МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ» (ФГБОУ ВО «ВГУ»)

Факультет прикладной математики, информатики и
механики **Кафедра** ВМ и ПИТ

ОТЧЁТ

по дисциплине «**Численные методы**»

Лабораторная работа № 2

Тема: «Интерполирование кубическими сплайнами»

Выполнил (а) студент (ка):

Задорожний Илья Владимирович____

Курс 3 Группа 7 (ММИО)___________

Преподаватель:

Доцент Шабунина З.А.

Воронеж, 2024

1. Постановка задачи

Построение таблицы значений второй производной для таблично заданной функции $f(x)$ с помощью кубического сплайна.

Описание задачи

С помощью кубического сплайна вычисляются значения второй производной функции f(x) в узлах таблицы. Граничные условия задаются в виде $s''(x_0) = A,\ s'(x_N) = B$.

Входные параметры

X – вектор значений аргументов в порядке возрастания (вектор узлов интерполяции), $x_0 < x_1 < \ldots < x_{N-1} < x_N$

Y – вектор значений функции $f(x)$ в узлах интерполяции;

N – количество отрезков, на которых строится кубический сплайн;

A, B – константы краевых условий.

Выходные параметры:

IER – индикатор ошибки:

IER 0 – нет ошибки;

IER 1 – кубический сплайн не может быть построен ($N < 2$);

IER 2 – нарушен порядок возрастания аргумента во входном векторе X.

2. Теоретическая часть

$$s_i(x) = a_i + b_i(x - x_i) + \frac{c_i}{2}(x - x_i)^2 + \frac{d_i}{6}(x - x_i)^3$$

$$s_i'(x) = b_i + c_i(x - x_i) + \frac{d_i}{2}(x - x_i)^2$$

$$s_i''(x) = c_i + d_i(x - x_i)$$

$$h_i c_{i-1} + 2(h_i + h_{i+1})c_i + h_{i+1}c_{i+1} = 6F_i,$$

где $$F_i = \frac{f_{i+1} - f_i}{h_{i+1}} - \frac{f_i - f_{i-1}}{h_i}$$

Граничные условия:

$$s'\left(x_N\right) = s'_N\left(x_N\right) = \; b_N + c_N\left(x_N - x_N\right) + \frac{d_N}{2}\left(x_N - x_N\right)^2 = b_N = B$$
$$s''\left(x_0\right) = s''_0\left(x_0\right) \; = \; c_0 + d_0\left(x_0 - x_0\right) = c_0 = A$$

Условия непрерывности

1)

$$s''_{N-1}\left(x_{N-1}\right) \; = \; s''_N\left(x_{N-1}\right)$$
$$c_{N-1} + d_{N-1}\left(x_{N-1} - x_{N-1}\right) = c_N + d_N\left(x_{N-1} - x_N\right)$$
$$c_N - d_N h_N = c_{N-1}$$

2)

$$s_{N-1}\left(x_{N-1}\right) \; = \; s_N\left(x_{N-1}\right)$$
$$s\left(x_i\right) = a_i = f_i$$

$$a_{N-1} = a_N - b_N h_N + \frac{c_N}{2} h_N^2 \; - \; \frac{d_N}{6} h_N^3$$

$$a_{N-1} - a_N = -b_N h_N + \frac{c_N}{2} h_N^2 - \frac{d_N}{6} h_N^3$$

$$\frac{f_{N-1} - f_N}{h_N} = -b_N + \frac{c_N}{2} h_N - \frac{d_N}{6} h_N^2$$

$$b_N = \frac{c_N}{2} h_N - \frac{d_N}{6} h_N^2 + \frac{f_N - f_{N-1}}{h_N}$$

3)

$$\begin{cases} b_N = \frac{h_N}{2} c_N - \frac{h_N^2}{6} d_N + \frac{f_N - f_{N-1}}{h_N} \\ c_n - d_N h_N = c_{N-1} \\ b_N = B \end{cases}$$

