从零开始手写 VIO

第一讲 概述与课程介绍

贺一家、高翔、崔华坤

2019 年 6 月 7 日

目录

Section 1

课程内容与提要

课程与内容提要

- 本课程专注于视觉 +IMU 融合定位的基础理论和实现，作为视觉 SLAM 的进阶课程
- 在本课程中，你将学习到的重点内容有：
  - IMU 的工作原理和噪声方程
  - 视觉与 IMU **紧耦合**的基础理论
  - 从零开始实现 VIO 紧耦合优化器（**仅基于 Eigen**）

相比视觉 SLAM 基础课程，本次课程更加注重 **IMU 融合的理论推导与实现**。

课程与内容提要

讲师介绍：

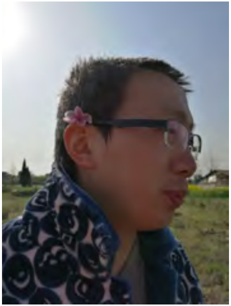
贺一家，中科院自动化所博士，“白巧克力亦唯心”博主，研究方向包括视觉 SLAM、多传感器信息融合。CSDN 博客专家，发表 SCI 和 EI 论文数篇。

课程与内容提要

深蓝学院 shenlanxueyuan.com

讲师介绍:

高翔，清华大学博士，慕尼黑工业大学博士后，《视觉 SLAM 十四讲》、《机器人学中的状态估计》作者、译者。曾在 RAS、IROS 等期刊会议发表论文。



课程与内容提要

讲师介绍:

崔华坤，北京工业大学物理学专业毕业，北京臻迪科技 SLAM 算法工程师，研究方向为基于多传感器融合的无人机定位导航。

课程与内容提要

- 课程时间安排：2019 年 6 月 9 日-7 月 28 日（第一期，共 8 节课）。
- 每周日晚上讲座 1.5-2 小时，以理论知识为主。
- 课后作业时间约 1：4，每周约 8 小时，以编程实现课上内容为主。

课程与内容提要

预备知识

- 数学：线性代数、微积分、概率论
- 编程：Linux、C++、OpenCV
- 英语：文献阅读
- 专业知识：2D/3D 计算机视觉、图像处理

Section 2

VIO 概述

VIO 概述

VIO：（Visual-Inertial Odometry）

以视觉与 IMU 融合实现里程计

IMU（Inertial Measurement Unit），惯性测量单元

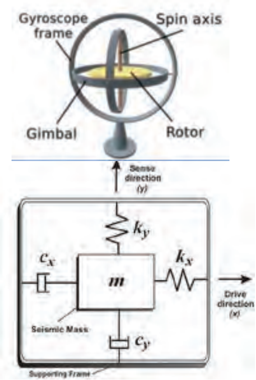
- 典型 6 轴 IMU 以较高频率（≥ 100Hz）返回被测量物体的角速度与加速度
- 受自身温度、零偏、振动等因素干扰，积分得到的平移和旋转容易漂移

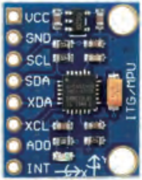
视觉 Visual Odometry

- 以图像形式记录数据，频率较低（$15 - 60$Hz 居多）
- 通过图像特征点或像素推断相机运动

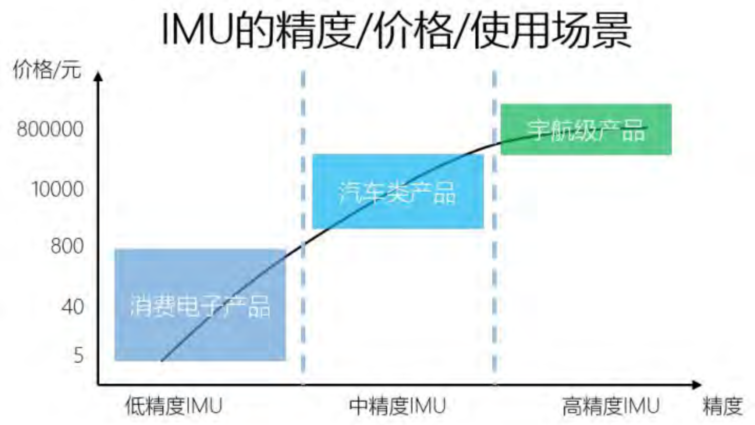
VIO 概述

六自由度 IMU 本身由一个陀螺仪和一个加速度计组成，分别测量自身的角速度和加速度。





VIO 概述



手机等电子产品多使用价格低廉的 MEMS IMU（如 MPU 6050），自动驾驶类则多使用几万元的 IMU（如 Apollo 中使用的 Novatel SPAN-IGM-A1）[1]。

