第四章 离散信号与系统

习题与答案解析

第 1 次课：4-1（1）（2）（3）（5）（6）、4-3（1）（2）（3）（5）（6）4-5（3）

第 2 次课：4-6 、4-7、4-8（3）、4-9、4-10（3）、4-11（2）、4-13、4-14、4-15（1）、4-16、4-17、4-22

4-1 求下列序列的 z 变换及其收敛域。

（1）

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)$$

解：

$$a^n u(n) \to \frac{z}{z-a}$$

$$|z|>|a|$$

$$\frac{z}{z-\frac{1}{2}}$$

$$|z|>\frac{1}{2}$$

(2) $$\left(-\frac{1}{2}\right)^n u(-n-1)$$

解:

$$-a^n u(-n-1) \to \frac{z}{z-a} \cdots |z|<|a|$$

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^n u(-n-1) \to -\frac{z}{z+\frac{1}{2}} \cdots |z|<\frac{1}{2}$$

(3) $$\left(\frac{1}{2}\right)^n u(-n)$$

解:

$$原式 \to 2^{-n}u(-n)$$

$$2^n u(n) \to \frac{z}{z-2} \ldots |z| > 2$$

$$2^{-n}u(-n) \to \frac{z^{-1}}{z^{-1}-2} \ldots |z^{-1}| > 2 \cdots |z| < \frac{1}{2}$$

$$用定义:\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n u(-n)z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{0}\left(\frac{1}{2z}\right)^n \xrightarrow{令m=-n} \sum_{m=0}^{\infty}(2z)^m = \frac{1}{1-2z} \ldots |2z| < 1 \ldots |z| < \frac{1}{2}$$

(5) $\delta(n+1)$

解:

$$\delta(n) \to 1$$

$$x(n+m) \to z^m x(z) \ldots n > 0不含0，\mathrm{n} < 0不含\infty$$

$$0 \le |z| < \infty$$

(6) $\left(\frac{1}{2}\right)^n [u(n)-u(n-10)]$

解:

原式为有限序列

$$x(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n [u(n)-u(n-10)]$$

$$= \sum_{n=0}^{9}\left(\frac{1}{2z}\right)^n = \frac{1-\left(\frac{1}{2z}\right)^{10}}{1-\frac{1}{2z}} \cdots |z| > 0$$

4-3 分别用部分分式法和长除法，求下列函数的 z 反变换

（1） $X(z) = \dfrac{1}{1+\frac{1}{2}z^{-1}} \cdots |z| > \dfrac{1}{2}$

解:

$$右 \cdots \left(-\frac{1}{2}\right)^n u(n)$$

(2) $X(z) = \dfrac{1}{1+\frac{1}{2}z^{-1}} \cdots |z| < \dfrac{1}{2}$

解:

$$左 \cdots -\left(-\frac{1}{2}\right)^n u(-n-1)$$

(3) $X(z)=\dfrac{1-\frac{1}{2}z^{-1}}{1+\frac{3}{4}z^{-1}+\frac{1}{8}z^{-2}}\cdots|z|>\dfrac{1}{2}$

解:

$$部分分式法:\frac{z^2-\frac{1}{2}z}{z^2+\frac{3}{4}z+\frac{1}{8}}=\frac{z(z-\frac{1}{2})}{(z+\frac{1}{4})(z+\frac{1}{2})}$$

$$\frac{X(z)}{z}=\frac{z-\frac{1}{2}}{(z+\frac{1}{4})(z+\frac{1}{2})}=\frac{-3}{z+\frac{1}{4}}+\frac{4}{z+\frac{1}{2}}$$

$$X(z)=\frac{-3z}{z+\frac{1}{4}}+\frac{4z}{z+\frac{1}{2}}\to(-3)\left(-\frac{1}{4}\right)^n u(n)+4\left(-\frac{1}{2}\right)^n u(n)$$

