

从零开始手写 VIO

第一讲 概述与课程介绍

贺一家、高翔、崔华坤

2019 年 6 月 7 日

① 课程内容与提要

② VIO 概述

③ 预备知识回顾

Section 1

课程内容与提要

课程与内容提要

- 本课程专注于视觉 + IMU 融合定位的基础理论和实现，作为视觉 SLAM 的进阶课程
- 在本课程中，你将学习到的重点内容有：
 - IMU 的工作原理和噪声方程
 - 视觉与 IMU 紧耦合的基础理论
 - 从零开始实现 VIO 紧耦合优化器（仅基于 Eigen）

相比视觉 SLAM 基础课程，本次课程更加注重 IMU 融合的理论推导与实现。

课程与内容提要

讲师介绍：

贺一家，中科院自动化所博士，“白巧克力亦唯心”博主，研究方向包括视觉 SLAM、多传感器信息融合。CSDN 博客专家，发表 SCI 和 EI 论文数篇。



课程与内容提要

讲师介绍：

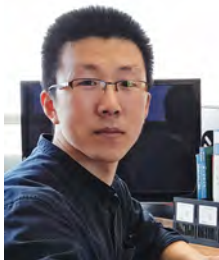
高翔，清华大学博士，慕尼黑工业大学博士后，《视觉 SLAM 十四讲》、《机器人学中的状态估计》作者、译者。曾在 RAS、IROS 等期刊会议发表论文。



课程与内容提要

讲师介绍：

崔华坤，北京工业大学物理学专业毕业，北京臻迪科技 SLAM 算法工程师，研究方向为基于多传感器融合的无人机定位导航。



课程与内容提要

- 课程时间安排：2019 年 6 月 9 日-7 月 28 日（第一期，共 8 节课）。
- 每周日晚上讲座 1.5-2 小时，以理论知识为主。
- 课后作业时间约 1: 4，每周约 8 小时，以编程实现课上内容为主。

课程与内容提要

预备知识

- 数学：线性代数、微积分、概率论
- 编程：Linux、C++、OpenCV
- 英语：文献阅读
- 专业知识：2D/3D 计算机视觉、图像处理

Section 2

VIO 概述

VIO 概述

VIO: (Visual-Inertial Odometry)

以视觉与 IMU 融合实现里程计

IMU (Inertial Measurement Unit), 惯性测量单元

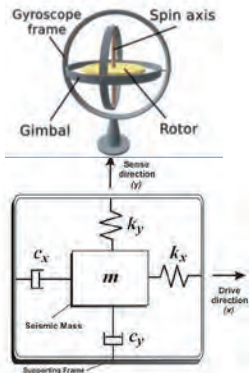
- 典型 6 轴 IMU 以较高频率 ($\geq 100\text{Hz}$) 返回被测量物体的角速度与加速度
- 受自身温度、零偏、振动等因素干扰, 积分得到的平移和旋转容易漂移

视觉 Visual Odometry

- 以图像形式记录数据, 频率较低 ($15 - 60\text{Hz}$ 居多)
- 通过图像特征点或像素推断相机运动

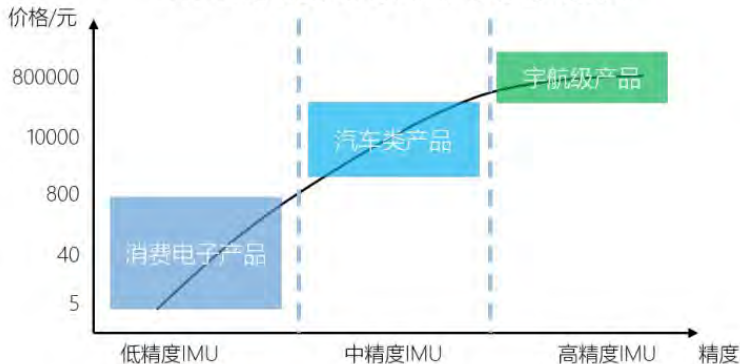
VIO 概述

六自由度 IMU 本身由一个陀螺仪和一个加速度计组成，分别测量自身的角速度和加速度。



VIO 概述

IMU的精度/价格/使用场景



手机等电子产品多使用价格低廉的 MEMS IMU (如 MPU 6050), 自动驾驶类则多使用几万元的 IMU (如 Apollo 中使用的 Novatel SPAN-IGM-A1)¹。

