第二章

2-2 周期信号频谱有什么特点?

1、离散性，此频谱由不连续的谱线组成，每一条谱线代表一个正弦分量，所以此频谱称为不连续谱或离散谱。

2、谐波性，此频谱的每一条谱线只能出现在基波频率Ω的整数倍频率上，即含有Ω的各次谐波分量。而决不含有非Ω的谐波分量。

3、收敛性，此频谱的各次谐波分量的振幅虽然随$n\Omega$的变化有起伏变化，但总的趋势是随着$n\Omega$的增大而逐渐减小，当$n\Omega \to 0$时，$|F_n| \to 0$。

2-3 求图 2-49 所示周期对称三角波的三角形式的傅里叶级数展开式。

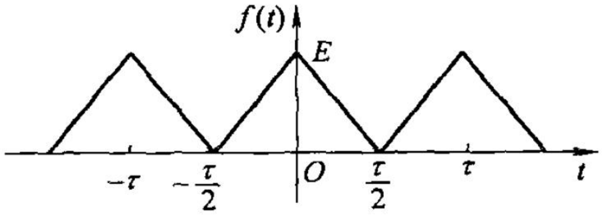

图 2-49　习题 2-3 图

[解] 由图可得 $f(t)=\begin{cases} E+\dfrac{2E}{\tau}t, & -\dfrac{\tau}{2}\le t\le 0 \\ E-\dfrac{2E}{\tau}t, & 0\le t\le \dfrac{\tau}{2} \end{cases}$

三角形式的傅里叶级数：　$f(t)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_{\text{n}}\cos n\omega_1 t+b_{\text{n}}\sin n\omega_1 t)$

明显图示信号是偶函数，所以正弦分量b_{n}=0

直流分量：$a_0=\dfrac{1}{\tau}\int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} f(t)dt=\dfrac{1}{\tau}\times\dfrac{1}{2}\times\tau\times E=\dfrac{E}{2}$

n 次谐波余弦分量的系数：

$$a_n = \frac{2}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} f(t)\cos n\omega_0 t \mathrm{d}t = \frac{2}{\tau}\int_0^{\tau/2} 2\left(E - \frac{2E}{\tau}t\right)\cos n\omega_0 t \mathrm{d}t$$

$$= -\frac{2E}{n^2\pi^2}(\cos n\pi - 1) = \frac{4E}{n^2\pi^2}\sin^2\frac{n\pi}{2} = \begin{cases} \dfrac{4E}{n^2\pi^2} & n\text{为奇数} \\ 0 & n\text{为偶数} \end{cases}$$

$$f(t) = \frac{E}{2} + \frac{4E}{\pi^2}\left(\cos\omega_0 t + \frac{1}{3^2}\cos 3\omega_0 t + \frac{1}{5^2}\cos 5\omega_0 t + \dots\right)$$

2-5 已知周期信号 $f(t) = 2 + 3\cos(2t) + 4\sin(2t) + 2\sin(3t + \frac{\pi}{3}) - 2\cos(7t + \frac{5\pi}{6})$

(1)求周期信号 $f(t)$ 的基波角频率;

(2)画出周期信号 $f(t)$ 的幅度频谱和相位频谱。

【解】（1）周期分别为 π，π，$\frac{2\pi}{3}$，$\frac{2\pi}{7}$，所以 $f(t)$ 的周期为 2π。$\omega = \frac{2\pi}{T} = 1$ rad/s。

(2) $f(t) = 2 + 3\cos(2t) + 4\sin(2t) + 2\sin(3t + \frac{\pi}{3}) - 2\cos(7t + \frac{5\pi}{6})$

$$= 2 + 5\cos(2t - \arctan\frac{4}{3}) + 2\sin(3t + \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{2}) + 2\cos(7t + \frac{5\pi}{6} - \pi)$$

$$= 2 + 5\cos(2t - \arctan\frac{4}{3}) + 2\cos(3t - \frac{\pi}{6}) + 2\cos(7t - \frac{\pi}{6})$$

幅度频谱

相位频谱

2-6 利用傅里叶变换的定义，求下列信号的傅里叶变换。

(1) $f_1(t) = \delta(t+2) + \delta(t-2)$

$$F_1(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty}[\delta(t+2) + \delta(t-2)]\mathrm{e}^{-j\omega t}dt = \mathrm{e}^{2j\omega} + \mathrm{e}^{-2j\omega} = 2\cos 2\omega$$

