LIVE DU PROFESSEUR

2de BAC PRO

GROUPEMENTS A et B

MATHS

Georges Bringuier
Éliane Alquier
André Guitard
Gérald Lafforgue
Gilles Léran
Catherine Thiaudière

hachette
TECHNIQUE

© HACHETTE LIVRE 2013, 43 quai de Grenelle 75905 Paris Cedex 15

SOMMAIRE

Statistiques et probabilités

Algèbre – Analyse

Géométrie

1 STATISTIQUES : VOCABULAIRE ET REPRÉSENTATIONS GRAPHIQUES

Capacités	Connaissances
• Organiser des données statistiques en choisissant un mode de représentation adapté à l'aide des fonctions statistiques d'une calculatrice et d'un tableur. • Extraire des informations d'une représentation d'une série statistique.	• Représentation d'une série statistique par un diagramme en secteurs, en bâtons ou par un histogramme.

Le but de ce chapitre est de consolider les acquis du collège. L'enseignement de statistiques à une variable prend ici appui sur des exemples liés aux spécialités de seconde bac pro ou tirés de la vie courante, en utilisant les TIC autant que nécessaire.

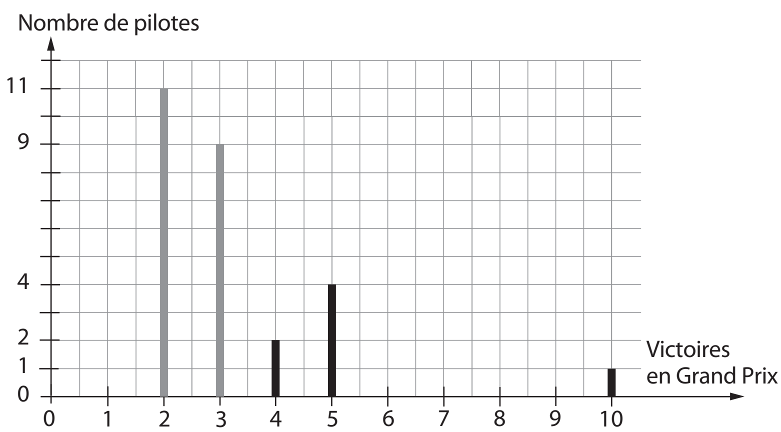
Activité 1 : Combien y a-t-il eu de Grands Prix ?

1. Caractère étudié : nombre de victoires en Grand Prix. Caractère quantitatif discret.

2. Tableau statistique :

Nombre de victoires en Grand Prix	Nombre de pilotes
2	**11**
3	**9**
4	2
5	4
10	1
Total	$N = 27$

Diagramme en bâtons :



3. Le diagramme en bâtons des effectifs de la 2^{e} série statistique est obtenu avec un tableur-grapheur informatique.

4. Nombre de Grands Prix gagnés :

– par les pilotes : $2 \times 11 + 3 \times 9 + 4 \times 2 + 5 \times 4 + 10 \times 1 = 87$

– par les constructeurs : $1 \times 5 + 2 \times 2 + 8 \times 1 + 15 \times 1 + 25 \times 1 + 30 \times 1 = 87$

Le nombre de Grands Prix gagnés par les pilotes est égal au nombre de Grands Prix gagnés par les constructeurs motos.

Activité 2 : Comment économiser du carburant ?

1. Coût annuel moyen en carburant : 1 207,5 €

$$15\,000 \times \frac{5}{100} \times 1{,}61 = 1\,207{,}5$$

2. Oui, pour des déplacements dans les encombrements en milieu urbain aux heures de pointe, ce coût sera modifié. Le coût augmentera car le deuxième diagramme montre que la consommation moyenne de carburant augmente lorsque le rapport de vitesse du véhicule diminue.

Activité 3 : Qui est le meilleur au 100 m ?

Ben sera sélectionné pour participer à la prochaine compétition. Il a réalisé 65 fois des performances sous 10,84 secondes pour courir le 100 m contre 40 fois pour Hugo.

Travaux pratiques

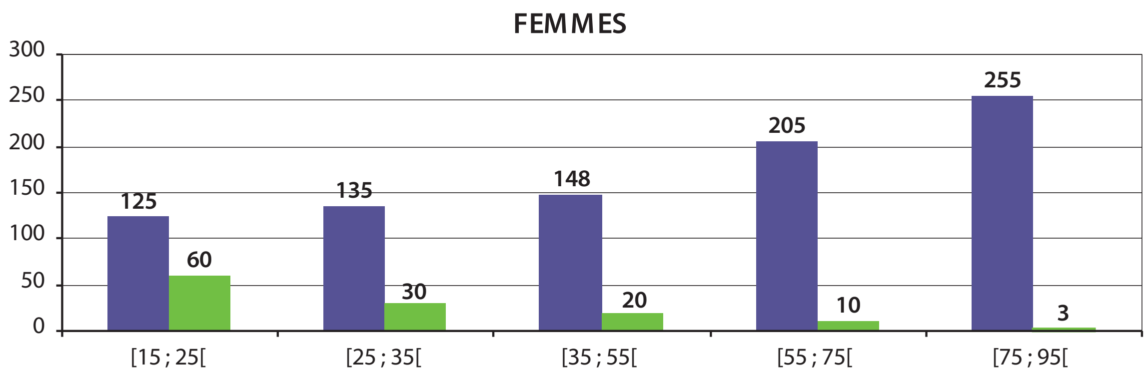
La télévision est-elle menacée par l'ordinateur ?

1. a. 1 000 personnes vivant en France. Il s'agit d'un sondage.

b.

Classe d'âge des hommes (en années)	Temps devant la télévision (en min)	Temps devant l'ordinateur (en min)
[15 ; 25[	120	**100**
[25 ; 35[	**130**	**50**
[35 ; 55[	**155**	**40**
[55 ; 75[	**210**	**25**
[75 ; 95[	**250**	15

c. Représentation graphique des résultats obtenus pour les femmes :



2. a. Les femmes de 75 à 95 ans passent le plus de temps devant la télévision. Les hommes de 15 à 25 ans passent le plus de temps devant l'ordinateur.

b. Les hommes de 15 à 25 ans passent le moins de temps devant la télévision.
Les femmes de 75 à 95 ans passent le moins de temps devant l'ordinateur.

c. Les femmes de la classe d'âge [15 ; 25[passent en moyenne chaque jour 60 minutes devant leur ordinateur.
Les femmes de 75 à 95 ans passent en moyenne chaque jour 3 minutes devant leur ordinateur.

d. On observe dans ce sondage que le temps passé devant la télévision augmente avec l'âge alors que le temps passé devant l'ordinateur diminue avec l'âge.

Les décibels à forte dose vont-ils nous rendre sourds ?

1. a. 900 personnes âgées de 13 à 25 ans vivant en France.

b. Il s'agit d'un sondage.

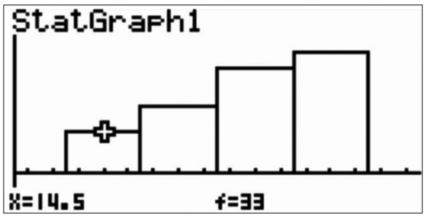
2. a.

Âge (en années)	Centre de classe x_i	Nombre de jeunes ayant ressenti des acouphènes	Fréquence (en %) f_i
[13 ; 16[	14,5	33	**12,64**
[16 ; 19[	17,5	51	**19,54**
[19 ; 22[	20,5	83	**31,80**
[22 ; 25[	23,5	94	**36,02**
TOTAL		$N = 261$	100,00

b. 261 jeunes ayant ressenti des acouphènes représentent 29 % des 900 jeunes interrogés dans l'enquête :

$$\frac{261}{900} \times 100 = 29 \text{ soit } 29\ \%.$$

c. Histogramme :



La hauteur des rectangles obtenus est proportionnelle aux effectifs.

3. a. 14 élèves ayant ressenti des acouphènes représentent 8 % des 175 élèves de la classe d'âge [16 ; 19[interrogés dans le lycée professionnel :

$$\frac{14}{175} \times 100 = 8 \text{ soit } 8\ \%.$$

b.

☒ Le pourcentage d'élèves dans la classe d'âge [16 ; 19[qui souffrent d'acouphènes est plus élevé dans l'enquête nationale que dans l'enquête du lycée.

☒ À priori, les élèves du lycée sont plus conscients des risques auditifs que ceux de l'enquête nationale.

☒ Le pourcentage d'élèves de la classe d'âge [16 ; 19[du lycée est inférieur à tous les pourcentages de toutes les classes d'âge de l'enquête nationale.

Exercices

Vocabulaire de la statistique

1 **Enquête 1** : Recensement.
Population : ensemble des immeubles d'un quartier.
Enquête 2 : Recensement.
Population : ensemble des jeunes nés en 1995.
Enquête 3 : Sondage.
Population : ensemble des grains dans l'échantillon de graviers.
Enquête 4 : Sondage. Population : 200 pièces métalliques.

2 **Enquête 1** :
Nombre de fruits consommés quotidiennement. Quantitatif discret.
Enquête 2 :
Montant du chèque. Quantitatif continu.
Enquête 3 :
Nationalité du touriste. Qualitatif.
Enquête 4 :
Cylindrée en cm^3. Quantitatif discret.

3 $N = 2 + 38 + 20 = 60$

Caractère	Effectif	Fréquence en %
Blanc	3	**5**
Rouge	39	**65**
Vert	18	**30**
	$N = 60$	**100**

4 $n_2 = 700 - 350 - 250 = 100$

5 $N = 30$ .Les fréquences sont indiquées dans le tableau ci-dessous.

	A	B	C
1	x_i	n_i	f_i (en %)
2	[5 ; 8[	5	17
3	[8 ;11[	9	30
4	[11 ; 14[	12	40
5	[14 ; 17[	4	13
6	TOTAL	30	100

6 **a.**

Notes	Effectif
[00 ; 05[	**2**
[05 ; 10[	**4**
[10 ; 15[	**7**
[15 ; 20[	**5**
	$N = 18$

b. Pour le lycée : $\frac{23}{112} = 0{,}205$;

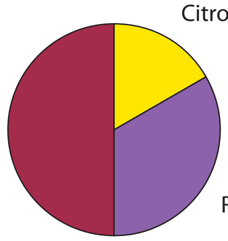
pour la classe : $\frac{5}{18} = 0{,}278$.

La proportion d'élèves ayant obtenu entre 15 et 20 au devoir est plus importante pour les élèves de la classe que pour l'ensemble des élèves de seconde Bac Pro du lycée.

Représentations graphiques

7

Marque de voiture sur un parking	Nombre de voitures	Angle (en degrés)
Renault	30	**120**
Peugeot	45	180
Citroën	15	**60**
Total	90	360



La marque la plus représentée est Peugeot.

8

Station de radio	Nombre de jeunes	Fréquences
MRJ	**27**	0,05
Skypop	**243**	0,45
Sun Radio	**216**	**0,4**
Mouv Radio	**54**	0,1
Total	$N = 540$	1

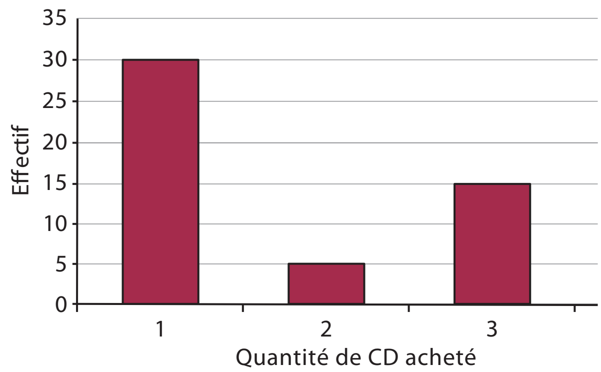
9

Atelier	Nombre d'employés
A	**40**
B	**20**
C	**10**
D	**30**
Total	**100**

Le nombre total d'employés des ateliers A et C est égal à : $40 + 10 = 50$. Ce nombre représente la moitié des employés, soit 50 %.

10

Quantité de CD achetés	Effectif	Fréquence (en %)
1	**30**	60
2	5	10
3	**15**	30
Total	50	100



On achète 1 CD le plus fréquemment.

11 **a.** Amplitude des classes :

$60 - 50 = 50 - 40 = 40 - 30 = 30 - 20 = 10$ minutes.

b. Nombre total de pièces fabriquées :

$N = 45 + 67 + 20 + 10 = 142$.

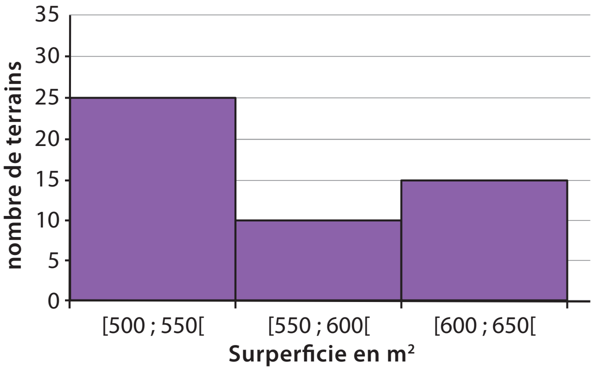
c. 45 pièces sur un total de 142 sont fabriquées en moins de 30 minutes :

$\frac{45}{142} \times 100 = 31{,}7$ soit 31,7 %.

Le responsable a raison car au moins 30 % des pièces sont fabriquées en moins de 30 minutes.

12

Superficie des terrains d'un lotissement (en m^2)	Nombre de terrains	Fréquence (en %)
[500 ; 550[	25	**50**
[550 ; 600[	10	**20**
[600 ; 650[	15	30
Total	50	100



Les terrains dont la superficie est au moins égale à 600 m^2 ne sont pas les plus nombreux puisqu'ils ne sont que 15. Ce sont les terrains dont la superficie est comprise entre 500 et 550 m^2 qui sont les plus nombreux.

13

Longueur d'une pièce (en cm)	Effectif
[0 ; 10[	**10**
[10 ; 30[	**8**
[30 ; 40[	**7**
Total	**25**

L'amplitude des classes de l'histogramme n'est pas constante.

$40 - 30 = 10$; $30 - 10 = 20$; $10 - 0 = 10$.

L'amplitude de la deuxième classe est supérieure aux deux autres.

14

Tableau 1

Représentations **a** et **c** car le caractère est qualitatif et, dans ce cas, le diagramme en bâtons ou le diagramme en secteurs est adapté.

Tableau 2

Représentations **a** et **c** car le caractère est quantitatif discret et dans ce cas le diagramme en bâtons ou le diagramme en secteurs est adapté.

Tableau 3

Représentations **b** et **c** car le caractère est quantitatif continu et dans ce cas l'histogramme ou le diagramme en secteurs est adapté.

QCM : Testez-vous !

1. A. un recensement : l'enquête porte sur l'ensemble des classements aux Grands Prix et non sur un échantillon.

2. B. 10 : ces observations sont regroupées dans le tableau suivant, avec $N = 10$.

Caractère	Effectif
15	**2**
16	**5**
17	**3**
Total	$N = 10$

3. C. 100 %.

4. A. qualitatif : le caractère n'est pas mesurable.

5. A. qualitatif : le caractère n'est pas mesurable.

6. B. caractère quantitatif discret.

7. C. caractère quantitatif continu : les valeurs du caractère ne sont pas isolées et sont regroupées en classe.

Problèmes

15 Comment améliorer le bilan carbone ?

1. Le caractère étudié est le poste concerné par le bilan carbone moyen des ménages. Il est qualitatif.

2. Le pourcentage du poste *Logement* est :

$$100 - 16 - 54 = 30\ \%.$$

3. $\dfrac{54}{100} \times 7\,388 = 3\,990$ soit 3 990 kg par individu.

4.

Bilan carbone moyen par poste	Quantité de CO_2 par individu en kg
ALIMENTATION	1 182
TRANSPORT	3 990
LOGEMENT	2 216
	$N = 7388$

5. Ils devraient réduire l'utilisation du véhicule personnel car c'est le poste *Transport* qui produit le plus de CO_2.

6. La majorité des émissions (79 %) de CO_2 liées au poste *Transport* concerne le véhicule personnel.

16 Faut-il remplacer cette machine-outil ?

1. Caractère étudié : durée des arrêts d'une tronçonneuse. Caractère quantitatif.

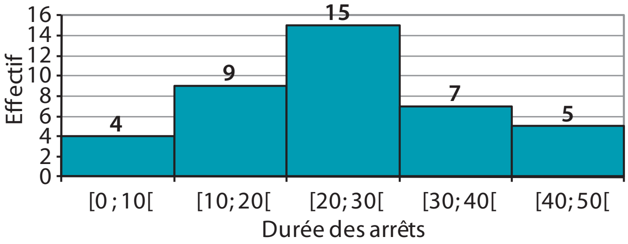
2. $N = 40$

3.

Durée des arrêts (en min)	Effectifs n_i
[0 ; 10[	4
[10 ; 20[	9
[20 ; 30[	15

Durée des arrêts (en min)	Effectifs n_i
[30 ; 40[	7
[40 ; 50[	5
Total	$N = 40$

4. Histogramme de cette série statistique :



5. $15 + 7 + 5 = 27$ soit 27 arrêts supérieurs à 20 minutes, soit :

$$\frac{27}{40} \times 100 = 67{,}5 \text{ soit } 67{,}5\ \%.$$

La tronçonneuse sera remplacée car plus de 50 % (67,5 %) des arrêts ont une durée supérieure à 20 min.

17 Le Scrabble

1. a. Effectif correspondant à chaque lettre.

Lettre	E	A	S
Effectif	4347577	2141792,1	2014304,48

Lettre	I	T	N
Effectif	1861319,33	1784826,75	1759329,23

Lettre	R	U	O
Effectif	1682836,65	1657339,13	1402363,88

Lettre	L	D	C
Effectif	1376866,35	917910,9	790423,275

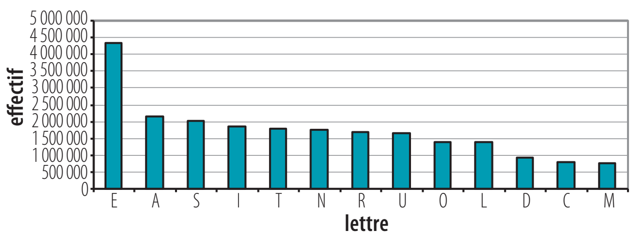
Lettre	M	P	V
Effectif	764925,75	688433,175	458955,45

Lettre	Q	F	G
Effectif	356965,35	254975,25	229477,725

Lettre	H	B	J
Effectif	229477,725	229477,725	152985,15

Lettre	X	Y	Z
Effectif	101990,1	50995,05	50995,05

b. Diagramme en bâtons correspondant aux 13 premières lettres.



2. a. Fréquence correspondant à chaque lettre du jeu de Scrabble :

Lettre	E	A	S	I	T	N	R	U	O	L	D	C	M
Frequence (en %)	15	9	6	8	6	6	6	6	6	5	3	2	3

Lettre	P	V	Q	F	G	H	B	J	X	Y	Z	K	W
Frequence (en %)	2	2	1	2	2	2	2	1	1	1	1	1	1

b. Les fréquences d'apparition des lettres dans les romans étudiés sont peu différentes de celles du Scrabble. Les deux jokers augmentent les chances de réussir.

18 Combien d'éoliennes en mer ?

1. 5 parcs sont prévus au total.
2. La puissance totale produite est

$$500 \times 3 + 750 \times 2 = 3\,000 \text{ MW.}$$

3. Puissance moyenne fournie par une éolienne :

$$\frac{3\,000}{600} = 5 \text{ MW.}$$

4. Nombre d'éoliennes correspondant au projet composé de 4 sites de 500 MW chacun :

$$\frac{4 \times 500}{5} = 400.$$

19 Réglage d'une chaîne d'usinage

1. Fréquences :

Mesures (en µm)	Effectifs n_i	Fréquences (en %)
[10 ; 20[	20	10
[20 ; 30[	52	26
[30 ; 40[	84	42
[40 ; 50[	32	16
[50 ; 60[	12	6
TOTAL	$N = 200$	100

2. $10 + 26 + 42 + 16 = 94$.
Il faut modifier les réglages car 94 % des mesures sont inférieures à 50 µm, or il en faut au moins 95 %.
3. Fréquence des défauts supérieurs à 50 µm :

$$\frac{8}{200} \times 100 = 4 \text{ soit } 4\ \%.$$

On en déduit que $100 - 4 = 96$ soit 96 % des mesures sont inférieures à 50 µm : les réglages de la chaîne d'usinage sont corrects.

20 Épuisement des ressources

1. a. Les deux réserves de métaux les plus menacées sont celles de fer et de cuivre.
b. Tableau des données :

Nature des réserves	Temps estimé avant l'épuisement
Fer	25

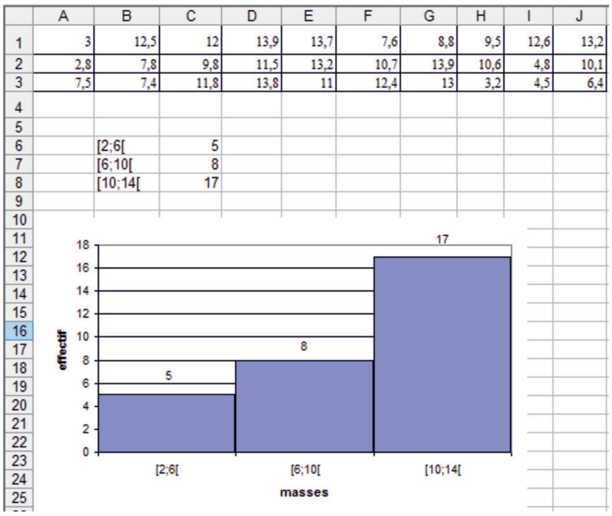
Nature des réserves	Temps estimé avant l'épuisement
Aluminium	**80**
Cuivre	**25**
Nickel	**30**
Total	$N = 160$

2. Proportion en cuivre : $\dfrac{59\,000}{870\,000} \times 100 \approx 6{,}8$ soit 6,8 %.

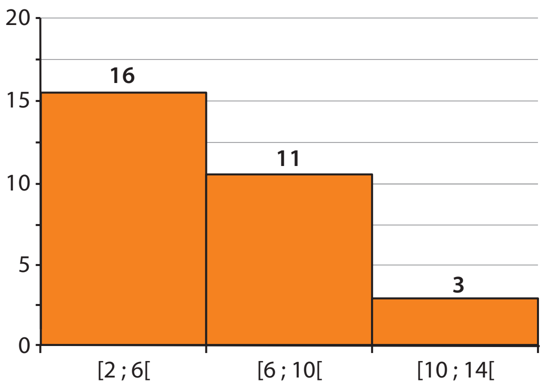
Cette teneur est supérieure à celle d'un nodule polymétallique mentionnée dans le diagramme à secteurs.

21 Qui soulève le plus de charges ?

1. Organisation des données et représentation de l'histogramme à l'aide d'un tableur-grapheur informatique :



2. En comparant les deux histogrammes, on constate que le premier manutentionnaire soulève plus de charges que le deuxième au cours de la même matinée.



Démarche d'investigation

22 Économie de carburant et de CO_2

- Économies de consommation moyenne annuelle de carburant pour 612 millions de véhicules :

  $612 \times (1\,020 - 408) = 374\,544$ millions de L.

- Économies de rejet annuel moyen de CO_2 pour 612 millions de véhicules :

  $374\,544 \times 10^6 \times 2 = 749\,088 \times 10^6$ kg

  soit 749 088 000 tonnes.

23 Le contrôle qualité est-il efficace ?

Avant amélioration	
poste	**défauts**
1	**124**
2	**60**
3	**212**
Total	$N = 396$

Après amélioration	
poste	**défauts**
1	**96**
2	**18**
3	**141**
Total	$N = 255$

Pourcentage de défauts :

- avant l'amélioration : $\dfrac{396}{8\,800} \times 100 = 4{,}5$ soit 4,5 % ;
- après l'amélioration : $\dfrac{255}{8\,800} \times 100 = 2{,}9$ soit 2,9 %.

Le service de contrôle qualité de l'entreprise a correctement rempli sa mission puisque le taux de défauts a chuté en dessous du seuil de 3 %.

24 Le vaccin de la grippe

1. Le nombre de décès diminue dès que le pourcentage de vaccinés parmi les 75 ans et plus augmente. Il est raisonnable de penser que c'est cette population qui est victime de la grippe.

2. En 1978, une campagne de vaccination contre la grippe a été mise en place pour les personnes âgées.

3. Oui, la vaccination est un moyen efficace pour lutter contre la grippe car le diagramme en bâtons montre que le taux de décès a diminué depuis que la vaccination a été mise en place en 1978, pour atteindre, depuis 1998, un taux de décès liés à la grippe quasiment nul lorsque 75 % de cette population est vaccinée.

2 INDICATEURS STATISTIQUES

Capacités	Connaissances
• Pour une série statistique donnée, comparer les indicateurs de tendance centrale obtenus à l'aide d'une calculatrice ou d'un tableur. Interpréter les résultats. • Comparer deux séries statistiques à l'aide d'indicateurs de tendance centrale et de dispersion.	• Indicateurs de tendance centrale : moyenne et médiane. • Indicateurs de dispersion : étendue, quartiles.

Le but de ce chapitre est là aussi de consolider les acquis du collège. L'enseignement prend toujours appui sur des exemples concrets liés aux spécialités de seconde bac pro ou tirés de la vie courante. L'utilisation des TIC est nécessaire et le calcul d'indicateurs à l'aide de logiciels informatiques est une obligation de formation.

Activité 1 : Comment sont répartis les salaires ?

1. On a :

• $\sum n_i \times x_i = 20 \times 1\,500 + 8 \times 2\,000 + 4 \times 2\,500 + 3 \times 8\,000 + 1 \times 10\,000 = 90\,000$;

• $N = 20 + 8 + 4 + 3 + 1 = 36$;

On obtient donc pour le salaire moyen : $\overline{x} = \dfrac{90\,000}{36} = 2\,500$ €.

Le nombre de salariés qui gagnent plus que le salaire moyen de 2 500 € est : $3 + 1 = 4$.

2. $\dfrac{N}{2} = \dfrac{36}{2} = 18$. Le salaire médian correspond au salaire compris entre le 18^{e} salaire et le 19^{e} salaire de l'entreprise, soit 1 500 €.

3. Si l'un des salaires de l'entreprise augmente, alors $n_i \times x_i$ augmente aussi, et en conséquence, le salaire moyen $\overline{x}$ augmente aussi. Le salaire médian ne varie pas.

Activité 2 : Combien de cigarettes par jour ?

1. a. Les 19 résultats rangés par ordre croissant :

Rang	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
Nombre croissant de cigarettes	0	0	0	0	1	2	2	3	3	4	5	5	6	6	7	9	15	17	20

b. $\dfrac{19}{4} = 4{,}75$ soit 5 élèves représentent au moins un quart de la classe.

c. Les résultats rangés par ordre croissant dans le tableau montrent que le 5e élève fume une cigarette. Le quart des élèves de la classe qui fume le moins consomme au maximum $Q_1 = 1$ cigarette.

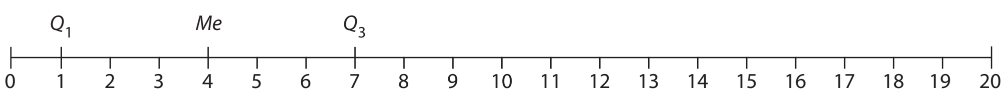
2. a. $\dfrac{19}{2} = 9{,}5$ soit 10 élèves représentent au moins la moitié de la classe.

b. Les résultats rangés par ordre croissant dans le tableau montrent que le 10^{e} élève fume quatre cigarettes. La moitié des élèves de la classe fume donc au plus $Me = 4$ cigarettes.

3. a. $\dfrac{19}{4} \times 3 = 14{,}25$ soit 15 élèves représentent au moins les trois-quarts de la classe.

b. Les résultats rangés par ordre croissant dans le tableau montrent que le 15^{e} élève fume sept cigarettes. Les trois-quarts des élèves de la classe fument au maximum $Q_3 = 7$ cigarettes.

4. a.



b. Le dernier groupe (de Q_3 à 20 cigarettes) est le groupe où l'écart entre le nombre de cigarettes fumées par celui qui en consomme le moins et le plus « gros fumeur » est le plus important.

Activité 3 : Les grands sont-ils vraiment plus grands ?

Variation en 40 ans de l'étendue des tailles moyennes entre les hommes de 20 ans et ceux de 79 :
- étendue des tailles en 1972 : 1,726 – 1,679 = 0,047 m ;
- étendue des tailles en 2012 : 1,774 – 1,706 = 0,068 m ;
- l'étendue des tailles a augmenté entre 1972 et 2012.

Les hommes de [60 ; 69[et [70 ; 79[en 2012 sont respectivement ceux de [20 ; 29[et [30 ; 39[en 1972. L'étendue des tailles ayant augmenté entre 1972 et 2012, les jeunes en 2012 sont donc effectivement plus grands qu'en 1972.
Les progrès dans différents domaines tels que l'hygiène, la santé, l'alimentation, peuvent expliquer cette variation.

Travaux pratiques

Combien de zinc en plus ?

1. Effectif total : $N = 81$.

2. et **3.**

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T
1	119	106	103	113	105	104	114	118	119	102	107	104	115	111	116	114	112	113	104	112
2	119	114	107	113	105	113	102	114	112	115	113	114	108	107	112	116	112	108	110	113
3	104	103	112	114	110	109	115	107	114	118	117	113	114	110	102	115	102	110	115	118
4	113	110	103	105	114	113	114	113	115	114	114	105	113	118	113	113	113	103	109	102
5	114																			

2 Indicateurs statistiques

Travaux Pratiques 1

moyenne	111
médiane	113

Moyenne : $\overline{x} = 111$ g. Médiane : $Me = 113$ g.

4. La moyenne $\overline{x}$ permet de calculer la masse m de zinc déposée sur l'ensemble des pièces contrôlées.
$m = 111 \times 81 = 8\,991$ g.

Efficacité d'un médicament

1. Calculs d'indicateurs

a. b. et **c.**

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	15	12,5	11	11	14		16,5	16,5	12	13	14
2	16	17	13	14	15,5		15	16	16	15,5	15
3	14	11,5	12,5	14	15		16	15	16	15	16
4	12,5	13	11,5	14	16		11	15,5	13,5	12	14,5
5	11	13,5	13	14	11		16	13	16	17	14,5

2 Indicateurs statistiques

Travaux Pratiques 2

Groupe 1 : Traité avec le médicament		Groupe 2 : Traité avec le placébo	
moyenne	13,42	moyenne	14,82
mediane	13,5	mediane	15
étendue	6	étendue	6
1er quartile	12,5	1er quartile	14
3ème quartile	14	3ème quartile	16

Indicateurs obtenus avec le tableur informatique :

	Moyenne $\overline{x}$	Médiane Me	Étendue e	1^{er} quartile Q_1	3^{e} quartile Q_3
Groupe 1 / Médicament	**13,42**	**13,5**	**6**	**12,5**	**14**

c. Indicateurs obtenus avec le tableur informatique

	Moyenne $\overline{x}$	Médiane Me	Étendue e	1er quartile Q_1	3e quartile Q_3
Groupe 2 / Placébo	14,82	15	6	14	16

2. Analyse des indicateurs

a. Le médicament administré au Groupe 1 a un effet caractérisé par une diminution de tous les indicateurs.

b. Le placébo administré au Groupe 2 a un effet caractérisé par une diminution de tous les indicateurs.

c. • 75% des malades du groupe 1 ont une tension inférieure ou égale à 14.

• 25 % des malades du groupe 2 ont une tension inférieure ou égale à 14.

• Le médicament est efficace. Ses indicateurs statistiques sont inférieurs à ceux du placébo, excepté pour l'étendue qui est la même. De plus, au moins 75 % des malades du groupe 1 contre 25 % pour le placébo, ont une tension inférieure ou égale à 14.

Exercices

Indicateurs de tendance centrale : moyenne et médiane

1 **a.** $Me = 8$, valeur centrale de cette série déjà ordonnée.

b. Série ordonnée : 10^{-1} ; 0,6 ; 3 ; 5 ; 5 ; 9 ; 10^2.
$Me = 5$.

c. Série ordonnée : – 11 ; – 8 ; – 4 ; $\frac{1}{5}$; 0 ; 3.
$Me = \dfrac{-4+0,2}{2} = -1,9$.

2 **a.** $N = 25 + 20 + 30 + 5 = 80$.
$\dfrac{N}{2} = 40$. La médiane est la 40e valeur du caractère de la série soit : Me = 2.

b. $N = 6 + 10 + 4 + 80 = 100$.
$\dfrac{N}{2} = 50$. La médiane est la 50e valeur du caractère de la série, la médiane appartient à l'intervalle [30 ; 40[.
La classe médiane est [30 ; 40[.

3 **a.** $\overline{x} = \dfrac{1+3+5+7+9+11+13+15+17+19+21}{11}$
$= \dfrac{121}{11} = 11$

b. $\overline{x} = \dfrac{-6+12-3+0+14+11+50-35+24+12+9}{11}$
$= \dfrac{88}{11} = 8$

4 **a.** $\overline{x} = \dfrac{5\times20+6\times42+7\times26+8\times12}{100}$
$= \dfrac{630}{100} = 6,3$

b. $\overline{x} = \dfrac{2,5\times4+7,5\times16+12,5\times12+17,5\times8}{40}$
$= \dfrac{420}{40} = 10,5$

5 **a.** $Me = 10$ et $\overline{x} = 10$.
b. $Me = 10$ et $\overline{x} = 10$.
c. $Me = 10$ et $\overline{x} = 10$.
d. $Me = 10$ et $\overline{x} = 10$.

6 **a.** $\overline{x} = 12$ et $Me = 12$.
b. $\overline{x} = 10$ et $Me = 10$.
c. $\overline{x} = 6$ et $Me = 6$.
d. Impossible sans calcul.

7 **a.** =SOMME(**A1:A10**) : somme de l'ensemble des valeurs de A1 à A10.

b. =MEDIANE(**A1:A100**) : médiane de l'ensemble des valeurs de A1 à A10.

c. =MOYENNE(**A1:Z1**) : moyenne de l'ensemble des valeurs de A1 à Z1.

Indicateurs de dispersion : étendue et quartiles

8 **a.** $e = 19 - 5 = 7$
b. $e = 0,1 - 0,000\,9 = 0,0991$
c. $e = 0,9 - (-4) = 4,9$

9 **a.** $e = 12 - 3 = 9$
b. $e = 8 - 0 = 8$

10 **a.** Série ordonnée : 1 ; 3 ; 4 ; 7 ; 8 ; 10 ; 12 ; 16.
$N = 8$.
25 % × 8 = 2 donc la 2e valeur de la série est $Q_1 = 3$.
75 % × 8 = 6 donc la 6e valeur de la série est $Q_3 = 10$.
$Me = \dfrac{7+8}{2} = 7,5$.

b. Série ordonnée : 2 ; 4 ; 9 ; 11 ; 13 ; 20 ; 24 ; 31.
$N = 8$.

$25\ \% \times 8 = 2$ donc la 2e valeur de la série est $Q_1 = 4$.
$75\ \% \times 8 = 6$ donc la 6e valeur de la série est $Q_3 = 20$.
$Me = \dfrac{11+13}{2} = 12$.

c. Série ordonnée : 0 ; 4 ; 8 ; 15 ; 20 ; 31 ; 45 ; 54 ; 57 ; 62.
$N = 10$.
$25\ \% \times 10 = 2{,}5$ donc la 3e valeur de la série est $Q_1 = 8$.
$75\ \% \times 10 = 7{,}5$ donc la 8e valeur de la série est $Q_3 = 54$.
$Me = \dfrac{20+31}{2} = 25{,}5$.

d. Série ordonnée : 0 ; 0,4 ; 16 ; 28 ; 44 ; 54 ; 61 ; 180 ; 407 ; 1 000.
$N = 10$.
$25\ \% \times 10 = 2{,}5$ donc la 3e valeur de la série est $Q_1 = 16$.
$75\ \% \times 10 = 7{,}5$ donc la 8e valeur de la série est $Q_3 = 180$.
$Me = \dfrac{44+54}{2} = 49$.