[1]图片来自https://zhuanlan.zhihu.com/p/32693377

VIO 概述

IMU 与视觉定位方案优势与劣势对比：

方案	IMU	视觉
优势	快速响应 不受成像质量影响 角速度普遍比较准确 可估计绝对尺度	不产生漂移 直接测量旋转与平移
劣势	存在零偏 低精度 IMU 积分位姿发散 高精度价格昂贵	受图像遮挡、运动物体干扰 单目视觉无法测量尺度 单目纯旋转运动无法估计 快速运动时易丢失

VIO 概述

整体上，视觉和 IMU 定位方案存在一定互补性质：

- IMU 适合计算短时间、快速的运动；
- 视觉适合计算长时间、慢速的运动。

同时，可利用视觉定位信息来估计 IMU 的零偏，减少 IMU 由零偏导致的发散和累积误差；反之，IMU 可以为视觉提供快速运动时的定位。

VIO 概述

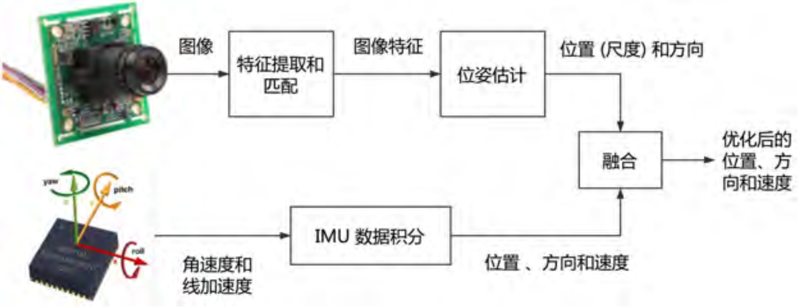
IMU 数据可与多种定位方案融合

- 自动驾驶中通常用 IMU+GPS/差分 GPS/RTK 的融合定位方案，形成 GNSS-INS 组合导航系统，达到厘米组定位精度；
- 头戴式 AR/VR 头盔则多使用视觉 +IMU 的 VIO 定位系统，形成高帧率定位方案。

融合方案

松耦合

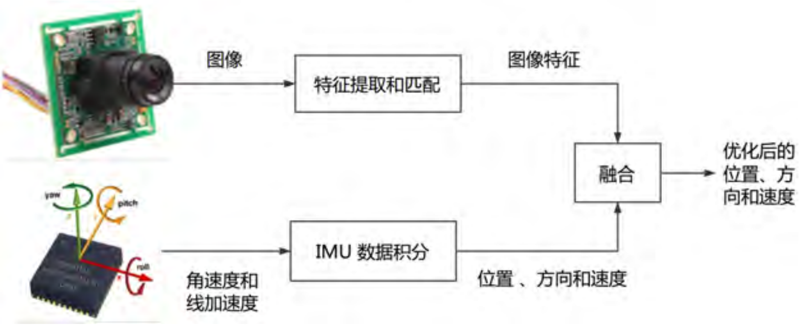
将 IMU 定位与视觉/GNSS 的位姿直接进行融合，融合过程对二者本身不产生影响，作为后处理方式输出。典型方案为卡尔曼滤波器。



融合方案

紧耦合

融合过程本身会影响视觉和 IMU 中的参数（如 IMU 的零偏和视觉的尺度）。典型方案为 MSCKF 和非线性优化。



VIO 概述

为什么要使用紧耦合

- 单纯凭（单目）视觉或 IMU 都不具备估计 Pose 的能力：视觉存在尺度不确定性、IMU 存在零偏导致漂移；
- 松耦合中，视觉内部 BA 没有 IMU 的信息，在整体层面来看不是最优的。
- 紧耦合可以一次性建模所有的运动和测量信息，更容易达到最优。

VIO 概述

深蓝学院 shenlanxueyuan.com

本课程要探讨的问题

- IMU 的测量数据表达了系统的什么状态，受哪些噪声影响？
- 如何建立一个带有 IMU 测量信息和视觉特征点信息的非线性优化问题并进行求解？
- 该问题随着时间将发生怎样的演变？

Section 3

预备知识回顾

预备知识回顾

数学符号约定：

- 普通变量： a, b, c
- 矩阵和向量： $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{v}$
- 集合： $\mathbb{R}, \mathbb{Z}$
- 特殊集合： $\mathcal{F}, \mathcal{G}$
- 希腊字母和向量： α, $\boldsymbol{\alpha}$
- 李代数： $\mathfrak{so}(3)$,$\mathfrak{se}(3)$