(2) $f_2(t) = u(t) - u(t-2)$

$$F_2(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}[u(t)-u(t-2)]\mathrm{e}^{-j\omega t}dt=\int_0^2 \mathrm{e}^{-j\omega t}dt=-\frac{1}{j\omega}\mathrm{e}^{-j\omega t}\bigg|_0^2=\frac{1\text{-}\mathrm{e}^{-2j\omega}}{j\omega}$$

$$=\frac{(1\text{-}\mathrm{e}^{-2j\omega})/\mathrm{e}^{-j\omega}}{j\omega/\mathrm{e}^{-j\omega}}=\frac{\mathrm{e}^{j\omega}\text{-}\mathrm{e}^{-j\omega}}{j\omega}=2\sin\mathrm{c}(\omega)\mathrm{e}^{-j\omega}$$

(3) $f_3(t)=t[u(t+1)-u(t-1)]$

$$F_3(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f_3(t)\mathrm{e}^{-j\omega t}dt=\int_{-1}^{1}t\mathrm{e}^{-j\omega t}dt=-\frac{1}{j\omega}t\mathrm{e}^{-j\omega t}\bigg|_{-1}^{1}+\frac{1}{j\omega}\int_{-1}^{1}\mathrm{e}^{-j\omega t}dt$$

$$=-\frac{\mathrm{e}^{-j\omega}+\mathrm{e}^{j\omega}}{j\omega}-\frac{\mathrm{e}^{-j\omega}-\mathrm{e}^{j\omega}}{(j\omega)^2}=-\frac{2}{j\omega}\cos(\omega)+\frac{2\sin(\omega)}{j\omega^2}=j\frac{2}{\omega}[\cos(\omega)-\sin\mathrm{c}(\omega)]$$

(4) $f_4(t)=\cos(\frac{\pi}{\tau}t)[u\left(t+\frac{\tau}{2}\right)-u\left(t-\frac{\tau}{2}\right)]$

$$F_4(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}[\cos(\frac{\pi}{\tau}t)[u\left(t+\frac{\tau}{2}\right)-u\left(t-\frac{\tau}{2}\right)]]\mathrm{e}^{-j\omega t}dt=\int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}}\cos(\frac{\pi}{\tau}t)\mathrm{e}^{-j\omega t}dt=\frac{1}{-j\omega}\int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}}\cos(\frac{\pi}{\tau}t)d\mathrm{e}^{-j\omega t}$$

$$=\frac{1}{-j\omega}\cos(\frac{\pi}{\tau}t)\mathrm{e}^{-j\omega t}\bigg|_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}}-\frac{\pi}{j\omega\tau}\int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}}\sin(\frac{\pi}{\tau}t)\mathrm{e}^{-j\omega t}dt=0+\frac{\pi}{(j\omega)^2\tau}\int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}}\sin(\frac{\pi}{\tau}t)d\mathrm{e}^{-j\omega t}$$

$$=\frac{\pi}{(j\omega)^2\tau}\sin(\frac{\pi}{\tau}t)\mathrm{e}^{-j\omega t}\bigg|_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}}-\frac{\pi^2}{(j\omega\tau)^2}\int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}}\cos(\frac{\pi}{\tau}t)\mathrm{e}^{-j\omega t}dt$$

$$\int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}}\cos(\frac{\pi}{\tau}t)\mathrm{e}^{-j\omega t}dt=\frac{\pi}{(j\omega)^2\tau}(\mathrm{e}^{-j\omega\frac{\tau}{2}}+\mathrm{e}^{j\omega\frac{\tau}{2}})\frac{(j\omega\tau)^2}{(j\omega\tau)^2+\pi^2}=\frac{2\pi\tau}{\pi^2-(\omega\tau)^2}\cos(\frac{\omega\tau}{2})$$

2-7 求下列函数的傅里叶变换，并画出其幅度频谱。

(1) $f(t)=\mathrm{e}^{-3t}u(t)$

单边指数信号：$\mathscr{F}[\mathrm{e}^{-3t}u(t)]=\dfrac{1}{3+j\omega}$

(2) $f(t)=\sin c(2t)$

$\Pi(\frac{t}{\tau})\xleftrightarrow{F}\tau\sin c(\frac{\omega\tau}{2})$，　$F(t)\xleftrightarrow{F}2\pi f(-\omega)$