11 **a.** $N = 100$.
$25\ \% \times 100 = 25$ donc la 25e valeur de la série est $Q_1 = 7$.
$75\ \% \times 100 = 75$ donc la 75e valeur de la série est $Q_3 = 13$.
$\dfrac{N}{2} = \dfrac{100}{2} = 50$. La 50e valeur de la série est $Me = 9$.
b. $N = 50$.
$25\ \% \times 50 = 12{,}5$ donc la 13e valeur de la série est $Q_1 = 1$.
$75\ \% \times 50 = 37{,}5$ donc la 38e valeur de la série est $Q_3 = 4$.
$\dfrac{N}{2} = \dfrac{50}{2} = 25$. La 25e valeur de la série est $Me = 3$.

12 **a.** Étendue : $e = 20 - 4 = 16$.
b. Étendue : $e = 14 - 2 = 12$.

13 **a.** $N = 110$.
$25\ \% \times 110 = 27{,}5$ donc la 28e valeur de la série est $Q_1 = 4$.
$75\ \% \times 110 = 82{,}5$ donc la 83e valeur de la série est $Q_3 = 10$.
$\dfrac{N}{2} = \dfrac{110}{2} = 55$. La 55e valeur de la série est $Me = 8$.
b. N = 100.
$25\ \% \times 100 = 25$ soit la 25e valeur de la série est $Q_1 = 6$.
$75\ \% \times 100 = 75$ soit la 75e valeur de la série est $Q_3 = 12$.
$\dfrac{N}{2} = \dfrac{100}{2} = 50$. La 50e valeur de la série est $Me = 8$.

14 Signification des formules suivantes, saisies dans une cellule d'un tableur informatique :
a. =MAX(**A1:A1000**) : valeur maximale de l'ensemble des valeurs de A1 à A1000 ;
b. =QUARTILE(**B1:B100**;1) : 1er quartile Q_1 des valeurs de B1 à B100 ;
c. =NB.SI(**A1:C10000**;">5") : parmi les valeurs des cellules de A1 à C10000, nombre de cellules dans lesquelles la valeur est supérieure à 5.

15 **a.** Valeurs des cellules de A1 à A1000 qui appartiennent à l'intervalle [100 ; 200[:
=NB.SI(**A1:A1000**;"<200")-NB.SI(**A1:A1000**;"<100")
b. Troisième quartile des valeurs saisies dans les cellules de A1 à A100 :
=QUARTILE(**A1:A100**;3)

Comparer avec des indicateurs statistiques

16 Séries qui ont la même médiane ou la même moyenne.
Série 1 : 4 ; 4 ; 5 ; 5 ; 5 ; 6 ; 6
$Me = 5$ et Moyenne : 5.
Série 2 : 4 ; 4 ; 5 ; 5 ; 5 ; 6 ; 19
$Me = 5$ et Moyenne : 6,86.
Série 3 : 3 ; 4 ; 5 ; 5 ; 5 ; 6 ; 7.
$Me = 5$ et Moyenne : 5.
Les trois séries ont la même médiane 5, et les séries 1 et 3 ont la même moyenne 5.

17 **a.** Mieux vaut connaître la médiane des revenus pour savoir si la richesse est bien répartie dans un pays.
b. Mieux vaut connaître la moyenne des revenus pour savoir si un pays est riche.

18 Il vaut mieux connaître la moyenne.

19 Moyenne $\overline{x} = 17$ et médiane $Me = 20$.
La moyenne est inférieure à la médiane. La médiane montre que 50 % des notes sont égales à 20.

20 Les deux séries de 72 notes ont toutes les deux une distribution symétrique. On réunit dans un tableau l'ensemble des indicateurs statistiques.

	x_{min}	x_{max}	Étendue e	Moyenne $\overline{x}$
Série A	2	14	14 – 2 = 8	8
Série B	1	19	19 – 1 = 18	10

(suite)	Médiane Me	1er quartile Q_1	3e quartile Q_3
Série A	8	6	10
Série B	10	6	14

Dans les deux séries $Q_1 = 6$. Au moins 25 % des notes sont inférieures ou égales à 6.
Dans la série B, l'étendue, la médiane, la moyenne et le 3e quartile sont supérieurs à ceux de la série A. Les

notes de la série B sont donc plus dispersées autour de la médiane et les résultats sont supérieurs à ceux de la série A.

21 Les indicateurs permettant de répondre aux questions sont :

a. la moyenne la plus grande ;

b. l'étendue ;

c. la médiane et les quartiles les plus grands ;

d. la médiane.

QCM : Testez-vous !

1. A. 5 : c'est la valeur centrale de la série.

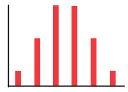
2. B. 5,5 : la série est paire donc la médiane est : $Me = \dfrac{5+6}{2} = 5{,}5$.

3. B. 10 : la moyenne $\bar{x} = \dfrac{8+12+9+11}{4} = 10$.

4. A. une estimation de la moyenne.

5. A. $\bar{x} = \text{Me}$.

6. B.



7. B. 9 990 : l'étendue est : $e = 10\,000 - 10 = 9\,990$.

8. C. ont la même unité.

9. B. au moins 25 % de la population.

10. C. 2 : 25 % $\times$ 8 = 2 donc la 2e valeur de la série est $Q_1 = 2$.

11. C. l'étendue.

12. B. =MOYENNE(**A1:A9**).

13. B. 50 % des valeurs sont inférieures à 10.

14. B. la Série B est plus dispersée que la A.

15. B. peuvent être différents.

Problèmes

22 Le triangle moyen est-il rectangle ?

1. Longueurs des côtés du triangle moyen *LMN*.

$$LM = \frac{A_1B_1 + A_2B_2}{2} = \frac{600+600}{2} = 600.$$

$$LN = \frac{A_1C_1 + A_2C_2}{2} = \frac{630+450}{2} = 540.$$

$$MN = \frac{B_1C_1 + B_2C_2}{2} = \frac{870+750}{2} = 810.$$

2. Pour servir de renfort triangulaire, le triangle moyen LMN doit être rectangle et donc vérifier la propriété de Pythagore :
$LM^2 + LN^2 = 600^2 + 540^2 = 651\,600$
$MN^2 = 8102 = 656\,100$
Ce triangle moyen *LMN* ne peut pas convenir pour renforcer l'abri car il n'est pas rectangle :

$$MN^2 \neq LM^2 + \text{LN}^2.$$

23 Vitesse réglementaire

1. Pour le chauffeur, il s'agit de la vitesse moyenne, soit : $\dfrac{125}{2} = 62{,}5$ km/h.

Pour le gendarme, il s'agit de la vitesse instantanée, soit : 140 km/h.

2. a. Vitesse moyenne pour l'ensemble du trajet :

$$\frac{125}{2} = 62{,}5 \text{ km/h}.$$

b. Vitesse moyenne du véhicule pour les différentes phases :

- phase 1 : $\dfrac{8}{0{,}1} = 80$ km/h ;
- phase 2 : $\dfrac{33}{0{,}75} = 44$ km/h ;
- phase 3 : $\dfrac{39}{0{,}65} = 60$ km/h ;
- phase 4 : $\dfrac{10}{0{,}25} = 40$ km/h ;
- phase 5 : $\dfrac{35}{0{,}25} = 140$ km/h.

c. La phase où la vitesse moyenne est la plus élevée est la phase 5.

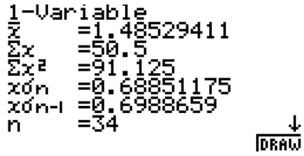
d. Le chauffeur a commis une infraction car, dans la phase 5, la vitesse de son véhicule est de 140 km/h, valeur supérieure à la valeur maximale autorisée de 130 km/h.

24 Temps de réparation

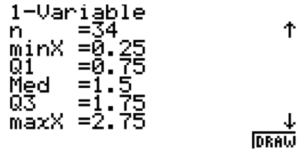
1. et **2. a.**

Temps (en heures)	Nombre de machines réparées n_i	Centre de classes x_i
[0 ; 0,5[	2	0,25
[0,5 ; 1[	8	0,75
[1 ; 1,5[	7	1,25
[1,5 ; 2[	9	1,75
[2 ; 2,5[	5	2,25
[2,5 ; 3[	3	2,75
Total	34	

b. Estimation de la moyenne $\overline{x}$, en heures, arrondie à 10^{-2} : $\overline{x} \approx 1{,}49$ h.



c. Estimation de la médiane : $Me \approx 1{,}50$ h.



Les deux indicateurs $\overline{x}$ et Me sont peu différents.

25 Profondeur de plongée

1. a. Profondeur moyenne : – 23 m.
b. Profondeur médiane : – 23 m.
c. Étendue : 49 m.
d. Premier quartile : – 30 m.
Troisième quartile : – 15 m.

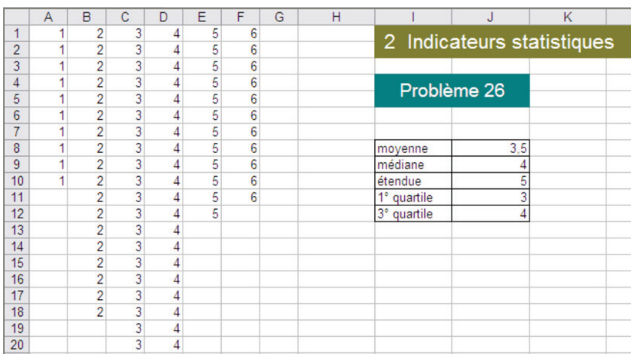
2. Pour les deux années concernées, la moyenne et la médiane restent les mêmes.
L'année dernière, les profondeurs de plongées ont été :
- plus proches de la moyenne car l'étendue est moins importante (32 m $<$ 49 m) et 50 % des plongées sont dans un intervalle de 6 m (entre – 19 m et – 25 m), intervalleplus petit que celui de cette année qui est de 15 m (entre – 15 m et – 30 m) ;
- moins grandes car le premier quartile (– 25 m) correspond à des profondeurs moins importantes que l'année précédente (– 30 m).

3. Après deux plongées à 60 m, les nouveaux indicateurs sont :
- profondeur moyenne : – 24 m ;
- profondeur médiane : – 23 m ;
- étendue : 55 m ;
- premier quartile : – 32 m ;
- troisième quartile : – 15 m.

Les deux plongées à 60 mètres de profondeur ont donc une incidence sur la valeur de la moyenne qui diminue, sur l'étendue qui augmente et sur le 1er quartile qui diminue. Cette nouvelle série est la plus dispersée autour de la moyenne.

26 Combien de m³ de béton ?

1. a. et **b.**



	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	1	2	3	4	5	6			2 Indicateurs statistiques		
2	1	2	3	4	5	6					
3	1	2	3	4	5	6					
4	1	2	3	4	5	6			Problème 26		
5	1	2	3	4	5	6					
6	1	2	3	4	5	6					
7	1	2	3	4	5	6					
8	1	2	3	4	5	6			moyenne	3,5	
9	1	2	3	4	5	6			médiane	4	
10	1	2	3	4	5	6			étendue	5	
11		2	3	4	5	6			1° quartile	3	
12		2	3	4	5				3° quartile	4	
13		2	3	4							
14		2	3	4							
15		2	3	4							
16		2	3	4							
17		2	3	4							
18		2	3	4							
19			3	4							
20			3	4							

2.

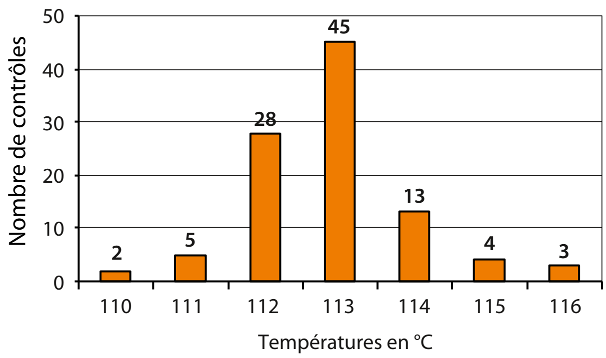
	Moyenne $\overline{x}$	1er quartile Q_1	Médiane Me
Première semaine	3,5 m³	3 m³	4 m³
Seconde semaine	3,5 m³	1 m³	4 m³

	3e quartile Q_3	Étendue e
Première semaine	4 m³	5 m³
Seconde semaine	6 m³	5 m³

- Les moyennes sont identiques : le volume total de béton livré les deux semaines est le même.
- Les quartiles sont différents : il y a eu plus de petites quantités de 1 m³ et de grandes quantités de 6 m³ livrées la seconde semaine.
- Les médianes sont identiques : 50 % des livraisons sont inférieures ou égales à 4 m³ les deux semaines.
- Les étendues sont identiques : la quantité minimum de 1 m³ et la quantité maximum de 6 m³ ont été livrées les deux semaines.

27 Réglage du four

1.



2. Température moyenne : 112,9 °C.

3. Température médiane : 113 °C.

4. $Q_1 = 112$ °C ; $Q_3 = 113$ °C.

5. La machine est considérée comme bien réglée si les quatre conditions suivantes sont réalisées :
la moyenne 112,9 °C et la médiane 113 °C sont comprises entre 112,1°C et 113,1°C ;
la température minimale 110 °C est supérieure à 109°C ;
l'étendue des températures est inférieure à 7°C : $e = 116 - 110 = 6$ soit $e = 6$ °C < 7°C ;
25 % au plus des températures relevées sont supérieures à 113°C : $13 + 4 + 3 = 20$ soit 20 %.
Les quatre conditions sont remplies, donc le four est bien réglé.

28 Comparaison de populations

1. Population allemande

a. La pyramide des âges est constituée de deux histogrammes.

b. Classe d'âge la plus nombreuse : [40 ; 50[. Effectif : 13,4 millions d'hommes et de femmes.

c. Il y a de moins en moins de naissances : la base diminue avec l'âge qui diminue. Le nombre de naissances est en diminution, les individus les plus jeunes sont moins nombreux que ceux des générations précédentes.

d.

Classe d'âges (en années)	Homme et femmes (en millions)	x_i	$n_i \times x_i$
[0 ; 10[	7,5	5	37,5
[10 ; 20[	9,2	15	138
[20 ; 30[	9,6	25	240
[30 ; 40[	11,9	35	416,5
[40 ; 50[	13,4	45	603
[50 ; 60[	10	55	550
[60 ; 70[	10,6	65	689
[70 ; 80[	6,6	75	495
[80 ; 90[	3	85	255
[90 ; 100[	0,8	95	76
Total	$N = 82,6$		3 500

Estimation de l'âge moyen : $\dfrac{3500}{82,6} = 42,37$.

$\dfrac{N}{2} = \dfrac{82,6}{2} = 41,3$ et $7,5 + 9,2 + 9,6 + 11,9 = 51,6$.

Classe médiane : [30 ; 40[.

Étendue de l'âge : e = 100 – 0 = 100 ans.

2. Population Indienne

a. La pyramide des âges est constituée de deux histogrammes.

b. Classe d'âge la plus nombreuse : [0 ; 10[.

Effectif : 237 millions d'hommes et de femmes.

c. Il y a de plus en plus de naissances : la base augmente avec l'âge qui diminue. Le nombre de naissances est en augmentation, les individus les plus jeunes sont plus nombreux que ceux des générations précédentes.

d.

Classe d'âges (en années)	Homme et femmes (en millions)	x_i	$n_i \times x_i$
[0 ; 10[	237	5	1 185
[10 ; 20[	226	15	3 390
[20 ; 30[	191	25	4 775
[30 ; 40[	159	35	5 565
[40 ; 50[	126	45	5 670
[50 ; 60[	85	55	4 675
[60 ; 70[	51	65	3 315
[70 ; 80[	31	75	2 325
[80 ; 90[	7	85	595
[90 ; 100[	1,1	95	104,5
Total	$N = 1114,1$		31 599,5

Estimation de l'âge moyen : $\dfrac{31599,5}{1114,1} = 28,36$ ans.

$\dfrac{N}{2} = \dfrac{1114,1}{2} = 557,05$ et $237 + 226 + 191$ » 654.

Classe médiane : [20 ; 40[.

Étendue de l'âge : $e = 100 – 0 = 100$ ans.

3. Comparaison

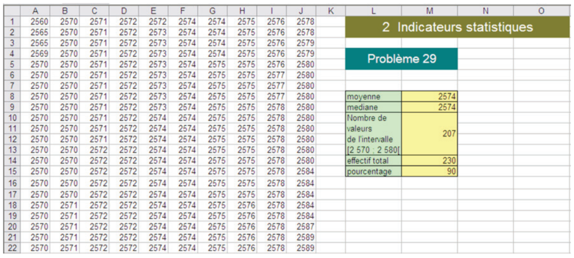
a. L'Allemagne a sa population qui vieillit et une natalité qui diminue.

b. L'Inde a une très forte natalité et peu de personnes âgées.

c. L'Inde a au moins 25 % de sa population qui n'a pas 20 ans ($Q_1 = 15$ ans) et 75 % qui n'a pas 50 ans ($Q_3 = 45$ ans).

29 Techniques d'analyse

1. Première technique d'analyse des données



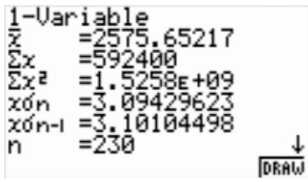
2. Seconde technique d'analyse des données

a.

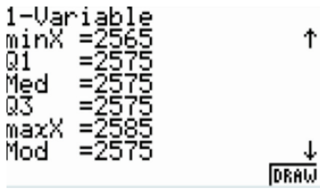
Masse (en mg)	Effectif : n_i	Centre de classe x_i
[2 560 ; 2 570 [	4	2 565
[2 570 ; 2 580[	207	2 575
[2 580 ; 2 590[	19	2 585
	$N = 230$	

Estimation de la masse moyenne.

$$\bar{x} \approx 2\,575,65 \approx 2\,576 \text{ mg}.$$



b. Détermination d'une valeur approximative de la médiane : $Me = 2\,575$ mg.



c. Nombre de dépôts dont la masse appartient à l'intervalle [2 570 ; 2 580[: 207.

Pourcentage de l'effectif total : $\dfrac{207}{230} \times 100 = 90$ soit 90 %.

3. **Comparaison**

Avec la deuxième technique d'analyse la moyenne ne convient pas. Il est préférable d'utiliser la première technique d'analyse qui est plus précise et qui permet de valider les trois contraintes de qualité.

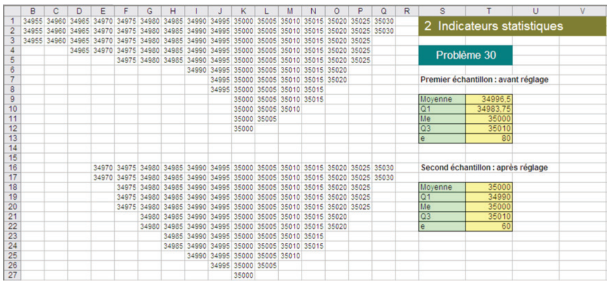
30 Masse des sacs de ciment

1. 3 499,65 kg de ciment sont mis dans les 100 sacs du premier échantillon.

2. La distribution du second échantillon est symétrique, la moyenne et la médiane sont donc égales :

$$\overline{x} = Me = 35\,000 \text{ g.}$$

3. On peut réaliser sur tableur une feuille de ce type pour calculer les différents indicateurs.



On trouve :

	Moyenne $\overline{x}$	1er quartile Q_1	Médiane Me	3^{e} quartile Q_3	Étendue e
Premier échantillon	34 997	34 984	35 000	35 010	80
Second échantillon	35 000	34 990	35 000	35 010	60

4. Le réglage de la machine n'a pas amélioré la rentabilité : la moyenne augmente, la masse de ciment versé augmants donc.

La qualité de la production est améliorée : le premier échantillon est plus étendue, ses quartiles Q_1 et Q_3 sont plus éloignés de Me et sa moyenne est plus faible que celle du second échantillon.

Le 2nd échantillon est donc moins étendu et moins dispersé autour de la médiane.

Démarche d'investigation

31 Approvisionnement en fioul

Hauteur moyenne si les vannes sont ouvertes :

$$\frac{8 + (8 + 5) + (8 + 5 + 2)}{3} = \frac{36}{3} = 12 \text{ m.}$$

Il n'est pas nécessaire de procéder à un approvisionnement supplémentaire.

32 Quel est le vainqueur des JO ?

Zone géographique	Population (en millions)	Pékin 2008 Or	Pékin 2008 Argent	Pékin 2008 Bronze	Pékin 2008 Total	Londres 2012 Or	Londres 2012 Argent	Londres 2012 Bronze	Londres 2012 Total	Total médailles d'Or	Total des médailles	Médailles / million habitants	Différence de Médailles	Moyenne aux deux JO
Japon	127	9	6	10	25	7	14	17	38	16	63	0,50	+13	31,5
États-Unis	304	36	38	36	110	46	29	29	104	82	214	0,70	–6	107
Chine	1 360	51	21	28	100	38	27	23	88	89	188	0,14	–12	94
Russie	142	23	21	28	72	24	26	32	82	47	154	1,08	10	77
Australie	20	14	15	17	46	7	16	12	35	21	81	4,05	–11	40,5
UE	491	92	109	104	305	91	104	108	303	183	608	1,24	–2	304

Classement : par critères

Critères	Médailles d'or	Total de médailles	Médailles par million d'habitants	Médailles en plus	Moyenne aux deux JO	Meilleur classement
Japon	6^{e}	6^{e}	5^{e}	6^{e}	6^{e}	**Médailles par milliar d'habitants**
États-Unis	3^{e}	2nd	4^{e}	3^{e}	2nd	**Total de médailles ou moyenne aux deux JO**
Chine	2nd	3^{e}	6^{e}	1er	3^{e}	**Médailles en plus**
Russie	4^{e}	4^{e}	3^{e}	5^{e}	4^{e}	**Médailles par milliar d'habitants**
Australie	5^{e}	5^{e}	1er	2nd	5^{e}	**Médailles par million d'habitants**
UE	1er	1er	2nd	4^{e}	1er	**Médailles d'or ou Total de médailles ou moyenne aux deux JO**

33 Prix moyen, prix médian

1.

	Effectif Petit outillage	Effectif Machine-outil	Effectif total outils
1re année	100 000	1 000	101 000
2^{e} année	**100 000**	**1 000**	**101 000**

	Prix Petit outillage		Prix Machine-outil	
	médian	moyen	médian	moyen
1re année	10 €	10 €	1 000 €	1 000 €
2^{e} année	**8 €**	**8 €**	**1 200 €**	**1 200 €**

	Prix médian des 101 000 outils	Prix moyen des 101 000 outils
1re année	10 €	19,80 €
2^{e} année	**8 €**	**19,80 €**

2. a. Vrai : le prix moyen du petit outillage baisse de $100 - \dfrac{8 \times 100}{10} = 20$ soit 20 %.

b. Vrai : le prix moyen de vente d'un outil est toujours de 19,80 €.

c. Vrai : le prix médian de l'ensemble des outils baisse de $100 - \dfrac{8 \times 100}{10} = 20$ soit 20 %.

d. Vrai : le prix moyen de vente d'une machine-outil augmente $\dfrac{1\,200 \times 100}{1\,000} - 100 = 20$ soit 20 %.

3.

	Chiffre d'affaires	Moyenne $\bar{x}$	Médiane Me	Étendue e	1^{er} quartile Q_1	3^e quartile Q_3
1^e année	**19,80 × 101 000 = 1 999 800 €**	**19,80 €**	**10 €**	**1 699 €**	**8,5 €**	**11,5 €**
2^e année	**19,80 × 101 000 = 1 999 800 €**	**19,80 €**	**8 €**	**1 899 €**	**6 €**	**10 €**

Le prix médian de vente des 101 000 outils baisse alors que le chiffre d'affaires de 1 999 800 € reste le même car le prix moyen de vente du petit outillage baisse et celui de vente des machines-outils augmente pour des effectifs identiques sur les deux ans.

Cela est confirmé par des quartiles Q_1 et Q_3 inférieurs la deuxième année à ceux de la première année alors que l'étendue augmente.

3 PROBABILITÉS

Capacités	Connaissances
• Expérimenter, d'abord à l'aide de pièces, de dés ou d'urnes, puis à l'aide d'une simulation informatique prête à l'emploi, la prise d'échantillons aléatoires de taille *n* fixée, extraits d'une population ou la fréquence *p* relative a un caractère est connue. • Déterminer l'étendue des fréquences de la série d'échantillons de taille *n* obtenus par expérience ou simulation.	• Tirage au hasard et avec remise de *n* éléments dans une population où la fréquence *p* relative a un caractère est connue. • Fluctuation d'une fréquence relative a un caractère, sur des échantillons de taille *n* fixée.
• Évaluer la probabilité d'un événement à partir des fréquences.	• Stabilisation relative des fréquences vers la probabilité de l'événement quand *n* augmente.
• Évaluer la probabilité d'un événement dans le cas d'une situation aléatoire simple. • Faire preuve d'esprit critique face à une situation aléatoire simple.	

La notion de fluctuation d'échantillonnage, essentielle en statistique, est abordée dans cette partie du programme en étudiant la variabilité d'observation d'une fréquence. Elle favorise une expérimentation de l'aléatoire.

L'objectif de ce chapitre est de faire comprendre que le hasard suit des lois et de préciser l'approche par les fréquences de la notion de probabilité initiée en classe de troisième.

Après une expérimentation physique (avec une pièce de monnaie, un dé ou une urne contenant des boules), pour une taille fixée des échantillons, la simulation à l''aide du générateur de nombres aléatoires d'une calculatrice ou d''un tableur permet d'augmenter la taille des échantillons et d'observer des résultats associes a la réalisation d'un très grand nombre d'expériences.

Activité 1 : Combien de chances de tirer la bonne carte ?

1. $p = \dfrac{31}{32} = 0{,}96875 \approx 0{,}97$ soit 97 %.

2. Obtenir une dame : $p = \dfrac{4}{32} = 0{,}125$ soit 12,5 %.

Obtenir un pique : $p = \dfrac{8}{32} = 0{,}25$ soit 25 %.

3. On a autant de chances d'obtenir un carré de 7 que d'as. Toutes les cartes ont la même probabilité d'être tirées.

Activité 2 : Le tirage au sort est-il équitable ?

1. L'élève peut répondre oui ou non.

2. **a.** et **b.** Tous les cas sont possibles pour 10 lancers.

c. Étendue = fréquence maximale – fréquence minimale.

3. Il est normal que l'équipe de football n'ait bénéficié que deux fois du coup d'envoi sur 10 matchs.

Activité 3 : Comment évaluer la fréquence de journaux avec des défauts ?

1.

Jour	Lundi	Mardi	Mercredi	Jeudi	Vendredi	Samedi	Dimanche
Journaux contrôlés	500	200	100	400	700	600	300
Journaux mal découpés	32	6	10	14	35	36	27
Fréquence de journaux mal découpés	**0,064**	**0,03**	**0,1**	**0,035**	**0,05**	**0,06**	**0,09**

2. $p \approx 0{,}05$ soit 5 % : on choisit la fréquence du jour où le nombre de journaux contrôlés est le plus élevé pour avoir un résultat le plus fiable possible.

Travaux pratiques

Combien de juments ?

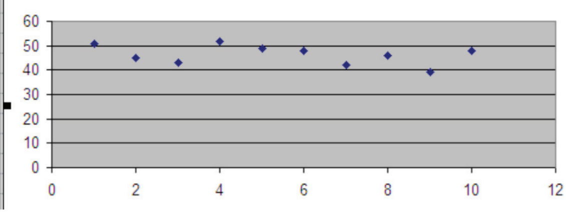
1. a. On obtient un nombre appartenant à l'intervalle [0 ; 1[.

b. On obtient un nombre appartenant à l'intervalle [0,48; 1,48[.

c. On obtient 0 ou 1.

2. a. b. c. d.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
97	0	0	1	0	1	1	1	0	0	0	
98	1	1	0	1	0	1	1	1	0	1	
99	0	0	0	0	0	1	0	1	0	1	
100	1	1	1	1	0	1	1	0	0	0	
101											
102	51	45	43	52	49	48	42	46	39	48	
103	0,51	0,45	0,43	0,52	0,49	0,48	0,42	0,46	0,39	0,48	



b. Valeurs aléatoires qui s'affichent dans les cellules A102 à J102 : au moins 95 % des valeurs appartiennent à l'intervalle [38 ; 58].

d. Étendue des fréquences : 0,20 soit 20 %.

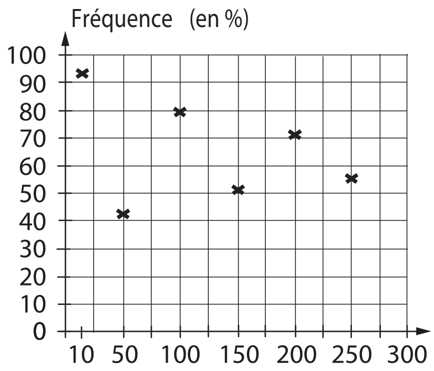
3. L'éleveur peut raisonnablement penser qu'il aura au moins 24 % de femelles dans les 100 prochaines naissances, la simulation informatique donnant au moins 95 % des échantillons supérieurs à 38 %.

De quel côté tombe la tartine de confiture ?

1. a. Tous les cas sont possibles.

b. Plus le nombre de lancers augmente, plus les fréquences tendent vers 60 %.

2. a.



b. Plus le nombre de lancers augmente, plus les fréquences tendent vers 60 %.

3. lorsqu'un objet n'est pas symétrique, les différentes positions dans lesquelles il peut s'immobiliser n'ont pas la même probabilité. Il faut donc réaliser une expérience avec de vraies tartines, et un nombre de lancers importants, pour estimer la probabilité pour la face recouverte de confiture de tomber sur le sol.

Exercices

1 **a.** Non aléatoire ; **b.** Aleatoire ;
c. Non aléatoire ; **d.** Aléatoire.

2 **a.** $f = \dfrac{100 - 48}{100} = 0{,}52$ soit 52 %.

b. Étendue des fréquences : 0,52 – 0,45 = 0,07 soit 7 % de boules rouges.

3 **a.** $f = 1 - (0{,}13 + 0{,}26 + 0{,}28) = 1 - 0{,}67 = 0{,}33$ soit 33 %.

b. Étendue des fréquences : 0,33 – 0,24 = 0,09 soit 9 % de « face 2 ».

4 **a.** Caractère : côté visible de la pièce après l'avoir lancée.
Modalité étudiée : côté « pile ».

b. 20 échantillons de 10 lancers.

c. Étendue des effectifs : 10 – 1 = 9 « pile ».

5 **a.** $n = 100$ lancers.

b. Étendue des effectifs : 60 – 40 = 20 « pile ».
Étendue des fréquences : $\dfrac{20}{100} = 0{,}20$ soit 20 % de « pile ».

6 **a.** $n_{\text{min}} = 10$ lancers et $n_{\text{max}} = 120$ lancers.

b. $p \approx 0{,}50$ soit 50 %.

c. p correspond à la probabilité d'obtenir « pile ».

7 **a.** Une pièce de monnaie, un dé à 4, 6, 8, 10 ou 20 faces, une urne contenant la même quantité de boules de 2 couleurs différentes, une urne contenant la même quantité de boules numérotées avec des nombres pairs et impairs.

b. Un dé à 6 faces, une urne contenant 6 boules de couleurs différentes, une urne de 6 boules numérotées.

c. Un dé à 6 faces, une urne contenant 3 boules de couleurs différentes, une urne de 3 boules numérotées.

d. Un dé à 20 faces, une urne contenant 20 boules de couleurs différentes, une urne de 20 boules numérotées.

e. Une urne contenant 45 %, 9 %, 3 % et 43 % de boules de différentes couleurs.

8 **a.** La formule fait apparaître un nombre appartenant à l'intervalle [0 ; 1[.

b. La formule fait apparaître un nombre appartenant à l'intervalle [0 ; 2[.

c. La formule fait apparaître 0 ou 1.

9 **a.** `=ALEA()*3`

b. `=ENT(ALEA()*3)`

c. `=ENT(ALEA()+(90/100))`

10 **a.** Il y a quatre échantillons.

b. Ces nombres représentent les fréquences de « 1 ».

c. Étendue des fréquences : 0,741 – 0,677 = 0,064 soit 6,4 % de « 1 ».

11 **a.** $p \approx 1{,}7$

b. La valeur p correspond à la probabilité d'obtenir le « 5 ».

12 $\dfrac{1}{10} = 0{,}1$ soit 10 % de chance d'être choisi.

$1 - 0{,}1 = 0{,}9$ soit 90 % de chance de ne pas l'être.

13 $\dfrac{4}{1000} = 0{,}004$: probabilité d'obtenir le gros lot.

$1 - 0{,}004 = 0{,}996$ soit 99,6 % : probabilité de ne pas obtenir le gros lot.

14 **a.** $\dfrac{50}{100} = 0{,}5$ soit 50 %.

b. $\dfrac{10}{100} = 0{,}1$ soit 10 %.

15 **a.** $\dfrac{8}{32} = 0{,}25$ soit 25 %.

b. 25 cartes.

16 **a.** $\dfrac{1}{37} \approx 0{,}027$ soit 2,7 %.

b. $\dfrac{18}{37} \approx 0{,}486$ soit 48,6 %.

17 $\dfrac{4}{28} \approx 0{,}1429$ soit 14,29 %.

18 Les genres à la naissance, masculin ou féminin, sont équiprobables.

QCM : Testez-vous !

1. A. un dé à 6 faces : on attribue 2 faces à chaque film.

2. B. 0,17 : e = 0,25 – 0,08.

3. B. un peu différente ou égale à 0,50 soit 50 %.

4. C. `=ENT(ALEA()*2)`

5. B. peu probable.

6. C. autant de chances d'obtenir pile que face : ce nouveau tirage ne dépend pas des précédents.

7. A. 0,20 : $p = \dfrac{20}{80 + 20} = 0{,}20$.

Problèmes

19 Lancers de pièces

1. Les élèves obtiennent à partir des nombres aléatoires donnés par la calculatrice 5 échantillons de 30 P et F.

2. **a.** Au moins 95 % des effectifs appartiennent à l'intervalle [9 ; 21[.
b. Étendue des effectif ≈ 11 « pile ».

3. **a.** Au moins 95 % des fréquences appartiennent à l'intervalle [0,30 ; 0,70[.
b. Étendue des fréquences : 0,40 soit 40 %.

4. $p \in [0{,}30 ; 0{,}70[$.

20 Dé non truqué

1., **2.** et **3.**

	A	B	C	D	E
1	4				
2	2		Face	Effectif	Fréquences
3	6		1	3262	0,1631
4	3		2	3322	0,1661
5	5		3	3324	0,1662
6	1		4	3378	0,1689
7	4		5	3427	0,17135
8	6		6	3287	0,16435
9	4				

4. **a.** $f \approx 1{,}67$

b. $p = \dfrac{1}{6} \approx f$

21 Pisciculture

1. Somme de 1 la plus petite : 36
Somme de 1 la plus grande : 64.

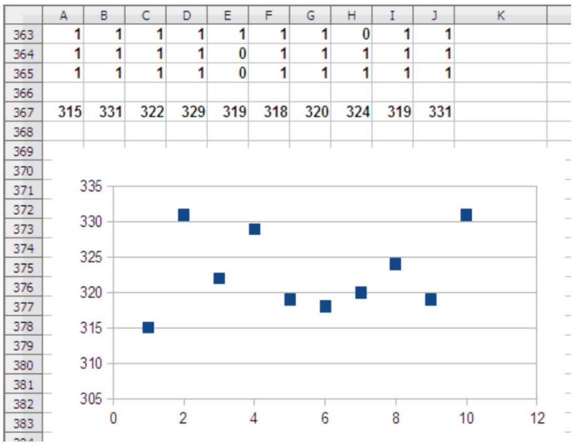
2. $f_{min} = 0{,}36$ et $f_{max} = 0{,}64$.

