第 5 章 离散傅里叶变换课后习题解析

习题与答案解析

5-1（1）（2）、5-2、5-3（2）、5-5（1）（2）（3）（4）、5-10（1）（2）（6）、5-11

5-1

（1）

求有限序列的离散傅里叶变换

$x(n) = \delta(n - N_0)$

解：$X(k) = \sum_0^{N-1} x(n)W_N^{kn} = \sum_0^{N-1} \delta(n - N_0)W_N^{kn}$=$W_N^{kN_0}$=$e^{-j\frac{2\pi}{N}kN_0}$

（2）

求有限序列的离散傅里叶变换

$x(n) = a^n$

解：

$$X(k) = \sum_0^{N-1} a^n R_N(n)W_N^{kn} = \sum_0^{N-1} (aW_N^k)^n = \frac{1-a^N W_N^{kN}}{1-aW_N^k} = \frac{1-a^N}{1-aW_N^k} = \frac{1-a^N}{1-ae^{-j\frac{2\pi}{N}k}}$$

5-2

若已知有限长序列 x（n）={ 1，2，-1，3 }，求序列的离散傅里叶变换 X（k），再对所得的结果求其逆变换（IDFT）

解：

由题意知：长度 N=4

带入公式可得：$X(\mathrm{k}) = \sum_{\mathrm{n}=0}^{3} \mathrm{x}(n) W_4^{kn} = x(0)W_4^0 + x(1)W_4^k + x(2)W_4^{2k} + x(3)W_4^{3k}$

得：

$X(0) = 1+2-1+3 = 5$

$X(1) = 1-2j+1+3j = 2+j$

$X(2) = 1-2-1-3 = -5$

$X(3) = 1+2j+1-3j = 2-j$

所以序列 X（k）：

$X(\mathrm{k}) = \{5, 2+j, -5, 2-j\}$

5-3

（2）

$$\mathrm{Sin}\omega t=\frac{e^{j\omega t}-e^{-j\omega t}}{2j}$$

$$\sin\frac{2\pi rn}{N}=\frac{e^{\frac{2\pi rn}{N}j}-e^{\frac{-2\pi rn}{N}j}}{2j}$$

$$\mathrm{DFT}[x(n)\sin(\frac{2\pi rn}{N})]$$

$$=\frac{1}{2j}\{\mathrm{DFT}[x(n)e^{\frac{2\pi rn}{N}j}]-\mathrm{DFT}[x(n)e^{\frac{-2\pi rn}{N}j}]\}$$

$$=\frac{1}{2j}\{\mathrm{DFT}[x(n)W_N^{-rn}]-\mathrm{DFT}[x(n)W_N^{rn}]\}$$

$$=\frac{1}{2j}[X(k-r)_N R_N(k)-X(k+r)_N R_N(k)]$$

5-5 两个有限长序列 x(n)={5，2，4，-1，2}，h(n)={-3，4，-1}

（1）计算 x(n)与 h(n)的线卷积 yL(n)=x(n)*h(n)

解：图解法求卷积：

		5	2	4	-1	2
				-3	4	-1
		-5	-2	-4	1	-2
	20	8	16	-4	8	
-15	-6	-12	3	-6		
-15	14	-9	17	-14	9	-2

x(n)与 h(n)的线卷积 yL(n)={-15,14,-9,17,-14,9,-2}

（2）计算 x(n)与 h(n)的 6 点圆卷积 yc1(n)=x(n)6h(n)

N=5+3-1=7

-15	14	-9	17	-14	9
-2					

yc1={-17,14,-9,17,-14,9}

（3）

计算 x(n)与 h(n)的 7 点圆卷积 y_{c2}=x(n)⑦h(n)；

$y_{c2}(n)=\{-15, 14, -9, 17, -14, 9, -2\}$

（4）

计算 x(n)与 h(n)的 8 点圆卷积 y_{c3}=x(n)⑧h(n)。

解：

因为 x(n)长度为 5，h(n)长度为 3

所以该序列长度为 N=5+3-1=8

因为求的时 8 点圆卷积

所以 y_{c3}={-15, 14, -9, 17, -14, 9, -2, 0}

5-10

设 x（n）为一有限长序列，0≤n≤N-1，且 N 为偶数。已知 X(k)=DFT[x(n)],试用 X(k)表示以下各序列的离散傅里叶变换

（1）

x1(n)=x(N-1-n)

DFT[x1(n)]= $\sum_{n=0}^{N-1} x(N-1-n) * W_N^{nk}$ (令 m=N-1-n)

$= \sum_{m=0}^{N-1} x(m) * W_N^{(N-1-m)k}$

$= W_N^{-k} \sum_{m=0}^{N-1} x(m) * W_N^{-mk}$

$= W_N^{-k} x(-k)$

（2）

$x_2(n) = (-1)^n x(n)$

原式 = $\cos(n\pi)x(n)$

= $\frac{1}{2}(e^{jn\pi} + e^{-jn\pi})x(n)$

= $\frac{1}{2}e^{jn\pi}x(n) + \frac{1}{2}e^{-jn\pi}x(n)$

= $\frac{1}{2}e^{j[(2\pi/N)n * \frac{1}{2}N]}x(n) + \frac{1}{2}e^{j[-(2\pi/N)n * \frac{1}{2}N]}x(n)$

= $\frac{1}{2} W_N^{\frac{1}{2}Nn} x(n) + \frac{1}{2} W_N^{\frac{1}{2}Nn} x(n)$

= $W_N^{\frac{1}{2}Nn} x(n)$

= $X(\frac{1}{2}N + k)$

（6）

$$x(n)=\begin{cases} x\left(\frac{n}{2}\right) & n为偶数 \\ 0 & n为奇数 \end{cases}$$

解：DFT=[x(n)]=$\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W^{kn}=\sum_{n=0}^{2N-1}x(n/2)W_{2N}^{kn}$=$\sum_{m=0}^{N-1}x(m)W_{2N}^{kn}$=$\sum_{m=0}^{N-1}x(m)W^{km}$=X(k)

5-11

已知序列 x(n)=$\left(\frac{1}{2}\right)^{n}u(n)$的离散时间傅里叶变换为 X($e^{j\Omega}$),又知一有限长序列 y(n)在 $0 \le n \le 9$ 的范围内有定义，其余点均为零，y(n)的 10 点离散傅里叶变换 Y(k)等于 X($e^{j\Omega}$)在其主周期内等间隔的 10 点抽样，求有限长序列 y(n)。

解：

$\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}\Big|z=e^{j\Omega}=\frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{j\Omega}}=X(e^{j\Omega})$

$Y(k)=X(e^{j\Omega})\Big|\Omega=\frac{2\pi}{10}$ k=$\frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{2}k}}$

$X(n)=a^{n}R_{N}(n)\xrightarrow{DFT}\frac{1-a^{N}}{1-ae^{-j\frac{2\pi}{N}K}}=Xn(K)$

Y(K)=$\frac{X_{N}(k)}{1-a^{N}}\Big|a=\frac{1}{2}=\frac{X_{N}(K)}{1-\frac{1}{2}^{10}}$

$y(n)=\frac{x(n)}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{10}}=\left(\frac{1}{2}\right)^{n}R_{N}(n)\cdot\frac{1}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{10}}$