长除法打不出来

(5) $X(z)=\dfrac{1-az^{-1}}{z^{-1}-a}\cdots|z|>|\dfrac{1}{a}|$

解:

$$X(z)=\frac{z-a}{1-az}$$

$$\frac{X(z)}{z}=\frac{z-a}{z(1-az)}=\frac{-a}{z}+\frac{1-a^2}{1-az}$$

$$X(z)=-a+(1-a^2)\frac{z}{1-az}-a\delta(n)+(a-\frac{1}{a})\left(\frac{1}{a}\right)^n u(n)$$

(6) $X(z)=\dfrac{z^2+z+1}{z^2+3z+2}\cdots|z|>2$

解:

$$\frac{X(z)}{z}=\frac{z^2+z+1}{z(z+1)(z+2)}=\frac{\frac{1}{2}}{z}+\frac{-1}{z+1}+\frac{\frac{3}{2}}{z+2}$$

$$X(z)=\frac{1}{2}\delta(a)-(-1)^n u(n)+\frac{3}{2}(-2)^n u(n)$$

4-5

已知序列$x(n)=a^n u(n)$,当$h(n)$为如下序列时，利用卷积定理求$y(n)=x(n)*h(n)$

(3) $h(n)=u(n-1)$

解:

$$\sum_{nm=-\infty}^{\infty}a^{nm}u(m)u(n-m-1)=\sum_{m=0}^{n-1}a^{m}a(n-1)=\frac{1-a^{n}}{1-a}u(n-1)$$

$$Y(z)=X(z)\times H(z)=\frac{z}{z-a}\bullet z^{-1}\frac{z}{z-1}=\frac{z}{(z-a)(z-1)}$$

$$\frac{Y(z)}{z}=\frac{1}{(z-a)(z-1)}=\frac{\frac{1}{a-1}}{z-a}+\frac{\frac{1}{1-a}}{z-1}$$