¹图片来自<https://zhuanlan.zhihu.com/p/32693377>

VIO 概述

IMU 与视觉定位方案优势与劣势对比：

方案	IMU	视觉
优势	快速响应 不受成像质量影响 角速度普遍比较准确 可估计绝对尺度	不产生漂移 直接测量旋转与平移
劣势	存在零偏 低精度 IMU 积分位姿发散 高精度价格昂贵	受图像遮挡、运动物体干扰 单目视觉无法测量尺度 单目纯旋转运动无法估计 快速运动时易丢失

VIO 概述

整体上，视觉和 IMU 定位方案存在一定互补性质：

- IMU 适合计算短时间、快速的运动；
- 视觉适合计算长时间、慢速的运动。

同时，可利用视觉定位信息来估计 IMU 的零偏，减少 IMU 由零偏导致的发散和累积误差；反之，IMU 可以为视觉提供快速运动时的定位。

VIO 概述

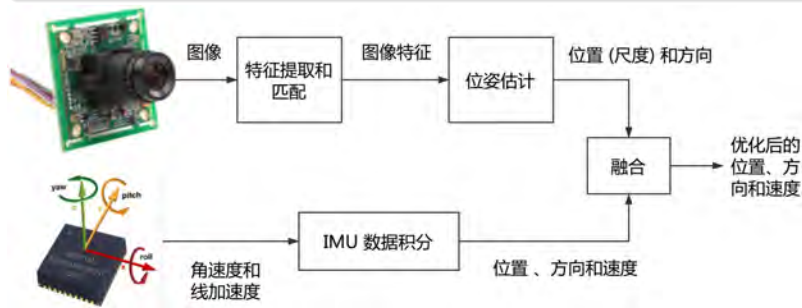
IMU 数据可与多种定位方案融合

- 自动驾驶中通常用 IMU+GPS/差分 GPS/RTK 的融合定位方案，形成 GNSS-INS 组合导航系统，达到厘米级定位精度；
- 头戴式 AR/VR 头盔则多使用视觉 +IMU 的 VIO 定位系统，形成高帧率定位方案。

融合方案

松耦合

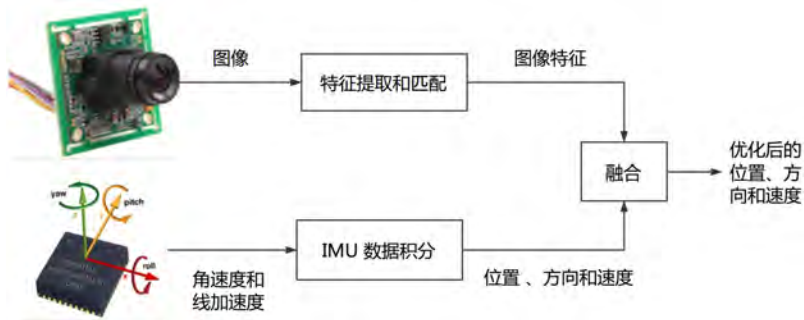
将 IMU 定位与视觉/GNSS 的位姿直接进行融合，融合过程对二者本身不产生影响，作为后处理方式输出。典型方案为卡尔曼滤波器。



融合方案

紧耦合

融合过程本身会影响视觉和 IMU 中的参数（如 IMU 的零偏和视觉的尺度）。典型方案为 MSCKF 和 非线性优化。



VIO 概述

为什么要使用紧耦合

- 单纯凭（单目）视觉或 IMU 都不具备估计 Pose 的能力：视觉存在尺度不确定性、IMU 存在零偏导致漂移；
- 松耦合中，视觉内部 BA 没有 IMU 的信息，在整体层面来看不是最优的。
- 紧耦合可以一次性建模所有的运动和测量信息，更容易达到最优。