3. Étendue des fréquences : $f_{max} - f_{min} = 0{,}28$.

4. $0{,}58 \in [f_{min}\,;\, f_{max}]$: on peut donc supposer qu'il n'y a pas de pollution.

22 Durée d'ensoleillement

1. a. et **b.**



	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
363	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	
364	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	
365	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	
366											
367	315	331	322	329	319	318	320	324	319	331	

c. Au moins 95 % des effectifs appartiennent à l'intervalle [296 ; 334].

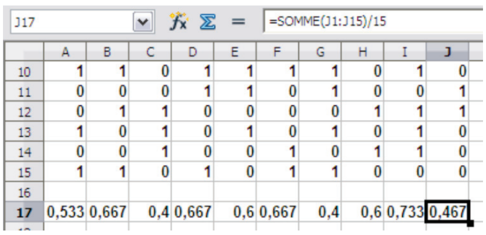
2. [296 ; 334].

23 Conseil municipal et représentativité

1. a. $p = \dfrac{338}{650} = 0{,}52$ soit 52 %.

b. $f = \dfrac{5}{15} \approx 0{,}33$ soit 33 %.

c.



J17 =SOMME(J1:J15)/15

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
10	1	1	0	1	1	1	1	0	1	0
11	0	0	0	1	1	0	1	0	0	1
12	0	1	1	0	0	0	0	1	1	1
13	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0
14	0	0	1	0	0	1	0	1	1	0
15	1	1	0	1	0	1	1	0	0	0
16										
17	0,533	0,667	0,4	0,667	0,6	0,667	0,4	0,6	0,733	0,467

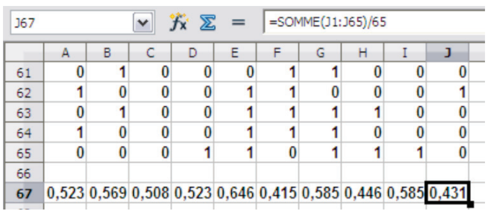
d. Étendue des fréquences : $0{,}80 - 0{,}25 = 0{,}55$ soit 55 %.

e. Le hasard peut expliquer la faible proportion de femmes : $f \approx 0{,}33$ est une fréquence qui est dans l'intervalle des valeurs obtenues par simulation.

2. $p = \dfrac{165\ 945}{319\ 064} = 0{,}52$ soit 52 % : c'est la proportion de femmes dans la commune.

$f = \dfrac{15}{65} \approx 0{,}23$ soit 23 % : c'est la fréquence de femmes au sein du conseil municipal.

La simulation sur tableur donne $f_{min} \approx 0{,}39$ et $f_{max} \approx 0{,}65$.



J67 =SOMME(J1:J65)/65

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
61	0	1	0	0	0	1	1	0	0	0
62	1	0	0	0	1	1	0	0	0	1
63	0	1	0	0	1	1	1	1	0	0
64	1	0	0	0	1	1	1	0	0	0
65	0	0	0	1	1	0	1	1	1	0
66										
67	0,523	0,569	0,508	0,523	0,646	0,415	0,585	0,446	0,585	0,431

Le hasard ne peut pas expliquer la faible proportion de femmes au sein du conseil :

$$f \approx 0{,}23 \notin [f_{min}\,;\, f_{max}].$$

On peut supposer qu'il y a discrimination.

24 Passage aux caisses

1. On construit la ligne Total pour chaque caisse. La plus fréquentée est la caisse F, avec 485 clients.

		Caisse						
		A	B	C	D	E	F	Total
Échantillons de 100 clients	1	12	8	10	13	5	45	100
	2	3	3	23	12	3	47	100
	3	3	10	23	13	6	48	100
	4	3	6	16	14	4	55	100
	5	5	16	22	11	3	54	100
	6	7	7	18	8	7	46	100
	7	8	10	25	14	7	50	100
	8	7	10	20	9	6	50	100
	9	5	7	21	6	2	43	100
	10	2	3	19	11	5	47	100
Total		55	80	197	111	48	485	1 000

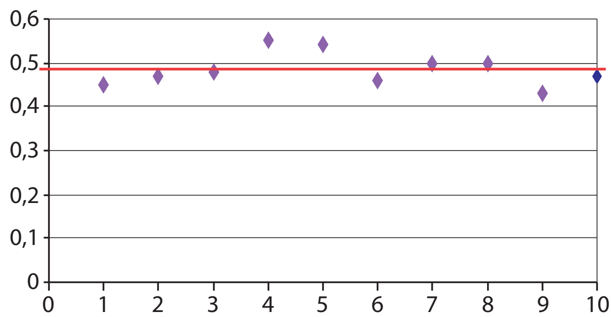
2. a. Pour la caisse F : effectif maximal : 55 ; effectif minimal : 43.

b.

		F	f_i
Échantillons de 100 clients	1	45	0,45
	2	47	0,47
	3	48	0,48
	4	55	0,55
	5	54	0,54
	6	46	0,46
	7	50	0,50
	8	50	0,50
	9	43	0,43
	10	47	0,47

Étendue des fréquences : $f_{max} - f_{min} = 0{,}55 - 0{,}43 = 0{,}12$.

c. et **d.**



Probabilité qu'un client passe par la caisse F : $p \approx 0{,}49$ soit 49 %.

25 Répondre au hasard aux QCM

1. $\frac{1}{4} = 0{,}25$ soit 25 % de chances de répondre juste au hasard.

2.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
19	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
20	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0
21										
22	**10**	**5**	**2**	**7**	**5**	**3**	**2**	**3**	**4**	**2**
23										
24										
25		**Min**	**2**							
26		**Max**	**10**							

3. Au moins 95 % des effectifs appartiennent à l'intervalle [1 ; 10].
Étendue de la fluctuation de la quantité du chiffre 1 : 10 – 1 = 9.

4. Le candidat peut espérer obtenir la moyenne de 10 qui est une valeur obtenue par simulation.

Démarche d'investigation

26 Fiche médicale

Simulation informatique de 10 échantillons de taille $n = 495$ avec la formule $\boxed{\text{=ENT(ALEA()+(1/7))}}$.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
493	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1
494	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
495	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0
496										
497	82	93	66	58	67	74	59	64	71	84
498										
499										
500		min	58		max	93				

Les élèves obtiennent au moins 95 % des effectifs dans l'intervalle [48 ; 93].
Le hasard peut expliquer la proportion d'élèves asthmatiques dans cet établissement : l'effectif de 78 élèves appartient à l'intervalle [effectif minimal ; effectif maximal] trouvé par simulation informatique.

27 Défauts de soudure

Simulation informatique de 10 échantillons de taille $n = 50$ avec la formule $\boxed{\text{=ENT(ALEA()+(0,14))}}$.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
48	1	0	0	0	0	0	1	1	0	0		
49	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0		
50	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0		
51												
52	7	7	1	13	5	6	7	9	4	8		Effectif
53												
54	0,14	0,14	0,02	0,26	0,1	0,12	0,14	0,18	0,08	0,16		Fréquence
55												
56												
57		min	0,02		max	0,26						

Les élèves obtiennent au moins 95 % des fréquences dans l'intervalle [0,01 ; 0,29].
Le hasard peut expliquer la fréquence de pièces avec un défaut dans l'échantillon prélevé : cette fréquence $f = \frac{10}{50} = 0{,}20$ soit 20 % appartient à l'intervalle [fréquence minimale ; fréquence maximale] trouvé par simulation informatique.

28 Plus de billets réservés que de places

$f = \frac{698}{13\ 954} \approx 0{,}05$ soit 5 %.

Il y a donc $529 \times 0{,}05 \approx$ 26 absents en moyenne par avion.
529 – 26 = 503 passagers présents en moyenne.
545 – 529 = 16 places réservées en plus par avion.

La simulation informatique donne, à la ligne 548, les effectifs correspondant aux personnes qui ne se sont pas présentées à l'embarquement. Ils appartiennent à l'intervalle [14 ; 32] avec un seul effectif de 14 inférieur à 16.
Il y a donc 414 passagers en plus dans cette simulation avec surréservation et un seul cas où il manque deux places. Les gestionnaires ont donc bien fait de prendre le risque que plus de 529 passagers se présentent à l'embarquement.

Nombre de passagers absents avec 545 réservations par avions : a	Passagers présents sur 545 billets : $b = 545 - a$	Passagers en plus des 503 présents en moyenne avant surréservation : $c = b - 503$
29	516	13
22	523	20
19	526	23
24	521	18
18	527	24
27	518	15
28	517	14
27	518	15
14	531	28
26	519	16
33	512	9
24	521	18
32	513	10
25	520	17
32	513	10
23	522	19
19	526	23
26	519	16
32	513	10
30	515	12
22	523	20
28	517	14
30	515	12
26	519	16
20	525	22
Total 636	12989	414

4 PROBLÈMES DU PREMIER DEGRÉ À UNE INCONNUE

Capacités	Connaissances
• Dans des situations issues de la géométrie, d'autres disciplines, de la vie professionnelle ou de la vie courante, rechercher et organiser l'information, traduire le problème posé à l'aide d'équations ou d'inéquations, le résoudre, critiquer le résultat, rendre compte. • Choisir une méthode de résolution adaptée au problème (algébrique, graphique, informatique).	• Méthodes de résolution : – d'une équation du premier degré à une inconnue ; – d'une inéquation du premier degré à une inconnue.

L'objectif de ce chapitre est la traduction de problèmes concrets de la vie courante et professionnelle en langage mathématique. Les équations ou les inéquations ainsi obtenues doivent être résolues par une méthode adaptée parmi les choix suivants : algébriques, graphiques ou TIC. Le professeur doit éviter toute virtuosité technique.

Activité 1 : Combien vendre ces perceuses ?

1. $15x + 10(x + 45) = 1\,750$

2. $15x + 10(x + 45) = 1\,750 \Leftrightarrow 25x = 1\,300 \Leftrightarrow x = 52$

Les perceuses dotées de batterie Ni-Cd seront vendues 52 € et celles équipées de batterie Li-ion seront vendues 97 €.

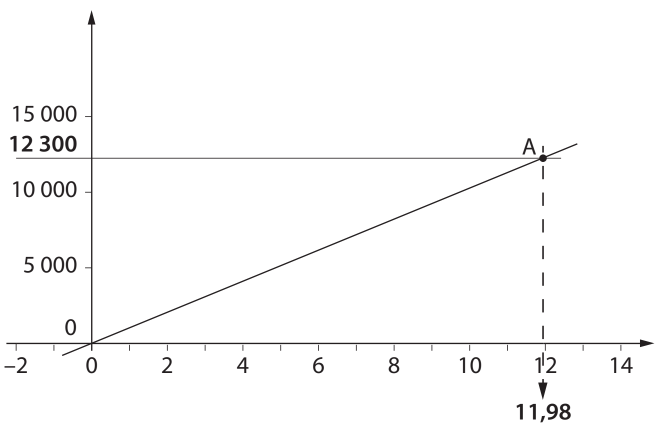
Activité 2 : Panneaux photovoltaïques et vente d'électricité

1. a. Si 1 026,76 (2702 × 0,38) représente la somme moyenne versée par EDF par an, 12 300 le coût d'installation et x le nombre d'années, alors déterminer le nombre d'années où les recettes seront supérieures à la dépense revient à écrire $1\,026{,}76\,x > 12\,300$.

b. $1\,026{,}76\,x > 12\,300 \Leftrightarrow x > \dfrac{12\,300}{1\,026{,}76} \Leftrightarrow x > 11{,}979$ soit $x > 12$.

C'est à partir de la douzième année que le coût de l'installation sera amorti.

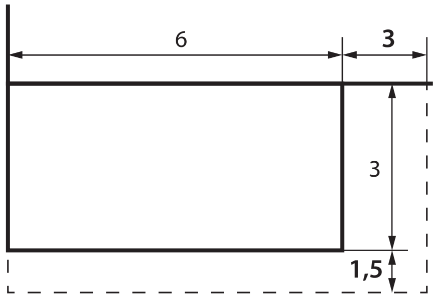
2. Le graphique montre bien que c'est à partir de la douzième année que les recettes sont supérieures à la dépense.



Activité 3 : Respecter la proportion !

1. Il faut que 1 longueur + 1 largeur = 13,5 m avec la longueur 2 fois plus grande que la largeur d'où : la largeur = 13,5/3 = 4,5 m et la longueur = 9 m.

2. a.



b. Surface à ajouter : 9 × 4,5 – 6 × 3 soit 22,5 m^2.

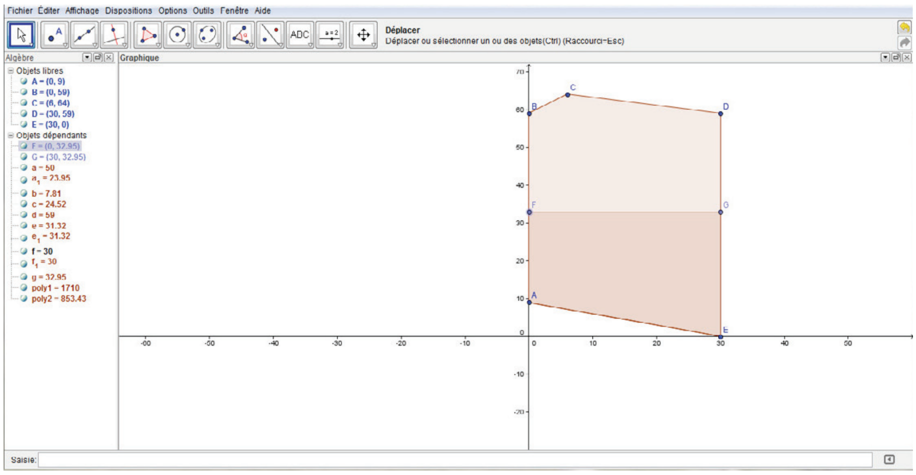
Travaux pratiques

Partage équitable

1. a. et **b.** Allure du travail à obtenir sous GeoGebra.

c. Deux réponses possibles :

$x = 32{,}95$ ou $x = 33{,}13$.



2. a. $A_{\text{lot1}} = \dfrac{1}{2} A_{\text{totale}} \iff 30\,x - 135 = \dfrac{1}{2} \times 1710 \iff 30\,x - 135 = 855$

b. $30\,x - 135 = 855 \iff 30\,x = 855 + 135 \iff x = 33$

3. Les résultats sont proches. La plus précise est la méthode de résolution par l'algèbre.

Rentable ou non ?

1. a. Extrait du tableau

23	2200	590	607
24	2300	610	617
25	2400	630	627
26	2500	650	637
27	2600	670	647

b. Jusqu'à 2 300 km, il n'est pas rentable de louer le minibus mais pour une distance supérieure à 2 400 km, la location de ce minibus est rentable.

2. a. $0{,}2x$ représente le coût en essence pour x kilomètres parcourus par les deux voitures et 150 représente le coût de l'autoroute pour les deux voitures, soit un coût total pour les voitures égal à $0{,}2x + 150$.

Pour le minibus $0{,}1x$ représente le coût en essence et 387 représente le coût de l'autoroute et la location (75 + 312).

b. $0{,}2x + 150 > 0{,}1x + 387 \iff 0{,}1x > 237 \iff x > 2\,370$. Une distance aller de 1 250 km correspond à un aller retour de 2 500 km. Il est donc plus rentable de louer le minibus que de prendre les deux voitures.

Exercices

Équations

1 Les équations vérifiées par $x = 15$ sont :
b. $x - 9 = 6$; **d.** $22 - x = 7$; **e.** $\frac{x}{5} + 30 = 33$
et **g.** $2(2x - 10) + 4 = 3x - 1$.

2 **a.** $x = 12$; **b.** $x = 22$; **c.** $x = 7{,}5$; **d.** $x = 27$;
e. $x = 9$; **f.** $x = 7$; **g.** $x = 60$; **h.** $x = 117{,}5$.

3 **a.** $x = 29{,}5$; **b.** $x = 14$; **c.** $x = 18$; **d.** $x = 25$;
e. $x = 11$; **f.** $x = 21$.

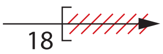
4 **a.** $x = 13$; **b.** $x = 250$; **c.** $x = 43$; **d.** $x = 83$;
e. $x = 19$; **f.** $x = 700$.

5 **a.** $x = -\frac{4}{5}$; **b.** $x = 6$; **c.** $x = \frac{35}{8}$; **d.** $x = -6$
et $x = \frac{9}{2}$; **e.** $x = -15$; **f.** $x = 0$.

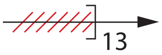
Inéquations

6 Les inéquations pour lesquelles la solution $x = 0$ est vérifiée sont :
b. $2x + 1 > 0$; **c.** $\frac{5x}{3} - 8 < 0$; **d.** $25 > 50x + 1$;
f. $(3x + 1)(5x + 3) \geqslant 0$.
Ces solutions ne sont pas uniques.

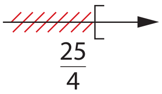
7 **a.** $x < 18$;



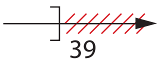
b. $x > 13$;



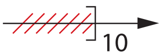
c. $x \geqslant \frac{25}{4}$;



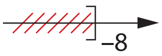
d. $x \leqslant 39$;



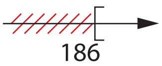
e. $x > 10$;



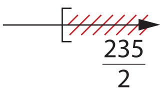
f. $x > -8$;



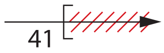
g. $x \geqslant 186$;



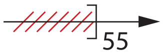
h. $x \leqslant \frac{235}{2}$.



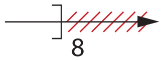
8 **a.** $x < 41$;



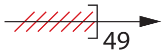
b. $x > 55$;



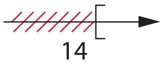
c. $x \leqslant 8$;



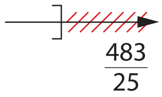
d. $x > 49$;



e. $x \geqslant 14$;



f. $x \leqslant \frac{483}{25}$.



Résolution d'un problème

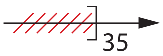
9 **a.** $2x + 13 = 34$; $x = 10{,}5$; **b.** $3x - 2000 = 4039$;
$x = 2013$;
c. $2x - 1 = x + 4{,}5$; $x = 5{,}5$; **d.** $5(x + 3) = 4x + 40$;
$x = 25$.

10 $\alpha + 2\alpha + 3\alpha = 180 \Leftrightarrow \alpha = 30$ donc $2\alpha = 60$ et $3\alpha = 90$. Ce triangle sera toujours rectangle.

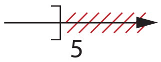
11 $\alpha + 2\alpha + 120 + 90 = 360 \Leftrightarrow \alpha = 50°$

12 $2L + 2l = 3L \Leftrightarrow L = 2l$. Il faut que sa longueur soit toujours deux fois plus grande que sa largeur.

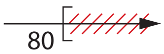
13 **a.** $x + 15 > 50$ donc $x > 35$



b. $2x - 10 \leqslant 0$ donc $x \leqslant 5$

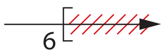


c. $\frac{3x}{4} < 60$ donc $x < 80$



QCM : Testez-vous !

1. C. $2x = 12$
2. B. $x = 1{,}4$
3. B. $x = 30$
4. A. $x > 8$
5. C. $x \geq 5$
6. A.



Problèmes

14 Abonnement ou match par match ?

1. Non car l'abonnement coûte 330 € alors que 8 matchs coûtent 35×8 soit 280 €.

2. Oui pour les abonnements en tribune Nord/Sud ou en tribune latérale Gabarrou.

3. $38x > 350 \Leftrightarrow x > 9{,}2$.

Pour moins de 9 matchs, il est préférable de payer match par match alors que, pour 10 et plus, il vaut mieux l'abonnement.

15 Travailler en sécurité

1. $p(1\,000\,x_{max} + 300) \leqslant 8\,000 \times 2{,}7 \Leftrightarrow 8(1\,000\,x_{max} + 300) \leqslant 8\,000 \times 2{,}7 \Leftrightarrow x \leqslant 2{,}4$.
La charge maximale doit être de 2,4 t soit 2 400 kg.

2. Pour 4 t on a : $p(1\,000 \times 4 + 300) \leqslant 8\,000 \times 2{,}7 \Leftrightarrow p \leqslant 5{,}02$ soit une portée maximale de 5 m.

16 Bricolage

1. Différence de prix : 5 € car 54,70 – 49,70 = 5.

2. a. $2x + (x + 5) = 49{,}70$
b. $x = 14{,}90$
Un serre-joint longueur 300 mm coûte 14,90 € et un serre-joint longueur 700 mm vaut 5 € de plus soit 19,90 €.

17 Changeons nos habitudes !

1. Quatre formules sont proposées.

2. On calcule d'abord les coûts pour chaque formule :
– formule Unité : 2 € × 100 = 200 € ;
– formule Carnet : 10 × 15 € = 150 € ;
– formule Mensuel : 40€ × 12 = 480 € ;
– formule Annuel : 396 € ;
La formule la plus intéressante pour effectuer 100 voyages est la formule des carnets de 10 voyages.

3. a. L'abonnement annuel n'est pas adapté.
b.

Nombre de voyages	Formules à choisir
De 1 à 7 voyages	Voyages à l'unité
De 8 à 10 voyages	Le carnet 10 voyages
De 11 à 15 voyages	Voyages à l'unité
De 16 à 20 voyages	2 carnets de 10 voyages
Plus de 20 voyages	Abonnement mensuel

4. a. $2x > 396$
b. $x > 198$
Au-delà de 198 voyages, le choix doit se porter sur l'abonnement annuel.

18 Indice des prix

1. 40,88 € au centième près.
2. 46,03 € au centième près.

19 L'épreuve du 400 m

1. Ce décalage est utilisé pour une raison technique : tous les coureurs doivent parcourir la même distance.

2. a. Distance couloir 1 : $2 \times 80 + 2 \times 120 = 400$
b. Distance couloir 2 : $2 \times 80 + 2\pi \times (\frac{240}{2\pi} + 1{,}12) = 407{,}04$; le décalage doit donc être de 7,04 m.

3. Le décalage est $x = 160 + 6{,}28 \times 46{,}66 - 400$ soit 53,02 m.

20 Drapeaux et proportion

1. 2 m pour la hauteur et 3 m pour la largeur.
2. a. Si $h = 80$ cm alors $L = 80 \times \frac{3}{2} = 120$ cm.
Largeur bande verte : $\frac{2}{5}$ de L soit $120 \times \frac{2}{5} = 48$.
3. a. $x + 1{,}5x = L$ avec $L = \frac{3}{2}h$ d'où $2{,}5\,x = 1{,}5\,h$
b. Si $h = 80$, alors $x = 1{,}5 \times \frac{80}{2{,}5} = 48$.
c. Si $h = 1{,}5$ m, alors $L = 1{,}5 \times \frac{3}{2} = 2{,}25$ m et
$x = 1{,}5 \times \frac{1{,}5}{2{,}5} = 0{,}90$ m

21 Longueur de la digue

Sur le schéma, la digue mesure 2,9 cm.
Sa longueur est 2,9 cm × 10 000 = 29 000 cm soit 290 m.

Démarche d'investigation

22 Problème d'échelle

En utilisant Pythagore et en notant x la hauteur du mur, on écrit : $x^2 + 80^2 = (x + 20)^2$
Soit $40x = 80^2 - 20^2 \Leftrightarrow x = 150$ cm.
La hauteur du mur est 150 cm.

23 Quel prix unitaire pour ce tee-shirt ?

Les informations sur les deux lots permettent de savoir qu'un tee-shirt sérigraphié coûte 2 € de plus qu'un tee-shirt uni.
Donc 5 tee-shirts sérigraphiés coûtent 30 €, soit 6 € un tee-shirt sérigraphié.

24 Le viaduc de Millau

On utilise la proportionnalité.
19 mm sur le dessin correspondent à 324 m, donc 20 mm correspondent à $324 \times \frac{20}{19}$, soit 341 m et 144 mm à $324 \times \frac{144}{19}$ soit 2 455,6 m.
La hauteur du pilier le plus long est 341 m et la longueur du viaduc 2 460 m.

5 PROBLÈMES DU PREMIER DEGRÉ À DEUX INCONNUES

Capacités	Connaissances
• Dans des situations issues de la géométrie, d'autres disciplines, de la vie professionnelle ou de la vie courante, rechercher et organiser l'information, traduire le problème posé à l'aide d'équations ou d'inéquations, le résoudre, critiquer le résultat, rendre compte. • Choisir une méthode de résolution adaptée au problème (algébrique, graphique, informatique).	• Méthodes de résolution d'un système de deux équations du premier degré à deux inconnues.

L'objectif de ce chapitre est la traduction de problèmes concrets de la vie courante et professionnelle en langage mathématiques. Les systèmes d'équations ainsi obtenues doivent être résolues par une méthode adaptée parmi les choix suivants : algébriques, graphiques ou TIC. Le professeur doit éviter toute virtuosité technique.

Activité 1 : Choix d'un abonnement électrique

1. a. Option base : 78,25 + 2 000 × 0,1206 soit 319,45 €.
b. Option HP/HC : 94,06 + 1 000 × 0,133 + 1 000 × 0,0913 soit 318,36 €.
2. a. Extrait du tableau obtenu avec la calculatrice :

X	Y1	Y2
1800	295.33	295.93
1900	307.39	307.14
2000	319.45	318.36
2100	331.51	329.57

1800

b. Les deux options sont équivalentes pour une consommation annuelle comprise entre 1 800 et 1 900 kWh.
3. a. L'équation $y = 0{,}1206\,x + 78{,}25$ est liée à l'option base dans laquelle le terme $0{,}1206\,x$ représente le coût pour une consommation inconnue de x kWh à 0,1206 €/kWh et le nombre 78,25 représente l'abonnement annuel. Il en est de même pour la deuxième équation où le nombre 0,11215 est le coût moyen d'un kWh consommé à moitié en HP et en HC.
b. $0{,}1206\,x + 78{,}25 = 0{,}11215\,x + 94{,}06 \Leftrightarrow x = 1871$; et on a : $1800 < 1871 < 1900$.

Activité 2 : Place de cinéma

Si cette personne assiste à 6 séances ou moins, le tarif normal est avantageux. Par contre, pour plus de 6 séances, il est préférable de prendre le tarif abonné.

Activité 3 : Bus ou vélo ?

1. Pour une personne de 20 ans travaillant à 40 min environ de son domicile (en vélo), le coût sur l'année est :
• en bus : 100 € d'abonnement + 8 € de carte Pastel, soit 108 € ;
• en vélo : 25 € d'abonnement + 1 € par aller-retour de supplément trajet. Sur une année il faut compter au maximum 235 € de supplément AR pour environ 235 jours maxi travaillés (47 semaines à 5 jours de travail/semaine) soit un coût total de 260 €
Le bus est plus avantageux dans ces conditions pour cette personne.
2. a. $y = 108$ représente le coût bus annuel (qui est fixe : voilà pourquoi l'inconnue x n'apparaît pas) + la carte Pastel.
$y = x + 25$ représente le coût pour le vélo avec 25 pour l'abonnement d'un an et x le supplément au-delà de la demi-heure pour un AR.
b. Des deux équations, on déduit $x = 108 - 25 = 83$; c'est donc à partir de 83 déplacements AR que le bus devient moins onéreux.

Travaux pratiques

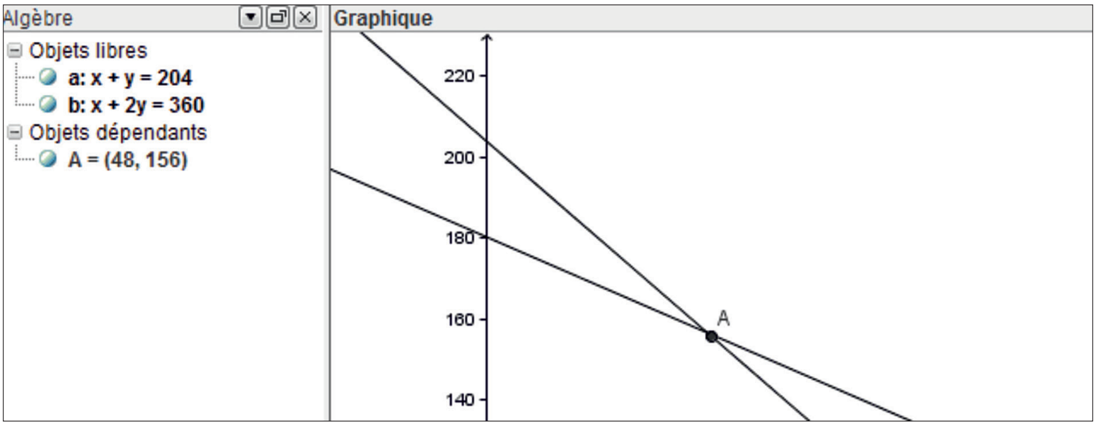
Distributeur automatique de billets

1. a. Extrait du tableau obtenu avec le tableur

47	45	159	3 630,00 €	
48	46	158	3 620,00 €	
49	47	157	3 610,00 €	
50	48	156	3 600,00 €	
51	49	155	3 590,00 €	
52	50	154	3 580,00 €	

b. La possibilité qui donne un total de 3 600 € correspond à 48 billets de 10 € et 156 billets de 20 €.

2. a. Extrait du travail obtenu avec GeoGebra



b. Coordonnées du point d'intersection : (48 ; 156).

c. Conclusion : il a été distribué 48 billets de 10 € et 156 billets de 20 € au cours de cette journée.

Tarif normal et tarif réduit

Il y a 200 places au total, donc le nombre x de places vendues au tarif normal plus le nombre y de places vendues au tarif réduit égale 200, d'où : $x + y = 200$.

De plus, ces x places vendues 9,50 € et ces y places vendues 7,50 € ont rapporté 1 636 € d'où :

$$9{,}5x + 7{,}5y = 1\,636.$$

1.

Coefficients	a_1	b_1	c_1	a_2	b_2	c_2
Valeurs dans ce système	1	1	200	9,5	7,5	1 636

2. La calculatrice donne $x = 68$ et $y = 132$. Il a été vendu 68 places au tarif normal et 132 au tarif réduit.

3.

F3 *fx*

	A	B	C	D	E	F
1	a1 =	1	b1 =	1	c1 =	200
2	a2 =	9,5	b2 =	7,5	c2 =	1636
3						
4	x =	68	y =	132		
5						

4. La solution de ce système est le couple (68 ; 132). Il s'est vendu 132 places au tarif réduit.

Exercices

Vérification d'une solution

1 **a.** $x = 7$ et $y = 3$ **b.** $x = 3{,}5$ et $y = 5$ **c.** $x = 6$ et $y = 6$

Résolution algébrique

2 **a.** $\begin{cases} x - y = 6 \\ x + y = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 + y \\ 6 + y + y = 8 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 + y \\ 2y = 8 - 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 7 \\ y = 1 \end{cases}$

b. $\begin{cases} -2x + y = -1 \\ 3x - 2y = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -1 + 2x \\ 3x - 2(-1 + 2x) = -2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y = -1 + 2x \\ 3x - 4x + 2 = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 7 \\ x = 4 \end{cases}$

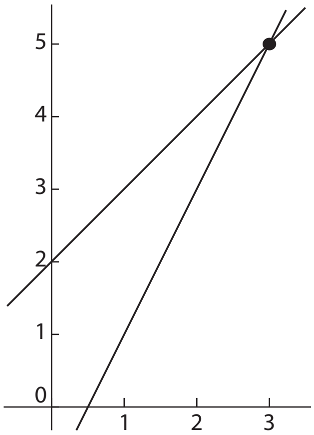
c. $\begin{cases} x + y = 30 \\ 7x + 12y = 300 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 30 - y \\ 7(30 - y) + 12y = 300 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 30 - y \\ -7y + 12y = 300 - 210 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 12 \\ y = 18 \end{cases}$

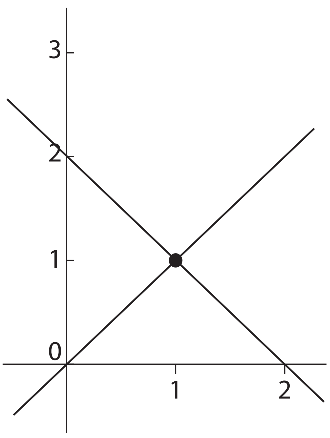
3 **a.** $x = 4{,}4$ et $y = 0{,}2$ **b.** pas de solution
c. $x = 5$ et $y = -1$ **d.** $x = 4$ et $y = 7$
e. $x = \dfrac{40}{13}$ et $y = \dfrac{24}{13}$ **f.** $x = 1{,}25$ et $y = 0{,}25$

Résolution graphique

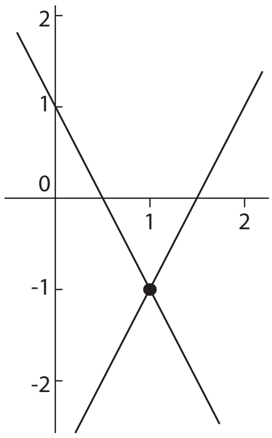
4



a. $x = 3$ et $y = 5$



b. $x = 1$ et $y = 1$



c. $x = 1$ et $y = -1$

Résolution informatique

5 **a.** $x = 2{,}6$ et $y = 1{,}8$
b. infinité de couples solution **c.** $x = 12{,}5$ et $y = 8{,}5$

6 **a.** $x = 3$ et $y = 1$ **b.** $x = 0$ et $y = 3$
c. $x = 36$ et $y = 11$

Résolution au choix

7 **a.** $x = 15$ et $y = 21$ **b.** $x = 0{,}5$ et $y = 0$
c. $x = 7$ et $y = 5$ **d.** $x = 0$ et $y = 0$
e. $x = -4$ et $y = 10$ **f.** $x = 1$ et $y = -1$
g. $x = -0{,}7$ et $y = 2{,}6$ **h.** $x = 5{,}2$ et $y = 4{,}8$

Traduction d'un problème en système

8 **a.** $\begin{cases} x + y = 3 \\ x - y = 7 \end{cases}$; $x = 5$ et $y = -2$; ces deux nombres sont 5 et – 2.

b. $\begin{cases} 2x + 3y = 11{,}50 \\ 3x + y = 8{,}50 \end{cases}$; $x = 2$ et $y = 2{,}5$; un café vaut 2 € et un chocolat 2,50 €.

c. $\begin{cases} 2x + y = 74{,}30 \\ x + 3y = 73{,}40 \end{cases}$; $x = 29{,}9$ et $y = 14{,}5$; conclusion : un bidon de 1 L vaut 14,50 € et un bidon de 5 L coûte 29,90 €.

9 Le problème se traduit par le système suivant :
$\begin{cases} x + y = 32 \\ 3x + 5y = 120 \end{cases}$.

QCM : Testez-vous !

1. C $x = 1$ et $y = -1$.

2. A $x = 1{,}3$ et $y = 0{,}9$.

3. B $\begin{cases} x + y = 200 \\ 8x + 12y = 2\,080 \end{cases}$.

4. A $\begin{cases} 1{,}5x - y = 2 \\ 2x + y = 5 \end{cases}$: chaque membre de la première équation a été divisé par 2.

5. C $M(1\ ;5)$: $3x + 2 = -x + 6$ donc $4x = 4$, soit $x = 1$; on remplace x dans l'une des équations, on obtient : $y = 3 \times 1 + 2 = 5$.

Problèmes

10 Nature d'un métal

1. Le système traduisant le problème est :

$$\begin{cases} 500 = V_0(1+20a) \\ 501,689 = V_0(1+150a) \end{cases}.$$

2. $500 + 500 \times 150a = 501{,}689 + 501{,}689 \times 20a$

$$\Leftrightarrow a = 2{,}6\times10^{-5}$$

Le coefficient de dilatation vaut $2{,}6\times10^{-5}$ °C^{-1}.