$\sin c(2t)\xleftrightarrow{F}\frac{\pi}{2}\Pi(\frac{\omega}{4})$

(3) $f(t)=\mathrm{e}^{at}u(-t)$

$$e^{-at}u(t) \xleftrightarrow{F} \frac{1}{a+j\omega}$$

$$e^{at}u(-t) \xleftrightarrow{F} \frac{1}{a-j\omega}$$

(4) $f(t)=tu(t)$

斜变信号：$\mathcal{F}[tu(t)] = j\pi\delta'(\omega) - \dfrac{1}{\omega^2}$

2-8 已知 F(jω)=$\mathcal{F}[f(t)]$，求下列信号的傅里叶变换。

（1） $y_1(t)=f(t-1)$

时移特性：$Y_1(j\omega) \xleftrightarrow{F} F(j\omega)e^{-j\omega}$

（2） $y_2(t)=(t-1)f(t-1)$

频域微分：$tf(t) \xleftrightarrow{F} j\dfrac{dF(j\omega)}{d\omega}$

时移特性：$(t-1)f(t-1) \xleftrightarrow{F} j\dfrac{dF(j\omega)}{d\omega}e^{-j\omega}$

（3） $y_3(t)=tf(-2t)$

尺度变换：$f(-2t) \xleftrightarrow{F} \dfrac{1}{2}F(-\dfrac{j\omega}{2})$

频域微分：$tf(-2t) \xleftrightarrow{F} \dfrac{j}{2}\dfrac{dF(-\frac{j\omega}{2})}{d\omega}$

（4） $y_4(t)=e^{j3t}f(2t)$

尺度变换：$f(2t) \xleftrightarrow{F} \dfrac{1}{2}F(\dfrac{j\omega}{2})$

频移：$e^{j3t}f(2t) \xleftrightarrow{F} \dfrac{1}{2}F[\dfrac{j(\omega-3)}{2}]$

（5） $y_5(t)=t\dfrac{df(t)}{dt}$

时域微分：$\dfrac{df(t)}{dt} \xleftrightarrow{F} j\omega F(j\omega)$

频域微分：$t\dfrac{df(t)}{dt} \xleftrightarrow{F} j\dfrac{dj\omega F(j\omega)}{d\omega} = -\dfrac{d\omega F(j\omega)}{d\omega} = -\omega\dfrac{dF(j\omega)}{d\omega} - F(j\omega)$

（6） $y_6(t)=f(2t-6)$

尺度变换：$f(2t) \xleftrightarrow{F} \dfrac{1}{2}F(\dfrac{j\omega}{2})$

时移特性：$f(2t-6) \xleftrightarrow{F} \frac{1}{2}F(\frac{j\omega}{2})\mathrm{e}^{-3j\omega}$

2-9 试求下列信号的傅里叶变换。

(1) $f_1(t)=\frac{5}{\pi}$

直流信号：$E \xleftrightarrow{F} 2\pi E\delta(\omega)$

$\mathcal{F}[\frac{5}{\pi}]=2\pi\frac{5}{\pi}\delta(\omega)=10\delta(\omega)$

(2) $f_2(t)=\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t+4n)$

周期冲激序列：$\mathcal{F}[\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT_0)]=\omega_0\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-n\omega_0)$

$\mathcal{F}[\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t+4n)]=\frac{\pi}{2}\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-\frac{\pi}{2}n)$

(3) $f(t)=\mathrm{e}^{t}[u(t)-u(t-1)]$

$f(t)=\mathrm{e}^{t}u(t)-\mathrm{e}\times\mathrm{e}^{t-1}u(t-1)$

$\mathcal{F}[f(t)]=\frac{1}{j\omega-1}-(\frac{1}{j\omega-1})\mathrm{e}^{-j\omega+1}$

(4) $f_4(t)=\frac{\sin t}{2t}$

$\frac{1}{2}\sin c(t) \xleftrightarrow{F} \frac{\pi}{2}\Pi(\frac{\omega}{2})$

2-10 试求下列信号的傅里叶变换。

(1) $f(t)=2+4\mathrm{e}^{-2t}u(t)$

$E \xleftrightarrow{F} 2\pi E\delta(\omega)$

$\mathcal{F}[\mathrm{e}^{-at}u(t)]=\frac{1}{a+j\omega}$

$\mathcal{F}[2+4\mathrm{e}^{-2t}u(t)]=4\pi\delta(\omega)+\frac{4}{2+j\omega}$

(2) $f(t)=\mathrm{e}^{jt}\,\mathrm{sgn}(3-2t)$

符号信号 $\mathrm{sgn}(t) \xleftrightarrow{F} \dfrac{2}{j\omega} \quad (\omega \neq 0)$ ，尺度变换和时移：