Откуда получим

$$B \; - \frac{f_N - f_{N-1}}{h_N} = h_N \left(\frac{c_N}{2} - \frac{h_N d_N}{6} \right)$$

$$B \; - \frac{f_N - f_{N-1}}{h_N} = h_N \left(\frac{1}{2} c_N - \frac{1}{6} c_N + \frac{1}{6} c_{N-1} \right)$$

$$B \; - \frac{f_N - f_{N-1}}{h_N} = h_N \left(\frac{1}{3} c_N + \frac{1}{6} c_{N-1} \right)$$

$$c_N + \frac{1}{2} c_{N-1} \; = \; \frac{3}{h_N} \left(B \; - \frac{f_N - f_{N-1}}{h_N} \right)$$

4) Окончательная СЛАУ

$$\begin{cases} c_0 = A \\ h_i c_{i-1} + 2\,(h_i + h_{i+1}) c_i + h_{i+1} c_{i+1} = 6F_i \, , \; i \; = \; \overline{1, \, N-1} \\ \frac{1}{2} c_{N-1} + c_N = \frac{3}{h_N} \left(B - \frac{f_N - f_{N-1}}{h_N} \right) \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ h_1 & 2\,(h_1 + h_2) & h_2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & h_2 & 2\,(h_2 + h_3) & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & h_{N-1} & 2\,(h_{N-1} + h_N) \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} A \\ 6F_1 \\ 6F_2 \\ \dots \\ 6F_{N-1} \\ \frac{3}{h_N}\left(B\ -\frac{f_N - f_{N-1}}{h_N}\right) \end{pmatrix}$$

Однако, чтобы систему можно было решать методом трехточечной прогонки, необходимо также выполнения критерия, должны выполняться неравенства:

$$A = \begin{pmatrix} C_0 & B_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ A_1 & C_1 & B_1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2 & C_2 & B_2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ & & & \dots & \dots & \dots & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_N & C_N \end{pmatrix}$$

$$|C_j| \geq |A_j| + |B_j| \geq |A_j| > 0 \text{ и } \left|-\frac{A_N}{C_N}\right| < 1,\ \left|-\frac{B_0}{C_0}\right| < 1$$

Заметим, что для систем уравнений, характерных для нашей задачи последние два неравенства выполняются в силу граничных условий, поскольку

$$C_N = 1,\ A_N = \frac{1}{2}, \text{ то } \left|-\frac{A_N}{C_N}\right| = \frac{1}{2} < 1$$

И $$C_0 = 1,\ B_0 = 0, \text{ то } \left|-\frac{B_0}{C_0}\right| = 0 < 1$$

Оставшиеся неравенства также выполняются: $2\left|h_i + h_{i+1}\right| \geq \left|h_i\right| + \left|h_{i+1}\right|,\ i\ =\ \overline{1,\ N-1}$. Другие неравенства проверяются на верность.

Проверка

$$y =\ x^2$$

$$X = [0 \quad 2 \quad 4 \quad 5],$$
$$Y = [0 \quad 4 \quad 16 \quad 25],$$
$$A\ =\ 2,$$
$$B\ = 10$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 8 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 0.5 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathrm{c}_0 \\ \mathrm{c}_1 \\ \mathrm{c}_2 \\ \mathrm{c}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 24 \\ 18 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{\mathrm{c}}\ = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

3.Алгоритм

Блок-схема для алгоритма построения кубического сплайна и решения методом прогонки может выглядеть следующим образом:

- **Начало**

- Чтение массивов `x`, `y`, и граничных условий `a` (вторая производная в начале) и `b` (вторая производная в конце)

