《概率论与数理统计》模拟题答案

一、选择题(每题2分)

1、B. 2、C. 3、C. 4、A. 5、C.

二、填空题(每空2分)

6、$A\bar{B} \ \cup \ \bar{A}B$. 7、0.4. 8、0.95. 9、1. 10、$N(b,a^2)$. 11、0.8, -0.1.

12、1. 13、$H_0:\mu=\mu_0;H_1:\mu>\mu_0$或$H_0:\mu\le\mu_0;H_1:\mu>\mu_0$. 14、4/9.

三计算题

15、解：(1) 放回抽样$P(A)=2\times\frac{4}{10}\times\frac{6}{10}=0.48$; (—4分)

(2)不放回抽样$P(A)=2\times\frac{4}{10}\times\frac{6}{9}=\frac{8}{15}$. (—4分)

16、解：设事件A,B,C分别表示肥胖者、不胖不瘦者、瘦者；事件D表示从该地区中随机抽取一人发现患高血压.

已知：$P(A)=10\%;P(B)=82\%;P(C)=8\%;P(D|A)=20\%;P(D|B)=10\%;P(D|C)=5\%$; (—1分)

(1)由全概率公式可得:

$P(D)=P(A)\times P(D|A)+P(B)\times P(D|B)+P(C)\times P(D|C)=0.088$; (—4分)

(2)由贝叶斯公式可得：

$P(A|D)=P(A)\times P(D|A)/P(D)=5/22$. (—4分)

17、解：

$P\{\{X<\frac{1}{2}\}\cup\{Y<\frac{1}{2}\}\}=P\{X<\frac{1}{2}\}+P\{Y<\frac{1}{2}\}-P\{X<\frac{1}{2},Y<\frac{1}{2}\}$ (—1分)

$P\{X<\frac{1}{2}\}=\int_0^{1/2}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dydx=1/2$; (—2分)

$P\{Y<\frac{1}{2}\}=\int_0^{1/2}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dxdy=1/4$; (—2分)

$P\{X<\frac{1}{2},Y<\frac{1}{2}\}=1/8$; (—2分)

$P\{\{X<\frac{1}{2}\}\cup\{Y<\frac{1}{2}\}\}=1/2+1/4-1/8=5/8$. (—1分)

18、解：设两周的需求量分别为X、Y，记$Z=X+Y$, 则：

(1)由卷积公式得

$$\begin{aligned} f_Z(z) &= \int_0^z f_X(x)f_Y(z-x)dx \\ &= \int_0^z \lambda e^{-\lambda x}\lambda e^{-\lambda(z-x)}dx \\ &= \lambda^2\int_0^z e^{-\lambda z}dx \\ &= \lambda^2 z e^{-\lambda z} \end{aligned}$$

即$f_Z(z)=\lambda^2 z e^{-\lambda z}$, $z>0$ (—5分)

(2)

$$\mathrm{E}Z=\mathrm{E}X+\mathrm{E}Y=\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\lambda}=\frac{2}{\lambda}$$ (—3分)

19、解：已知$X \sim B(1,p)$, 则$\mathrm{E}X = p$ (—1分)
由矩法估计得

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \overline{X} = EX = p \qquad (—2分)$$

则p 的矩估计值$\hat{p} = \frac{1}{5}\sum\limits_{i=1}^{5} x_i = \frac{3}{5}$ (—2分)

20、解：似然函数为

$$L(x_1, \ldots, x_n; \theta) = \prod_{i=1}^{n} P\{X_i = x_i\} = \prod_{i=1}^{n} \frac{\theta^{x_i}}{x_i!} e^{-\theta} = \theta^{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i} e^{-n\theta} \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i!} \qquad (—2分)$$

对数似然函数为

$$\ln L(x_1, \ldots, x_n; \theta) = \ln \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i!} + \sum_{i=1}^{n} x_i \ln\theta - n\theta \qquad (—2分)$$

$$\frac{\partial \ln L(x_1, \ldots, x_n; \theta)}{\partial \theta} = \sum_{i=1}^{n} x_i \frac{1}{\theta} - n \qquad (—2分)$$

令其等于零, 得θ 的最大似然估计量$\hat{\theta} = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i = \overline{X}$ (—2分)

四、统计题
21、解：已知$n = 9$, $S^2 = 11$, $1 - \alpha = 0.9$, $\chi^2_{0.05}(8) = 15.507$, $\chi^2_{0.95}(8) = 2.733$,
则σ^2 得置信区间为

$$[\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}, \ \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}] \qquad (—3分)$$

代入数据得

$$[5.675, 32.199] \qquad (—2分)$$

22、解：已知$n_1=n_2=10$，$\overline{X}_{新}=76.23$，$\overline{X}_{旧}=79.43$，$S_{新}^2=3.315$，$S_{旧}^2=3.085$，$\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2$，$t_{0.005}(18)=2.8784$。
建立假设$H_0:\mu_1=\mu_2$；$H_1:\mu_1\neq\mu_2$. (—2分)
在原假设成立的假定下有

$$\frac{\overline{X}_{新}-\overline{X}_{旧}}{S_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}\sim t(n_1+n_2-2),\ S_w=\sqrt{\frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}} \qquad (—3分)$$

在给定$\alpha=0.01$ 时，拒绝域为

$$\left|\frac{\overline{X}_{新}-\overline{X}_{旧}}{S_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}\right|>t_{\alpha/2}(n_1+n_2-2) \qquad (—2分)$$

代入数据得$\left|\frac{\overline{X}_{新}-\overline{X}_{旧}}{S_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}\right|=4>t_{0.005}(18)=2.8784.$ (—2分)
因此拒绝原假设。
五、应用题
23、解：设检查第i 个产品所需时间为X_i，则其分布为

$$P\{X_i=10\}=P\{X_i=20\}=\frac{1}{2}$$

且$EX_i=15$，$DX_i=25$ (—3分)
则所求概率为$P\{\sum\limits_{i=1}^{1900}X_i\leq 28800\}$ (—2分)
由中心极限定理可有$\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{1900}X_i-15\times1900}{\sqrt{25\times1900}}\sim N(0,1)$ (—2分)
则

$$\begin{aligned}&P\{\sum_{i=1}^{1900}X_i\leq 28800\}\\ =\ &P\{\frac{\sum\limits_{i=1}^{1900}X_i-15\times1900}{\sqrt{25\times1900}}\leq\frac{28800-15\times1900}{\sqrt{25\times1900}}\} \qquad (—3分)\\ =\ &\Phi(\tfrac{6}{19}\sqrt{19})\end{aligned}$$