3. Il s'agit de l'aluminium.

11 Course poursuite

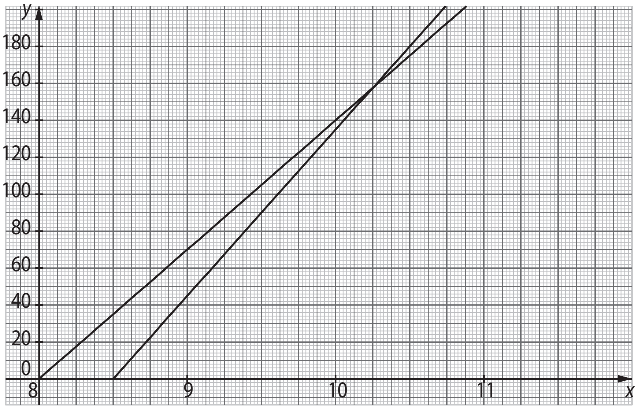
1. Approche de la solution par un tableau de valeurs

a.

	8 h	8 h 30	9 h	9 h 30	10 h	10 h 30	11 h
d_c en km	0	35	70	105	140	175	210
d_v en km		0	45	90	135	180	225

b. 10h < heure de rencontre < 10h30 ; 140 < distance parcourue < 175.

2. Résolution par une méthode graphique



b. Le point d'intersection a pour coordonnées (10,25 ; 158) ; l'heure de la rencontre se fait à 10h15 min et la distance parcourue est de 158 km.

3. Résolution par une méthode algébrique

a. On peut traduire le problème par le système suivant :

$$\begin{cases} d = 70t \\ d = 90(t - 0,5) \end{cases}.$$

b. $d = 157{,}5$ et $t = 2{,}25$.

L'heure de la rencontre est 8 h + 2,25 h soit 10,25 h ou 10 h 15 min.

La distance parcourue par les véhicules est de 157,5 km.

12 Lien entre les degrés Celsius et Fahrenheit

1. Non, les échelles ne sont pas proportionnelles car $\frac{68}{20} \neq \frac{104}{40}$.

2. $\begin{cases} 68 = 20a + b \\ 104 = 40a + b \end{cases}$

3. $a = 1{,}8$ et $b = 32$; $F = 1{,}8\theta + 32$

4. Point de congélation de l'eau : $F = 1{,}8\times0 + 32 = 32$ °F.

Point d'ébullition : $F = 1{,}8\times100 + 32 = 212$ °F.

13 Caisse enregistreuse

1. Non, car les 30 pièces restantes doivent représenter une somme de 41 € et ici on a :

$$15 \times 1 + 15 \times 2 = 45.$$

2. a. $\begin{cases} x + y = 30 \\ x + 2y = 41 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x + 30 \\ y = -0,5x + 20,5 \end{cases}$

b.

Coordonnées du point d'intersection : (19 ; 11). Il doit donc rester 19 pièces de 1 € et 11 pièces de 2 €.

3. La résolution de $\begin{cases} x + y = 30 \\ x + 2y = 41 \end{cases}$ donne $x = 19$ et $y = 11$.

14 Intensité et résistance

1. D'après la loi des nœuds : $I_1 + I_2 = I$ d'où $I_1 + I_2 = 720$

D'après la loi d'Ohm $R_1 I_1 = R_2 I_2$ soit $80\, I_1 = 400\, I_2$

$$\Leftrightarrow 80\, I_1 - 400\, I_2 = 0.$$

2. $\begin{cases} I_1 + I_2 = 720 \\ 80\, I_1 - 400\, I_2 = 0 \end{cases}$

3. La résolution donne le couple (600 ; 120) donc $I_1 = 600$ mA et $I_2 = 120$ mA.

15 Départ lancé

1. Si $t = 2$ s, on a $v = 164{,}8$. Donc à partir de $v = 3{,}6at + v_0$, on a $164{,}8 = 7{,}2a + v_0$.

De même avec la deuxième information, on peut écrire $262 = 18a + v_0$.

Le système est bien $\begin{cases} 164,8 = 7,2a + v_0 \\ 262 = 18a + v_0 \end{cases}$.

2. Le couple solution est (9 ; 100) donc la vitesse initiale avant le deuxième départ est $v_0 = 100$ km/h et l'accélération a été de 9 m/s^2.

16 Étude d'un courant périodique

Le problème peut se traduire par :

$$\begin{cases} t_1 + t_2 = 10 \\ \dfrac{t_1}{t_2} = \dfrac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_1 + t_2 = 10 \\ 3t_1 - t_2 = 0 \end{cases}.$$

La résolution donne $t_1 = 2{,}5$ ms et $t_2 = 7{,}5$ ms.

Démarche d'investigation

17 Recherche d'un coût

Si x est le tarif de location d'un VTT et y celui d'une voiturette, les données permettent d'écrire : $\begin{cases} 4x + 2y = 148 \\ 3x + y = 86 \end{cases}$. La résolution est le couple (12 ; 50).

Pour louer deux voiturettes et trois VTT, le groupe devra $3 \times 12 + 2 \times 50$ soit 136 €.

18 Ferronnerie d'art

Prix du troisième bouquet : 90 €.

19 Cuisine à composer

L'agencement 2 caissons avec une porte et 2 caissons sans porte coûtera 156 €.

20 Problème d'agglo

Ce particulier va disposer de 32 agglos d'angle.

21 Dimensions d'une pièce

On trouve que la pièce a une longueur de 14,25 m et une largeur de 4,75 m.

6 NOTION DE FONCTION

Capacités	Connaissances
• Utiliser une calculatrice ou un tableur grapheur pour obtenir, sur un intervalle : – l'image d'un nombre réel par une fonction donnée (valeur exacte ou arrondie) ; – un tableau de valeurs d'une fonction donnée (valeurs exactes ou arrondies) ; – la représentation graphique d'une fonction donnée. • Exploiter une représentation graphique d'une fonction sur un intervalle donné pour obtenir : – l'image d'un nombre réel par une fonction donnée ; – un tableau de valeurs d'une fonction donnée. • Décrire les variations d'une fonction avec un vocabulaire adapte ou un tableau de variation.	• Vocabulaire élémentaire sur les fonctions : – image ; – antécédent ; – croissance, décroissance ; – maximum, minimum.

L'objectif de ce chapitre est de voir (ou revoir) en situation le vocabulaire des fonctions. Il est avant tout fondé sur la représentation graphique à construire ou à exploiter pour étudier les variations des fonctions et tracer des tableaux de variation. On peut utiliser tout type de fonction tant qu'aucune connaissance spécifique concernant des fonctions hors programme n'est demandée.
Comme dans la plupart des chapitres, l'important n'est pas de développer une quelconque virtuosité dans la construction de tableaux de variation ou la connaissance des fonctions abordées mais bien d'utiliser les notions étudiées afin de résoudre des problèmes. C'est pour cette raison que les fonctions y sont souvent introduites comme modèles de situations. Une large place est faite aux tableurs grapheurs et aux possibilités qu'ils offrent pour la résolution.

Activité 1 : Dépressurisation brutale de la cabine d'un avion

1. $T = g(11\ 000) = -55{,}6$°C et $p = f(11\ 000) \approx 220$ Pa

Ces valeurs sont les images, par les fonctions g et f, de l'altitude $x = 11\ 000$ m : on les note $g(x)$ et $f(x)$.

2. $g(x) = 15 - \dfrac{6,5x}{1\,000}$.

3. $p_{int} = 700$ hPa. Cette pression correspond à une altitude $x = 2\ 700$ m.

4. Lors d'une dépressurisation brutale à l'altitude de croisière, la température et la pression auxquelles sont soumis les passagers sont $p = f(11\ 000) \approx 220$ Pa et $T = g(11\ 000) = -55{,}6$°C.

5. Pour que la pression n'excède pas 600 hPa, il faudrait ramener l'avion à 3 800 m.

Pour que la température soit au moins égale à – 20°C, il faut que $15 - \dfrac{6,5x}{1\,000} \geqslant -20$, soit $x \leqslant 5385$ m.

Le pilote doit donc ramener l'avion en-dessous de 3 800 m.

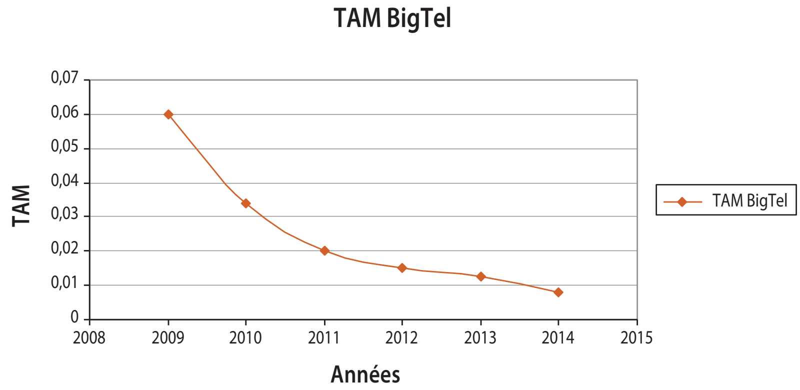
Activité 2 : Les baisses de tarif profitent-elles aux utilisateurs ?

1. L'antécédent de 25 par la fonction d est juillet 2011. La facture mensuelle moyenne est descendue en dessous de 25 € HT au-delà de cette date.

2. Tableau de variation de la fonction d.

x	jan-09	juil-09	janv-10	juil-10	janv-12	juil-12
$d(x)$	26,8	27,7	26,2	27,3	23,1	23,3

3.



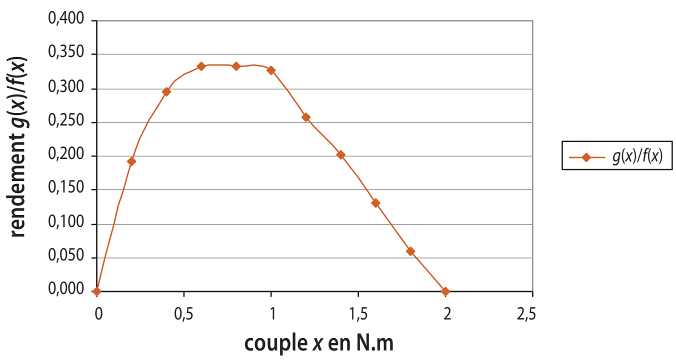
La fonction f est strictement décroissante.

4. La fonction d est alternativement croissante et décroissante. Ses variations ne sont pas monotones. La fonction f est strictement décroissante. La facture de téléphonie mobile des français n'a donc pas suivi celle de la TAM.

Activité 3 : Rendement d'un moteur

La réponse à la première question est imédiate : la puissance maximale correspond à une charge nécessitant un couple de 1 N.m.
Pour répondre à la seconde, une simple lecture graphique ne suffit plus.
Le rendement est le résultat du rapport : $\dfrac{g(x)}{f(x)}$.
On peut donc établir un tableau de valeurs de $f(x)$ et de $g(x)$, pour en faire ensuite le rapport.
Il paraît judicieux d'utiliser un tableur qui permettra de faire les calculs automatiquement et d'obtenir un graphique.

x	$f(x)$	$g(x)$	$g(x)/f(x)$
0	10	0	0,000
0,2	13	2,5	0,192
0,4	17	5	0,294
0,6	21	7	0,333
0,8	24	8	0,333
1	27,5	9	0,327
1,2	31	8	0,258
1,4	34,5	7	0,203
1,6	38	5	0,132
1,8	42	2,5	0,060
2	45	0	0,000



Le meilleur rendement est donc obtenu pour des charges qui entrainent des couples de 0,6 à 0,8 N.m.

Travaux pratiques

Comment obtenir le meilleur bénéfice ?

1. Choix d'une méthode

a. Si 5 000 pièces sont fabriquées sur le site A, sur le site B, il faut fabriquer :

$$8\,000 - 5\,000 = 3\,000 \text{ pièces.}$$

b. $z = 80 - x$ puisque x et z sont exprimés en centaines de pièces.

c. Pour répondre à la question que se pose le directeur, en utilisant un tableur, on peut calculer les somme des bénéfices correspondant à tout x de [20 ; 60] (on peut partir de $x = 20$ car z ne peut excéder 60). Pour cela il faudra entrer, dans une colonne, toutes les valeurs de 20 à 60 par cliquer-glisser à partir de la sélection de (20 ; 21). Dans la colonne suivante, on pourra calculer les valeurs correspondantes de *z*, puis calculer le bénéfice total de chacune des fabrications possibles en utilisant la somme des fonctions *f* et *g*. On cherchera ensuite, dans la liste, la fabrication qui donne le meilleur bénéfice.

x	*z*	bénéfice
20	60	97
21	59	97,18
22	58	97,32
23	57	97,42
24	56	97,48
25	55	97,5
26	54	97,48
27	53	97,42
28	52	97,32
29	51	97,18
30	50	97
31	49	96,78
32	48	96,52
33	47	96,22

…

x	*z*	bénéfice
34	46	95,88
35	45	95,5
36	44	95,08
37	43	94,62
38	42	94,12
39	41	93,58
40	40	93
41	39	92,38
42	38	91,72
43	37	91,02
44	36	90,28
45	35	89,5
46	34	88,68
47	33	87,82

…

x	*z*	bénéfice
48	32	86,92
49	31	85,98
50	30	85
51	29	83,98
52	28	82,92
53	27	81,82
54	26	80,68
55	25	79,5
56	24	78,28
57	23	77,02
58	22	75,72
59	21	74,38
60	20	73

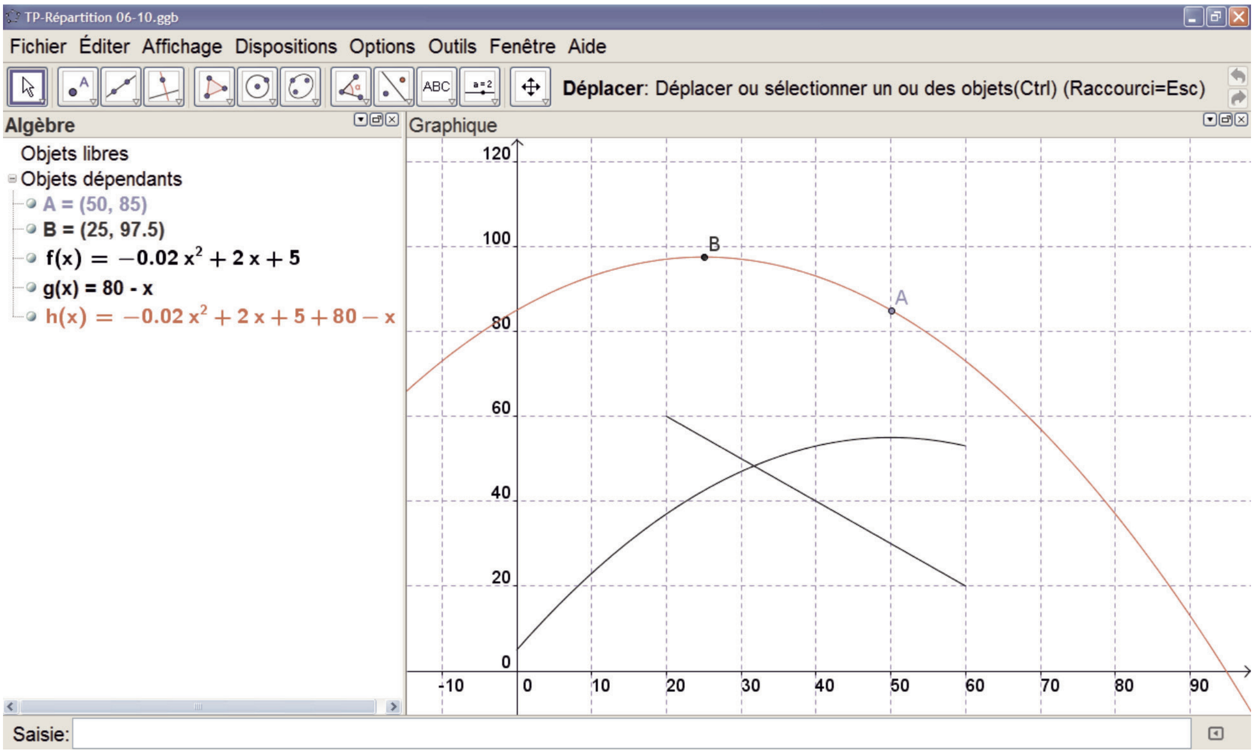
d. À partir des valeurs obtenues à l'aide du tableur, le nombre *x* de centaines de pièces qu'il faut fabriquer sur le site A pour réaliser le meilleur bénéfice semble être 25.

2. Utilisation de la fonction modélisant le bénéfice total

a. La fonction qui représente le bénéfice total en fonction du nombre *x* de centaines de pièces fabriquées sur le site A s'écrit : $h(x) = f(x) + g(z) = -0{,}02x^2 + 2x + 5 + z = -0{,}02x^2 + 2x + 5 + 80 - x$,

donc $h(x) = -0{,}02x^2 + x + 85$.

b.



c. Tableau de variation de la fonction *h*.

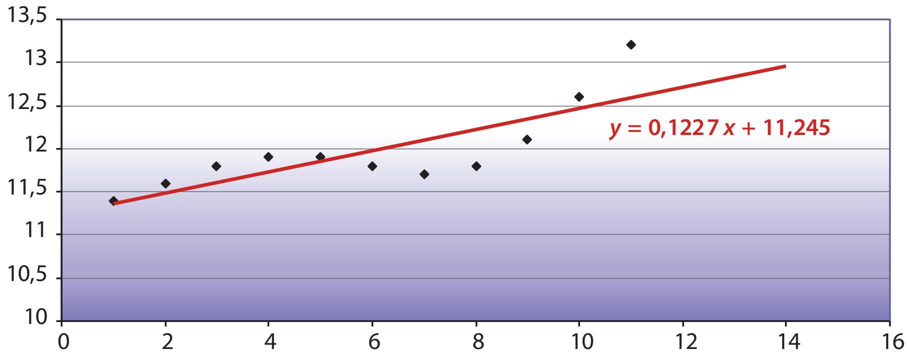
x	20	25	60
h(*x*)	97 ↗	97,5	↘ 73

d. D'après le tableau de variation, le bénéfice est bien maximum pour *x* = 25 centaines de pièces.

Quelle sera la température moyenne en France en 2031-2040 ?

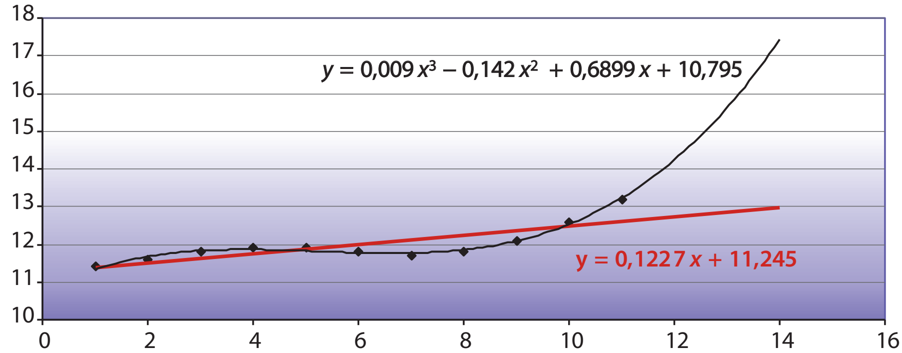
1. Obtention des modèles

a.



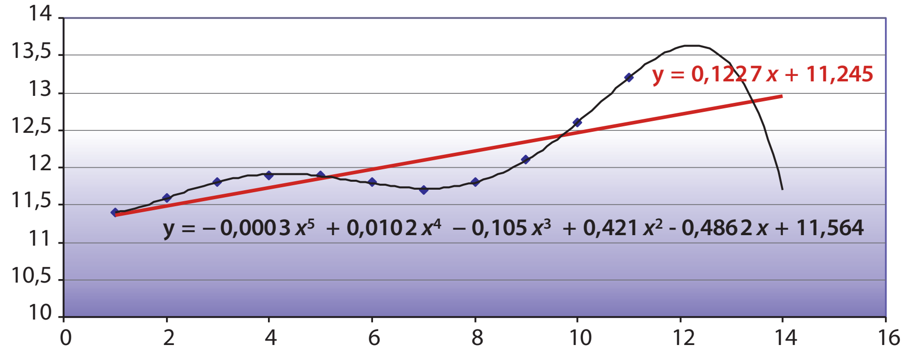
On trouve donc avec le « modèle linéaire » : $f(x) = 0{,}1227x + 11{,}245$.

b.



Avec le modèle polynomial de degré 3, on trouve :

$$g(x) = 0{,}009x^3 - 0{,}142x^2 + 0{,}6899x + 10{,}795.$$



Avec le modèle polynomial de degré 5, on trouve :

$$h(x) = -0{,}0003x^5 + 0{,}0102x^4 - 0{,}105x^3 + 0{,}421x^2 - 0{,}4862x + 11{,}564.$$

2. Comparaison des modèles

a. Tableaux de variation des fonctions f, g et h :

x	1	14
$f(x)$	11,4 ↗	13

x	1	4	7	14
$g(x)$	11,4 ↗	11,9 ↘	11,7 ↗	17,3

x	1	4	7	12	14
$h(x)$	11,4 ↗	11,9 ↘	11,7 ↗	13,7 ↘	11,7

b. D'après les résultats obtenus, le modèle choisi par l'organisme B semble être celui qui est décrit par la fonction g.

c. Tout modèle correctement argumenté pourra être accepté.

Exercices

Définition d'une fonction

1 **a.** L'image par la fonction f de -3 est 3.
b. L'image par la fonction f de 1 est -1.
c. L'image par la fonction g de 0 est 2.
d. L'image par la fonction h de 4 est $-1{,}5$.
e. L'image par la fonction g de 2 n'existe pas.

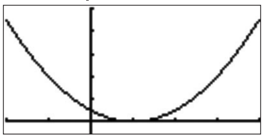
2

x	-4	-3	-2	-1	0
$g(x)$	2	$-0{,}7$	-2	$-0{,}7$	2

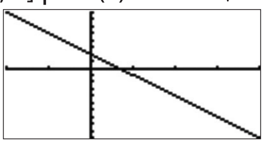
3 **a.** L'antécédent de -2 par la fonction g est -2.
b. L'antécédent de 0 par la fonction h est 1.
c. L'antécédent de -1 par la fonction f est 1.
d. Les antécédents de 1 par la fonction g sont $-0{,}3$ et $-3{,}7$.

Représentation graphique d'une fonction

4 Représentation graphique de la fonction f, définie sur l'intervalle $[-2\,;4]$ par $f(x) = x^2 - 2x + 1$:



5 **a.** Représentation de la fonction f définie sur l'intervalle $[-3\,;5]$ par $f(x) = -3x + 2$:

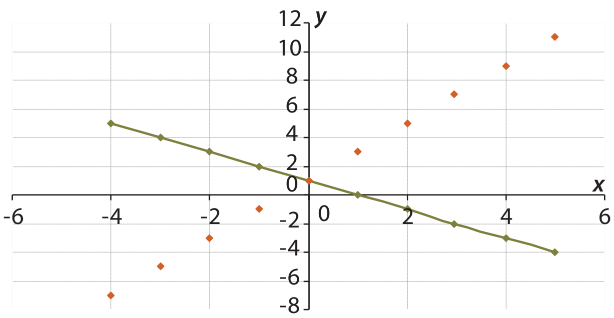


b. Il n'y a pas d'image pour 12car 12 n'appartient pas à l'intervalle sur lequel la fonction f est définie.

6 Tableau de valeurs de la fonction g :

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$g(x) = 2x + 1$	-7	-5	-3	-1	1	3	5	7	9	11

Représentation graphique de f et g



Remarque : Rien n'autorise à tracer la droite reliant les points donnés dans le tableau de valeurs de f.

Sens de variations d'une fonction

7 Les fonctions f et k sont croissantes, la fonction g est constante, la fonction h est décroissante.

8 **a.** La fonction f est décroissante sur $[-4\,;-3]$ et sur $[1\,;4]$. Elle est croissante sur $[-3\,;1]$.

b. La valeur de t pour laquelle la fonction admet un maximum est $t = 1$. La valeur de ce maximum est 2,5.

9 Tableaux de variation des trois fonctions f, g, h.

x	-5		-3		1		5
$f(x)$	1	↗	3	↘	-1	↗	1

x	-4		-2		0
$g(x)$	2	↘	-2	↗	2

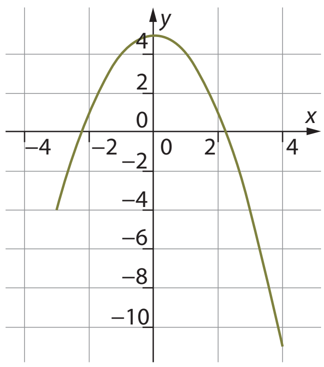
x	-5		5
$h(x)$	3	↘	-2

10 La fonction f admet un maximum égal à 3 pour $x = -3$ et un minimum égal à (-1) pour $x = 1$. La fonction g admet un minimum égal à (-2) pour $x = 2$.

11 **a.** Tableau de variation

x	-3		**0**		**4**
$f(x)$	**-4**	↗	**5**	↘	**-11**

b. Allure de la fonction f



12 **a.**

x	-1		2,5
$h(x)$	-7	↗	4,3

b. La fonction n'admet pas de maximum car elle n'est pas successivement croissante puis décroissante sur l'intervalle.
c. La fonction n'est pas strictement croissante puisqu'elle présente un palier pour $x = 1$.
d. La fonction est croissante sur $[-1\,;0]$.

QCM : Testez-vous !

1. B. 0

2. A. – 1

3. A. 6

4. A. – 17

5. C. croissante

6. C. aucun extremum

7. A. 5

8. B. 0 et 2

9. C. – 2

10. C. n'existe pas : la fonction n'est pas définie en 5.

11. A. décroissante

12. A. un minimum : pour $x = 1$

Problèmes

13 Quel délai avant de conduire ?

1. Eléments de l'énoncé qui permettent de répondre aux questions posées :
En France un conducteur est en infraction s'il conduit avec un taux d'alcool supérieur ou égal à 0,5 gramme par litre de sang. Conduire avec un taux d'alcool compris entre 0,5 et 0,79 g/L de sang constitue une contravention. Conduire avec un taux d'alcool supérieur ou égal à 0,8 g/L constitue un délit. Le taux maximum pourrait être ramené à 0,2 g/L pour les jeunes conducteurs.

2. Sur le graphique, on relève les maxima de taux d'alcoolémie, puis l'heure à laquelle le taux revient à zéro.

3. Tracer la droite d'équation $y = 0,5$ sur le graphique permet de déterminer l'intervalle horaire pendant lequel les conducteurs sont en infraction. Ce sont les intervalles pour lesquels, les courbes sont au-dessus de la droite.

4. • Du point de vue de la législation, si ces hommes reprennent le volant, celui qui a consommé au cours d'un repas est en contravention vis-à-vis de la loi et celui qui est à jeun commet un délit.
• Un jeune conducteur commettrait un délit dans les deux cas.
• Du point de vue de la loi, le conducteur ayant mangé peut reprendre le volant à partir de 23 h 00 et celui qui est resté à jeun à partir de 1 h 30. Cependant, pour des raisons évidentes de sécurité, mieux vaut attendre 2 h 00 du matin pour celui qui a pris un repas et beaucoup plus tard pour celui qui est resté à jeun.

14 Bolt franchira-t-il la barre des 9,50 s ?

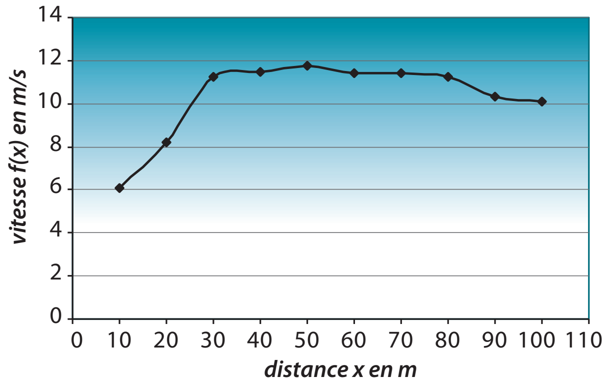
1.

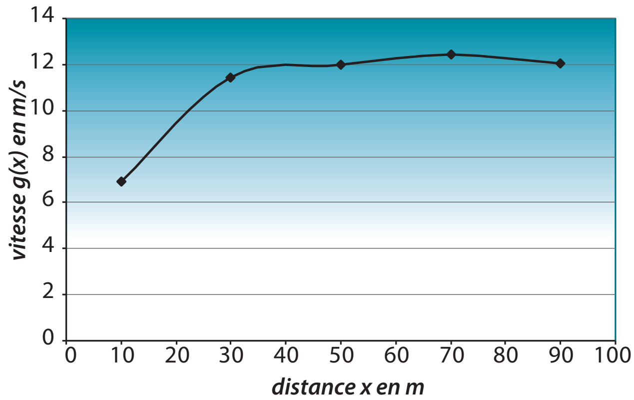
Intervalles (m)	[0 ; 20[	[20 ; 40[	[40 ; 60[	[60 ; 80[	[80 ; 100]
Temps de parcours de l'intervalle (s)	2,89	1,75	1,67	1,61	1,66
Vitesse v au centre de l'intervalle (m/s)	6,92	11,43	11,98	12,42	12,05

Intervalles (m)	[0 ; 20[	[20 ; 40[	[40 ; 60[	[60 ; 80[	[80 ; 100]
Vitesse v (km/h)	24,91	41,14	43,11	44,72	43,37

2. Le calcul des vitesses de la course de 2009 confirme bien une pointe de vitesse à 44,72 km/h entre 60 et 80 mètres. Cette pointe en termes mathématiques est appelée « maximum de la fonction g ».

3.





4. La courbe représentative de f représente les variations de la vitesse de Bolt à Pékin. La fonction f est croissante jusqu'à 50 m, distance à laquelle elle passe par un maximum, puis décroissante ensuite. On peut cependant considérer qu'elle est presque constante entre 30 m et 80 m.

La courbe représentative de g représente les variations de la vitesse de Bolt à Berlin. La fonction g est croissante jusqu'à 70 m, distance à laquelle elle passe par un maximum, puis décroissante ensuite. On peut cependant considérer qu'elle est presque constante entre 40 m et 90 m. Elle est très peu décroissante.

5. Toute suggestion argumentée peut être considérée, par exemple, « Conseil à Usain Bolt pour lui permettre de passer en-dessous de la barre des 9,50s : travailler le début de course pour atteindre plus rapidement le palier de vitesse (et grappiller ainsi les quelques centièmes manquant) puis maintenir cette vitesse comme à Berlin. »

15 Quelle pompe choisir ?

1. Calcul du débit minimum de la pompe

a. Volume d'eau contenu dans la piscine :
$V = 12 \times 5 \times (1{,}50 - 0{,}10) = 84\ \text{m}^3$.

b. Débit minimal de la pompe à choisir : $Q_{min.} = \dfrac{84 \times 3}{12} = 21\ \text{m}^3/\text{h}$.

2. Choix de la pompe

x	0	20	37
Rendement de la pompe 2CV	0 ↗	66	↘ 20

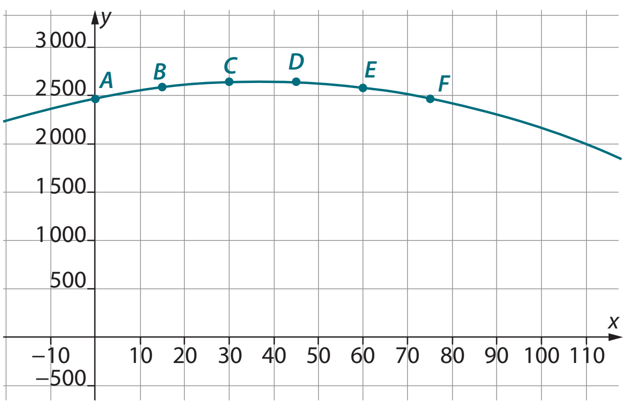
En considérant que le débit nécessaire de la pompe est de 21 m^3/h, toutes les pompes d'une puissance supérieure à 3/4 CV peuvent convenir. Pour un débit minimal nécessaire de 21 m^3/h, la pompe 2 CV semble la mieux adaptée en termes de rendement puisque c'est celle dont le maximum de rendement est le plus proche de 21 m^3.

16 Au stand de course automobile

1. Validité du modèle

a. Pour vérifier la validité de la fonction qui modélise R, on peut placer les points (x ; R) sur un graphique et tracer la courbe représentative de f. Si les points sont sur la courbe ou bien très proches de la courbe, on pourra considérer que la fonction est un modèle convenable de R.

b.



Les points sont alignés sur la courbe. Le modèle est donc bien choisi.

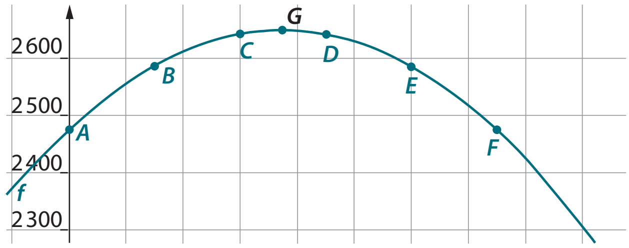
2. Vérification des conditions de sécurité

a. Graphique : voir question précédente.

b.

x	0	37,4	75
$f(x)$	2 476 ↗	2 649	↘ 2 474

c. Les coordonnées du maximum G de la fonction sont environ (37,4 ; 2 649). La valeur du maximum reste inférieure à 2 650, les conditions de sécurité sont donc respectées.



17 Rendement d'un éolienne

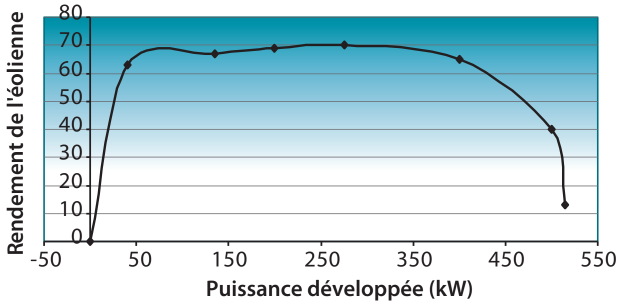
1. L'éolienne peut fonctionner lorsque le vent atteint une vitesse d'au moins 2,5 m/s.

2. La puissance maximale est obtenue pour une plage de vitesses de 15 m/s à 27 m/s. Elle n'est pas obtenue pour la même vitesse que le rendement maximum qui s'obtient pour une vitesse de 9 m/s.

3.

Vitesse du vent (m/s)	2,5	5	7,5	8	9	12,5	14	20	25
Puissance développée (kW)	0	40	135	200	275	400	500	510	515
Rendement de l'éolienne (%)	0	63	67	69	70	65	40	13	7

4.



5. On peut considérer que le rendement est une fonction de la puissance de l'éolienne car tout antécédent a une image unique.

6. Plage de puissance pour laquelle le rendement de l'éolienne est supérieur à 60 % : [35 ; 430].

Démarche d'investigation

18 Avion ou voiture ?

1. On relève la consommation pour 100 km et par passager en 2020 sur le graphique. On calcule la consommation de la voiture pour 100 km par passager. On compare les deux consommations puisque les deux carburants, à volumes égaux, provoquent la même quantité de CO_2.

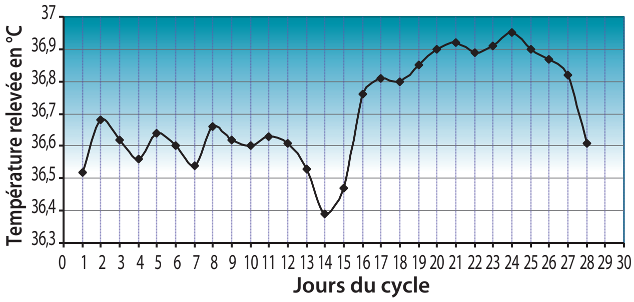
2. En avion, CPK en 2020 : 2,7 L/passager/100 km.