$f(at-b) \xleftrightarrow{F} \dfrac{1}{|a|}F(j\dfrac{\omega}{a})\mathrm{e}^{-j\frac{b}{a}\omega}$ ，频移：$f(t)\mathrm{e}^{-j\omega_0 t} \xleftrightarrow{F} F[j(\omega+\omega_0)]$

$$\mathcal{F}[\mathrm{e}^{jt}\,\mathrm{sgn}\,(3-2t)] = \frac{1}{2}.\frac{-2\times 2}{j(\omega-1)}.\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}j(\omega-1)} = -\frac{2}{j(\omega-1)}.\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}j(\omega-1)}$$

2-11 已知 $f(t) \xleftrightarrow{F} \mathrm{F}(j\omega)$，利用傅里叶变换的特性试求下列各式的傅里叶变换。

（3） $f(t)\cos[3(t-4)]$

频移：

$$f(t)\cos[3(t-4)] = \frac{1}{2}f(t)(\mathrm{e}^{\mathrm{j(3t\text{-}12)}}+\mathrm{e}^{\mathrm{-j(3t\text{-}12)}}) \xleftrightarrow{F} \frac{1}{2}F[j(\omega-3)]\mathrm{e}^{\mathrm{-j12}} + \frac{1}{2}F[j(\omega+3)]\mathrm{e}^{\mathrm{j12}}$$

（4） $\int_{-\infty}^{t} f(2\tau-2)\mathrm{d}\tau$

时域积分：$\int_{-\infty}^{t} f(\tau)d\tau \xleftrightarrow{F} \pi F(0)\delta(\omega) + \dfrac{F(j\omega)}{j\omega}$

尺度变换、时移：$\int_{-\infty}^{t} f(2\tau-2)\mathrm{d}\tau \xleftrightarrow{F} \dfrac{\pi}{2}F(0)\delta(\omega) + \dfrac{1}{j\omega}F(\dfrac{j\omega}{2})\mathrm{e}^{-j\omega}$

2-13 利用傅里叶变换的有关性质求信号 $f(t) = t\sin\mathrm{c}^2(t)$ 的傅里叶变换。

频移：$f(t)\sin\omega_0 t \xleftrightarrow{F} \dfrac{1}{2j}\{F[j(\omega-\omega_0)] - F[j(\omega+\omega_0)]\}$

$f(t) = t\sin\mathrm{c}^2(t) = \sin\mathrm{c}(t)\sin(t)$

$\mathcal{F}[\sin c(t)] = \pi[u(\omega+1) - u(\omega-1)]$

$$\mathcal{F}[\sin c(t)\sin(t)] = \frac{\pi}{2j}[u(\omega) - u(\omega-2)] - \frac{\pi}{2j}[u(\omega+2) - u(\omega)]$$

2-15 求信号 $f(t) = 10\cos(200\pi t - \dfrac{\pi}{4})$ 的傅里叶变换。

$$10\cos(200\pi t-\frac{\pi}{4})=5[\mathrm{e}^{200\pi t}\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{4}j}+\mathrm{e}^{-200\pi t}\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}j}]$$

$$\xleftrightarrow{F}10\pi[\delta(\omega-200\pi)\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{4}j}+\delta(\omega+200\pi)\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}j}]$$

2-19 求下列频谱函数的傅里叶逆变换。

（1） $F(j\omega)=\dfrac{-\omega^2+4j\omega+5}{-\omega^2+3j\omega+2}$

$$F(j\omega)=\frac{-\omega^2+4j\omega+5}{-\omega^2+3j\omega+2}=\frac{2(j\omega+2)-(j\omega+1)+(j\omega+2)(j\omega+1)}{(j\omega+2)(j\omega+1)}=1+\frac{2}{j\omega+1}-\frac{1}{j\omega+2}$$

$$f(t)=\mathcal{F}^{-1}[F(j\omega)]=\delta(t)+2\mathrm{e}^{-t}u(t)-\mathrm{e}^{-2t}u(t)$$

