

證明 3-SAT 問題為 NP-Complete

- 什麼是 3-SAT 問題：

3-SAT 是 SAT 問題的一個特定型態。

假設有一個 SAT 函數，這個函數裡面的每一個括號中都剛好有 3 個變數，我們對這個函數中的每個變數分別指派為 True 或者 False，最終函數的結果會是 True。這樣就是一個 3-SAT 問題。

下面舉一個實際例子：

假設有一個函數 $E = (-x_1 \vee x_2 \vee -x_3) \wedge (x_1 \vee -x_2 \vee -x_4) \wedge (-x_5 \vee x_2 \vee x_3)$ 。

接著分別指派 x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 的值為 True 或 False，使 E 的結果為 True。

指派： $x_1 \leftarrow T, x_2 \leftarrow T, x_3 \leftarrow T, x_4 \leftarrow F, x_5 \leftarrow F$ [1]

也就是說，在這個例子中：

$$E = (-TVTV-T) \wedge (TV-TV-F) \wedge (-FVT \vee T)$$

$$= (FVTvF) \wedge (TvFvT) \wedge (TvT \vee T)$$

$$= T \wedge T \wedge T$$

$$= T$$

得出 E 的結果為 True。

由於 SAT 問題是一個已知的 NPC 問題，令 SAT 問題為 Q' ，3-SAT 問題為 Q 。

- 根據下列表格可以得知， Q' 與 Q 之間是可以存在一個函數 $f(x)$ 將其轉換的，並且轉換前後函數的邏輯意涵並沒有受到改變。

變數個數	函數 E 括號內情況	轉換後之函數 E' 括號情況
1	(x_1)	$(x_1 \vee y_1 \vee y_2) \wedge (x_1 \vee \bar{y}_1 \vee y_2) \wedge (x_1 \vee y_1 \vee \bar{y}_2) \wedge (x_1 \vee \bar{y}_1 \vee \bar{y}_2)$
2	$(x_1 \vee x_2)$	$(x_1 \vee x_2 \vee y_1) \wedge (x_1 \vee x_2 \vee \bar{y}_1)$
3	$(x_1 \vee x_2 \vee x_3)$	不需做轉換
多於3	$(x_1 \vee x_2 \vee \dots \vee x_k)$	$(x_1 \vee x_2 \vee y_1) \wedge (\bar{y}_1 \vee x_3 \vee y_2) \wedge (\bar{y}_2 \vee x_4 \vee y_3) \wedge \dots \wedge (\bar{y}_{k-4} \vee x_{k-2} \vee y_{k-3}) \wedge (\bar{y}_{k-3} \vee x_{k-1} \vee x_k)$

- 由上表得知， Q' 與 Q 之間確實存在一個函數 $f(x)$

2. 假設一個 SAT 問題的布林函數 E 有 n 個括號，且每個括號中最多有 k 個變數，則函數 E 轉換成 3-SAT 問題之布林函數 E' 所花費的時間複雜度最多只需要 $O(nk)$ 。

在 SAT 問題的布林函數 E 中，某一個括號內的變數：

若只有一個或兩個變數時，則所需的轉換時間為常數時間 (\because 轉換過程固定不變)。

若有三個變數時，則不需要轉換時間，轉換時間為 0。

若有多於三個變數 (即： $k > 3$) 時，則需要的轉換時間函數 $k-2$ ，時間複雜度為 $O(k)$ 。

由於可能有 n 個括號，因此所需要花費在轉換上的時間複雜度最多為 $O(nk)$

由上述說明，可得知此函數 $f(x)$ 為 polynomial-time computable。

3. 從這個問題來看，從 E 轉換到 E' ，這組解要讓一個 SAT 問題的布林函數 E 為 True，且也使轉換後的 3-SAT 問題的布林函數 E' 為 True，則代表這組解是能夠分別讓 E' 中的三個括號分別都為 True 的。反過來說，從 E' 轉換到 E ，這組解會使一個 3-SAT 問題中的三個括號分別都為 True，而這組解也必能使 SAT 問題的結果為 True。[1]

從上述三點的說明可以證明，由於 SAT 問題是屬於一個已經被驗證的 NPC 問題，而 3-SAT 問題可以被轉換為 SAT 問題，故而證明出 3-SAT 問題是屬於一個 NPC 問題。

● 參考資料

[1] 陳士杰。(2020, 12/20) “演算法講義：Course 9 - NP Theory 序論” 來源：

http://debussy.im.nuu.edu.tw/sjchen/Algorithms_final.html