En voiture, CPK en 2020 : $\frac{6}{3} = 2$ L/passager/100 km.

La voiture transportant 3 passagers restera donc moins polluante que l'avion dans ces conditions d'utilisation.

19 Fécondité maximale

Pour visualiser la période de fécondité maximale, on peut représenter graphiquement le tableau de valeur. On déterminera ensuite visuellement le maximum de la courbe obtenue et on définira un intervalle de 7 jours centré sur ce maximum.

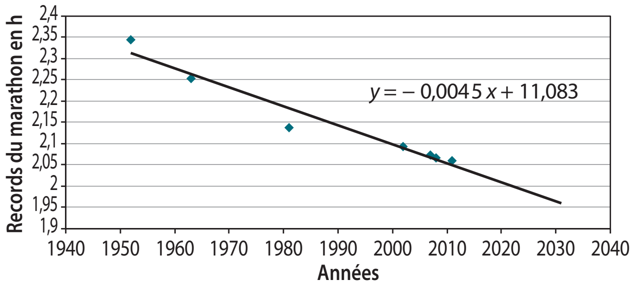


Le minimum est obtenu le 14e jour. La période de fécondité maximale est donc comprise entre le 11e et le 18e jour du cycle.

20 Jusqu'où iront les marathoniens ?

1. Pour déterminer approximativement la décennie au cours de laquelle le record des 2 heures risque d'être atteint, on peut représenter graphiquement le tableau de valeurs à l'aide d'un tableur. Pour obtenir davantage de fiabilité, on peut commencer seulement à partir de 1950. On déterminera ensuite une courbe adaptée pour modéliser la progression des records. Sur cette courbe, on lira la décennie qui correspond au passage des records en-dessous de 2 h 00.

2.



3. D'après le modèle affine choisi pour les records établis à partir de 1952, il semblerait que la barre des 2 heures puisse être franchie entre 2020 et 2030. Cette méthode est cependant peu fiable car rien ne permet d'affirmer que la progression des records est de type affine.

21 L'effet du sport sur la condition physique

1. Les valeurs à relever pour étayer l'argumentation sont le maximum de chaque fonction et les âges qui correspondent à la limite de l'incapacité fonctionnelle.

Âge	0		20		70
V_{O_2max} Sédentaire			50		
	40	↗		↘	15

Âge	0		25		103
V_{O_2max} Sportif			63		
	40	↗		↘	15

2. Le volume d'oxygène maximal est plus élevé chez le sportif : 63 mL/kg/min contre 50 mL/kg/min pour l'homme sédentaire. Ce maximum est retardé de 5 ans chez le sportif puisqu'il est obtenu pour 25 ans au lieu de 20 ans pour l'homme sédentaire.
La limite d'incapacité fonctionnelle (15 mL/kg/min) est atteinte à 70 ans chez l'homme sédentaire alors qu'elle n'est atteinte qu'à 103 ans chez le sportif.

7 FONCTIONS DE RÉFÉRENCE

Capacités	Connaissances
• Sur un intervalle donné, étudier les variations et représenter les fonctions de référence $x \mapsto 1$, $x \mapsto x$, $x \mapsto x^2$.	• Sens de variation et représentation graphique des fonctions de référence sur un intervalle donné : $x \mapsto 1$, $x \mapsto x$, $x \mapsto x^2$.
• Représenter les fonctions de la forme $x \mapsto x + k$, $x \mapsto x^2 + k$, $x \mapsto k$, $x \mapsto k\,x$, $x \mapsto k\,x^2$ où k est un nombre réel donne. • Utiliser les TIC pour conjecturer les variations de ces fonctions.	• Sens de variation et représentation graphique des fonctions de la forme $x \mapsto x + k$, $x \mapsto x^2 + k$, $x \mapsto k$, $x \mapsto k\,x$, $x \mapsto k\,x^2$ où k est un nombre réel donné.
• Représenter une fonction affine. • Déterminer le sens de variation d'une fonction affine. • Déterminer l'expression algébrique d'une fonction affine a partir de la donnée de deux nombres et de leurs images. • Déterminer par calcul si un point M du plan appartient ou non a une droite d'équation donnée.	• Fonction affine : – sens de variation ; – représentation graphique ; – cas particulier de la fonction linéaire, lien avec la proportionnalité. • Équation de droite de la forme $y = a\,x + b$.
• Résoudre graphiquement une équation de la forme $f(x) = c$ où c est un nombre réel et f une fonction affine ou une fonction de la forme $x \mapsto x^2 + k$, $x \mapsto kx^2$ où k est un nombre réel donné.	• Processus de résolution graphique d'équations de la forme $f(x) = c$ où c est un nombre réel et f une fonction affine ou une fonction de la forme $x \mapsto x^2 + k$, $x \mapsto kx^2$ où k est un nombre réel donné.

Ce chapitre, comme le précédent, permet d'utiliser des fonctions pour résoudre des problèmes. Il permet de se familiariser avec chacune des fonctions de référence, de connaître ses variations ainsi que l'influence d'un coefficient multiplicateur ou de l'ajout d'une constante sur ses variations. Il est important que l'élève puisse associer à chaque type de fonction l'allure de sa représentation graphique, et inversement. Ce chapitre est également l'occasion de préciser que la fonction linéaire est un cas particulier de fonction affine et de travailler sur la proportionnalité associée à la fonction linéaire.

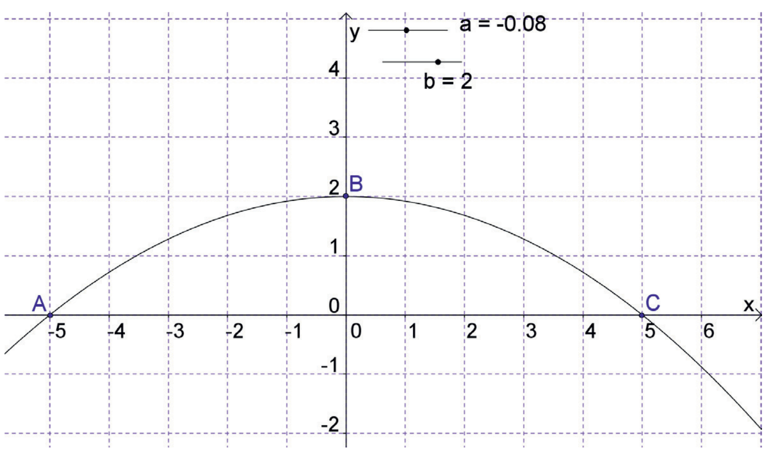
Activité 1 : Modèle d'un pont

1. $A(-5\,;0)$; $B(0\,;2)$; $C(5\,;0)$

2. Le modèle mathématique qui paraît correspondre à la forme de l'arc est celui de la fonction g car la représentation graphique est un arc de parabole.

☐ $f(x) = ax$ ☒ $g(x) = ax^2 + b$ ☐ $h(x) = ax + b$

3.



Dans le volet gauche de la page du logiciel, on relève l'expression de la fonction : $f(x) = -0{,}08\,x^2 + 2$

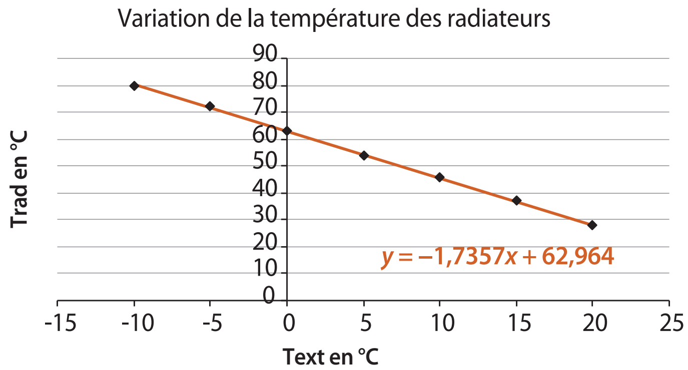
4. Hauteur des parties triangulaires qui sont aux deux extrémités du pont :

$$f(-4) = f(4) = -0{,}08 \times 4^2 + 2 = 0{,}72 \text{ (pas d'unité donnée dans l'énoncé).}$$

Activité 2 : Madame Dubrou a-t-elle raison ?

1. Tableau des valeurs relevées sur les graphiques :

T_{ext}	– 10	– 5	0	5	10	15	20
T_{chaud}	90	80	70	60	50	40	30
T_{rad}	80	72	63	54	46	37	28



L'expression de la fonction est : $f(x) = 1{,}7357x + 62{,}964$.

2. Tableau de variation de la fonction *f*

x	– 10	20
$f(x)$	80 ↘	28

La fonction *f* est une fonction affine.

3. Ce qu'affirme Madame Dubrou semble impossible puisque la fonction qui décrit les variations de la température de l'eau dans les radiateurs est une fonction décroissante de la température extérieure. Donc plus cette température extérieure est basse, plus la température de l'eau dans les radiateurs est élevée.

Activité 3 : Quelle vitesse aux 1 000 m ?

1. La vitesse atteinte est proportionnelle au temps correspondant car $\dfrac{27{,}8}{5{,}7} \approx \dfrac{44{,}4}{9{,}1} \approx \dfrac{55{,}6}{11{,}4}$.

2. La valeur du coefficient de proportionnalité arrondie au centième est 4,88. Ce coefficient représente l'accélération constante de la voiture.

3. Pour déterminer la vitesse atteinte aux 1 000 m, on peut tracer la représentation graphique de la vitesse en fonction du temps et lire la valeur correspondant à 20,3 s. On peut aussi tout simplement calculer cette vitesse à l'aide du coefficient de proportionnalité et du temps de 20,3 s.

4. La valeur attendue est environ égale à 99 m/s.

Travaux pratiques

Pourra-t-on arroser tout le jardin ?

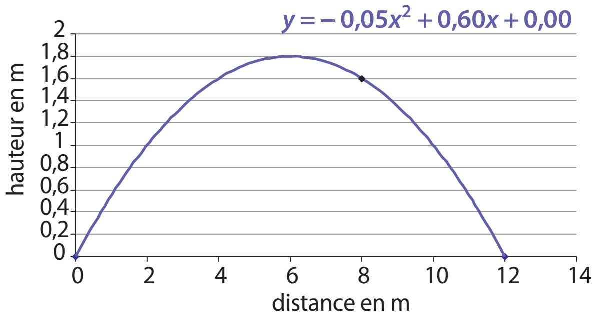
1. Première approche

a. Les éléments qui pourraient empêcher le jet d'eau d'arroser jusqu'au pied du mur sont :
- une portée insuffisante ;
- le feuillage de l'arbre qui pourrait interrompre le trajet du jet d'arrosage.

b. On peut par exemple, sur la feuille de calcul d'un tableur, entrer les coordonnées des points de départ et d'arrivée d'un jet qui passerait par une hauteur maximale inférieure à 1,80 m à 8 m de l'origine du jet, puis utiliser les fonctionnalités du tableur pour chercher s'il existe une modélisation possible de type fonction polynomiale de degré 2. Les élèves peuvent également proposer des méthodes graphiques manuelles mais leur fiabilité sera insuffisante.

Points $O(0\,;0)$; $A(8\,;x)$; $B(12\,;0)$; on fait varier la valeur de x pour tenter de trouver une valeur qui convienne.

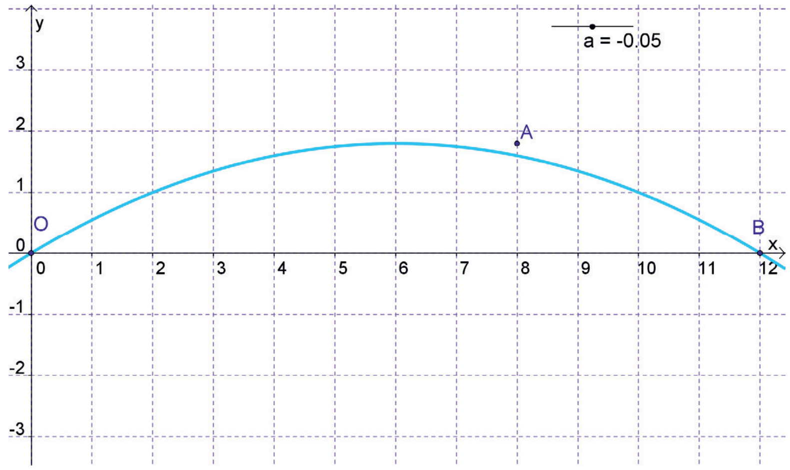
distance en m	0	8	12
hauteur en m	0	x	0



2. Expérimentation

a. $O(0\,;0)$; $A(8\,;1{,}8)$; $B(12\,;0)$.

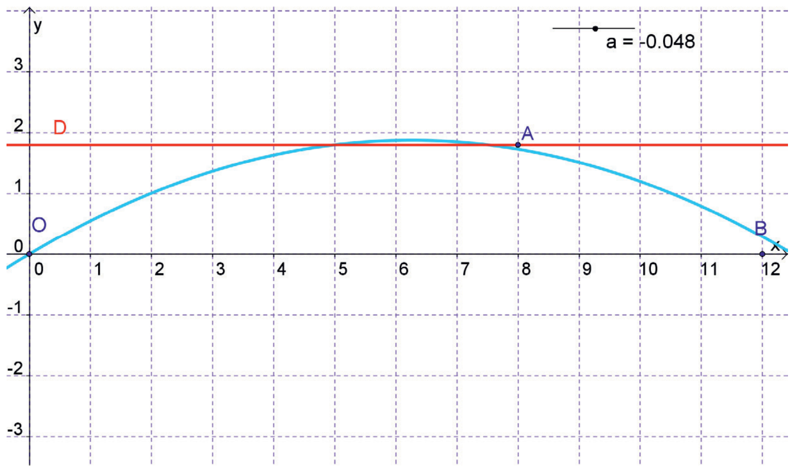
b.



D'après l'expérimentation menée en faisant varier le curseur « a », il semble possible d'arroser jusqu'au pied du mur.

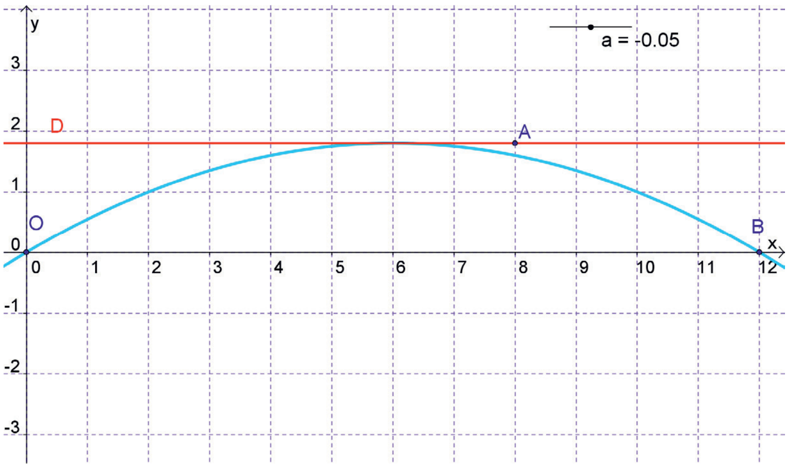
3. Détermination de la valeur du coefficient « *a* » de la fonction *f*

a.



L'intervalle des abscisses dans lequel le jet d'eau risque de rencontrer l'arbre est [6 ; 10] puisque l'arbre a une envergure de 4 m centrée à 8 m de l'origine du jet.

b.



La valeur de « a » qui semble convenir le mieux est $a = -0{,}05$.

L'expression de la fonction f correspondante est $f(x) = -0{,}05\,x^2 + 0{,}6\,x$.

Tableau de variation de f

x	0	6	12
$f(x)$	0 ↗	1,8	↘ 0

Cette fonction permet de remplir les conditions : son maximum est de 1,80 m, ce qui signifie que le jet passe à la limite du feuillage de l'arbre, et la parabole contient le point B, ce qui signifie que le pied du mur est arrosé.

c. L'ordonnée du sommet de la parabole est 1,80.

La valeur de son antécédent par la fonction f est 6. Ce résultat confirme que le jet passe juste à la limite du feuillage de l'arbre.

4. Vérification et conclusion

a. $f(8) = 1{,}6$; $f(0) = 0$ et $f(12) = 0$.

b. L'arroseur permet d'atteindre le pied du mur. Pour cela, il faut que la trajectoire du jet soit la parabole d'équation $y = -0{,}05\,x^2 + 0{,}6\,x$.

Quel tarif choisir ?

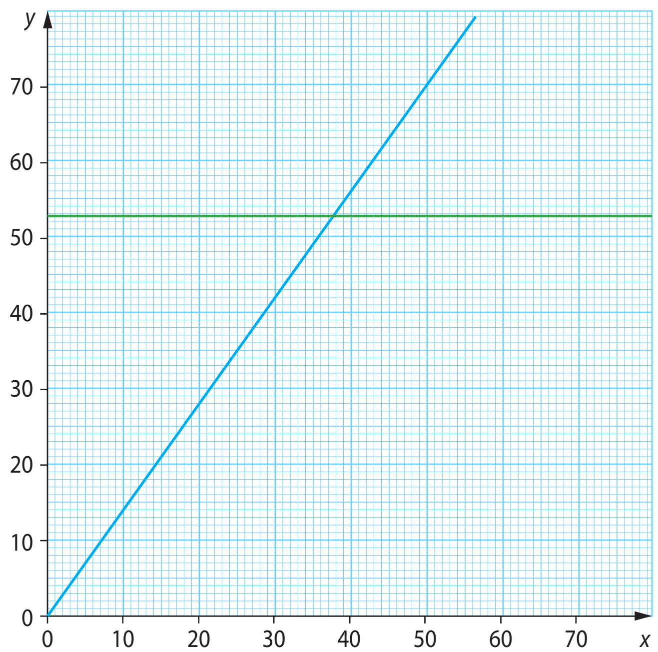
a. Expressions des fonctions :

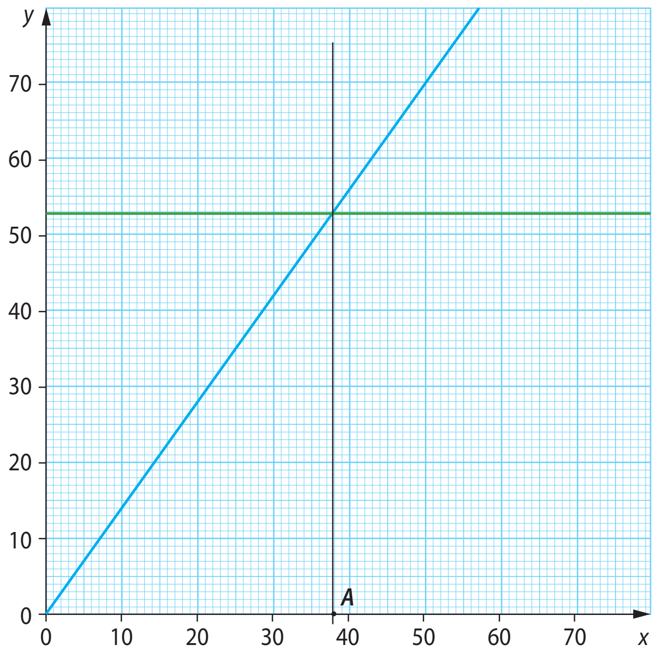
$$f(x) = 1{,}4\,x \text{ et } g(x) = 53$$

b. Représentation graphique des fonctions f et g : voir ci-contre.

c. Les deux premières affirmations concernant le budget sont fausses puisque la fonction g n'est ni linéaire, ni croissante.

d. Le tarif le plus avantageux, s'il nage une fois par semaine pendant 36 semaines, est le tarif 1 : voir graphique page suivante.



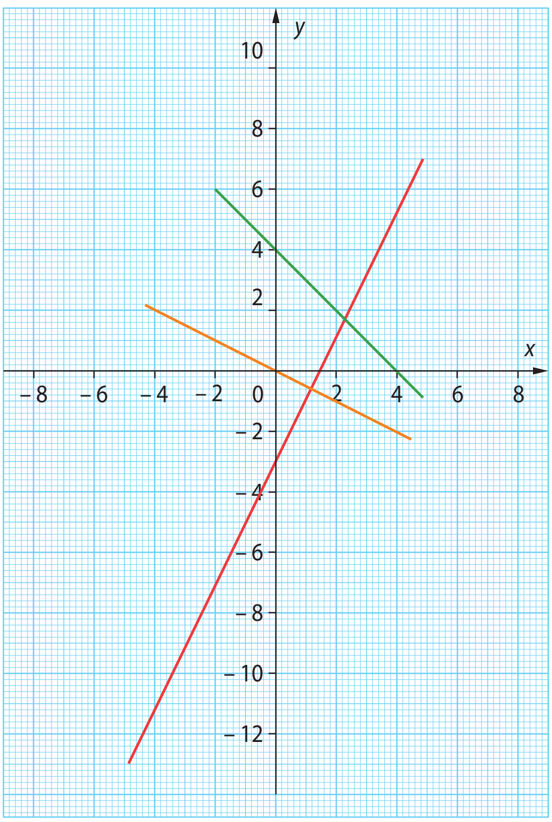


e. L'abonnement devient plus avantageux à partir de 38 entrées.

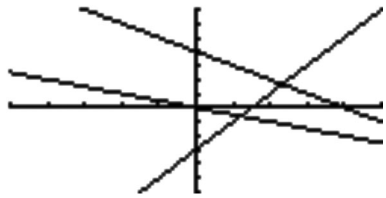
Exercices

Fonctions de référence

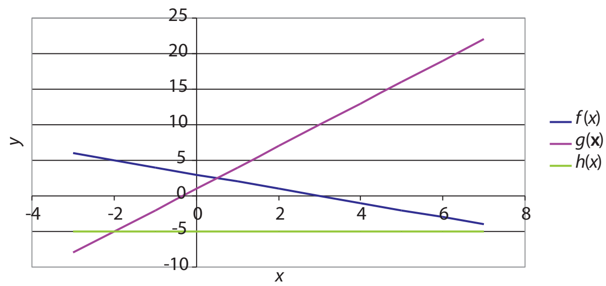
1



2 À la calculatrice :



3



4 On obtient les associations suivantes :

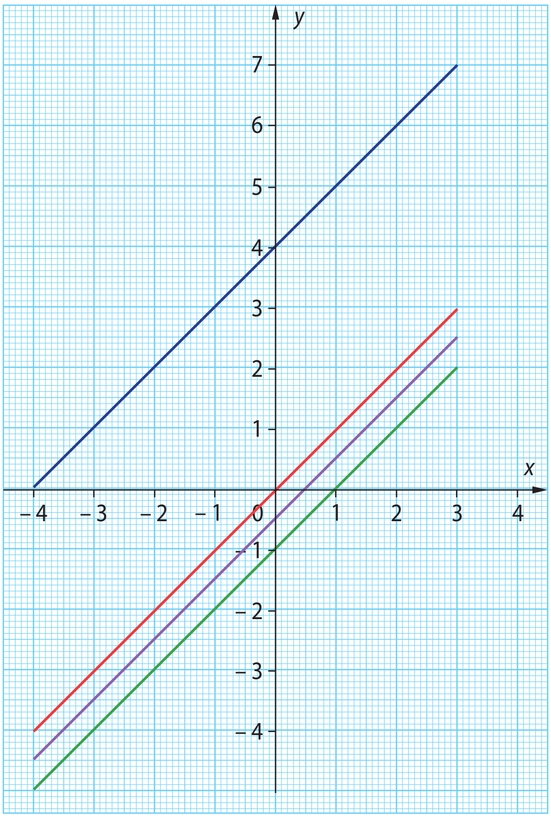
a. $x \mapsto x + 1$ courbe n°4

b. $x \mapsto -4x + 5$ courbe n°2

c. $x \mapsto -\frac{1}{2}x$ courbe n°1

d. $x \mapsto 5$ courbe n°3

5 **a. b.**



c.

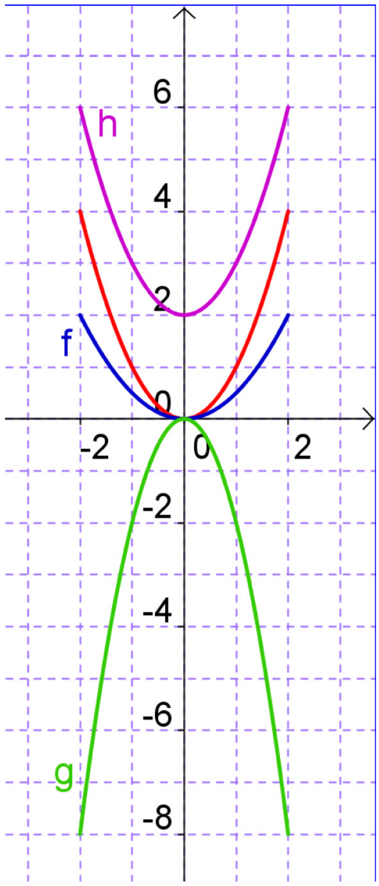
x	-4		3
x	-4	↗	3

x	-4		3
$f(x)$	0	↗	7

x	-4		3
$g(x)$	-5	↗	2

x	-4		3
$h(x)$	$-4,5$	↗	$2,5$

6 **a.**



b.

x	-2		0		2
$f(x)$	2	↘	0	↗	2

x	-2		0		2
$g(x)$	-8	↗	0	↘	8

x	-2		0		2
$h(x)$	6	↘	2	↗	6

7 On obtient les associations suivantes :

a. $x \mapsto 3x$ Courbe n°4

b. $x \mapsto -x + 3$ Courbe n°2

c. $x \mapsto -x^2$ Courbe n°3

d. $x \mapsto \frac{1}{3}x^2 - 1$ Courbe n°1

Fonction affine

8 La fonction représentée par la droite n° 4 est une fonction croissante puisque x et y varient dans le même sens. Les fonctions représentées par les droites n° 1 et 2 sont des fonctions décroissantes puisque lorsque x augmente, la valeur correspondante de y diminue.

9 **a.** $x \mapsto x+1$

x	-4		4
$f(x)$	-3	↗	5

b. $x \mapsto -4x+5$

x	-4		4
$f(x)$	21	↘	-11

c. $x \mapsto -\dfrac{1}{2}x$

x	-4		4
$f(x)$	2	↘	-2

d. $x \mapsto 5$

x	-4		4
$f(x)$	5	→	5

Ces tableaux confirment les résultats de l'exercice **8** puisque la fonction repérée par **a.** correspond à la droite n°4, la fonction repérée par **b.** correspond à la droite n°2 et celle repérée par **c.** correspond à la droite n°1.

10 **a.** $A(-2\,;-2)$; $B(4\,;1)$

b. L'équation de la droite est de la forme $y = ax + b$ avec $a = \dfrac{1-(-2)}{4-(-2)} = \dfrac{1}{2}$. Donc $y = \dfrac{1}{2}x + b$. En utilisant les coordonnées de A, on obtient $-2 = \dfrac{1}{2}\times(-2)+b$, ce qui donne $b = -1$. Ces valeurs peuvent également être déterminées par lecture graphique. L'équation de la droite est donc : $y = \dfrac{1}{2}x - 1$.

c. L'expression de la fonction affine f est donc $f(x) = \dfrac{1}{2}x - 1$.

d. E appartient à la droite car $f(8) = 3$. F n'appartient pas à la droite car $f(-5) = \dfrac{-7}{2} \neq -4$.

Fonction linéaire

11 Seule la fonction représentée par la droite n°1 met en relation des grandeurs proportionnelles car c'est la seule qui passe par l'origine du repère.

12 **a.** Les fonctions f, h et t sont des fonctions linéaires.
b. Lorsque la fonction est linéaire, les antécédents et leurs images sont des grandeurs proportionnelles.
c. La représentation graphique d'une fonction linéaire est une droite passant par l'origine du repère.

13 **a.** Seule la fonction g n'est pas linéaire car sa droite représentative ne passe pas par l'origine du repère.
b. Le coefficient de proportionnalité entre x et $f(x)$ est 2.

Résolution graphique d'équations de la forme $f(x) = c$

14 Solutions des équations :

a. $f(x) = 5$ $\quad x = 4$
b. $f(x) = -3$ $\quad x = 0$
c. $g(x) = -2$ $\quad x = 0$
d. $g(x) = 2$ $\quad x_1 = -2$ et $x_2 = 2$
e. $h(x) = 0$ $\quad x = 0$
f. $h(x) = -2$ $\quad x_1 = -2$ et $x_2 = 2$

15

a. Coordonnées des points d'intersection des courbes représentatives : $(-2\,;-2)$ et $(2\,;-2)$
b. Solutions de l'équation $f(x) = g(x)$: $x_1 = -2$ et $x_2 = 2$
c. Intervalle où $f(x) > g(x)$: $]-2\,;2[$
d. Tableau de signe de la fonction $h(x) = f(x) - g(x)$ sur l'intervalle $[-3\,;3]$

x	-3		-2		2		3
$h(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

QCM : Testez-vous !

1. C. carrée
2. B. linéaire
3. B. proportionnels
4. C. inversement proportionnels
5. A. une droite
6. C. une droite passant par l'origine du repère
7. B. une parabole
8. B. linéaire
9. B. décroissante
10. A. croissante
11. B. décroissante sur [0 ; 5]
12. B. décroissante sur [0 ; 5]
13. A. croissante sur [0 ; 5]

Problèmes

16 Autonomie de plongée

1. Première approche

a. La consommation de gaz du plongeur en circuit ouvert à 48 m est environ de 120 L/min.
b. La quantité de dioxygène disponible dans les 1 800 L de gaz est de 1800 × 20 % = 360 L.
c. L'autonomie approximative du plongeur est :

- lors de la plongée en circuit ouvert : $\frac{360}{120 \times 20\,\%}$ ou $\frac{1800}{120} = 15$ min ;
- avec le recycleur : $\frac{360}{1,5} = 240$ min.

2. Étude des fonctions et calculs

a. La fonction g, qui associe la quantité de dioxygène consommée par le plongeur équipé d'un recycleur à la profondeur x, s'écrit $g(x) = 1,5$.

b. La fonction f est une fonction croissante de la profondeur alors que la fonction g est constante.

c. La fonction f est une fonction affine de même que la fonction g.

d. Expression de f : $f(x) = 2x + 20$

e. Autonomie en plongée classique à 48 m : $\frac{1800}{f(48)} = \frac{1800}{116} \approx 15,5$ min soit environ 15 min 30 s.
f. L'autonomie avec le recycleur est de 240 min. Elle est donc nettement supérieure :

$$\frac{240}{15,5} \approx 15,5.$$

g. Le recycleur permet donc bien de rester 15 fois plus longtemps à la profondeur de 48 m. Son coéquipier a raison.

17 La cogénération est-elle rentable ?

1. Les puissances thermique et électrique sont des grandeurs proportionnelles puisque la courbe qui représente les variations de la puissance thermique en fonction de la puissance électrique est une droite et que les deux puissances s'annulent en même temps.

2. Équation de la droite : $y = \frac{630}{410}x$.

3. $f(x) = \frac{630}{410}x \approx 1,537\,x$

4. Le système présenté n'est pas rentable puisque le coefficient 1,537 traduit une augmentation de seulement 53,7 %.

18 Ouverture de parachute

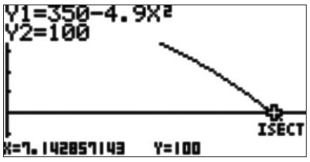
1. Distance parcourue en 1 seconde : $d = \frac{1}{2}gt^2 = \frac{1}{2} \times 9,8 \times 1^2 = 4,9$ m.

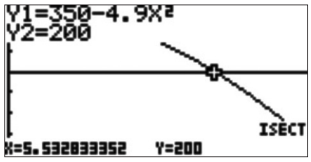
2. Lorsque le container a parcouru 50 m, il se trouve à 300 m du sol.

3. F est définie sur l'intervalle [0 ; 8] par

$$f(t) = 350 - \frac{1}{2}gt^2 = f(t) = 350 - 4,9t^2.$$

4. En utilisant une calculatrice graphique, on obtient les valeurs cherchées à partir des points d'intersection de la courbe représentative de f et des droites d'équations : $y = 200$ et $y = 100$.





Il faut donc déclencher l'ouverture du parachute entre 5,533 s et 7,143 s.

19 Optimiser un investissement

1. Résultat pour une somme investie de 3 k€ :
$R(3) = 102$ k€.

2. La fonction est une fonction polynomiale faisant intervenir la fonction carrée. Le coefficient de x^2 étant négatif, cette fonction est croissante puis décroissante. Elle admet donc un maximum.

3. Tableau de valeurs de R

s	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5	5,5	6
$R(s)$	70,5	84	94,5	**102**	**106,5**	**108**	**106,5**	102	94,5	84

4.

5. Tableau de variation

x	1,5	4	6
$f(x)$	70,5	↗ 108 ↘	84

Maximum de la fonction f sur [1,5 ; 6] : 108

6. Le montant de l'investissement qui permet d'obtenir un résultat maximum est de 4 000 €.

20 Quelle cote x faut-il choisir ?

1. La porte d'accès au magasin a une largeur de 1 m donc $x \geqslant 1$ m et la largeur totale du magasin qui est de 8 m contient une vitrine de 0,7 m donc $x \leqslant (8 - 0{,}7) = 7{,}3$ m.

La cote x doit donc appartenir à l'intervalle [1 ; 7,3].

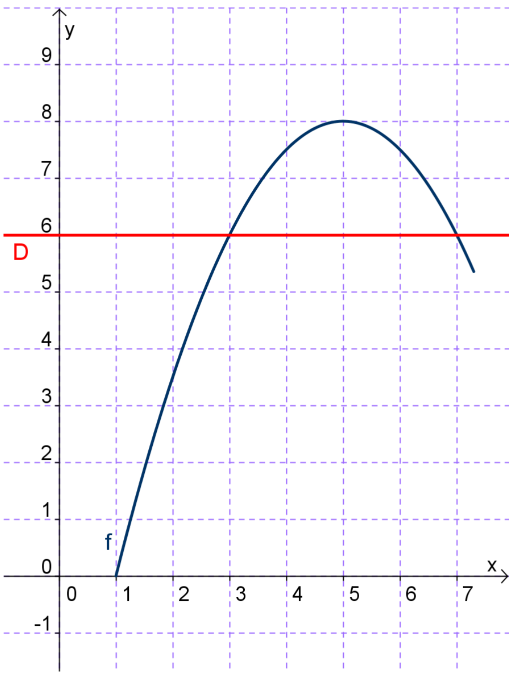
2. Aire de la surface disponible derrière le comptoir lorsque $x = 4$ m : $A = \dfrac{5 \times (4-1)}{2} = 7{,}5\ \text{m}^2$.

3. Dans le cas général, l'aire de la surface disponible s'obtient en faisant :

$$A = \frac{(9-x)\times(x-1)}{2} = \frac{9x - 9 - x^2 + x}{2} = -0{,}5x^2 + 5x - 4{,}5$$

L'aire disponible est donc modélisée par la fonction f définie sur [1 ; 7,3] par $f(x) = -0{,}5\,x^2 + 5x - 4{,}5$.

4.



5. Les valeurs de x qui conviennent appartiennent donc à l'intervalle [3 ; 7].

6. La surface disponible est maximale lorsque $x = 5$ m puisque la fonction f admet un maximum pour $x = 5$.

La valeur de l'aire maximale est 8 m^2.

21 Qui arrivera le premier ?

1. Distance parcourue par le marathonien au moment où les relayeurs entament leur course :

$\dfrac{1}{2} \times 14 = 7$ km.

2. Distances parcourues à $t = 30$ minutes :

$f(0{,}5) = 14 \times 0{,}5 + 7 = 14$ km et
$g(0{,}5) = 17 \times 0{,}5 = 8{,}5$ km.

