\dfrac{3}{x},g(x)=3\sin x$，则当 $x\to 0$ 时，f(x)是 g(x)的.

A.高阶无穷小　　B.低阶无穷小　　C.同阶无穷小但不等价　　D.等价无穷小

8、设 y=f(x)在点 x_0 的某邻域内具有连续的三阶导数，若 $f'(x_0)=f''(x_0)=0$，且 $f^{(3)}(x_0)<0$，则

A. $f'(x_0)$ 是 $f'(x)$ 的极大值　　B. $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 的极大值

C. $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 的极小值　　D. $(x_0,f(x_0))$ 是 $y=f(x)$ 的拐点

9、设 f(x)是奇函数，除 x=0 外处处连续，x=0 是其第一类间断点，则 $\int_{0}^{x}f(t)dt$ 是.

A.连续的奇函数　　B.连续的偶函数

C.在 x=0 间断的奇函数　　　　　　　D.在 x=0 间断的偶函数

10、设非齐次线性微分方程$y'+P(x)y=Q(x)$有两个不同的解$y_1(x),y_2(x),C$为任意常数，则该方程的通解是.

A.$C[y_1(x)+y_2(x)]$　　　　　　B.$C[y_1(x)-y_2(x)]$

C.$y_1(x)+C[y_1(x)-y_2(x)]$　　　　D.$y_1(x)+C[y_1(x)+y_2(x)]$

三、解答题（共 7 题，60 分）

11、**（8 分）**设函数$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-x}{1+x^{2n}}$，讨论 f(x)的间断点并说明是哪一类间断点

12、**（8 分）**设函数 y=y(x)由参数方程$\begin{cases}x=1+2t^2\\ y=\displaystyle\int_1^{1+2\ln t}\frac{e^u}{u}du\end{cases}$ $(t>1)$ 所确定，求$\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=9}$

13、（**8 分**）设函数 y=y(x)由方程$2y^3-2y^2+2xy-x^2=1$所确定，试求 y=y(x)的驻点，并判定它是否为极值点。

14、（**8 分**）设可微函数 f(x)满足：$\int_0^x f(t)dt=\frac{x^2}{2}+\int_0^x tf(x-t)dt$，求 f(x)

15、（**8** 分）已知函数 f(x)在 x=0 的某个邻域内有连续导数，且$\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x^2}+\frac{f(x)}{x}\right)=2$，求$f(0)$

$f'(0)$

16、（10 分）已知星形线$\begin{cases} x=a\cos^3 t \\ y=a\sin^3 t \end{cases}$

（1）求星形线所围图形的面积（2）求星形线绕 x 轴旋转所得旋转体的体积

（3）求星形线的弧长.

17、（10 分）设函数 f(x)在[0,1]连续，在(0,1)内可微，且$f(0)=f(1)=0$，$f\left(\frac{1}{2}\right)=1$，

证明：（1）存在$\xi\in\left(\frac{1}{2},1\right)$，使得$f(\xi)=\xi$

（2）存在$\eta\in(0,\xi)$，使得$f'(\eta)=f(\eta)-\eta+1$

2020-2021 学年第一学期期末考试参考答案

一、填空题(20 分，每题 4 分，共 5 题)

1、【正解】1

【解析】

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-\sin x-1}{1-\sqrt{1-x^2}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-\cos x}{\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-x^2}\,(e^x-\cos x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-\cos x}{x}=\lim_{x\to 0}(e^x+\sin x)=1$$

【考点延伸】《考试宝典》专题一 函数、极限、连续性 第二部分 极限 2.3、极限的计算

2、【正解】2

【解析】$f(x)=\begin{cases}x^2+2x,x\leqslant 0\\ \ln(1+ax),x>0\end{cases}$ 在 x=0 可导，所以

$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(1+ax)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{a}{1+ax}=a.$$

$f'_-(0)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x^2+2x}{x}=2$.所以 a=2.