预备知识回顾

三维刚体运动：

- 我们通常在机器人/车辆上定义各种坐标系，如：
  - 世界坐标系 W；
  - IMU 坐标系 I；
  - 相机坐标系 C；
- 坐标系之间变换关系由一个 SE(3) 给出。如 I 到 W 系的变换矩阵为：$\mathbf{T}_{WI}$：

$$\mathbf{T}_{WI} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{WI} & \mathbf{t}_{WI} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times4}. \tag{1}$$

- $\mathbf{R}_{WI}$ 为 3×3 的旋转矩阵，$\mathbf{t}_{WI}$ 为平移向量。
- $\mathbf{T}_{WI}$ 右乘一个 I 系下（齐次）坐标，将得到该点 **W** 系下坐标。

预备知识回顾

约定:

- 当某个量表达坐标系的转换关系时，写在右下脚标，例如 $\mathbf{T}_{WB}$。
- 当表达矢量在某坐标系中取的坐标时，写在右上角标，如 $\mathbf{v}^{W}$ 表达速度矢量在 World 系坐标。
- $\mathbf{I}$ 系也称为 Body 系。
- 定义明确时，有时会省略该脚标，我们会直接谈论 $\mathbf{R}, \mathbf{t}$ 这样的量。
- 不刻意区分齐次和非齐次坐标，因为在程序中可以自动完成转换，且无歧义。
- 默认以 $\mathbf{T}_{WI}$ 表达并存储 IMU 的定位信息，而不是 $\mathbf{T}_{IW}$。二者实际互为逆，存储哪一类区别不大，视习惯而定。
- 同理，$\mathbf{T}_{WI}$ 的平移部分可直接视作 IMU 在世界中的坐标，从而进行绘图或可视化操作。

预备知识回顾

四元数：

- 旋转矩阵 $\mathbf{R}$ 亦可用四元数 $\mathbf{q}$ 描述。
- 四元数 $\mathbf{q}$ 有一个实部和三个虚部。我们把实部写在前：

$$\mathbf{q} = [q_0, q_1, q_2, q_3]^T \text{ 或 } \mathbf{q} = [w, x, y, z]^T \tag{2}$$

其中 q_0 为实部，$[q_1, q_2, q_3]^T$ 为虚部。因为实部为标量，虚部为矢量，所以也可记为：

$$\mathbf{q} = [s, \mathbf{v}]^T. \tag{3}$$

其中 s 为标量，$\mathbf{v}$ 为虚部的矢量。

预备知识回顾

深蓝学院 shenlanxueyuan.com

四元数之间可以进行乘法运算：

$$
\begin{aligned}
\mathbf{q}_a \otimes \mathbf{q}_b = & w_a w_b - x_a x_b - y_a y_b - z_a z_b \\
& + \left(w_a x_b + x_a w_b + y_a z_b - z_a y_b\right) i \\
& + \left(w_a y_b - x_a z_b + y_a w_b + z_a x_b\right) j \\
& + \left(w_a z_b + x_a y_b - y_a x_b + z_a w_b\right) k .
\end{aligned} \tag{4}
$$

或：

$$
\mathbf{q}_a \otimes \mathbf{q}_b = \left[s_a s_b - \mathbf{v}_a^{\mathrm{T}} \mathbf{v}_b, s_a \mathbf{v}_b + s_b \mathbf{v}_a + \mathbf{v}_a \times \mathbf{v}_b\right]^{\mathrm{T}} . \tag{5}
$$

此外，四元数可类似复数，定义加减、模长、逆、共轭等运算，不一一展开。

预备知识回顾

单位四元数可表达任意三维旋转，且无奇异性。
四元数和角轴的转换关系：设角轴为 ω 和 θ，那么它对应的四元数为：

$$\mathbf{q} = [\cos\frac{\theta}{2}, \boldsymbol{\omega}\sin\frac{\theta}{2}]^{\mathrm{T}}. \tag{6}$$

利用此性质可推导四元数求导。

预备知识回顾

四元数时间导数:

设初始旋转为 $\mathbf{q}=[s,\mathbf{v}]$，然后，发生了角轴为 $\boldsymbol{\omega},\theta$ 的旋转（右乘，对应四元数记作 $\Delta\mathrm{q}$），那么 q 相对该旋转的导数为:

$$\begin{aligned}\lim_{\theta\to 0}\frac{\mathbf{q}\otimes\Delta\mathbf{q}-\mathbf{q}}{\theta} &= \lim_{\theta\to 0}\frac{\left[s\cos\frac{\theta}{2}-\mathbf{v}^T\boldsymbol{\omega}\sin\frac{\theta}{2}, s\boldsymbol{\omega}\sin\frac{\theta}{2}+\cos\frac{\theta}{2}\mathbf{v}+\mathbf{v}\times\boldsymbol{\omega}\sin\frac{\theta}{2}\right]^{\mathrm{T}}-\mathbf{q}}{\theta}\\ &= \lim_{\theta\to 0}\frac{\left[s\left(\cos\frac{\theta}{2}-1\right)-\mathbf{v}^T\boldsymbol{\omega}\sin\frac{\theta}{2}, s\boldsymbol{\omega}\sin\frac{\theta}{2}+\left(\cos\frac{\theta}{2}-1\right)\mathbf{v}+\mathbf{v}\times\boldsymbol{\omega}\sin\frac{\theta}{2}\right]^{\mathrm{T}}}{\theta}\\ &= \left[-\frac{1}{2}\mathbf{v}^T\boldsymbol{\omega}, \frac{1}{2}s\boldsymbol{\omega}+\frac{1}{2}\mathbf{v}\times\boldsymbol{\omega}\right]^{\mathrm{T}}\\ &= \mathbf{q}\otimes\left[0, \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}\right]^{\mathrm{T}}\end{aligned} \tag{7}$$

因此，若角速度为 $\boldsymbol{\omega}$，那么旋转的时间导数即为:

$$\dot{\mathbf{q}}=\mathbf{q}\otimes[0,\frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}]^{\mathrm{T}} \tag{8}$$

预备知识回顾

除了利用四元数求导，亦可利用李代数进行旋转求导。
使用旋转矩阵 $\mathbf{R}$ 时，角速度为 $\boldsymbol{\omega}$，那么 $\mathbf{R}$ 相对于时间的导数可写作：

$$\dot{\mathbf{R}} = \mathbf{R}\boldsymbol{\omega}^{\wedge} \tag{9}$$

该式被称为**泊松公式**（Possion's equation），其中 $^{\wedge}$ 为反对称矩阵算子：

$$\boldsymbol{\omega}^{\wedge} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix} \tag{10}$$

在本课程中亦记作：$\boldsymbol{\omega}_{\times}$，表达含义相同。

预备知识回顾

$\mathfrak{so}(3)$ 导数：
在优化带有旋转的函数时，通常计算一个增量 $\phi \in \mathfrak{so}(3)$，然后用它更新当前估计值：

$$\mathbf{R} \leftarrow \mathbf{R} \exp(\phi^\wedge). \tag{11}$$

其中 exp 为 $\mathfrak{so}(3)$ 至 SO(3) 上的指数映射。
本课程习惯为右乘，实际当中左右乘等价，仅为习惯上的差别。
注：(i) 不同的 $\mathbf{R}$ 函数，具体的导数形式也不同。(ii) 在程序中，不必区分 $\mathbf{R}$ 是以矩阵存储或是以四元数存储，只需按照该式更新即可。

预备知识回顾

常见的一些雅可比（以自变量为 $\mathbf{R}$ 举例）:
旋转点的左扰动雅可比:

$$\begin{aligned}\frac{\partial\left(\mathbf{R}\mathbf{p}\right)}{\partial\boldsymbol{\varphi}}&=\lim_{\boldsymbol{\varphi}\to\mathbf{0}}\frac{\exp\left(\boldsymbol{\varphi}^{\wedge}\right)\exp\left(\boldsymbol{\phi}^{\wedge}\right)\mathbf{p}-\exp\left(\boldsymbol{\phi}^{\wedge}\right)\mathbf{p}}{\boldsymbol{\varphi}}\\&=\lim_{\boldsymbol{\varphi}\to\mathbf{0}}\frac{\left(\mathbf{I}+\boldsymbol{\varphi}^{\wedge}\right)\exp\left(\boldsymbol{\phi}^{\wedge}\right)\mathbf{p}-\exp\left(\boldsymbol{\phi}^{\wedge}\right)\mathbf{p}}{\boldsymbol{\varphi}}\\&=\lim_{\boldsymbol{\varphi}\to\mathbf{0}}\frac{\boldsymbol{\varphi}^{\wedge}\mathbf{R}\mathbf{p}}{\boldsymbol{\varphi}}=\lim_{\boldsymbol{\varphi}\to\mathbf{0}}\frac{-(\mathbf{R}\mathbf{p})^{\wedge}\boldsymbol{\varphi}}{\boldsymbol{\varphi}}=-(\mathbf{R}\mathbf{p})^{\wedge}.\end{aligned}\tag{12}$$