- Проверка:
  - Если количество узлов меньше 2, вывод ошибки "Недостаточно точек" и выход
  - Если значения `x` не упорядочены по возрастанию, вывод ошибки "Нарушен порядок возрастания" и выход
- Вычислить шаги `h_i` как разности между соседними значениями `x`
- Инициализация трех массивов для диагоналей трехдиагональной матрицы:
  - `main_diag` — главная диагональ (размер `n`)
  - `upper_diag` — наддиагональная диагональ (размер `n-1`)
  - `lower_diag` — поддиагональная диагональ (размер `n-1`)
  - `F` — вектор правых частей
- Заполнение матрицы и вектора правых частей:
  - Условие на начальный элемент: `main_diag[0] = 1` и `F[0] = a`
  - Для внутренних узлов (от 1 до `n-2`):
    - Заполнение `main_diag[i] = 2 * (h[i-1] + h[i])`
    - Заполнение `upper_diag[i-1] = h[i]`
    - Заполнение `lower_diag[i-1] = h[i-1]`
    - Вычисление правой части: `F[i] = 6 * ((y[i+1] - y[i]) / h[i] - (y[i] - y[i-1]) / h[i-1])`
  - Условие на последний элемент: `lower_diag[n-2] = 1/2`, `main_diag[n-1] = 1`, и `F[n-1] = (3 / h[n-2]) * (b - (y[n-1] - y[n-2]) / h[n-2])`
- Вызов функции `solve_system` для решения системы методом прогонки:
  - Инициализация массивов `mu` и `nu`
  - Прямой ход:
    - Задать начальные значения `mu[0]` и `nu[0]` на основе первых элементов `main_diag`, `upper_diag`, и `F`

    - Для каждого последующего узла `i` вычислить `mu[i]` и `nu[i]` на основе значений `main_diag[i]`, `upper_diag[i]`, `lower_diag[i-1]`, `mu[i-1]` и `nu[i-1]`
  - Обратный ход:
    - Начать с последнего элемента и вычислить все предыдущие элементы массива `res`
- Запись результатов:
  - Записать `x`, `y` и `second_derivatives` (результат решения системы) в файл
- **Конец**

4. Тестирование

$$y = x^2$$

```
-4 -3 -2.5 -1 0 1 2.5 3 4 5
16 9 6.25 1 0 1 6.25 9 16 25
2
10
```

Delimiter: ,

	x	f(x)	f''(x)
1	-4.000000	16.000000	2.000000
2	-3.000000	9.000000	2.000000
3	-2.500000	6.250000	2.000000
4	-1.000000	1.000000	2.000000
5	0.000000	0.000000	2.000000
6	1.000000	1.000000	2.000000
7	2.500000	6.250000	2.000000
8	3.000000	9.000000	2.000000
9	4.000000	16.000000	2.000000
10	5.000000	25.000000	2.000000

$$y = 2x + 3$$

```
-3 -2.5 -1.8 0 0.5 1.2 2.5 4 5 6
-3 -2 -0.6 3 4 5.4 8 11 13 15
0
2
```

Delimiter: ,

	x	f(x)	f''(x)
1	-3.000000	-3.000000	0.000000
2	-2.500000	-2.000000	-0.000000
3	-1.800000	-0.600000	0.000000
4	0.000000	3.000000	-0.000000
5	0.500000	4.000000	0.000000
6	1.200000	5.400000	-0.000000
7	2.500000	8.000000	0.000000
8	4.000000	11.000000	-0.000000
9	5.000000	13.000000	0.000000
10	6.000000	15.000000	-0.000000

$$y = x^3 - 3x^2$$

```
-3 -2.5 -2 -1 0 1 2 2.5 3 4
-54 -34.375 -20 -4 0 -2 -4 -3.125 0 16
-24
24
```

Delimiter: ,

	x	f(x)	f''(x)
1	-3.000000	-54.000000	-24.000000
2	-2.500000	-34.375000	-21.000000
3	-2.000000	-20.000000	-18.000000
4	-1.000000	-4.000000	-12.000000
5	0.000000	0.000000	-6.000000
6	1.000000	-2.000000	0.000000
7	2.000000	-4.000000	6.000000
8	2.500000	-3.125000	9.000000
9	3.000000	0.000000	12.000000
10	4.000000	16.000000	18.000000