【考点延伸】《考试宝典》专题二 导数、微分第一部分 基本概念

3、【正解】0

【解析】$f'(x_0)=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{f(x_0+t)-f(x_0-3t)}{4t}=0\Rightarrow\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{f(x_0+t)-f(x_0-3t)}{t}=0$

【考点延伸】《考试宝典》专题二 导数、微分第一部分 基本概念

4、【正解】$\sin x^2$

【解析】

$$\int_0^x\sin(x-t)^2dt=\int_0^x\sin t^2dt\Rightarrow\frac{d}{dx}\int_0^x\sin(x-t)^2dt=\sin x^2$$

【考点延伸】《考试宝典》专题八 多元微分及其以应用 第四部分 隐函数的求导公式

5、【正解】$y=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x+\dfrac{1}{3}x\cos x+\dfrac{2}{9}\sin x$

【解析】对微分方程 $y''+4y=x\cos x$ 先求齐次方程 $y''+4y=0$ 的通解，其特征方程为

$p^2+4=0 \Rightarrow p=\pm 2i$，所以其通解为 $y=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x$；再设 $y''+4y=x\cos x$ 特解为

$y^*=ax\cos x+b\sin x$，代入方程，比较系数得 $a=\dfrac{1}{3}, b=\dfrac{2}{9}$.

【考点延伸】《考试宝典》专题六 （常）微分方程 第三部分 可降阶的高阶微分方程

二、填空题(25 分，每题 5 分，共 5 题)

6、【正解】D

【解析】$\because \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}\cdot\lim\limits_{x\to 1}e^{\frac{1}{x-1}}$,而 $\lim\limits_{x\to 1^-}e^{\frac{1}{x-1}}=0$，$\lim\limits_{x\to 1^+}e^{\frac{1}{x-1}}=+\infty$

$\therefore \lim\limits_{x\to 1}e^{\frac{1}{x-1}}$不存在. 故 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}$不存在且不为$\infty$.

【考点延伸】《考试宝典》专题一 函数、极限、连续性 第二部分 极限 2.3、极限的计算

7、【正解】A

【解析】$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3\sin\frac{3}{x}}{3\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3\sin\frac{3}{x}}{3x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\sin\frac{3}{x}}{3}=0$,所以 f(x)是 g(x)的高阶无穷小.

【考点延伸】《考试宝典》专题一 函数、极限、连续性 第二部分 极限 2.2、无穷小的定义和性质

8、【正解】D

【解析】由泰勒公式可知

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3+o((x-x_0)^3),$$

即 $f(x)-f(x_0)=\dfrac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3+o((x-x_0)^3)$.当 $f'''(x_0)<0, x>x_0$ 时，$f(x)<f(x_0)$；当 $f'''(x_0)<0, x<x_0$ 时，$f(x)>f(x_0)$，所以 f(x)在点 x_0 处不取极值,排除 A,B,C.

【考点延伸】《考试宝典》专题三 导数的应用、中值定理 第一部分 极值、最值和凹凸性

9、【正解】B

【解析】设 $g(x)=\int_0^x f(t)dt, \because f(-x)=-f(x) \therefore g(-x)=\int_0^{-x} f(t)dt$，令

$u=-t$, $-\int_0^x f(-u)du=\int_0^x f(u)du=g(x) \therefore g(x)$是偶函数.又由 f(x)在[0,x]可积，知 f(x)在[0,x]

有界。则 g(x)在 x=0 处的增量$|g(0+\Delta x)-g(0)|=|\int_0^{\Delta x} f(t)dt|\leq M\cdot\Delta x$

$\therefore \lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta g(x) = 0 = g(0) \therefore g(x)$ 在 x=0 连续。

【考点延伸】《考试宝典》专题一 函数、极限、连续性 第一部分 函数 第三部分 连续与间断

10、【正解】C

【解析】$y_1(x) - y_2(x)$ 是齐次线性微分方程 $y' + P(x)y = 0$ 的非零解，所以它的通解

$Y = C[y_1(x) - y_2(x)]$，非齐次微分方程的通解=对应齐次微分方程的通解+一个本身的特解.

【考点延伸】《考试宝典》专题六（常）微分方程 2.4、一阶非齐次线性微分方程

三、计算题

11、【解析】当$|x|<1$时，$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+x}{1+x^{2n}} = 1+x$；当$|x|>1$时，$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+x}{1+x^{2n}} = 0$.

故$f(x) = \begin{cases} 0, x \leqslant -1 \\ 1+x, -1<x<1 \\ 1, x=1 \\ 0, x>1 \end{cases}$.由于 $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = f(-1) = 0$，所以$x=-1$为连续点

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = 2$，$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = 0$，所以 x=1 为间断点，x=1 为第一类间断点.

【考点延伸】《考试宝典》专题一 函数、极限、连续性 第三部分 连续与间断.