预备知识回顾

深蓝学院 shenlanxueyuan.com

旋转点的右扰动雅可比：

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial(\mathbf{R}\mathbf{p})}{\partial\boldsymbol{\varphi}} &= \lim_{\boldsymbol{\varphi}\to\mathbf{0}} \frac{\mathbf{R}\exp\left(\boldsymbol{\varphi}^{\wedge}\right)\mathbf{p}-\mathbf{R}\mathbf{p}}{\boldsymbol{\varphi}} \\
&= \lim_{\boldsymbol{\varphi}\to\mathbf{0}} \frac{\mathbf{R}\left(\mathbf{I}+\boldsymbol{\varphi}^{\wedge}\right)\mathbf{p}-\mathbf{R}\mathbf{p}}{\boldsymbol{\varphi}} \\
&= \lim_{\boldsymbol{\varphi}\to\mathbf{0}} \frac{\mathbf{R}\boldsymbol{\varphi}^{\wedge}\mathbf{p}}{\boldsymbol{\varphi}} = \lim_{\boldsymbol{\varphi}\to\mathbf{0}} \frac{-\mathbf{R}\mathbf{p}^{\wedge}\boldsymbol{\varphi}}{\boldsymbol{\varphi}} = -\mathbf{R}\mathbf{p}^{\wedge}.
\end{aligned} \tag{13}
$$

预备知识回顾

旋转连乘的雅可比：

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\ln\left(\mathbf{R}_1\mathbf{R}_2\right)}{\mathrm{d}\mathbf{R}_2} &= \lim_{\boldsymbol{\phi}\to\mathbf{0}} \frac{\ln\left(\mathbf{R}_1\mathbf{R}_2\exp\left(\boldsymbol{\phi}^\wedge\right)\right) - \ln\left(\mathbf{R}_1\mathbf{R}_2\right)}{\boldsymbol{\phi}} \\
&\overset{\ln(\mathbf{R}\exp(\boldsymbol{\phi}^\wedge))=\ln(\mathbf{R})+\mathbf{J}_r^{-1}\boldsymbol{\phi}}{=} \lim_{\boldsymbol{\phi}\to\mathbf{0}} \frac{\ln\left(\mathbf{R}_1\mathbf{R}_2\right) + \mathbf{J}_r^{-1}\boldsymbol{\phi} - \ln\left(\mathbf{R}_1\mathbf{R}_2\right)}{\boldsymbol{\phi}} \\
&= \mathrm{J}_r^{-1}(\ln(\mathbf{R}_1\mathbf{R}_2))
\end{aligned}
\tag{14}
$$

其中 $\mathbf{J}_r^{-1}$ 为 $\mathrm{SO}(3)$ 上的右雅可比：

$$
\mathbf{J}_r^{-1}(\theta\boldsymbol{\omega}) = \frac{\theta}{2}\cot\frac{\theta}{2}\mathbf{I} + \left(1 - \frac{\theta}{2}\cot\frac{\theta}{2}\right)\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}} + \frac{\theta}{2}\boldsymbol{\omega}^\wedge. \tag{15}
$$

预备知识回顾

旋转连乘的雅可比：

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\ln\left(\mathbf{R}_1\mathbf{R}_2\right)}{\mathrm{d}\mathbf{R}_1} &= \lim_{\phi\to 0}\frac{\ln\left(\mathbf{R}_1\exp\left(\boldsymbol{\phi}^{\wedge}\right)\mathbf{R}_2\right)-\ln\left(\mathbf{R}_1\mathbf{R}_2\right)}{\boldsymbol{\phi}} \\ &= \lim_{\phi\to 0}\frac{\ln\left(\mathbf{R}_1\mathbf{R}_2\exp\left(\left(\mathbf{R}_2^T\boldsymbol{\phi}\right)^{\wedge}\right)\right)-\ln\left(\mathbf{R}_1\mathbf{R}_2\right)}{\boldsymbol{\phi}} \\ &= \mathbf{J}_r^{-1}(\ln(\mathbf{R}_1\mathbf{R}_2))\mathbf{R}_2^T\end{aligned} \tag{16}$$

这里用到了 $\mathrm{SO}(3)$ 的伴随性质：

$$\mathbf{R}^T\exp\left(\boldsymbol{\phi}^{\wedge}\right)\mathbf{R}=\exp\left(\left(\mathbf{R}^T\boldsymbol{\phi}\right)^{\wedge}\right) \tag{17}$$

预备知识回顾

有关 $\mathrm{SE}(3)$：由于 $\mathrm{SE}(3)$ 李代数性质复杂，在 VIO 中，我们通常使用 $\mathrm{SO}(3)+\mathbf{t}$ 的形式表达旋转和平移。对平移部分使用矢量更新而非 $\mathrm{SE}(3)$ 上的更新。