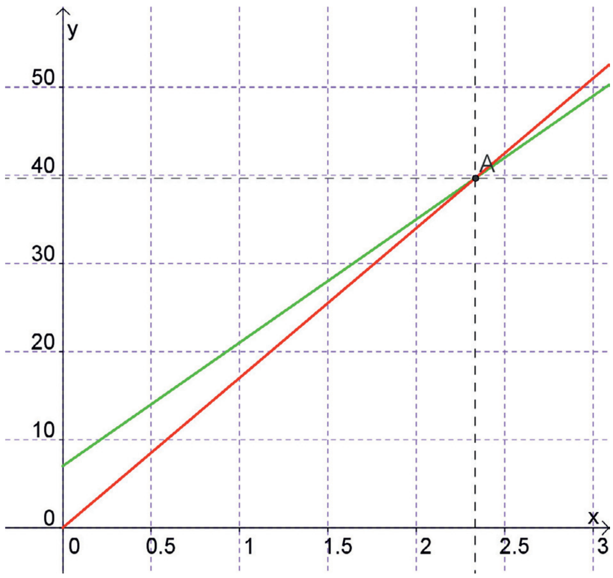
3. La fonction f est affine et la fonction g est linéaire.

4. $f(t) = 14t + 7$ et $g(t) = 17t$.

5. L'élève fait une proposition : « Oui, les relayeurs rattraperont le marathonien » ou « Non, ils ne le rattraperont pas ». Elle doit être argumentée.

Pour vérifier leur hypothèse, les élèves peuvent proposer de tracer les deux fonctions sur un même graphique pour vérifier l'existence d'une intersection ou de résoudre l'équation $17t = 14t + 7$. Si, lorsque les distances parcourues sont égales, elles restent inférieures à la distance totale du marathon (42 km), les relayeurs rattraperont le marathonien.

6.



Les relayeurs rattrapent le marathonien 2,3 h environ après leur départ, un peu avant le 40^{e} kilomètre.

22 Limite d'une pompe à chaleur

1. Écart de puissance que représentent les apports « gratuits » : environ 700 W.

2. Coordonnées des points : A (– 2,5 ; 5 550) et B (5 ; 6 000).

Équation de la droite (AB) : $P = 60\,T + 5700$
d'où $f(T) = 60\,T + 5\,700$.

Cette fonction est définie sur [-11 ; 15].

3. Coordonnées des points : C (– 2,5 ; 4670) et D (5 ; 2 900).

Équation de la droite (CD) : $P = -236\,T + 4\,080$.

D'où $g(T) = -236\,T + 4\,080$.

4. Coordonnées du point d'intersection des deux droites étudiées : I (– 5,5 ; 5 370).

5. Par le calcul :

$60\,T + 5\,700 = -236\,T + 4080$ donne $T \approx -5{,}5$ °C et $P \approx 5\,372$ W

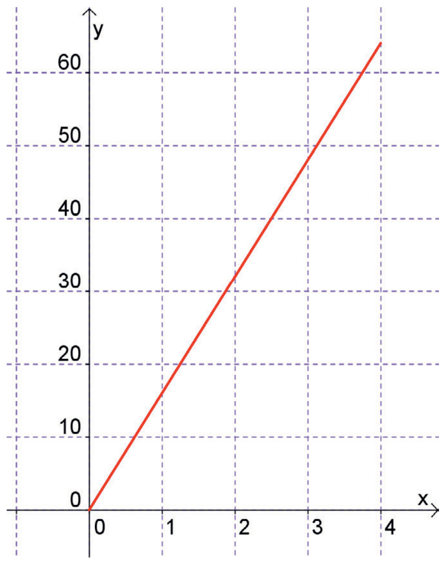
6. En dessous de – 5,5 °C, un appoint en chauffage est nécessaire.

23 Pousse-seringues

1. La quantité de produit injectée par le pousse-seringue A est proportionnelle au temps exprimé en heures. Le coefficient de proportionnalité est égal à 16 mL/h. La quantité de produit injectée par B n'est pas proportionnelle au temps puisqu'il injecte le produit de façon discontinue toutes les ½ heures.

2. Au bout de 2 heures dans les conditions décrites :
A aura injecté : $16 \times 2 = 32$ mL ;
B aura injecté : $6 + 9 + 9 + 6 + 9 = 38$ mL.

3.



4. Au bout de 2 h 30 min, la quantité injectée par B est de 44 mL ; sur le graphique on lit la valeur correspondante injectée par A : 40mL.

Au bout de 3 h 00, la quantité injectée par B est de 47 mL ; sur le graphique on lit la valeur correspondante injectée par A : 48 mL.

Au-delà de 3 h 00, la quantité injectée par A chaque ½ heure est supérieure à celle injectée par B. On peut donc considérer qu'à partir de 3 h 00, A aura injecté définitivement davantage de produit que B.

Un étude plus fine permet d'établir que les 44 mL injectés par B au bout de 2 h 30 min, correspondent à 2 h 45 min d'injection par A. C'est donc en réalité à partir de 2 h 45 min que A aura injecté définitivement davantage de produit que B.

Démarche d'investigation

24 Antenne de transmission

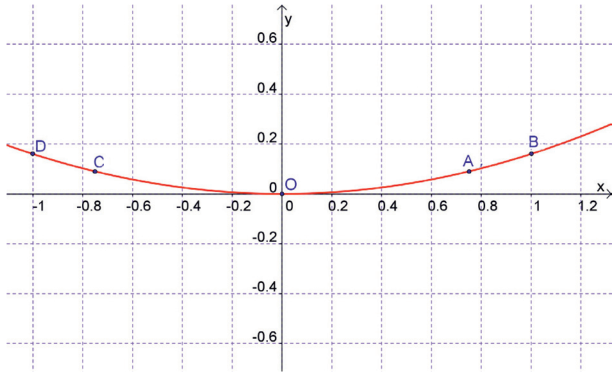
1. Avec le système de coordonnées choisi, on ne peut pas définir une fonction f dont la représentation graphique d'équation $y = f(x)$ serait le profil de l'antenne car pour un même antécédent, on aurait plusieurs images. f ne serait donc pas une fonction.

2. Coordonnées des points O, C et D dans le repère représenté sur le schéma :
$O(0 ; 0)$; $C(0{,}09 ; -0{,}75)$ et $D(0{,}16 ; -1)$.

3. Coordonnées des points O, A, B, C et D dans un repère où les axes (Ox) et (Oy) seraient inversés :
$O(0 ; 0)$; $A(0{,}75 ; 0{,}09)$; $B(1; 0{,}16)$;
$C(-0{,}75 ; 0{,}09)$ et $D(-1 ; 0{,}16)$.

4. En inversant les axes, on peut déterminer une fonction carrée qui modélise l'arc de parabole obtenu. Pour cela, on peut utiliser une tableur-grapheur, placer les points définis à la question **4.** et chercher, grâce aux fonctionnalités du logiciel, l'expression de la fonction polynôme de degré 2 correspondante.

5. On peut utiliser un tableur classique ou le logiciel GeoGebra et sa fonction « AjustPoly[{A, B, O, C, D}, 2] ».

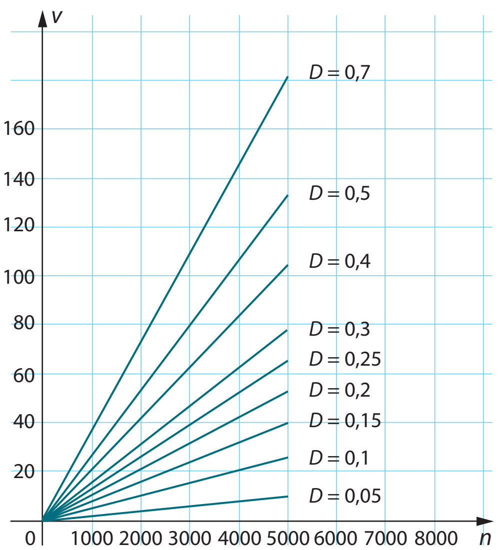


L'équation du profil de la parabole est alors $y = 0{,}16\,x^2$.
Transposée dans le système d'axes initial, cette équation devient : $y = \pm 2{,}5\sqrt{x}$.

25 Diamètres de disques et vitesse de coupe

1. L'abaque qui correspond au problème est le B puisque c'est le seul qui représente des grandeurs proportionnelles. Or la relation qui lie la vitesse à la fréquence de rotation : $v = \dfrac{\pi Dn}{60}$, pour un diamètre fixé, est une fonction linéaire.

2.

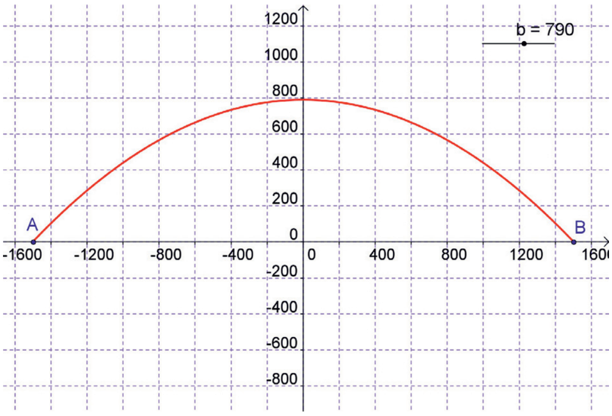


26 Quelle variation d'altitude pour un vol parabolique ?

1. La fonction représentée par l'arc de parabole est de la forme $f(x) = ax^2 + b$ car la forme parabolique correspond à une fonction polynomiale de degré 2 et que cet arc présente une symétrie axiale par rapport à l'axe des ordonnées.

2. Sachant que $a = -0{,}00035$, on peut utiliser le logiciel GeoGebra pour déterminer l'expression de la fonction. On crée un curseur nommé « b ». On entre l'expression de la fonction : $f(x) = -0{,}00035x^2 + b$ dans la barre de saisie pour obtenir la représentation graphique de f. On place ensuite, sur le graphique, les points de coordonnées (– 1 500 ; 0) et (1 500 ; 0) et on cherche la valeur de b pour laquelle ces deux points appartiennent à l'arc de parabole en faisant varier le curseur « b ».

Application :



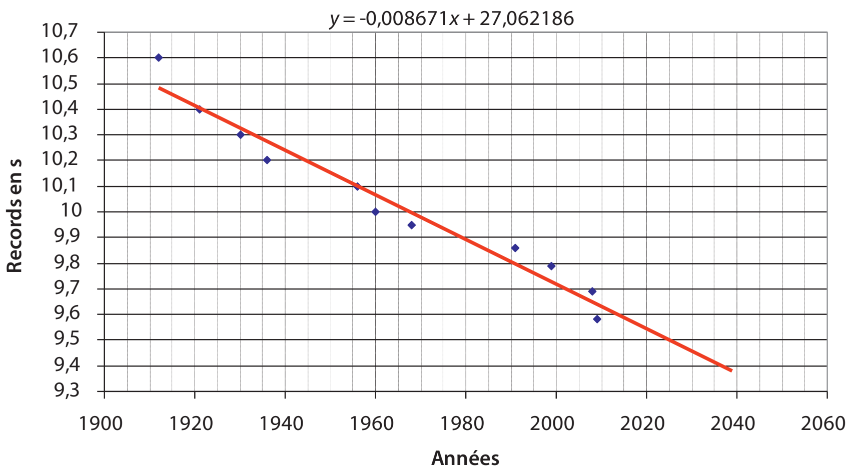
On lit l'altitude sur le graphique : environ 790 m.

27 En quelle année un record au 100 m sous 9,5 s ?

Méthode : On ouvre une feuille de calcul d'un tableur. Dans cette feuille, on remplit un tableau de valeurs des records en fonction des années où ils ont été réalisés. On utilise ensuite les fonctionnalités du tableur pour obtenir une droite passant par ces points (courbe de tendance de type affine). À l'aide du graphique ou de l'expression obtenue, on détermine l'année au cours de laquelle les records passent la barre des 9,5 s.

Année	Record (en s)
1912	10,6
1921	10,4
1930	10,3
1936	10,2
1956	10,1
1960	10
1968	9,95
1991	9,86
1999	9,79
2008	9,69
2009	9,58

Sur le graphique, on peut lire que l'année cherchée est 2025. On peut retrouver cette valeur en résolvant l'équation : $-0{,}008671x + 27{,}062186 = 9{,}5$.



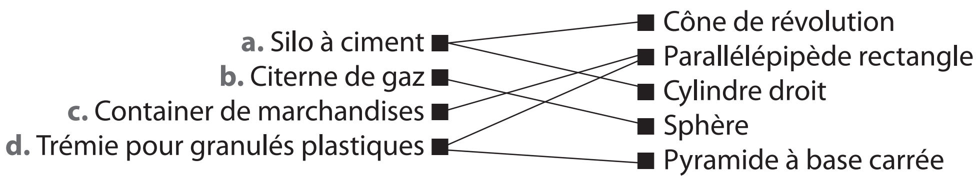
8 GÉOMÉTRIE DANS L'ESPACE ET LE PLAN

Capacités	Connaissances
• Représenter avec ou sans TIC un solide usuel. • Lire et interpréter une représentation en perspective cavalière d'un solide usuel. • Reconnaître, nommer des solides usuels inscrits dans d'autres solides.	• Solides usuels : le cube, le parallélépipède rectangle, la pyramide, le cylindre droit, le cône de révolution, la sphère.
• Isoler, reconnaître et construire en vraie grandeur une figure plane extraite d'un solide usuel à partir d'une représentation en perspective cavalière.	• Figures planes usuelles : triangle, carré, rectangle, losange, cercle, disque.
• Construire et reproduire une figure plane à l'aide des instruments de construction usuels ou d'un logiciel de géométrie dynamique.	• Figures planes considérées : triangle, carré, rectangle, losange, parallélogramme et cercle. • Droites parallèles, droites perpendiculaires, droites particulières dans le triangle, tangentes à un cercle.

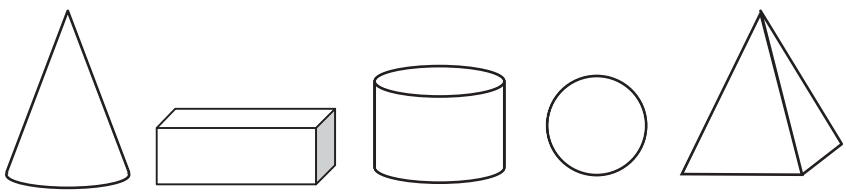
Les objectifs de ce module sont de développer la vision dans l'espace à partir de quelques solides connus, d'extraire des figures planes connues de ces solides et de réactiver des propriétés de géométrie plane. Les capacités à développer s'appuient sur la connaissance des figures et des solides acquise au collège.

Activité 1 : Quelle est la forme du contenant ?

1.

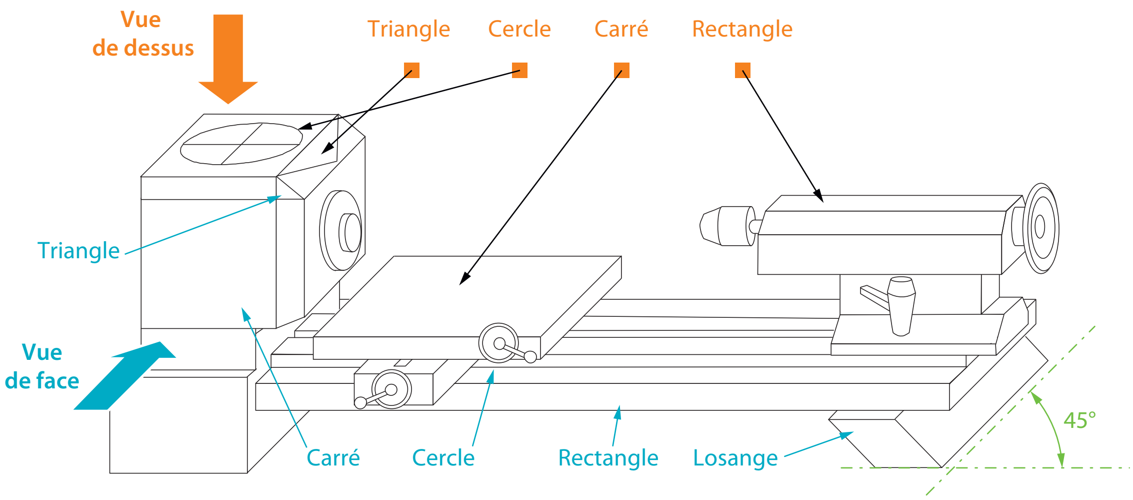


2.



Activité 2 : Figures planes sur un tour d'usinage

1.



Activité 3 : Impossible à construire ?

Dessin 1 : $AB \perp BC$, $BC \perp CD$ et CD // AE $\Rightarrow$ possible dans l'espace.

Dessin 2 : $AB \perp BC$, $BC \perp CA$ et $CA \perp AB \Rightarrow ABC$ triangle avec trois angles droits : impossible.

Travaux pratiques

Comment usiner une pièce pour obtenir un solide usuel ?

1. a. Solide avant l'usinage : dessin 2.

Solide après l'usinage : dessin 1.

b. Les solides A et B sont des parallélépipèdes rectangles.

2. a. Longueur du dessin : 6 cm.

Largeur du dessin : 2,5 cm.

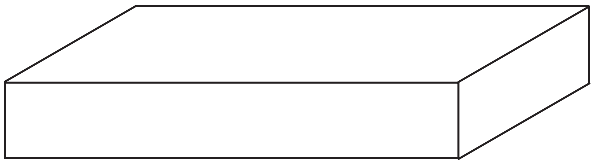
b. Rectangle.

c. Longueur de l'arête sur le dessin : 2 cm.

Longueur réelle : 2×2 cm $= 4$ cm.

Hauteur de la vue de droite : 2,5 cm.

La vue de droite est donc un rectangle.



3. Longueur de la face avant : 6 cm.

Largeur de la face avant : 1 cm.

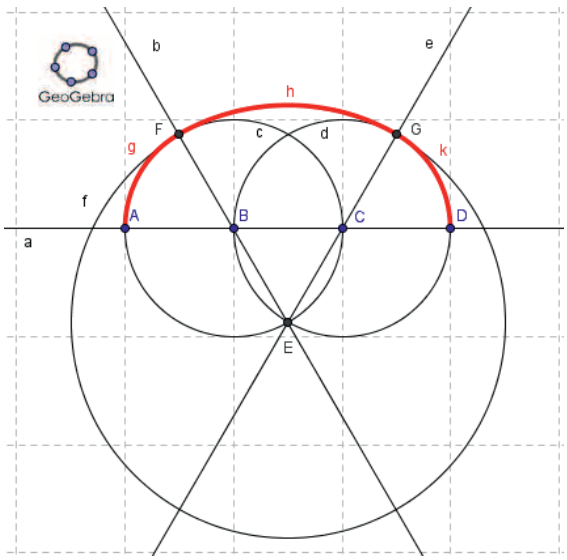
Longueur de l'arête sur le dessin : 2 cm.

Construction géométrique d'une voûte

1. a. Les cercles « c » et « d » au point *E* sont sécants.

b. Les cercles « c » et « f » au point *F* sont tangents.

2.



3. a. $EF = 2\ BE$.

b. Il faut allonger *BC* pour une piscine plus large.

Exercices

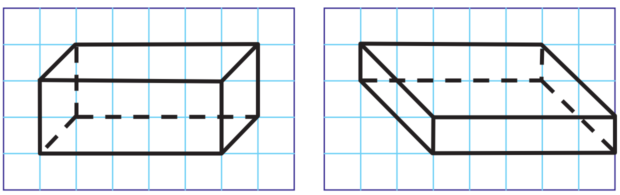
Représentation en perspective cavalière

1 **a.** A : cube ; B parallélépipède rectangle ; C : pyramide droite à base carrée ; D : cylindre droit ; E : cône de révolution ; F : sphère.
b. A : n° 2, toutes les arêtes ont la même longueur ;
B : n° 1, les arêtes de la face supérieure ne sont pas parallèles deux à deux ; n°2 : il n'y a pas d'angle de fuite.
C : n°2, la pyramide n'est pas droite ;
D : aucun ;
E : n° 2, le cercle de base n'est pas en perspective ;
F : n° 2, le cercle n'est pas en perspective.

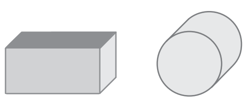
2 **a.** Perspective isométrique : toutes les arêtes ont la même longueur ;
Perspective centrale : les arêtes de la face supérieure ne sont pas parallèles deux à deux.
b. Perspective cavalière : parallélogramme ;
Perspective isométrique : losange ;
Perspective centrale : quadrilatère quelconque.

3 **a.** Angle de fuite de 30° : 2, 5 et 6.
Angle de fuite de 45° : 1, 3 et 4.
b. 1 : cylindre droit ; 2 : cône de révolution ; 3 pyramide droite à base carrée ; 4 : cône ; 5 : cylindre ; 6 : pyramide droite à base carrée.

4

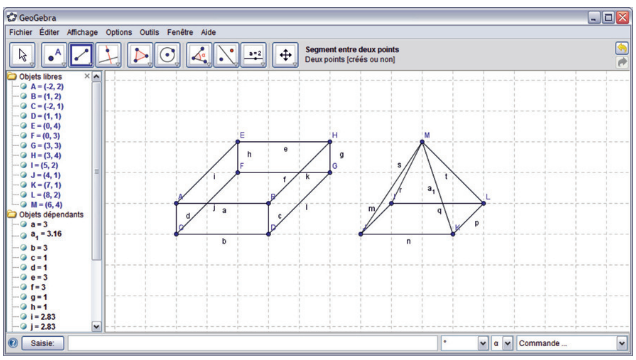


5

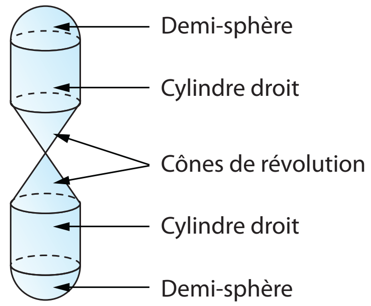


Ces représentations sont des perspectives cavalières : l'**angle de fuite** entre la face avant et une face de côté perpendiculaire est de 45° et deux droites parallèles sont représentées par deux droites parallèles.

6



7

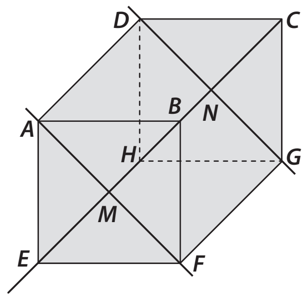


Parallélisme et orthogonalité

8

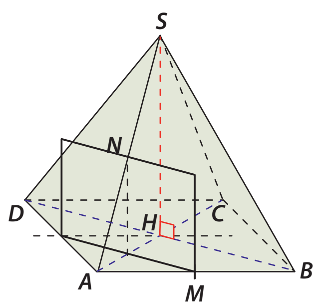
Solide	$\mathscr{P}_1$	$\mathscr{P}_2$
Cube	Carré	Carré
Parallélépipède rectangle	Rectangle	Carré
Pyramide droite à base carrée	Triangle	Carré
Cylindre droit	Rectangle	Cercle
Cône de révolution	Triangle	Cercle
Sphère	Cercle	Cercle

9 **a.** et **b.**



c. l'intersection des plans (*ADGF*) et (*BCHE*) est le segment [*MN*].
d. 90°, les diagonales du carré *ABFE* se coupent en angles droits.

10 **a.** et **b.**



L'intersection de la droite (*AS*) et du plan parallèle au plan (*DSB*) passant par *M* est le point *N*.

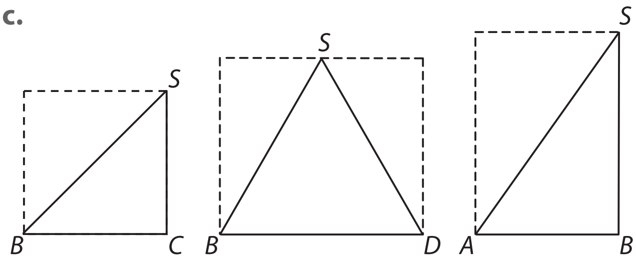
Figures planes extraites de solides usuels

11
ABE : triangle rectangle ;
ABD : triangle rectangle ;
EBH : triangle rectangle ;
DBE : triangle quelconque ;
ABFE : rectangle ;
ADHE : rectangle ;
CDEF : rectangle ;
BEHC : rectangle.

12 **a.** Quatre réponses possibles par pyramide.
BCDS :
- pyramide oblique de sommet *S* à base *BCD* triangulaire et isocèle ;
- pyramide oblique de sommet *B* à base *CDS* triangulaire et isocèle ;
- pyramide droite de sommet *C* à base *BDS* triangulaire et équilatérale ;
- pyramide oblique de sommet *D* à base *BCS* triangulaire et isocèle.

ABDS :
- pyramide oblique de sommet *S* à base *ABD* triangulaire et isocèle ;
- pyramide oblique de sommet *A* à base *BDS* triangulaire et équilatérale ;
- pyramide oblique de sommet *B* à base *ADS* triangulaire ;
- pyramide oblique de sommet *D* à base *ABS* triangulaire.

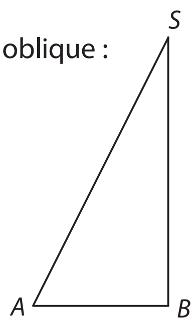
b. *BCS* : triangle isocèle ;
BDS : triangle équilatéral ;
ABS : triangle quelconque.
c.



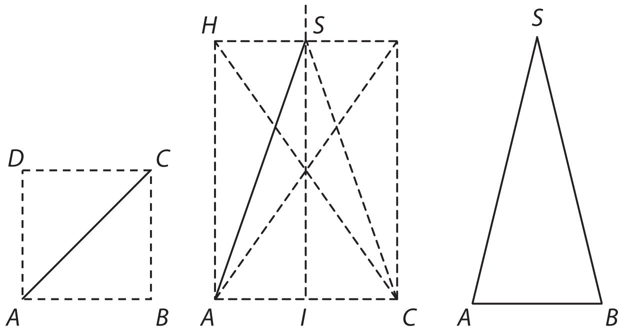
13 **a.** Pyramide oblique :
ABCD : carré ;
AIB : triangle isocèle ;
ABS : triangle rectangle.

Pyramide droite :
ABCD : carré ;
AIB : triangle isocèle ;
ABS : triangle isocèle.

b. Pyramide oblique :



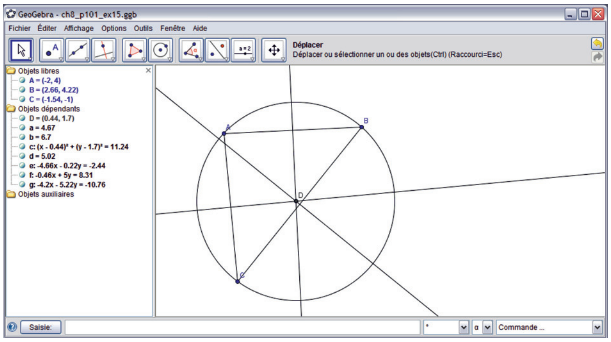
Pyramide droite :



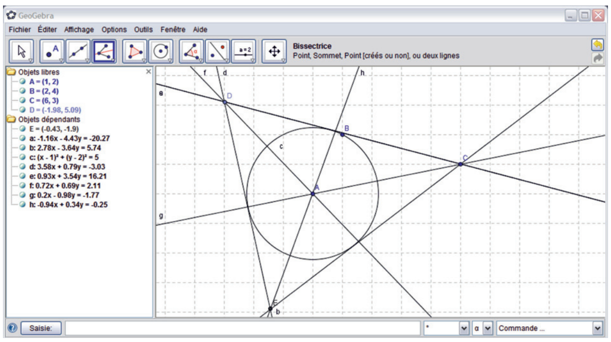
14 **a.** *IJH* et *ESJF* ne sont pas des figures planes.
b. *EIFJ* est un losange.
c. *ABCDLKIJ* est un parallélépipède rectangle.
EIFJS est une pyramide dont la base est un losange.

Droites particulières dans un triangle

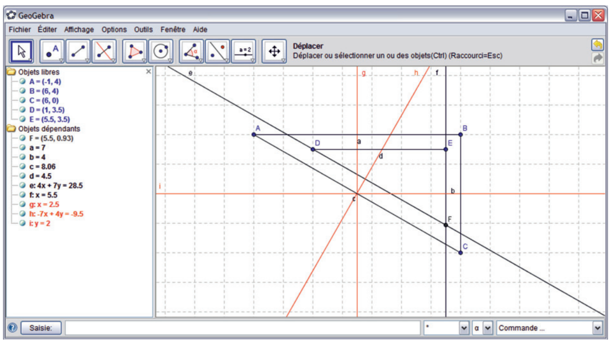
15



16



17

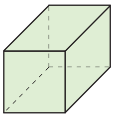


Le centre de gravité peut être matériel ou immatériel suivant l'équerre tracée.

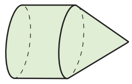
QCM : Testez-vous !

1. A. proportionnelles aux dimensions

2. A.



3. A.



4. C. un rectangle
5. C. rectangle
6. B. médiatrices
7. C. aux côtés du triangle

Problèmes

18 Illusion d'optique

On identifie des cercles concentriques coplanaires coupés dans ce même plan par des arcs de courbes, des triangles et des losanges.

19 Fusée Ariane

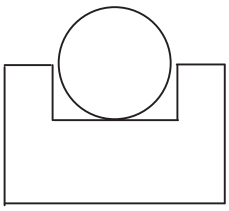
1. On reconnaît un cône droit, deux cônes obliques, des troncs de cônes et plusieurs cylindres.

2. Vue de côté : voir schéma ci-contre.

20 Futuroscope

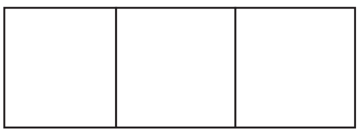
1. Solide usuel : sphère.
Figures planes usuelles : disque (tronqué), triangles rectangles, rectangles, trapèze rectangle.

2. Vue de face :



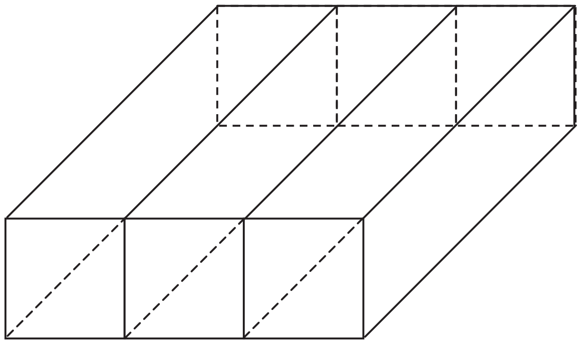
21 Maison en conteneurs

1. a. Vue de la face avant :



b. Vue de droite : rectangle.

c. Perspective cavalière : parallélépipède rectangle.



2. Il faut empiler 5 conteneurs sur 5 rangées accolées soit : $5 \times 5 = 25$ conteneurs.

22 Meules dentaires

1. a. Cylindre, tronc de cône, cylindre et demi-sphère.

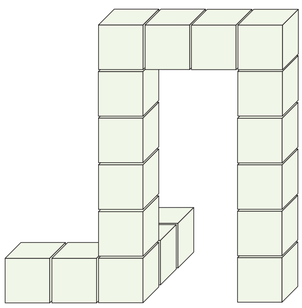
b. 1 : cylindre ; 2 : cylindre ; 3 : cône ; 4 : sphère ; 5 : tronc de cône ; 6 : cylindre ; 7 : tronc de cône ; 8 : cône ; 9 : cylindre.

2. 1 : rectangle ; 2 : rectangle ; 3 : triangle ; 4 : disque ; 5 : trapèze ; 6 : rectangle ; 7 : trapèze ; 8 : triangle ; 9 : rectangle.

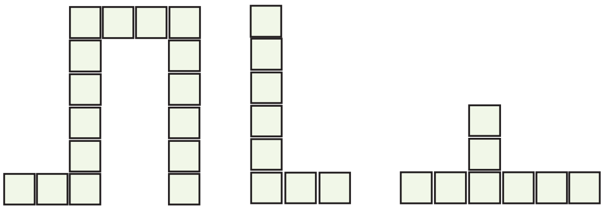
3. Cavité de forme cylindrique avec un fond hémisphérique.

23 Portique de terrasse

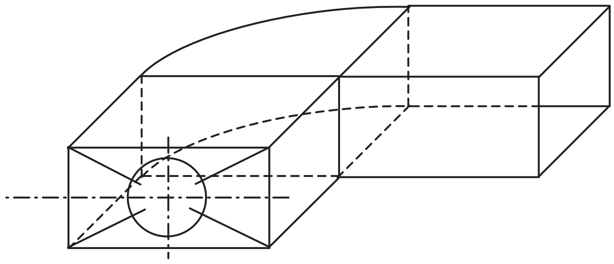
1. a. Perspective cavalière



b. Vue de face   Vue de droite   Vue de dessus



La gaine métallique en perspective cavalière :

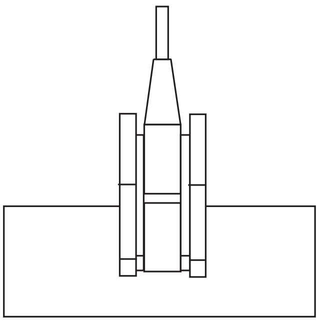


2. a. Cet élément de terrasse est constitué de 18 cubes.
b. Cet élément de terrasse est composé de 5 parallélépipèdes rectangles.

24 Pince de levage

1. Câble : cylindre ; fixe câble : pyramide ; barre de liaison : parallélépipède rectangle ; mâchoire : cylindre ; plaque métallique : parallélépipède rectangle.

2. Vue de côté :



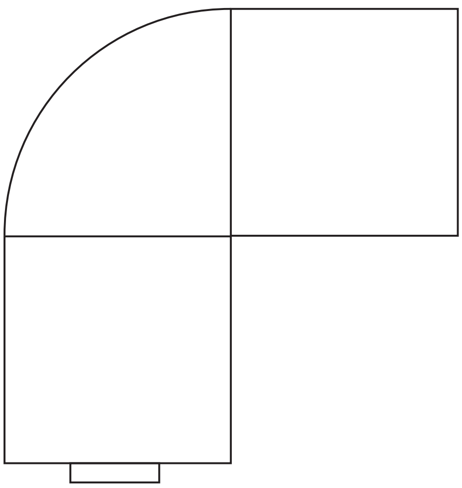
25 Gaine de climatisation

1. a. Non. Le plan (*ABC*) est parallèle au plan (*GHL*).
b. Oui. Les points *A*, *B*, *K* et *L* définissent un même plan sécant de la gaine, plan incliné par rapport au plan horizontal.
c. Droite (*HJ*).

2. Cylindre, parallélépipède rectangle, quart de cylindre.

3. Un disque et trois rectangles.

4. Vue de dessus de la gaine métallique :

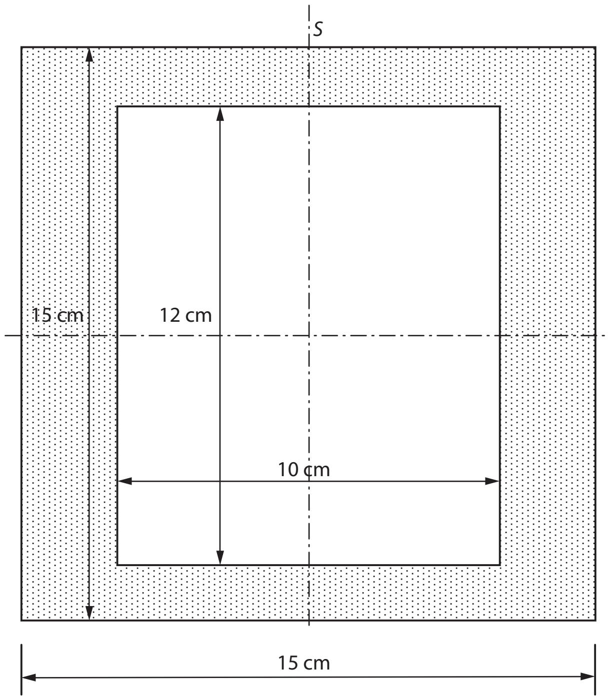


26 La Grande Arche

1. a. Non. Le plan (*IJK*) est parallèle au plan (*ABC*).
b. Oui. Les points *I*, *L*, *X* et *Y* appartiennent au même plan oblique.
c. Le segment [*MP*] correspond à l'intersection des plans (*EMP*) et (*MNP*).