VIO 概述

本课程要探讨的问题

- IMU 的测量数据表达了系统的什么状态，受哪些噪声影响？
- 如何建立一个带有 IMU 测量信息和视觉特征点信息的非线性优化问题并进行求解？
- 该问题随着时间将发生怎样的演变？

Section 3

预备知识回顾

预备知识回顾

数学符号约定：

- 普通变量： a, b, c
- 矩阵和向量： A, B, v
- 集合： \mathbb{R}, \mathbb{Z}
- 特殊集合： \mathcal{F}, \mathcal{G}
- 希腊字母和向量： α, α
- 李代数： $\mathfrak{so}(3), \mathfrak{se}(3)$

预备知识回顾

三维刚体运动：

- 我们通常在机器人/车辆上定义各种坐标系，如：
 - 世界坐标系 W ;
 - IMU 坐标系 I ;
 - 相机坐标系 C ;
- 坐标系之间变换关系由一个 $SE(3)$ 给出。如 I 到 W 系的变换矩阵为： T_{WI} ：

$$\mathbf{T}_{WI} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{WI} & \mathbf{t}_{WI} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 4}. \quad (1)$$

- \mathbf{R}_{WI} 为 3×3 的旋转矩阵， \mathbf{t}_{WI} 为平移向量。
- \mathbf{T}_{WI} 右乘一个 I 系下（齐次）坐标，将得到该点 W 系下坐标。

预备知识回顾

约定：

- 当某个量表达坐标系的转换关系时，写在右下脚标，例如 T_{WB} 。
- 当表达矢量在某坐标系中取的坐标时，写在左上角标，如 v^W 表达速度矢量在 World 系坐标。
- I 系也称为 Body 系。
- 定义明确时，有时会省略该脚标，我们会直接谈论 R, t 这样的量。
- 不刻意区分齐次和非齐次坐标，因为在程序中可以自动完成转换，且无歧义。
- 默认以 T_{WI} 表达并存储 IMU 的定位信息，而不是 T_{IW} 。二者实际互为逆，存储哪一类区别不大，视习惯而定。
- 同理， T_{WI} 的平移部分可直接视作 IMU 在世界中的坐标，从而进行绘图或可视化操作。

预备知识回顾

四元数：

- 旋转矩阵 \mathbf{R} 亦可用四元数 \mathbf{q} 描述。
- 四元数 \mathbf{q} 有一个实部和三个虚部。我们把实部写在前：

$$\mathbf{q} = [q_0, q_1, q_2, q_3]^T \text{ 或 } \mathbf{q} = [w, x, y, z]^T \quad (2)$$

其中 q_0 为实部， $[q_1, q_2, q_3]^T$ 为虚部。因为实部为标量，虚部为矢量，所以也可记为：

$$\mathbf{q} = [s, \mathbf{v}]^T. \quad (3)$$

其中 s 为标量， \mathbf{v} 为虚部的矢量。

预备知识回顾

四元数之间可以进行乘法运算：

$$\begin{aligned}
 \mathbf{q}_a \otimes \mathbf{q}_b = & w_a w_b - x_a x_b - y_a y_b - z_a z_b \\
 & + (w_a x_b + x_a w_b + y_a z_b - z_a y_b) i \\
 & + (w_a y_b - x_a z_b + y_a w_b + z_a x_b) j \\
 & + (w_a z_b + x_a y_b - y_a x_b + z_a w_b) k.
 \end{aligned} \tag{4}$$

或：

$$\mathbf{q}_a \otimes \mathbf{q}_b = \left[s_a s_b - \mathbf{v}_a^T \mathbf{v}_b, s_a \mathbf{v}_b + s_b \mathbf{v}_a + \mathbf{v}_a \times \mathbf{v}_b \right]^T. \tag{5}$$

此外，四元数可类似复数，定义加减、模长、逆、共轭等运算，不一一展开。

预备知识回顾

单位四元数可表达任意三维旋转，且无奇异性。

四元数和角轴的转换关系：设角轴为 ω 和 θ ，那么它对应的四元数为：

$$\mathbf{q} = [\cos \frac{\theta}{2}, \omega \sin \frac{\theta}{2}]^T. \quad (6)$$