$$Y(z)=\frac{1}{a-1}\left(\frac{z}{z-a}-\frac{z}{z-1}\right)$$

4-6 列出图 4-23 所示系统的差分方程，已知边界条件 y(-1)=0。当输入信号分别为一下序列时，输出信号 y(n)，并绘出其图形。（使用迭代法）

（1） $x(n)=\delta(n)$

（2） $x(n)=u(n)$

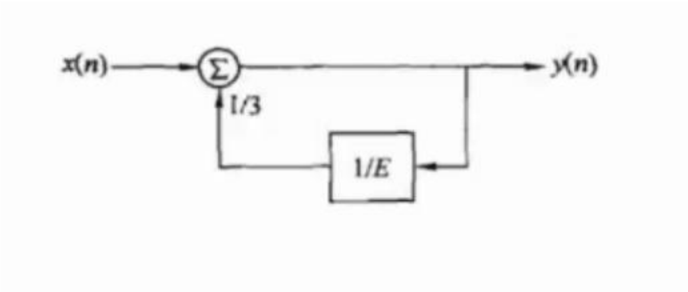

图 4-2 习题 4-6 图

$$(1)y(n)=x(n)+\frac{1}{3}y(n-1)$$

$$y(0)=\delta(0)+\frac{1}{3}y(-1)=1$$

$$y(1)=\frac{1}{3}\times1=\frac{1}{3}$$

$$y(2)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$$

$$y(n)=\left(\frac{1}{3}\right)^{n}u(n)$$

（2）

$$y(0)=1$$

$$y(1)=1+\frac{1}{3}\times 1=\frac{4}{3}$$

$$y(2)=1+\frac{1}{3}\times\frac{4}{3}=\frac{13}{9}$$

$$y(3)\cdots$$

$$y(n)=1+\frac{1}{3}y(n-1)$$

$$y(n)+m=\frac{1}{3}[y(n-1)+m]$$

$$\frac{1}{3}m-m=1, m=-\frac{3}{2}$$

$$y(n)-\frac{3}{2}=-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{n}$$

$$y(n)=-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{n}+\frac{3}{2}$$

$$=\frac{3-3^{-n}}{2}u(n)$$

4-8　求下列离散时间系统的齐次解和特解形式

（3）$y(n)-y(n-1)=nu(n)$

$$a-1=0$$

$$a=1$$

特：$B(n)=B_1n+B_2$

$$B_1n+B_2-B_1(n-1)-B_2=nu(n)$$

$$B_1=nun$$

$$B(n)=B_1n^2+B_2n$$

4-9

图$4-25$所示的系统包括两个级联的线性时不变系统，

它们的单位脉冲响应分别为$h_1(n)$和$h_2(n)$。

已知$h_1(n)=\delta(n)-\delta(n-3), h_2(n)=(0.8)^n u(n)$。

令$x(n)=u(n)$，求系统的输出$y(n)$。

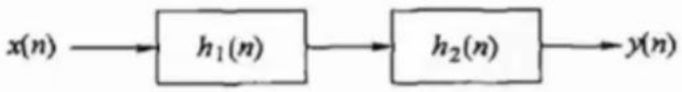

图 4-25 习题 4-9 图

$$y(n)=x(n)*h_1(n)*h_2(n)=[u(n)-u(n-3)]*0.8^n u(n)]$$

$$=\left(\frac{z}{z-1}-z^{-3}\frac{z}{z-1}\right)\bullet\frac{z}{z-0.8}$$

$$=\left(1-z^{-3}\right)\bullet\frac{z}{z-1}\bullet\frac{z}{z-0.8}$$

4-10 用单边 z 变换法求解下列差分方程

（3） y(n)-0.9(n-1)=0.05u(n),y(-1)=1

$$Y(z)-0.9[z^{-1}Y(z)+y(-1)]=\frac{0.05z}{z-1}$$

$$(1-0.9z^{-1})Y(z)=\frac{0.05z}{z-1}+0.9$$

$$Y(z)=\frac{0.05z^2}{(z-1)(z-0.9)}+\frac{0.9z}{z-0.9}$$

$$Y(z)=\frac{0.5z}{z-1}+\frac{-0.45z}{z-0.9}\rightarrow 0.5u(n)+0.45(0.9)^n u(n)$$

4-11 根据下列差分方程，求系统的零状态响应

（2） $y(n+2)+3y(n+1)+2y(n)=3^n u(n)$

解：

$$z^2[Y(z)-y(0)-z^{-1}y(-1)]+z$$

$$(z^2+3z+2)Y_{2s}(z)=\frac{z}{z-3}$$

$$Y_{2s}(z)=\frac{z}{(z-3)(z+2)(z+1)}=\frac{\frac{1}{20}z}{z-3}+\frac{\frac{1}{5}}{z+2}+\frac{-\frac{1}{4}}{z+1}\rightarrow\cdots$$

4-13

一离散线性时不变系统的差分方程为$y(n+2)-3y(n+1)=x(n+1)-2x(n)$,若输入信号为$x(n)=u(n)$，系统的边界条件为$y(0)=1$，$y(-1)=1$。

(1) 求系统的零输入响应$y_{zi}(n)$、零状态响应$y_{zs}(n)$和全响应$y(n)$;

解：

$$z^2[Y(z)-y(0)-y(1)z^{-1}]-3z[Y(z)-y(0)]+2Y(z)=z[x(z)-x(0)]-2x(z)$$

令$n=-1$

$$y(1)-3y(0)+2y(-1)=x(0)-2x(-1)$$

$$y(1)=1-2+3=2$$

$$(z^2-3z+2)Y(z)=(z-2)X(z)-2z+z^2$$

$$Y(z)=\frac{1}{z-1}X(z)+\frac{z}{z-1}$$

$$X(z)=\frac{z}{z-1}$$

4-14 当离散线性时不变系统输入为 x(n)=5u(n),其输出为 $y(n)=[2\left(\frac{1}{2}\right)^n+3\left(-\frac{3}{4}\right)^n]u(n)$