2. a. Le cercle sur le toit n'est tangent qu'à deux côtés opposés du quadrilatère *WXYZ* qui en conséquence n'est pas un carré.
b. La base du parallélépipède *IJKLMNOP* est un rectangle.

3. a. Exemple : $AD = AE = 15$ cm, $MP = \frac{2}{3}AD = 10$ cm, $IM = \frac{4}{5}$ AE $= 12$ cm.



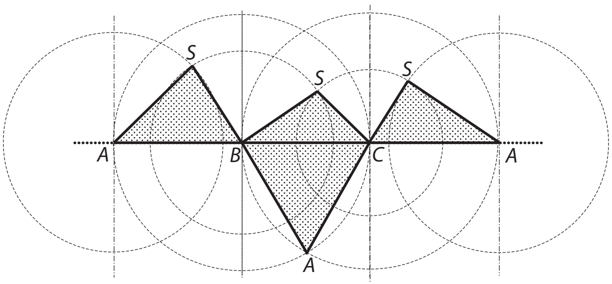
b. Figures planes dans le dessin : un rectangle et un carré.

27 Support de tablette numérique

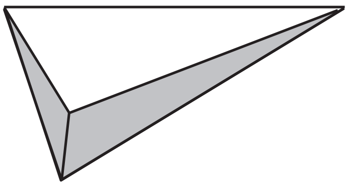
1. *ABC* : triangle équilatéral.
ABS : triangle quelconque.
ACS : triangle quelconque.
BCS : triangle quelconque.

2. Dessin du patron du support pyramidal.
Exemple : $AB = AC = BC = \frac{7}{2} = 3{,}5$ cm ; $AS = \frac{7-1}{2} = 3$;

$BS = \dfrac{7-2}{2} = 2{,}5$; $CS = \dfrac{7-3}{2} = 2.$



3. Découpe du patron et construction de la pyramide.



4. La pyramide est oblique plutôt que droite pour obtenir trois angles d'inclinaison différents.

28 Bloc d'acier usiné

1.

Gorge	1	2	3	4	5
Fraise	3	5	4	1	2

2. a. H_1I_1 et J_1K_1 sont deux arêtes sur la face avant qui ne sont ni parallèles ni perpendiculaires entre elles et avec les autres arêtes.

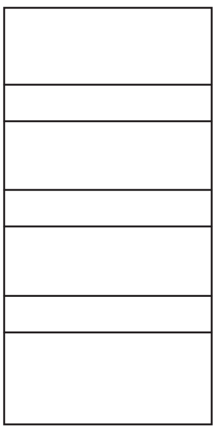
b. Segments ni parallèles ni perpendiculaires à la face avant : A_1E_2 ; A_1F_2 ; A_1I_2 ; A_1J_2 ; B_1E_2 ; B_1F_2 ; B_1I_2 ; B_1J_2 ; C_1E_2 ; C_1F_2 ; C_1I_2 ; C_1J_2 ; D_1E_2 ; D_1F_2 ; D_1I_2 ; D_1J_2 ; G_1E_2 ; G_1F_2 ; G_1I_2; G_1J_2 ; H_1E_2 ; H_1F_2 ; H_1I_2 ; H_1J_2 ; K_1E_2 ; K_1F_2 ; K_1I_2 ; K_1J_2 ; L_1E_2 ; L_1F_2 ; L_1I_2 ; L_1J_2 ; A_2E_1 ; A_2F_1 ; A_2I_1 ; A_2J_1.

c. $D_1E_1E_2$ et $I_1I_2J_2$ sont deux plans orthogonaux qui ne sont pas des faces du parallélépipède.

3. a. C'est un parallélépipède rectangle.

b. Il s'agit de quatre rectangles.

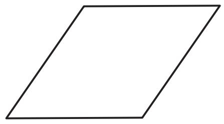
4. Face de côté où apparaissent les gorges n° 3, 4 et 5 :



29 Abrasif industriel

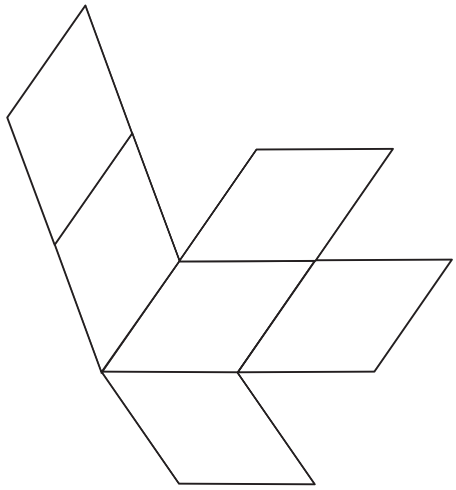
1. a. La face avant est un losange car c'est un quadrilatère dont les quatre côtés sont égaux.

b. Construction du losange :



2. La face avant est parallèle à la face arrière car les arêtes des deux faces sont parallèles et de même longueur deux à deux.

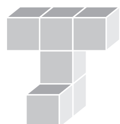
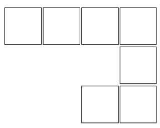
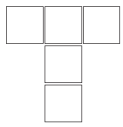
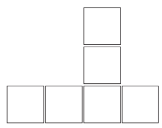
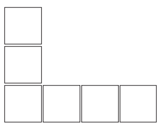
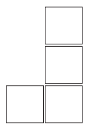
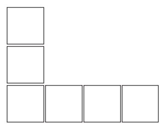
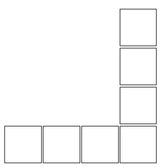
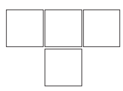
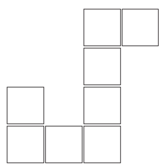
3. a. Dessin du patron de ce solide :



b. Construction du solide avec le patron.

30 Jeux de cubes

1. 2. 3. 4. et **5. a. b.**

			
Vue de face			
Vue de droite			
Vue de dessus			
Nombre de cubes	10 cubes	6 cubes	10 cubes

Démarche d'investigation

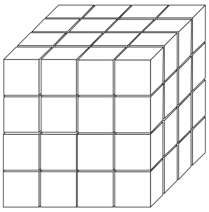
31 Emballage économique

Trois solutions possibles :

Solution 1

Nombre de faces unités visibles :

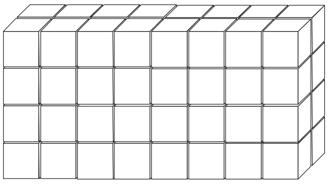
$16 \times 6 = 64$



Solution 2

Nombre de faces unités visibles :

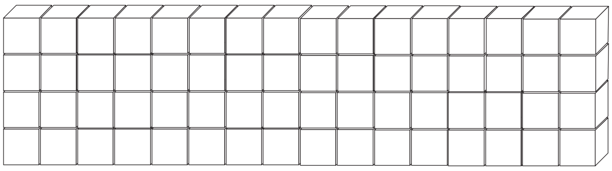
$32 \times 2 + 8 \times 2 = 80$



Solution 3

Nombre de faces unités visibles :

$64 \times 2 + 4 \times 2 = 136$



La première solution nécessite le moins de carton pour l'emballage.

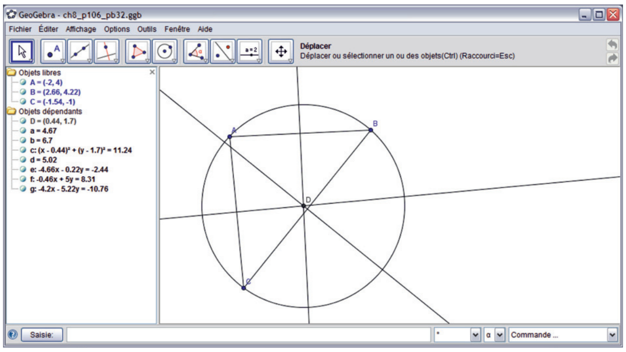
32 Centre du plateau en verre

1. Solides usuels : quatre cylindres et deux troncs de cônes.

2. Méthode pour déterminer géométriquement le centre du plateau circulaire.

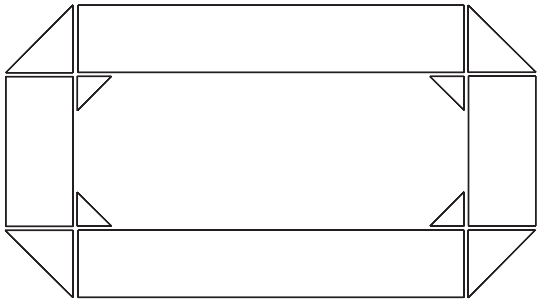
- choisir 3 points *A*, *B*, et *C* appartenant à la circonférence du disque de verre ;
- tracer les segments [*AB*] , [*BC*], et [*AC*] ;
- construire les médiatrices de ces trois segments qui sont concourantes au point *O*, centre du cercle circonscrit au triangle *ABC* c'est-à-dire du disque de verre.

3.



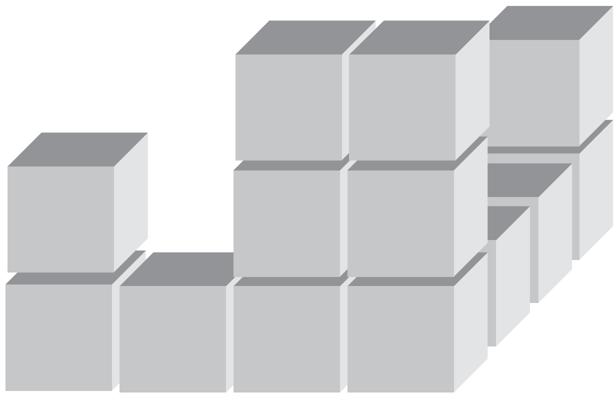
33 Coffrage en mer

Une solution du dessin de coffrage avec des triangles et des rectangles :



34 Passage du plan à l'espace

Vue en perspective cavalière avec les outils de dessin d'un logiciel de traitement de texte :



9 CALCULS GÉOMÉTRIQUES DANS LE PLAN

Capacités	Connaissances
• Utiliser les théorèmes et les formules pour : – calculer la longueur d'un segment, d'un cercle ; – calculer en degré la mesure d'un angle ; – calculer l'aire d'une surface	• Somme des mesures, en degré, des angles d'un triangle. • Formule donnant la longueur d'un cercle à partir de celle de son rayon. • Le théorème de Pythagore. Le théorème de Thalès dans le triangle. • Formule de l'aire d'un triangle, d'un carré, d'un rectangle, d'un disque.

Les objectifs de ce chapitre sont la réappropriation par les élèves des principaux théorèmes de la géométrie plane et l'utilisation des expressions des aires des figures planes.

D'une manière plus particulière :

– le premier TP permet à l'élève de réaliser une démonstration de la propriété de Pythagore en suivant les pas des géomètres chinois, touchant ainsi « du doigt » l'universalité des mathématiques ;

– le second TP exploite la « puissance de calcul » d'un tableur pour mettre en évidence l'intérêt et les limites effectives de l'assimilation de la tangente d'un angle au sinus de ce même angle ;

– dans le problème n°31, l'utilisation du logiciel GeoGebra permet aux élèves de *voir* comment la pente d'un plan incliné évolue selon l'angle d'inclinaison ;

– la démarche d'investigation à mettre en œuvre au problème n°33, pour juger de la pertinence d'un achat, implique l'utilisation conjointe par les élèves des propriétés de Thalès et de Pythagore ;

– enfin, le problème n°35 amène les élèves à formaliser une démonstration connue depuis l'Antiquité grecque.

Activité 1 : Mesurer avec son ombre

1. La propriété de Thalès permet d'écrire cette double égalité.

$\frac{OT}{OB} = \frac{OS}{OE}$ d'où $OT = \frac{16,40}{1,36} \times 1{,}75$; $OT \approx 21{,}10$ m.

$OB' = 1{,}84$ est la hauteur de Sami, OE' est la longueur de son ombre. La propriété de Thalès permet d'écrire :

$\frac{OE'}{OS} = \frac{OB'}{OT}$; $OE' = \frac{1,84}{21,10} \times 16,40$, d'où $OE' \approx 1{,}43$ m.

Oui en traçant un dessin à l'échelle 1/100 ou (1/50). Les résultats dépendent de la précision du tracé.

2. La propriété de Thalès permet d'obtenir un résultat précis et rapide. Il s'agit d'une généralisation.

Activité 2 : L'aire de la surface vitrée de la Pyramide

1. Les quatre triangles sont isocèles puisque les arêtes [*FU*], [*FV*], [*FJ*] et [*FQ*] mesurent la même longueur.

2. La propriété de Pythagore appliquée au triangle *RES* permet d'écrire :

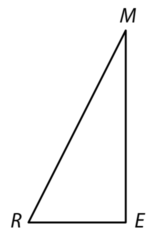
$FR^2 = FS^2 + SR^2$ avec $SR = \frac{34,40}{2}$ soit 17,20 m ; $ER = \sqrt{21,60^2 + 17,20^2}$ d'où $ER \approx 27{,}61$ m.

$A_1 = \frac{VI \times RF}{2}$ soit $A_1 = \frac{34,40 \times 27,61}{2}$ d'où $A_1 \approx 479{,}89\ \text{m}^2$

3. L'aire totale de la surface vitrée est donc : 1 899,56 m^2.

$\tan \alpha = \frac{FS}{RS}$ d'où $\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{21,60}{17,20}\right)$ soit $\alpha \approx 51°$.

Activité 3 : Consignes de sécurité



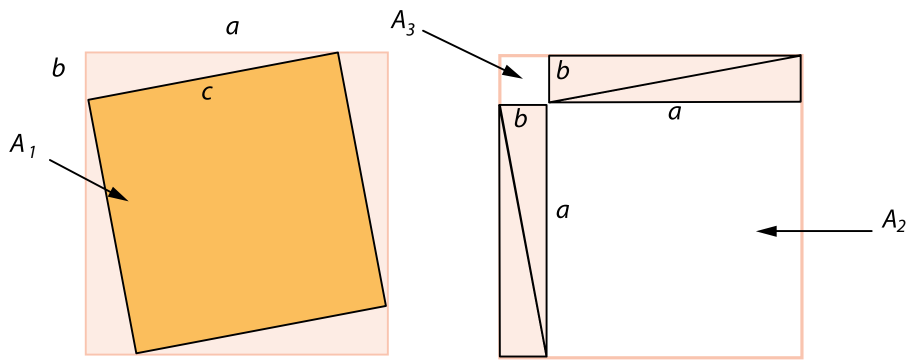
On modélise l'échelle par $[RM]$; E est à la verticale du point M.
On applique alors une relation trigonométrique dans le triangle rectangle MRE :

$\sin \hat{R} = \dfrac{ME}{RM}$ d'où $\hat{R} = \sin^{-1}\left(\dfrac{2{,}70}{3{,}05}\right)$; $\hat{R} \approx 62°$.

Puisque $62° < 65°$, Greg ne pourra pas travailler en toute sécurité sur l'échelle telle qu'il l'a installée.

Travaux pratiques

Démonstration chinoise



a. Aire du carré orange : $A_1 = c^2$.

c. Aire des carrés blancs : $A_2 = a^2$ et $A_3 = b^2$.

d. $A_1 = c^2$; A_1 a pour aire l'aire du grand carré moins celle des 4 triangles rectangles.
C'est donc la somme des aires A_2 et A_3. Ainsi : $A_1 = A_2 + A_3$.

e. On trouve alors : $c^2 = a^2 + b^2$.

f. On identifie l'expression formulée par Pythagore.

Remarque : il est intéressant de laisser les élèves choisir des dimensions de carrés différentes et aboutir à la même conclusion.

Comment calcule-t-on une pente ?

1. a. $h = 1256 - 1230$ soit 26 m ; la propriété de Pythagore permet d'écrire $d^2 = l^2 - h^2$ soit :
$d = \sqrt{234^2 - 26^2}$
d'où $d \approx 232{,}55$ m ;
On peut donc exprimer la pente : $p = \dfrac{26}{232{,}55}$, soit $p \approx 0{,}11$ c'est-à-dire environ 11 %.

b. Le rapport $\dfrac{h}{d}$ correspond à la tangente de l'inclinaison $\hat{C}$

c. $\hat{C} = \tan^{-1}(0{,}11)$ d'où $\hat{C} \approx 6°$.

2. a. Le calcul DREAL donne : $q = \dfrac{26}{234}$ d'où $q \approx 0{,}11$!

b. Le rapport $\dfrac{h}{l}$ correspond au sinus de l'inclinaison $\hat{C}$ et $\sin^{-1}(0{,}11)$ correspond à un angle d'environ 6° (soit le même qu'avec la tangente).

3. a. $\frac{h}{l} = \frac{62}{15}$; d'où $\frac{h}{l} \approx 0{,}24$ c'est-à-dire environ 24 %. Ceci ne semble pas correspondre aux 25 % du panneau.

Dans ce cas, l'angle d'inclinaison correspond à $\sin^{-1}(0{,}24)$, soit 14° d'inclinaison.

b. $p = \frac{h}{d}$ avec $d = \sqrt{62^2 - 15^2}$ soit $d \approx 60{,}16$ m.

$p = \frac{15}{60{,}16}$ d'où $p \approx 0{,}25$. Ceci correspond à une pente de 25 % c'est à dire celle indiquée par le panneau. Dans ce cas, l'inclinaison est $\hat{C} = \tan^{-1}(0{,}25)$, soit environ 14°.

c. On obtient donc la même inclinaison pour un calcul de pente présentant une différence de moins de 1 % (arrondie).

4. et 5.

angle (°)	sinus	tangente	pente selon les mathématiques (%)	écart
0	0	0	0	0
1	0,01745241	0,01745506	1,745506493	2,6585E-06
2	0,0348995	0,03492077	3,492076949	2,1273E-05
3	0,05233596	0,05240778	5,240777928	7,1823E-05
4	0,06975647	0,06992681	6,992681194	0,00017034
5	0,08715574	0,08748866	8,748866353	0,00033292
6	0,10452846	0,10510424	10,51042353	0,00057577
7	0,12186934	0,12278456	12,27845609	0,00091522
8	0,1391731	0,14054083	14,05408347	0,00136773
9	0,15643447	0,15838444	15,83844403	0,00194998
10	0,17364818	0,17632698	17,63269807	0,0026788
11	0,190809	0,19438031	19,43803091	0,00357131
12	0,20791169	0,21255656	21,25565617	0,00464487
13	0,22495105	0,23086819	23,08681911	0,00591714
14	0,2419219	0,249328	24,93280028	0,00740611
15	0,25881905	0,26794919	26,79491924	0,00913015
16	0,27563736	0,28674539	28,67453858	0,01110803
17	0,2923717	0,30573068	30,57306815	0,01335898
18	0,30901699	0,3249197	32,49196962	0,0159027
19	0,32556815	0,34432761	34,43276133	0,01875946
20	0,34202014	0,36397023	36,39702343	0,02195009
21	0,35836795	0,38386404	38,3864035	0,02549609
22	0,37460659	0,40402623	40,40262258	0,02941963
23	0,39073113	0,42447482	42,44748162	0,03374369
24	0,40673664	0,44522869	44,52286853	0,03849204
25	0,42261826	0,46630766	46,63076582	0,0436894
26	0,43837115	0,48773259	48,77325886	0,04936144
27	0,4539905	0,50952545	50,95254495	0,05553495
28	0,46947156	0,53170943	53,17094317	0,06223787
29	0,48480962	0,55430905	55,43090515	0,06949943
30	0,5	0,57735027	57,73502692	0,07735027

L'approximation de la DREAL reste pertinente pour une inclinaison comprise entre 0° et 15°.

Exercices

Somme des angles d'un triangle

1 La juxtaposition des 3 angles forme un angle plat. La propriété est « la somme des 3 angles d'un triangle est égale à 180° ».

2 Non. Un angle obtus a une valeur supérieure à un angle droit (90°) ; donc deux angles obtus ont une somme supérieure à 180°.

Propriété de Thalès dans les triangles

3 Pour déterminer BE, il faut déterminer CB. La propriété de Thalès dans les triangles permet d'écrire :
$\frac{CB}{CE} = \frac{CA}{CD} = \frac{BA}{ED}$ d'où $\frac{CB}{4} = \frac{(7+5)}{5}$ d'où $CB \approx 9{,}6$.
On peut écrire que $BE = CB - EC$; $BE = 9{,}6 - 4$ d'où $BE = 5{,}6$.

4 La propriété de Thalès dans les triangles permet d'écrire :
$\frac{TG}{RA} = \frac{IG}{IA} = \frac{IT}{\mathrm{IR}}$ d'où $\frac{TG}{4} = \frac{(6+3)}{6}$ d'où $TG = 6{,}0$.

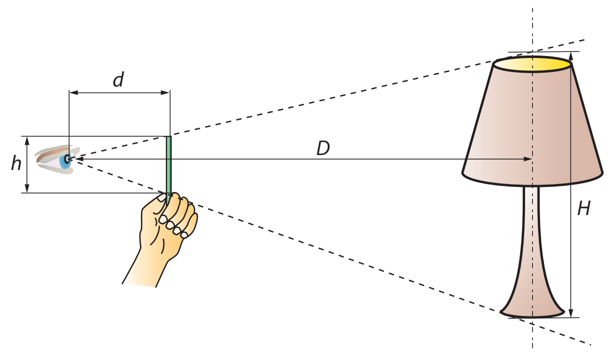
5 La propriété de Thales dans les triangles permet d'écrire :
$\frac{CR}{CI} = \frac{CO}{CK} = \frac{RO}{IK}$ d'où $\frac{CR}{12} = \frac{15}{5}$ et d'où $CR = 36$.

6 La propriété de Thalès dans les triangles permet d'écrire : $\frac{h+3{,}1}{3{,}1} = \frac{10}{2{,}2}$ donc $h + 3{,}1 = \frac{31}{2{,}2}$ soit $h \approx 14{,}1$.

7 Afin de respecter les proportions, le crayon servant à la visée doit rester parallèle à l'axe vertical du pied de la lampe.

Pour que l'objet soit bien reproduit, il faut que chaque rapport $\frac{h}{H}$ reste le même et égal à $\frac{d}{D}$ (d et D doivent rester constants, c'est-à-dire que la distance de l'artiste par rapport à l'objet doit rester constante avec le bras tendu de la même manière).

C'est une application de la propriété de Thalès dans les triangles.



Réciproque de la propriété de Thalès

8 On fait appel à la réciproque de la propriété de Thalès dans les triangles.
D'une part : $\frac{PA}{PR} = \frac{3,3}{(3,3+0,9)}$ d'où $\frac{PA}{PR} \approx 0{,}786$;
D'autre part : $\frac{PE}{PL} = \frac{2,2}{(2,2+0,6)}$ d'où $\frac{PE}{PL} \approx 0{,}786$
Comme $\frac{PA}{PR} = \frac{PE}{PL}$, la réciproque de la propriété de Thalès dans les triangles permet de conclure que $(AE) \mathbin{//} (RL)$.

9 La réponse fait appel à la réciproque de la propriété de Thalès.
D'une part, $\frac{AR}{AN} = \frac{23}{(23+33)}$ d'où $\frac{AR}{AN} \approx 0{,}411$.
D'autre part, $\frac{AY}{AU} = \frac{22}{32+22}$ d'où $\frac{AY}{AU} \approx 0{,}407$.
Comme $\frac{AR}{AN} \neq \frac{AY}{AU}$, on peut conclure que (RY) n'est pas parallèle à (NU).

10 **a.** OAC est un triangle isocèle puisque $OA = OC$.
b. (OI) est la médiatrice de $[AC]$ puisque le triangle est isocèle et que I est le milieu de $[AC]$.
$\frac{AI}{AC} = \frac{1}{2}$ (I milieu $[AC]$) et $\frac{AO}{AB} = \frac{1}{2}$ (O centre du cercle et donc milieu de diamètre $[AB]$).
On a donc : $\frac{AI}{AC} = \frac{AO}{AB}$; la réciproque de la propriété de Thalès permet de conclure que $(OI) \mathbin{//} (BC)$.
c. $(OI) \perp (AC)$ et $(OI) \mathbin{//} (BC)$ donc $(BC) \perp (AC)$.
Le triangle ABC est rectangle en C.

Propriété de Pythagore dans le triangle rectangle

11 La propriété de Pythagore permet d'écrire : $TI = \sqrt{IP^2 - TP^2}$; d'où : $TI \approx 16{,}62$ m.
De manière identique : $TP = \sqrt{IP^2 - TI^2}$ d'où $TP \approx 0{,}46$ km.
$IP = \sqrt{TP^2 + IP^2}$; $IP \approx 9{,}87$ dam.

12 **a.** $L = 2{,}10 + \frac{2{,}10}{3} + 2{,}10$ ou $L = 2{,}10 + 2 \times \frac{2}{3} \times 2{,}10$ d'où $L = 4{,}90$ m.
b. La propriété de Pythagore permet d'écrire : $h^2 = L^2 - 1^2$; $h = \sqrt{4{,}90^2 - 1^2}$ d'où $h \approx 4{,}80$ m.

13 h est la hauteur à laquelle se trouve le sommet de l'échelle. La propriété de Pythagore permet d'écrire : $h^2 = 2{,}90^2 - 1{,}225^2$; d'où $h \approx 2{,}629$.

Le sommet de l'échelle double est à environ 2,629 m.

Réciproque de la propriété de Pythagore

14 Le triangle 1 n'est pas rectangle ; le triangle 2 est rectangle en C ; le triangle 3 est rectangle en A ; le triangle 4 n'est pas rectangle.

15 La méthode correspond à la propriété réciproque de Pythagore :

– d'une part : $PL^2 = 100^2 = 10\ 000$;

– d'autre part : $OP^2 + OL^2 = 80^2 + 60^2 = 10\ 000$.

Comme $PL^2 = OP^2 + OL^2$, le triangle POL est rectangle en O.

Cette méthode permet bien de tracer 2 droites perpendiculaires.

Relations trigonométriques dans le triangle rectangle

16 **a.** $\cos \widehat{EFR} = \dfrac{FE}{FR}$; $FR = \dfrac{5}{\cos 25°}$ d'où $FR \approx 5{,}52$.

b. $\sin \widehat{ERD} = \dfrac{DE}{ER}$; $DE = 16 \times \sin 50°$ d'où $DE \approx 12{,}26$.

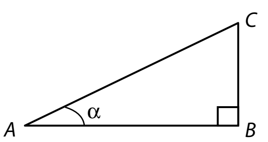
c. $\sin \widehat{IBC} = \dfrac{IC}{BC}$; $BC = \dfrac{77}{\sin 22°}$ d'où $BC \approx 205{,}55$.

17 $\tan \alpha = \dfrac{RE}{JE}$; $\alpha = \tan^{-1}\left(\dfrac{97}{150}\right)$ d'où $\alpha \approx 33°$.

18 $\tan i = \dfrac{x}{2x}$ d'où $i = \tan^{-1}\left(\dfrac{1}{2}\right)$; $i \approx 26{,}6°$.

19 $\tan \alpha = \dfrac{BC}{AC} = \dfrac{BC}{D}$ d'où $BC = 245 \times \tan 35°$; $BC \approx 171{,}55$ m.

$H = h + BC$ d'où $H \approx 173{,}20$ m.



Aires de figures planes

20 Aire d'un rouleau :

– de revêtement intissé : $A_1 = 25 \times 1{,}06$ d'où $A_1 = 26{,}5\ \text{m}^2$;

– papier peint : $A_2 = 10{,}05 \times 0{,}53$; $A_2 = 5{,}3265\ \text{m}^2$ soit pour 5 rouleaux : $26{,}6325\ \text{m}^2$.

L'affirmation est donc vraie à 0,5 % près.

21 **a.** $P = 2\pi R$ d'où $P \approx 58$ cm.

b. $A = 12^2 - \pi R^2$ soit $A \approx 31\ \text{cm}^2$.

22 $A = \left(\dfrac{1400 + 700}{2}\right) \times 740$; l'aire du plateau de la table trapézoïdale mesure $777\ 000\ \text{mm}^2$ soit $0{,}7770\ \text{m}^2$.

23 **a.** On fait appel à la propriété réciproque de Pythagore ;

– d'une part : $BC^2 = 128^2 = 16\ 364$;

– d'autre part : $AB^2 + AC^2 = 76{,}80^2 + 102{,}40^2 = 16\ 364$

b. Le triangle constitue un demi-rectangle longueur BA et de largeur AC ; d'où $\mathcal{A} = \dfrac{76{,}80 \times 102{,}40}{2}$.

L'aire du terrain mesure donc $3\ 932{,}16\ \text{m}^2$

QCM : Testez-vous !

1. C. $XW = 3{,}75$

2. A. la propriété de Thalès dans les triangles

3. B. fausse

4. B. $\cos \widehat{N}$

5. C. $MN \approx 21{,}1$

6. A. $\sin \widehat{O}$

7. A. $\widehat{O} \approx 31°$

8. B. $NM^2 = ON^2 - OM^2$

9. B. la propriété de Pythagore

10. B. πR^2

Problèmes

24 De la Terre au Soleil

$\frac{TS}{TL} = \frac{\text{Diamètre soleil}}{\text{Diamètre lune}}$ (on peut également passer par les rayons)

La distance Terre-Soleil $TS = \frac{695\,000}{1\,750} \times 384\,000$ d'où $TS = 152\,502\,857$ km.

25 Bricolage

1. Aire d'un paquet de lames de parquet : $A_{lame} = 1{,}090 \times 0{,}206 \times 8$ d'où $A_{lame} = 1{,}79\,632$ soit $1{,}8\ m^2$ à 0,1 près.

2. a. Aire du séjour : $A_{sj} = 5{,}4 \times (2{,}8 + 2{,}2) + 3{,}2 \times 2{,}2$ d'où $A_{sj} = 34{,}04\ m^2$.
b. Aire de parquet à prévoir : $A'_{sj} = 34{,}04 \times 1{,}1$ soit $A_s \approx 37{,}44\ m^2$. Il faut prévoir 21 paquets de lames de parquet.

26 Rénovation d'une ferme de charpente

La propriété de Pythagore permet d'écrire : $IK^2 = IN^2 + NK^2$; d'où $IK = \sqrt{(6^2 + 3^2)}$; $IK \approx 6{,}71$ m.

1. On peut utiliser deux méthodes :
a. En déterminant l'angle $\hat{E}$ dans le triangle KNE rectangle en N :
$\sin \hat{E} = \frac{KN}{IK}$; $\hat{E} = \sin^{-1}\left(\frac{3}{6{,}71}\right)$ d'où $\hat{E} \approx 26{,}6°$.
Puis dans le triangle RNE : $\sin \hat{E} = \frac{NR}{NE}$ d'où $NR = \sin 26{,}6° \times 6$; $NR \approx 2{,}69$ m.

b. En utilisant l'aire A du triangle rectangle KNE (demi rectangle !) : $A = \frac{NK \times NE}{2}$; $A = 9$. L'aire du triangle KNE est donc de $9\ m^2$.
NR représente la hauteur de triangle KNE si l'on prend KE comme base.
Ainsi, $A = \frac{KE \times NR}{2}$ d'où $NR = \frac{2 \times 9}{6{,}71}$. On retrouve : $NR \approx 2{,}68$ m.

27 La « pyramide brillante du sud »

1. $\tan 54° = \frac{h}{110}$ d'où $h \approx 151{,}40$ m.

2. On appelle c' le côté de la base de la pyramide d'angle 43°. La propriété de Thalès dans les triangles permet d'écrire : $\frac{c'}{220} = \frac{(151{,}40 - 45)}{151{,}40}$ d'où $c' = 154{,}61$m.
h' est la hauteur de cette pyramide.
$h' = \frac{154{,}61}{2} \times \tan 43°$ d'où $h' \approx 72{,}09$ m.
La hauteur de la « Pyramide brillante du sud » est : $H = h' + 45 = 72{,}09 + 45$ d'où $H = 117{,}09$ m.

28 La chenille

Soit x_1 la hauteur du 1er poteau. On a : $\tan 27° = \frac{x_1}{2}$ d'où $x_1 \approx 1{,}019$ m.
Comme tous les poteaux sont parallèles, la propriété de Thales permet de calculer les longueurs des 3 poteaux suivants : $\frac{x_2}{x_1} = \frac{4}{2} = 2$ d'où $x_2 \approx 2{,}030$ m ; $\frac{x_3}{x_1} = \frac{6}{2} = 3$ d'où $x_3 \approx 3{,}057$ m ; $\frac{x_4}{x_1} = \frac{8}{2} = 4$ d'où $x_4 \approx 4{,}076$ m.

29 Angle de tir

1. a. $\tan \widehat{LAC} = \frac{28}{50}$; $\widehat{LAC} = \tan^{-1}\left(\frac{28}{50}\right)$ d'où $\widehat{LAC} \approx 29{,}2°$.

b. $\widehat{SAC} = \tan^{-1}\left(\frac{28 + 5{,}60}{50}\right)$ d'où $\widehat{SAC} \approx 33{,}9°$.

c. $\widehat{SAL} = \widehat{SAC} - \widehat{LAC}$ d'où $\widehat{SAL} \approx 4{,}7°$.
L'angle de tir du buteur positionné en A est d'environ 4,7°.

2. a. Le triangle SML est isocèle, on peut donc travailler sur le triangle IML rectangle en I.
Ainsi $\tan \widehat{SMI} = \frac{IS}{IM}$, $\widehat{SMI} = \tan^{-1}\left(\frac{2{,}8}{50}\right)$ d'où $\widehat{SMI} \approx 3{,}2°$.
b. L'angle de tir du buteur positionné en M est d'environ 6,4° $\left(\widehat{SML} = 2\,\widehat{SMI}\right)$.
Remarque : l'angle de tir est plus ouvert en face des poteaux !

30 Feux de croisement

En supposant (BA) // (ED), on peut utiliser la propriété de Thalès dans les triangles et donc écrire $\frac{CA}{CD} = \frac{AB}{DE}$ d'où $\frac{x}{(x-2)} = \frac{70}{67}$; $67x = 70\,x - 140$. On obtient $x \approx 46{,}67$. La portée des phares est d'environ 47m.

31 Skier à… 200 %

1. a. Les 2 bâtons de ski forment un triangle isocèle rectangle avec la piste. L'angle d'inclinaison est donc de 45°. Il s'agit d'une pente « raide ».
b. $p = \frac{h}{d} = 1$ soit une pente de 100 %.

2. a. Pour un angle d'inclinaison α de 30°, on obtient : $h = 58$; comme $p = \frac{h}{d} = \frac{58}{100}$ on obtient une pente de 58 %.
b.

α	30°	50°	65°
$\frac{h}{d}$: pente	58 %	119 %	214 %

3. Pour une pente de 200 %, il faut $h = 200$ ce qui correspond à une inclinaison $\alpha \approx 63{,}4$ °.

Démarche d'investigation

32 Terrain de rugby

Les 2 diagonales du terrain doivent être égales et mesurer 119,27 m. Cette valeur est obtenue en utilisant la propriété de Pythagore $\left(\sqrt{(100^2 + 65^2)}\right)$.

33 Table réglable en hauteur

C'est en position basse, pour $h = 38$ cm, que la longueur SE est la plus grande.
Le plateau de la table est normalement horizontal donc (TA) // (SE).