利用此性质可推导四元数求导。

预备知识回顾

四元数时间导数：

设初始旋转为 $\mathbf{q} = [s, \mathbf{v}]$ ，然后，发生了角轴为 $\boldsymbol{\omega}, \theta$ 的旋转（右乘，对应四元数记作 $\Delta \mathbf{q}$ ），那么 \mathbf{q} 相对该旋转的导数为：

$$\begin{aligned}
 \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\mathbf{q} \otimes \Delta \mathbf{q} - \mathbf{q}}{\theta} &= \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\left[s \cos \frac{\theta}{2} - \mathbf{v}^T \boldsymbol{\omega} \sin \frac{\theta}{2}, s \boldsymbol{\omega} \sin \frac{\theta}{2} + \cos \frac{\theta}{2} \mathbf{v} + \mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega} \sin \frac{\theta}{2} \right]^T - \mathbf{q}}{\theta} \\
 &= \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\left[s \left(\cos \frac{\theta}{2} - 1 \right) - \mathbf{v}^T \boldsymbol{\omega} \sin \frac{\theta}{2}, s \boldsymbol{\omega} \sin \frac{\theta}{2} + \left(\cos \frac{\theta}{2} - 1 \right) \mathbf{v} + \mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega} \sin \frac{\theta}{2} \right]^T}{\theta} \\
 &= \left[-\frac{1}{2} \mathbf{v}^T \boldsymbol{\omega}, \frac{1}{2} s \boldsymbol{\omega} + \frac{1}{2} \mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega} \right]^T \\
 &= \mathbf{q} \otimes \left[0, \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \right]^T
 \end{aligned} \tag{7}$$

因此，若角速度为 $\boldsymbol{\omega}$ ，那么旋转的时间导数即为：

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{q} \otimes \left[0, \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \right]^T \tag{8}$$

预备知识回顾

除了利用四元数求导，亦可利用李代数进行旋转求导。

使用旋转矩阵 R 时，角速度为 ω ，那么 R 相对于时间的导数可写作：

$$\dot{R} = R\omega^{\wedge} \quad (9)$$

该式被称为泊松公式 (Poisson's equation)，其中 \wedge 为反对称矩阵算子：

$$\omega^{\wedge} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (10)$$

在本课程中亦记作： ω_{\times} ，表达含义相同。

预备知识回顾

$\mathfrak{so}(3)$ 导数:

在优化带有旋转的函数时, 通常计算一个增量 $\phi \in \mathfrak{so}(3)$, 然后用它更新当前估计值:

$$\mathbf{R} \leftarrow \mathbf{R} \exp(\phi^\wedge). \quad (11)$$

其中 \exp 为 $\mathfrak{so}(3)$ 至 $\mathrm{SO}(3)$ 上的指数映射。

本课程习惯为右乘, 实际当中左右乘等价, 仅为习惯上的差别。

注: (i) 不同的 \mathbf{R} 函数, 具体的导数形式也不同。(ii) 在程序中, 不必区分 \mathbf{R} 是以矩阵存储或是以四元数存储, 只需按照该式更新即可。

预备知识回顾

常见的一些雅可比（以自变量为 \mathbf{R} 举例）：
 旋转点的左扰动雅可比：

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial (\mathbf{R}\mathbf{p})}{\partial \varphi} &= \lim_{\varphi \rightarrow 0} \frac{\exp(\varphi^\wedge) \exp(\phi^\wedge) \mathbf{p} - \exp(\phi^\wedge) \mathbf{p}}{\varphi} \\
 &= \lim_{\varphi \rightarrow 0} \frac{(\mathbf{I} + \varphi^\wedge) \exp(\phi^\wedge) \mathbf{p} - \exp(\phi^\wedge) \mathbf{p}}{\varphi} \\
 &= \lim_{\varphi \rightarrow 0} \frac{\varphi^\wedge \mathbf{R}\mathbf{p}}{\varphi} = \lim_{\varphi \rightarrow 0} \frac{-(\mathbf{R}\mathbf{p})^\wedge \varphi}{\varphi} = -(\mathbf{R}\mathbf{p})^\wedge.
 \end{aligned} \tag{12}$$