12、【解析】

$$\frac{dy}{dt} = \frac{e^{1+2\ln t}}{1+2\ln t} \cdot \frac{2}{t} = \frac{2et}{1+2\ln t},$$

$$\frac{dx}{dt} = 4t, \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{2et}{1+2\ln t}}{4t} = \frac{e}{2(1+2\ln t)}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)\frac{1}{\frac{dx}{dt}} = \frac{e}{2} \cdot \frac{-1}{(1+2\ln t)^2} \cdot \frac{2}{t} \cdot \frac{1}{4t} = -\frac{e}{4t^2(1+2\ln t)^2}$$

当 x=9 时，由$x=1+2t^2$，则$9=1+2t^2$，由因为$t>1$，故 t=2，则 $\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=9} = -\dfrac{e}{16(1+2\ln 2)^2}$

【考点延伸】《考试宝典》专题二 导数、微分 第三部分 求导类型 3.5、求高阶导数

13、【解析】对原方程两边关于 x 求导可得$3y^2y' - 2yy' + xy' + y - x = 0$(*),令$y' = 0$,得 y=x,将

此代入原方程，有$2x^3 - x^2 - 1 = 0$从而得驻点 x=1, (*)式两边求导得

$(3y^2-2y+x)y''+2(3y-1)(y')^2+2y'-1=0$.因此，$y''\big|_{(1,1)}=\dfrac{1}{2}>0$.故驻点（1,1）是 y=y(x)

的极小值点.

【考点延伸】《考试宝典》专题八 多元微分及其以应用 第四部分 隐函数的求导公式

14、【解析】令 x−t=u，则 $\int_0^x tf(x-t)dt=-\int_x^0 (x-u)f(u)du=x\int_0^x f(u)du-\int_0^x uf(u)du$,故原方程化为

$\int_0^x f(t)dt=\dfrac{x^2}{2}+x\int_0^x f(t)dt-\int_0^x tf(t)dt$,两端对 x 求导 $f(x)=x+\int_0^x f(t)dt$，再次求导 $f'(x)=1+f(x)$.

解此方程得 $f(x)=Ce^x-1$.因为 f(0)=0,所以 C=1，故 $f(x)=e^x-1$.

【考点延伸】《考试宝典》专题八 多元微分及其以应用 第四部分 隐函数的求导公式

15、【解析】：当 $x\to 0$ 时，应用麦克劳林公式有 $f(x)=f(0)+f'(0)x+o(x),\sin x=x+o(x^2)$ 代

入得

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x^2}+\frac{f(x)}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{x+o(x^2)+f(0)x+f'(0)x^2+o(x^2)}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(1+f(0))x+f'(0)x^2+o(x^2)}{x^2}=2$$

所以 $f(0)=-1,f'(0)=2$.

【考点延伸】《考试宝典》专题三 导数的应用、中值定理 第三部分 中值定理

16、【解析】（1）$A=4\int_0^a ydx=4\int_{\frac{\pi}{2}}^0 a\sin^3 t\cdot 3a\cos^2 t\cdot(-\sin t)dt=\dfrac{3}{8}\pi a^2$

（2）

$$V_x=2\pi\int_{\frac{\pi}{2}}^0 (a\sin^3 t)^2 da\cos^3 t$$

$$=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2\sin^6 t\cdot 3a\cos^2 t\sin t dt=6\pi a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^7 t-\sin^9 t)dt=\frac{32}{105}\pi a^3$$

（3）$L=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{(x')^2+(y')^2}dt=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}3a\cos t\sin t dt=6a(\sin t)^2\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=6a$

【考点延伸】《考试宝典》专题五 定积分

17、【解析】（I）令$F(x)=f(x)-x$，则F(x)在[0,1]上连续，且有$F\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}>0,F(1)=-1<0$所以，存在一个$\xi\in\left(\frac{1}{2},1\right)$，使得$F(\xi)=0$，即$f(\xi)=\xi$

（II）令$G(x)=e^{-x}[f(x)-x]$，那么$G(0)=G(\xi)=0$.这样，存在一个$\eta\in(0,\xi)$，使得$G'(\eta)=0$，即$G'(\eta)=e^{-\eta}[f'(\eta)-1]-e^{-\eta}[f(\eta)-\eta]=0$,也即$f'(\eta)=f(\eta)-\eta+1$

【考点延伸】《考试宝典》第三部分 中值定理