（1）求系统函数　H（z），画出 H（s)的零极点图并标出收敛域

（2）求系统的单位脉冲响应；

（3）写出描述该系统的差分方程

解：

$$H(z)\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{z(z-1)}{(z-\frac{1}{2})(z+\frac{3}{4})}$$

$$X(z)=5\frac{z}{z-1}$$

$$Y(z)=2\frac{z}{z-\frac{1}{2}}+3\frac{z}{z+\frac{3}{4}}=\frac{5z^2}{(z-\frac{1}{2})(z+\frac{3}{4})}$$

$$H(z)=\frac{-\frac{2}{5}z}{z-\frac{1}{2}}+\frac{\frac{7}{5}z}{z+\frac{3}{4}}$$

$$h(n)=-\frac{2}{5}(\frac{1}{2})^n u(n)+\frac{7}{5}\left(-\frac{3}{4}\right)^n u(n)$$

$$H(z)=\frac{z^2-8}{z^2+\frac{1}{4}z^{-1}-\frac{3}{8}z^{-2}}=\frac{Y(z)}{X(z)}$$

$$y(n)+\frac{1}{4}y(n-1)-\frac{3}{8}y(n-2)=X(n)-X(n-1)$$

4-15 确定 K 的取值范围，使下列差分方程所描述的因果线性时不变系统是稳定的。

（1）y(n)-K(n-1)+K^2y(n-2)=x(n)

保证线性时不变，则极点要小于 1，

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$ <1,则 $$\left|\frac{k \pm \sqrt{3k^2}}{2}\right| < 1$$

可得 $$|k| < \left|\frac{2}{1 \pm \sqrt{3}}\right|, \sqrt{3} \approx 1.7$$

$$(2) y(n) - Ky(n-1) + K^2 y(n-2) = x(n)$$

同上可得,$\left|\frac{4K}{2}\right| < 1,$

解得,$|K| < \frac{1}{2}$

$$(3) y(n) - K^2 y(n-2) = x(n-3)$$

解:$\left|\frac{\sqrt{4K^2}}{2}\right| < 1,$解得$|K| < 1$

4-16 对于差分方程 y(n)+y(n-1)=x(n)所表示的离散系统：

（1）求系统函数 H(z)及单位脉冲响应 h(n),并说明系统的稳定性；

解：两边求Z变换：

$$Y(z)+z^{-1}Y(z)=x(z),$$

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{1}{1+z^{-1}},|z|>1$$

则不是稳定系统

（2）若系统起始状态为零，如果 x(n)=10u(n),求系统的响应 y(n)。

解：求得$X(z)=10\frac{z}{z-1,}$

$$Y(z)=X(z)H(z)=\frac{10z^2}{(z+1)(z-1)}=\frac{5z}{z+1}+\frac{5z}{z-1},$$

解得：$y(n)=5u(n)(-1^n+1)$

4-17 离散系统如图所示，求当系数 a 为何值时，系统稳定。

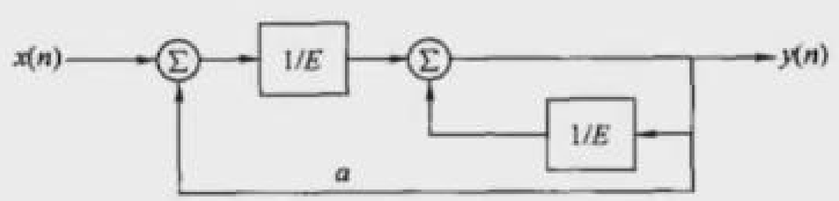

图 4-26　习题 4-17 图

解：$y(n)=x(n-1)+(a+1)y(n-1),$

$y(n)-(a+1)y(n-1)=x(n-1),$

可得:$|1+a|<1,-2<a<0$

$4-22$设系统的单位脉冲响应$h(n)=a^{n}u(n),0<a<1,$
输入序列$x(n)=\delta(n)+\delta(n-2),$完成下面各题。

(1)求出系统的输出系列$y(n)$;

解：$y(n)=h(n)*x(n)=a^{n}u(n)+2a^{n-2}u(n-2)$

(2)分别求出$x(n)$、$h(n)$和$y(n)$的离散时间傅里叶变换

$x(n)$离散时间的傅里叶变换:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}[\delta(n)+2\delta(n-2)]e^{-jwn}=1+2e^{-2jw}$$

$h(n)$离散时间的傅里叶变换:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}au(n)e^{-jwn}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a^{n}e^{-jwn}=\frac{1}{1-ae^{-jw}}$$

$y(n)$离散时间的傅里叶变换:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}2a^{n-2}u(n-2)e^{-jwn}=\frac{2e^{-jwn}}{1-ae^{-jw}}$$