（2） $F(j\omega)=\dfrac{1}{(j\omega+1)(j\omega+2)}$

$$F(j\omega)=\frac{(j\omega+2)-(j\omega+1)}{(j\omega+1)(j\omega+2)}=\frac{1}{j\omega+1}-\frac{1}{j\omega+2}$$

$$f(t)=\mathcal{F}^{-1}[F(j\omega)]=\mathrm{e}^{-t}u(t)-\mathrm{e}^{-2t}u(t)$$

（3） $F(j\omega)=\pi\delta(\omega-\omega_0)+\dfrac{1}{j(\omega-\omega_0)}\omega_0$

$$\mathcal{F}[u(t)]=\frac{1}{j\omega}+\pi\delta(\omega)$$

频移特性： $f(t)=\mathcal{F}^{-1}[F(j\omega)]=u(t)\mathrm{e}^{j\omega_0 t}$

2-20 求下列频谱函数 $F(j\omega)$ 的傅里叶逆变换 $f(t)$ 。

（1） $2u(1-\omega)$

$\mathcal{F}[u(t)]=\dfrac{1}{j\omega}+\pi\delta(\omega)$， 根据对称性 $F(t)\xleftrightarrow{F}2\pi f(-\omega)$ 得：

$\dfrac{1}{jt}+\pi\delta(t)\xleftrightarrow{F}2\pi u(-\omega)$， 再根据线性、时移特性得：

$$f(t)=\mathcal{F}^{-1}[2u(1-\omega)]=\frac{\mathrm{e}^{jt}}{jt\pi}+\delta(t)$$

（2） $2\dfrac{\sin\omega}{\omega}\cos 5\omega$

$\Pi(\dfrac{t}{\tau})\xleftrightarrow{F}\tau\sin c(\dfrac{\omega\tau}{2})$， $\Pi(\dfrac{t}{2})\xleftrightarrow{F}2\sin c(\omega)$， $2\sin c(t)\xleftrightarrow{F}2\pi\Pi(\dfrac{\omega}{2})$

$f(t)\cos\omega_0 t\xleftrightarrow{F}\dfrac{1}{2}\{F[j(\omega-\omega_0)]+F[j(\omega+\omega_0)]\}$

$2\dfrac{\sin t}{t}\cos 5t\xleftrightarrow{F}\pi\Pi(\dfrac{\omega-5}{2})+\pi\Pi(\dfrac{\omega+5}{2})$

$\dfrac{1}{2}[\Pi(\dfrac{t-5}{2})+\Pi(\dfrac{t+5}{2})]\xleftrightarrow{F}2\dfrac{\sin\omega}{\omega}\cos 5\omega$

（3） $\dfrac{\sin(3\omega+6)}{\omega+2}$

$\dfrac{\sin(3\omega+6)}{\omega+2}=3\dfrac{\sin(3\omega+6)}{3\omega+6}=3\sin c(3\omega+6)$

$\Pi(\dfrac{t}{\tau})\xleftrightarrow{F}\tau\sin c(\dfrac{\omega\tau}{2})$， $\Pi(\dfrac{t}{2})\xleftrightarrow{F}2\sin c(\omega)$，经过尺度变换、频移、线性得：

$\dfrac{1}{2}\Pi(\dfrac{t}{6})\mathrm{e}^{-2\mathrm{j}t}\xleftrightarrow{F}3\sin c(3\omega+6)$

2-21 利用时域和频域的对称性，求下列博里叶变换的时域函数。

（3） $F(j\omega)=2u(\omega)-1$

$\mathcal{F}[u(t)]=\dfrac{1}{j\omega}+\pi\delta(\omega)$， $F(t)\xleftrightarrow{F}2\pi f(-\omega)$

$\dfrac{1}{jt}+\pi\delta(t)\xleftrightarrow{F}2\pi u(-\omega)$， $-\dfrac{1}{\pi jt}+\delta(-t)-\delta(t)\xleftrightarrow{F}2u(\omega)-1$

$f(t)=\mathcal{F}^{-1}[2u(\omega)-1]=\dfrac{j}{\pi t}$

2-22 已知信号 $f(t)$ 的傅里叶变换为

$$F(j\omega)=|F(j\omega)|=\begin{cases}1 & |\omega|<1\\ 0 & |\omega|>1\end{cases}$$

设有函数 $y(t)=\dfrac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}$， 试求 $Y(\dfrac{j\omega}{2})$ 的傅里时逆变换。

【解】已知 $\sin c(t)\xleftrightarrow{F}\pi[u(\omega+1)-u(\omega-1)]$， 得 $f(t)=\dfrac{1}{\pi}\sin c(t)$，

$y(t)=\dfrac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}=\dfrac{1}{\pi}(\dfrac{\cos t}{t}-\dfrac{\sin t}{t^2})$ 。 $2y(2t)\xleftrightarrow{F}Y(\dfrac{j\omega}{2})$， $2y(2t)=\dfrac{1}{\pi}(\dfrac{\cos 2t}{t}-\dfrac{\sin 2t}{2t^2})$