预备知识回顾

旋转点的右扰动雅可比：

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial (\mathbf{R}\mathbf{p})}{\partial \varphi} &= \lim_{\varphi \rightarrow 0} \frac{\mathbf{R} \exp(\varphi^\wedge) \mathbf{p} - \mathbf{R}\mathbf{p}}{\varphi} \\
 &= \lim_{\varphi \rightarrow 0} \frac{\mathbf{R} (\mathbf{I} + \varphi^\wedge) \mathbf{p} - \mathbf{R}\mathbf{p}}{\varphi} \\
 &= \lim_{\varphi \rightarrow 0} \frac{\mathbf{R} \varphi^\wedge \mathbf{p}}{\varphi} = \lim_{\varphi \rightarrow 0} \frac{-\mathbf{R}\mathbf{p}^\wedge \varphi}{\varphi} = -\mathbf{R}\mathbf{p}^\wedge.
 \end{aligned} \tag{13}$$

预备知识回顾

旋转连乘的雅可比：

$$\begin{aligned}
 \frac{d \ln(\mathbf{R}_1 \mathbf{R}_2)}{d \mathbf{R}_2} &= \lim_{\phi \rightarrow 0} \frac{\ln(\mathbf{R}_1 \mathbf{R}_2 \exp(\phi^\wedge)) - \ln(\mathbf{R}_1 \mathbf{R}_2)}{\phi} \\
 &\stackrel{\ln(\mathbf{R} \exp(\phi^\wedge)) = \ln(\mathbf{R}) + \mathbf{J}_r^{-1} \phi}{=} \lim_{\phi \rightarrow 0} \frac{\ln(\mathbf{R}_1 \mathbf{R}_2) + \mathbf{J}_r^{-1} \phi - \ln(\mathbf{R}_1 \mathbf{R}_2)}{\phi} \\
 &= \mathbf{J}_r^{-1}(\ln(\mathbf{R}_1 \mathbf{R}_2))
 \end{aligned} \tag{14}$$

其中 \mathbf{J}_r^{-1} 为 $\text{SO}(3)$ 上的右雅可比：

$$\mathbf{J}_r^{-1}(\theta \boldsymbol{\omega}) = \frac{\theta}{2} \cot \frac{\theta}{2} \mathbf{I} + \left(1 - \frac{\theta}{2} \cot \frac{\theta}{2}\right) \boldsymbol{\omega} \boldsymbol{\omega}^T + \frac{\theta}{2} \boldsymbol{\omega}^\wedge. \tag{15}$$

预备知识回顾

旋转连乘的雅可比：

$$\begin{aligned}
 \frac{d \ln (\mathbf{R}_1 \mathbf{R}_2)}{d \mathbf{R}_1} &= \lim_{\phi \rightarrow 0} \frac{\ln (\mathbf{R}_1 \exp (\phi^{\wedge}) \mathbf{R}_2) - \ln (\mathbf{R}_1 \mathbf{R}_2)}{\phi} \\
 &= \lim_{\phi \rightarrow 0} \frac{\ln \left(\mathbf{R}_1 \mathbf{R}_2 \exp \left(\left(\mathbf{R}_2^T \phi \right)^{\wedge} \right) \right) - \ln (\mathbf{R}_1 \mathbf{R}_2)}{\phi} \quad (16) \\
 &= \mathbf{J}_r^{-1}(\ln (\mathbf{R}_1 \mathbf{R}_2)) \mathbf{R}_2^T
 \end{aligned}$$

这里用到了 $\text{SO}(3)$ 的伴随性质：

$$\mathbf{R}^T \exp (\phi^{\wedge}) \mathbf{R} = \exp \left(\left(\mathbf{R}^T \phi \right)^{\wedge} \right) \quad (17)$$

预备知识回顾

有关 $SE(3)$: 由于 $SE(3)$ 李代数性质复杂, 在 VIO 中, 我们通常使用 $SO(3) + \mathbf{t}$ 的形式表达旋转和平移。对平移部分使用矢量更新而非 $SE(3)$ 上的更新。