TD 9 - Révisions

Exercice 1 Soit $G = (V, A)$ un graphe orienté. Nous souhaitons savoir si le graphe est fortement connexe.

1. Rappelez la définition de fortement connexe.
2. Concevez un algorithme qui s'exécute en temps $O(n + m)$ qui vérifie si le graphe est fortement connexe [1].
3. Si le graphe n'est pas fortement connexe comment peut-on s'assurer (avec une preuve) que le graphe a au moins deux composantes fortement connexes.

Exercice 2

1. Soit K_{2n} le graphe complet avec un nombre pair de sommets, montrez qu'on peut arête-colorier K_{2n} avec $2n - 1$ couleurs.
2. Soit $G = (V, E)$ un graphe 2-connexe. Montrez que pour toute paire de sommets x, y il existe un cycle C qui les contient.
3. On souhaite colorer un graphe avec la procédure suivante : i est initialisé à 1 et $F = G$.
   (a) Trouver S un stable maximal (au sens de l'inclusion) de F
   (b) Colorier S avec la couleur i
   (c) Supprimer S de F (i.e. $F := F[V(F) - S]$), incrémenter i d'un unité.
   (d) Recommencer à l'étape (a).

   En termes de couleurs utilisées, est-ce que cette procédure est meilleure ou pire que l'heuristique gloutonne ?

Exercice 3 Un hypercube de dimension k, noté $\mathcal{H}_k$, est un graphe obtenu à partir de deux copies de l'hypercube de dimension $k - 1$, en reliant les sommets copiés par un couplage parfait. L'hypercude de dimension 0 est un sommet isolé. L'hypercube de dimension 1 est une arête, pour la dimension 2 un cycle de taille 4...

1. On ne doit pas utiliser l'algorithme de calcul des Composantes fortement connexes vu en cours.

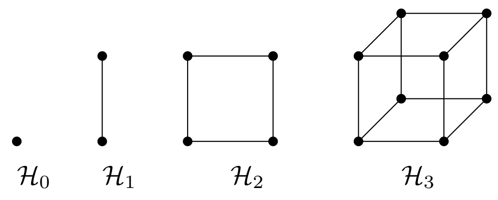

FIGURE 1 – Hypercubes de dimension 0 à dimension 3

1. Représentez/dessinez $\mathcal{H}_4$ l'hypercube de dimension 4 .
2. En fonction de la dimension k, quel est le nombre de sommet d'un hypercube $\mathcal{H}_k$?
3. Montrez que l'hypercube de dimension arbitraire est un graphe biparti.
4. Montrez que l'hypercube admet toujours un chemine Hamiltonien [2]
5. Montrez que l'hypercube admet un cycle Hamiltonien.

2. Un chemin qui passe exactement une fois par chaque sommet.