- La propriété de Thalès dans les triangles permet d'écrire : $\dfrac{h_1}{h_2} = \dfrac{NE}{NT}$.
  Comme $h = 38$ cm (position basse), $h_2 = 38 - h_1$ d'où $\dfrac{h_1}{38 - h_1} = \dfrac{73}{27}$ donc $27\ h_1 = 2\,774 - 73\ h_1$.
  On obtient $h_1 = \dfrac{2\,774}{100}$ soit environ 27,7 cm.
- Le triangle NSE est isocèle et est composé de 2 triangles rectangles. La propriété de Pythagore appliquée à l'un de ces triangles permet d'écrire : $\left(\dfrac{L_1}{2}\right)^2 = NE^2 - h_1^{\,2}$.

Ainsi $L_1 \approx 2\sqrt{(73^2 - 27{,}7^2)}$. On obtient : $L_1 \approx 135{,}1$ cm.
Laureline et David ne doivent pas commander cette table puisque en position basse les pieds de celle-ci dépassent le plateau (135,1 > 120).

34 Récupération

Les élèves pourront chercher à résoudre ce problème :

- soit à l'aide d'un dessin à l'échelle 1/10 ;
- soit en comparant le diamètre D de la nappe ronde avec la diagonale d du rectangle à découper.

On a $d = \sqrt{(90^2 + 65^2)}$ donc $d \approx 111$ cm. Or le diamètre de la nappe est $D = 110$ cm : Tiphaine ne pourra pas découper un rectangle de 65×90 cm dans la nappe ronde.

35 Les lunules d'Hippocrate

- Les aires des 3 demi-disques sont respectivement :

$$D_1 = \frac{1}{2}\pi\left(\frac{BC}{2}\right)^2 = \frac{1}{8}\pi BC^2 \,;\, D_2 = \frac{1}{2}\pi\left(\frac{AC}{2}\right)^2 = \frac{1}{8}\pi AC^2 \text{ et } D_3 = \frac{1}{2}\pi\left(\frac{AB}{2}\right)^2 = \frac{1}{8}\pi AB^2.$$

- L'aire T du triangle rectangle ABC est $T = \dfrac{AB \times AC}{2}$.
- Or la somme L des aires des 2 lunules est :

$L = D_2 + D_3 - (D_1 - T)$ d'où $L = \dfrac{1}{8}\pi\,(AC^2 + AB^2 - BC^2) + T$.
D'après la propriété de Pythagore appliquée au triangle ABC rectangle en A, $BC^2 = AB^2 + AC^2$ Donc : $L = T$.

10 CALCULS GÉOMÉTRIQUES DANS L'ESPACE

Capacités	Connaissances
• Utiliser les théorèmes et les formules pour : – calculer le volume d'un solide. – déterminer les effets d'un agrandissement ou d'une réduction sur les longueurs, les aires et les volumes.	• Le théorème de Pythagore. • Le théorème de Thalès dans le triangle. • Formule du volume d'un cube, d'un parallélépipède rectangle.

Dans le cadre de la détermination du volume de solides, ce chapitre de géométrie dans l'espace sollicite de nouveau les élèves sur les propriétés de Thalès ou de Pythagore et sur les calculs trigonométriques. Il aborde également les effets d'une réduction ou d'un agrandissement des aires et des volumes.

De manière plus particulière :
- les problèmes 18 et 22 permettent la découverte de différents tétraèdres inscrits dans un cube et l'établissement de l'expression littérale de leur volume ;
- les problèmes 20 et 26 permettent aux élèves d'aborder une méthodologie de détermination de la distance entre deux points situés sur deux aires planes et différentes d'un solide ;
- le problème 25 amène au choix argumenté de la forme conique pour un pluviomètre ; l'étude d'une fonction associée à cette forme à l'aide de GeoGebra permet la détermination des graduations de ce pluviomètre en « mm d'eau de pluie » ;
- le cube perforé du problème 28 (en démarche d'investigation) oblige les élèves à « penser » les vides et les pleins d'un solide complexe ;
- enfin les élèves s'initient au théorème de Guldin (problème 29 en démarche d'investigation) en établissant, par une application simple, l'expression du volume d'un tore.

Activité 1 : Terre de remblai

1. L'aire sera diminuée puisque la largeur $YA < YO$ (YO est l'hypoténuse du triangle rectangle AYO).

2. La propriété de Pythagore appliquée au triangle AYO rectangle en A permet d'écrire : $YA^2 = YO^2 - OA^2$; d'où $YA = \sqrt{10^2 - 0,6^2}$; $YA \approx 9{,}98$ m.

3. Le volume est celui d'un demi-parallélépipède rectangle ; d'où $V = \dfrac{OY \times YA}{2} \times L$. On obtient :

$$V = \frac{0,6 \times 9,98}{2} \times 10 \text{ soit } V \approx 29{,}400 \text{ m}^3.$$

4. $V' = 1{,}15V$ d'où $V' \approx 33{,}810$ m^3.

Aurélie et Yannick devront donc apporter environ 33,810 m^3 de terre de remblai.

Activité 2 : Les mailles des cristaux de fer

1. a. Dans le cristal CFC, on a $d = 4R$.

b. On applique Pythagore dans le triangle rectangle : $a_1^2 + a_1^2 = d^2$. Donc $2a_1^2 = (4R)^2$, soit :

$$\sqrt{2}\, a_1 = 4R.$$

c. $a_1 = \dfrac{4 \times 124,1}{\sqrt{2}}$ d'où $a_1 \approx 351{,}9$ pm.

2. a. Dans le cristal CC, on a $D = 4R$.

b. La propriété de Pythagore appliquée au triangle rectangle de côté respectif a_2, d_2 $(= a_2\sqrt{2})$ et D permet d'écrire : $D^2 = a_2^2 + (a_2\sqrt{2})^2$ d'où $D^2 = 3a_2^2$; $D = a_2\sqrt{3}$.

La relation obtenue au 2. a. permet d'écrire : $4R = a_2\sqrt{3}$.

c. $a_2 \approx 286{,}6$ pm.

3. a. $V = \dfrac{4}{3}\pi \times 124{,}1^3$ donc un atome de fer a pour volume $V = 8\,005\,785{,}6$ pm^3.

b. La compacité du fer CFC est $c_1 = \dfrac{4V}{a_1^3}$; on a donc $c_1 \approx \dfrac{4 \times 8\,005\,785{,}6}{351}$ d'où $c_1 \approx 0{,}74$.

Pour le fer CC, on trouve $c_2 = \dfrac{2V}{a_2^3}$; $c_2 \approx 0{,}68$.

c. C'est la structure « Cubique Face Centrée » du fer qui présente la plus grande compacité.

Activité 3 : Armoire en kit

Pour pouvoir relever l'armoire, il faut que la diagonale D de la face du côté « 203 cm × 68 cm » soit inférieure à 2,08 m.

La propriété de Pythagore permet d'écrire : $D^2 = 203^2 + 58^2$; d'où $D \approx 211$ cm soit 2,11 m.

Comme 2,11 > 2,08, l'armoire une fois montée ne pourra pas être relevée.

Travaux pratiques

Récupérateur d'eau de pluie

1. Récupérateur en forme de parallélépipède

b. $V_p = L \times l \times h$. Si la base est un carré de côté a, $a = L = l$ d'où $V_p = a^2h$.

b. $V_p = a^2h = 1$ permet d'obtenir $h = \dfrac{1}{a^2}$.

c. Voir tableau ci-dessous. Pour tous ces modèles, la largeur qui correspond à a est bien inférieure à 1 m.

	Côté a	Hauteur h
Point A	0,82	1,5
	0,86	1,35
	0,91	1,20
Point B	1	1

Remarque : Pour $a = 1$ on obtient un récupérateur cubique.

2. Récupérateur en forme de cylindre

a. $V_c = \pi R^2 h = 1$ d'où $h = \dfrac{1}{\pi R^2}$.

b. Voir tableau ci-dessous.

Rayon R (m)	Hauteur h (m)
0,46	1,5
0,47	1,42
0,48	1,44
0,49	1,34
0,50	1,25

Remarque : Attention : au delà de $R = 0{,}5$ m, la largeur du cylindre est supérieure à 1 m.

Cubage du bois

1. a. et **b.**

Tronc de cône

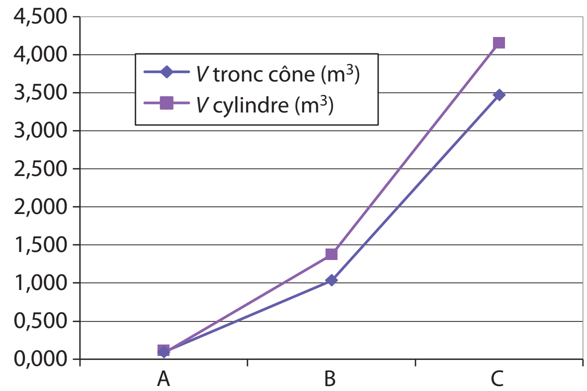
Grume	A	B	C
R_1	0,075	0,2	0,33
R_2	0,055	0,005	0,0045
h	7,000	24,000	30,000
$V_{\text{tronc cône}}$ (m^3)	0,094	1,031	3,468

Formule de Huber

Grume	A	B	C
R_{Me}	0,060	0,135	0,210
h	7,000	24,000	30,000
V_{cylindre} (m^3)	0,079	1,374	4,156

2. a. Plus les dimensions de la grume sont importantes, plus l'écart entre les deux volumes calculés augmente.

b. Le vendeur choisira la formule de Huber qui donne un volume de bois supérieur à celui calculé avec celle du tronc de cône.



Exercices

Application de Thalès et Pythagore dans l'espace

1 **a.** (PM) et (IS) sont parallèles.
b. $IP = IE - EP$; $IP = 4$ cm.
Comme (PM) // (IS), la propriété de Thalès dans les triangles permet d'écrire : $\frac{PM}{IS} = \frac{EP}{EI}$;
d'où $PM = \frac{8 \times 10}{12}$; $PM = \frac{20}{3}$ soit $\approx 6{,}7$ cm.

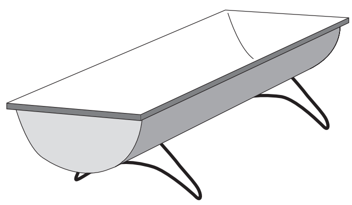
2 **a.** Les plans (IJK) et (AFC) sont parallèles.
b. Les triangles BCA, BAF et BFC sont isocèles rectangles (3 demi faces carrée du cube).
Le triangle AFC est équilatéral (3 côtés égaux à une diagonale du cube).
c. $BAFC$ et $BIJK$ sont des tétraèdres trirectangles.

3 La propriété de Pythagore appliquée au triangle rectangle LPA permet d'écrire $AL^2 = PA^2 + PL^2$ d'où $AL \approx 31{,}6$ cm.
En appliquant la propriété de Pythagore au triangle rectangle AEL, on obtient : $EL^2 = AE^2 + AL^2$ d'où $EL \approx 37{,}4$ cm.

4 $\tan \widehat{ALE} = \frac{AE}{AL}$ d'où $\widehat{ALE} \approx \tan^{-1}\left(\frac{20}{31{,}6}\right)$ soit $\widehat{ALE} \approx 32°$.
Remarque : On peut aussi utiliser $\sin \widehat{ALE} = \frac{AE}{EL}$ ou encore $\cos \widehat{ALE} = \frac{AL}{EL}$.

Calcul de volumes

5 **a.** Voir figure ci-dessous.



b. $V_1 = \pi \times \left(\frac{1{,}09}{2}\right)^2 \times 0{,}5$ soit $V_1 \approx 0{,}467$ m^3 ;
$V_2 = 1{,}25 \times 0{,}35 \times 0{,}3$ soit $V_2 \approx 0{,}131$ m^3 ;
$V_3 = \frac{1}{2} \times \pi \times 0{,}20^2 \times 2$ soit $V_3 \approx 0{,}126$ m^3.
c. $V_1 \approx 467$ L ; $V_2 \approx 131$ L ; $V_3 \approx 126$ L

6 **a.** $V = \frac{1}{3}\ \pi R^2 h$, $V \approx 113$ cm^3 soit environ 0,113 L.
b. On peut remplir : $\frac{1}{0{,}113} \approx 8{,}8$ « verres » soit au plus 8 verres pleins.

7 **a.** $R = \frac{P}{2\pi}$ soit $R \approx 6\,366$ km.
b. $V = \frac{4}{3}\ \pi R^3$; le volume de la Terre est $V \approx 1{,}08\ 10^{12}$ km^3.

8 $V = 2\ \frac{a^2 h}{3}$; $V = 2 \times \frac{8^2 \times 6}{3}$ d'où $V = 256$ mm^3.
Il faut 256 mm^3 d'or blanc pour fabriquer une paire de boucles d'oreilles.

9 **a.** $V_{boule} = \frac{4}{3}\ \pi R^3$; $V_{boule} = \frac{4}{3}\ \pi \times 4{,}5^3$ soit $V_{boule} \approx 381{,}704$ cm^3.
b. Boîte parallélépipédique : $V_{para} = L \times l \times h$.
Or $L = 3D = 27$ cm (D diamètre de la boule) ;
l largeur et profondeur : $l = h = D = 9$ cm.
$V_{para} = 2\,187$ cm^3.
c. Boîte cylindrique : $V_{cylindre} = \pi R^2 h$ avec $R = 4{,}5$ cm et $h = 3D = 27$ cm.
$V_{cylindre} = \pi \times 4{,}5^2 \times 27$ soit $V_{cylindre} \approx 1\,717{,}665$ cm^3.
Remarque : le rangement dans la boîte cylindrique est plus optimal.

10 **a.** Volume de la partie cylindrique : $V_1 = \pi \times 5^2 \times 125$ d'où $V_1 \approx 9\,817$ mm^3.
b. Volume de la partie hémisphérique : $V_2 = \frac{4}{6} \times \pi \times 5^3$ d'où $V_2 \approx 262$ mm^3.
c. $V_{total} \approx 10\,079$ mm^3 soit environ 10,3 mL. Ce tube à essai L ne peut donc recevoir la totalité des 12 mL de liquide.

11 **a.** ① demi-sphère ; ② cylindre ; ③ cône.
b. $V_1 = \frac{2}{3}\ \pi \times 200^3$ d'où $V_1 \approx 16\,755\,161$ mm^3 ;
$V_2 = \pi \times 200^2 \times 180$ d'où $V_2 \approx 22\,619\,467$ mm^3 ;
$V_3 = \frac{1}{3}\ \pi \times 200^2 \times 300$ d'où $V_3 \approx 12\,566\,371$ mm^3.
Volume de la balise est $V_{Balise} \approx 51{,}9$ dm^3 soit environ 52 L.

12 **a.**

	hauteur	Périmètre de la base
Cylindre n°1	21 cm	29,7 cm
Cylindre n°2	29,7 cm	21 cm

b. Les 2 aires latérales A_1 et A_2 sont identiques : $A_1 = 29{,}7 \times 21$ et $A_2 = 21 \times 29{,}7$.
c. $P_1 = 2\ \pi\ R_1 = 29{,}7$ cm d'où $R_1 \approx 4{,}7$ cm.
$P_2 = 2\pi R_2 = 21$ cm d'où $R_2 \approx 3{,}3$ cm.
d. $V_1 = \pi \times 4{,}7^2 \times 21$ d'où $V_1 \approx 1\,457$ cm^3 (environ 1,5 L).
$V_2 = \pi \times 3{,}3^2 \times 29{,}7$ d'où $V_2 \approx 1\,016$ cm^3 (environ 1 L).
e. Des aires latérales identiques déterminent des cylindres de volume très différent.

Agrandissement et réduction

13 I, J et K sont les milieux respectifs de $[AB]$, $[BF]$, et $[BC]$ donc $\frac{BI}{BA} = \frac{BJ}{BF} = \frac{BK}{BC} = \frac{1}{2} \cdot \left(k = \frac{1}{2}\right)$.

Pour obtenir l'aire du triangle IJK, il faut donc multiplier celle du triangle AFC par $\frac{1}{4}\left(k^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2\right)$.

14 Le volume du tétraèdre $BAFC$ s'obtient en multipliant celui du tétraèdre $RIJK$ par 8 (en effet : $k' = 2$ donc $k'^2 = 8$).

15 **a.** L'aire de la nouvelle sphère sera multipliée par $(1{,}3)^2 = 1{,}69$. L'aire sera donc augmentée de 69 %.

b. Le volume de cette même sphère sera multipliée par $(1{,}3)^3 \approx 2{,}2$ et sera augmentée d'environ 120 %.

QCM : Testez-vous

1. B. $V = Llh$.

2. B. $V = a^2h$.

3. B. 25 : si on multiplie l'arête d'un cube par 5, son aire est multipliée par 5^2 c'est-à-dire par 25.

4. C. 125 : si on multiplie l'arête d'un cube par 5, son volume est multiplié par 5^3 c'est-à-dire par 125.

5. B. sa hauteur par 2 : pour diviser le volume d'un cylindre par 2, on divise « sa hauteur par 2 ».

Problèmes

16 Cylindrée d'une Jeep

1. $V_1 = \pi R^2 h$ avec $R = \frac{\text{alésage}}{2} = 39{,}6875$ mm

et $h = 111{,}125$ mm (course du piston).
On obtient $V_1 \approx 549\,881{,}5$ mm^3.

2. Cylindrée totale $V = 4V_1$ d'où $V \approx 2\,200$ cm^3.

3. La cylindrée totale de la Jeep *Willys* est d'environ 2,2 L.

17 Ballon de handball

1. Diamètre minimal : $D_{\min} = \frac{580}{\pi}$ d'où $D_{\min} \approx 185$ mm.

Rayon maximal : $D_{\max} = \frac{600}{\pi}$ d'où $D_{\max} \approx 191$ mm.

Le diamètre d'un ballon de handball doit être compris entre 185 et 191 mm.

2. a. Le diamètre de la réplique au 1/10 doit être compris entre 18,5 et 19,1 mm.
b. Circonférence de la réplique : $P'_{\min} \approx \frac{580}{10}$ soit $P'_{\min} \approx 58$ mm et $P'_{\max} \approx \frac{600}{10}$ soit $P'_{\max} \approx 60$ mm.
Le périmètre P' de la réplique est compris entre 58 et 60 mm.
c. Volume V' de la réplique au 1/10 :

– volume minimal : $V'_{\min} = \frac{4}{3}\pi R'^{3}_{\min}$

d'où $V'_{\min} = \frac{4}{3} \times \pi \times \left(\frac{18{,}5}{2}\right)^3$; $V'_{\min} \approx 3\,315$ mm^3 ;

– volume maximal : $V'_{max} = \frac{4}{3}\pi R'^{3}_{\max}$

d'où $V'_{max} = \frac{4}{3}\pi \times \left(\frac{19{,}1}{2}\right)^3$; $V'_{max} \approx 3\,648$ mm^3.

Le volume de la réplique au 1/10 sera compris entre 3 315 et 3648 mm^3.

3. a. Aire du ballon officiel :
$A_{\min} = 4\pi R_{\min}^2$ d'où $A_{\min} = 4\pi \times \left(\frac{185}{2}\right)^2$
d'où $A_{\min} \approx 107\,521$ mm^3 ;
$A_{\max} = 4\pi R_{\max}^2$ d'où $A_{\max} = 4\pi \times \left(\frac{191}{2}\right)^2$
d'où $A_{\max} \approx 114\,608$ mm^3.

L'aire du ballon officiel doit être comprise entre 107 521 et 114 608 mm^3.
b. Les diamètres maximum et minimum de la réplique s'obtiennent en multipliant ceux du ballon officiel par $k = \frac{1}{10}$.
Les aires de la réplique s'obtiennent donc en multipliant les aires du ballon officiel par $k^2 = \frac{1}{100}$:
– l'aire minimale de la réplique est : $A'_{\min} \approx 1\,075$ mm^3 ;
– l'aire maximale de la réplique $A'_{\max} \approx 1\,146$ mm^3.

Remarque : une vérification peut être faite à l'aide de $R'_{\min} = \left(\frac{18{,}5}{2}\right)$ et $R'_{\max} = \left(\frac{19{,}1}{2}\right)$.

18 Tétraèdres dans un cube

1. Le triangle ABC a pour aire $\frac{a^2}{2}$, et la hauteur de ce tétraèdre est a. $V = \frac{B \times h}{3}$ d'où $V = \frac{\frac{a^2}{2}}{3} \times a = \frac{a^3}{6}$.

2. Le tétraèdre *BIJK* est obtenu en divisant chaque arête par 2. Le rapport de réduction est $k = \frac{1}{2}$.

Son volume est : $V' = k^3 \times V$ d'où $V' = \frac{1}{8} \times \frac{a^3}{6} = \frac{a^3}{48}$.

19 Cube lumineux

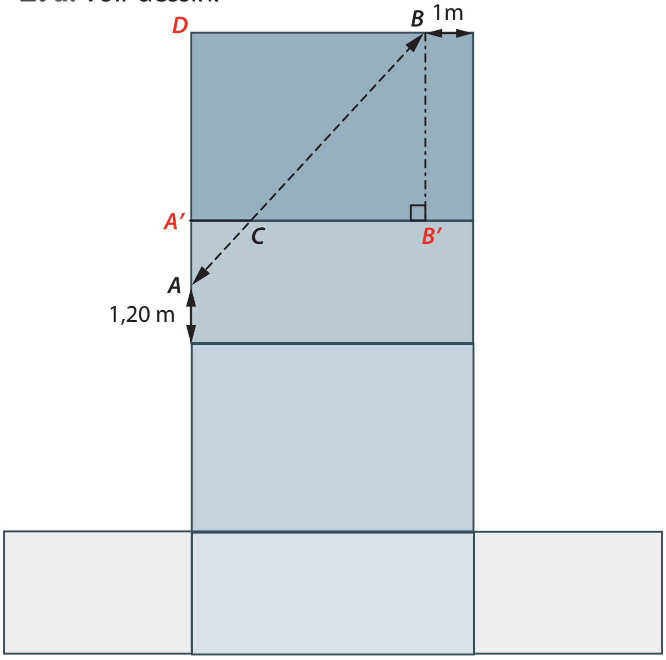
1. Aire de la surface éclairante du cube de 83 cm d'arête : $A = 5a^2$ soit $A = 34\,445$ cm^2.

2. Si l'aire de la surface d'éclairement du cube est augmentée de 50 %, alors : $\frac{A'}{A} = 1{,}5$ où A' est l'aire de la surface du nouveau cube. Or si k est le rapport d'augmentation de l'arête, on a : $\frac{A'}{A} = 1{,}5 = k^2$.
De là, $k = \sqrt{1{,}5} \approx 1{,}22$ puis $a' = k\,a$ d'où $a' \approx 101{,}3$ cm.

3. $A' = 5\,a'$; $A' = 5 \times 101{,}3^2$ d'où $A' \approx 51\,508$ cm^2.
$\frac{A'}{A} = \frac{51\,508}{34\,445} \approx 1{,}5$.

20 Le plus court chemin

1. Voir dessin.
2. a. Voir dessin.



b. Le segment [*AB*] sur le développé.
c. Sur le dessin *AB* = 7,4 cm. Il faut donc prévoir 7,40 m de gaine.
d. Sur le dessin le point *C* se situe à 1,3 cm du coin situé au dessus *A*. Dans la réalité il se trouve à 1,30 m.

3. a. La propriété de Thalès appliquée aux triangles *CA′A* et *CB′B* permet d'écrire : $\frac{CA'}{CB'} = \frac{AA'}{BB'}$,

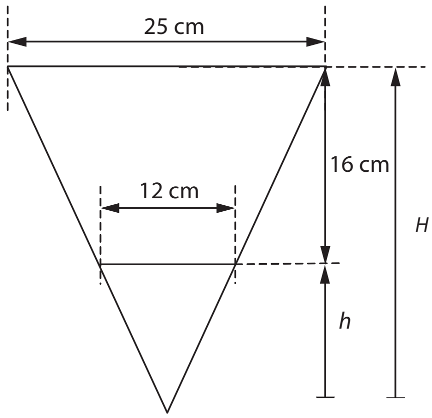
d'où $\frac{x}{(6-1-x)} = \frac{(2{,}60-1{,}20)}{4}$. On obtient $4x = 1{,}4(5-x)$

d'où $x = \frac{7}{5{,}40}$ soit $x \approx 1{,}30$ m.

b. Dans le triangle *ADB*, rectangle en *D*, la propriété de Pythagore permet d'écrire : $AB^2 = DA^2 + DB^2$
d'où $AB = \sqrt{5^2 + 5{,}40^2}$; $AB \approx 7{,}36$ m.

21 Saladier tronconique

1. Voir ci-dessous.



2. La propriété de Thales dans les triangles permet d'écrire :
$\frac{H}{H-16} = \frac{25}{12}$ d'où $12H = 25H - 400$; $H = \frac{400}{13}$;
$H \approx 30{,}8$ cm.

3. Volume V du cône complet : $V = \frac{1}{3}\pi R^2 H$;
$V = \frac{1}{3}\pi \times 12{,}5^2 \times 30{,}8$; $V \approx 5\,039{,}2$ cm^3.

4. Volume du cône complémentaire : $V' = \frac{1}{3}\pi R'^2 h$ d'où

$V' = \frac{1}{3}\pi \times 6^2 \times (30{,}8 - 16)$; $V' \approx 557{,}9$ cm^3.
Le volume du saladier correspond à $V - V'$
soit 4 481,3 cm^3 (environ 4,48 L).

22 Autre tétraèdre dans le même cube

1. Les 4 triangles constituant le tétraèdre sont identiques et équilatéraux. En effet, chaque arête est égale à la diagonale du cube.

2. Le volume du cube est $V = a^3$. Le volume d'un « coin » est celui d'un tétraèdre trirectangle (voir 18) et donc $V_1 = \frac{a^3}{6}$. Le tétraèdre régulier restant a donc pour volume $V' = V - 4V_1$ soit $V' = a^3 - \frac{2}{3}a^3$ d'où $V' = \frac{1}{3}a^3$.

23 Le fond du puits

1. $AB = 1{,}61$ m

2. La propriété de Thalès dans les triangles permet d'écrire : $\frac{DE}{BA} = \frac{CD}{CB}$, d'où $DE = \frac{2{,}10}{0{,}8} \times 1{,}61$.
La profondeur du puits est $DE \approx 4{,}22$ m.

24 Tuyau de PVC

1. $V = \pi R_1^2 h - \pi R_2^2 h$ d'où $V = \pi h (R_1^2 - R_2^2)$
soit $V = \pi \times 400\,(11^2 - 9{,}38^2)$; $V \approx 41\,489$ cm^3

ou $V \approx 41{,}5 \cdot 10^{-3}$ m^3.

2. $m = \rho V$; masse minimale d'un tuyau de 4 m :

$m_1 = 1370 \times 41{,}5 \cdot 10^{-3}$ d'où $m_1 \approx 56{,}855$ kg ;

masse maximale : $m_2 = 1460 \times 41{,}5 \cdot 10^{-3}$
d'où $m_2 \approx 60{,}59$ kg.
L'écart maximal de masse est $\Delta m \approx 3{,}7$ kg.

25 Pluviomètre conique

1. a. La propriété de Thalès dans les triangles permet d'écrire : $\dfrac{R}{6} = \dfrac{5}{30}$ d'où $R = 1$ cm.

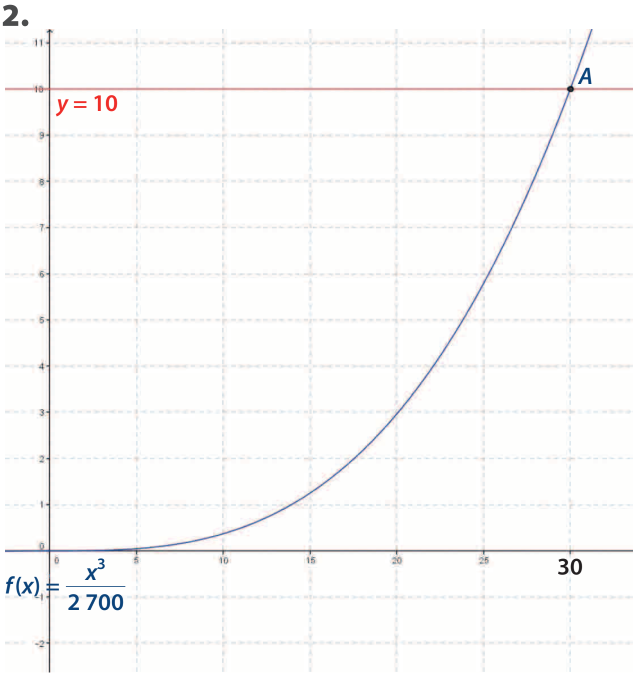
b. $V = \dfrac{1}{3}\pi R^2 h$ d'où $V \approx 5{,}24$ cm^3.

c. $h' = \dfrac{V}{\pi R'^2}$ d'où $h' = \dfrac{5{,}24}{\pi \times 6^2}$ soit $h' \approx 0{,}05$ cm $\left(\dfrac{1}{2}\text{ mm}\right)$.

d. $h' = \dfrac{5^3}{27\ 000}$ d'où $h' \approx 0{,}05$ cm.

e. C'est dans le cône que les variations de volume sont les plus visibles ($1 \gg 0{,}05$) :
– dans le cylindre, le volume est proportionnel à la hauteur puisque R^2 est constant ;
– dans le cône inscrit dans le cylindre, pour de faibles volumes la hauteur augmente rapidement puisque le rayon est petit ; comme il existe une relation de proportionnalité (propriété de Thalès) entre la hauteur et le rayon ; le volume du cône est proportionnel au cube de la hauteur.

2.



3. a. La hauteur correspondant à 1 cm de pluie est $h \approx 13{,}9$ cm. (Il s'agit de l'abscisse du point A (13,9 ; 1).)

b.

h (cm) hauteur d'eau dans le pluviomètre										
6,5	8,1	9,3	11,1	12,7	13,9	17,5	23,8	30	37,8	43,3
h'(cm) hauteur de pluie										
0,1	0,2	0,3	0,5	0,75	1	2	5	10	20	30
h' (mm) hauteur de pluie										
1	2	3	5	7,5	10	20	50	100	200	300

c. Non. En effet, une hauteur de 30 cm d'eau correspond à 100 mm de précipitation… ce qui ne se produit normalement pas dans une région tempérée.

26 Skatepark

1. Distance minimale :
$d = AD = AF + FE + ED = AF + BC + ED$.
La propriété de Pythagore appliquée au triangle ABF permet d'écrire : $AF^2 = BA^2 + BF^2$

d'où $AF = \sqrt{1{,}80^2 + 1{,}20^2}$, ainsi $AF \approx 2{,}16$ m.
De manière analogue, on peut écrire : $ED^2 = CE^2 + CD^2$

d'où $ED = \sqrt{1{,}20^2 + 2{,}5^2}$, on obtient $ED = 2{,}77$ m.
La distance minimale est : $d = 2{,}16 + 1{,}10 + 2{,}77$
d'où $d \approx 6{,}03$ m.

2. $\tan\widehat{CDE} = \dfrac{EC}{DC}$ d'où $\widehat{CDE} = \tan^{-1}\left(\dfrac{1{,}20}{2{,}5}\right)$

soit $\widehat{CDE} \approx 26°$.

$\tan\widehat{BAF} = \dfrac{BF}{BA}$ d'où $\widehat{BAF} = \tan^{-1}\left(\dfrac{1{,}20}{1{,}8}\right)$ soit $\widehat{BAF} \approx 34°$.

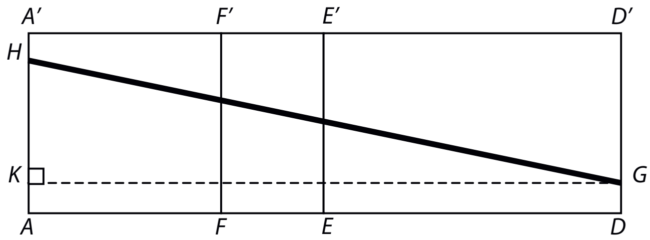
3. La pente correspondant à $\widehat{CDE}$ est tan 26°

ou $\dfrac{EC}{DC} = \left(\dfrac{1{,}20}{2{,}5}\right)$ soit environ 48 %.

La pente correspondant à $\widehat{BAF}$ est tan 34°

ou $\dfrac{BF}{BA} = \left(\dfrac{1{,}20}{1{,}8}\right)$ soit environ 67 %.

4. a. Schéma du développé :



b. Le « plus court chemin » entre G et H correspond au segment $[GH]$ sur le développé de la piste de skate.
On observe que $GK = d \approx 6{,}03$ m et $KH = AH - DG$
d'où $KH = 2 - 0{,}60$ soit $KH = 1{,}40$ m.
La propriété de Pythagore appliquée au triangle GKH rectangle en K permet d'écrire :

$GH^2 = KG^2 + KH^2$ d'où $GH = \sqrt{6{,}03^2 + 1{,}40^2}$

soit $GH \approx 6{,}20$ m.
Le plus court chemin entre G et H mesure donc environ 6,20 m.

Démarche d'investigation

27 Plus de monde que prévu

1. Une bouteille de 2 L permet de remplir 10 gobelets (9 élèves + Lillian) jusqu'au trait « 20 cL ».

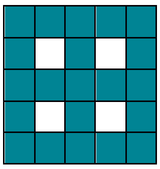
2. Soit $V_{10} = 200$ cm^3, le volume de soda dans un gobelet si 10 élèves sont présents.

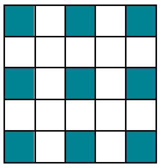
Si 2 L sont répartis dans 16 verres (15 élèves + Lillian) chacun des 16 gobelets contiendra alors 12,5 cL :
$V_{16} = 125 \text{ cm}^3$.
$V_{10} - V_{16} = \pi R^2 h_{10} - \pi R^2 h_{16}$ d'où $\Delta V = \pi R^2 \Delta h$.

$\Delta h = \dfrac{200 - 125}{\pi \times 3,5^2}$ d'où $\Delta h \approx 2$ cm.

Pour répartir équitablement les 2 L de soda entre les 16 personnes présentes il faut remplir les gobelets à environ 2 cm en dessous du « trait de 20 cL ».

28 Cube perforé





Le premier schéma représente une vue de dessus du niveau 1 du cube perforé. Ce motif se reproduit aux niveaux 3 et 5.
Le deuxième schéma représente une vue de dessus des niveaux 2 et 4.

a. Dans la première configuration, un niveau comprend 21 (25 – 4) petits cubes « pleins » de 1 dm^3. Le volume des niveaux 1, 3 et 5 est donc $V_{1,3,5} = 63 \text{ dm}^3$.

Dans la deuxième configuration, un niveau comporte 9 petits cubes « pleins » de 1 dm^3. Le volume des niveaux 2 et 4 est donc $V_{2,4} = 18 \text{ dm}^3$.

Au total, le cube perforé présente un volume V de 81 dm^3.

b. Le pourcentage d'évidement est $\dfrac{5^3 - 81}{5^3} \times 100$, soit 35,2 % du cube plein.

29 Volume d'un tore

Pour un tore :

– la surface plane en rotation de l'axe est un disque d'aire $A = \pi\, r^2$;

– le centre de gravité du disque décrit un cercle de rayon R, donc $P = 2\pi\, R$.

Le volume V du tore est $V = P \times A$ d'où $V = 2\pi\, R \times \pi\, r^2$.
On obtient : $V = 2\pi^2\, R\, r^2$.

SÉQUENCES D'ÉVALUATION

Séquence 1 : LES JEUNES ET LA RADIO

1. a. La représentation graphique est un diagramme en bâtons avec :
- en abscisses : le nombre de postes de radios écoutés qui est un caractère quantitatif discret ;
- en ordonnées : le nombre de lycéens.

b.

Nombre de récepteurs radio	1	2	3	4	5
Nombre de jeunes	81	162	183	54	12

Valeur minimale du caractère : 1 récepteur radio.

Valeur maximale du caractère : 5 récepteurs radio.

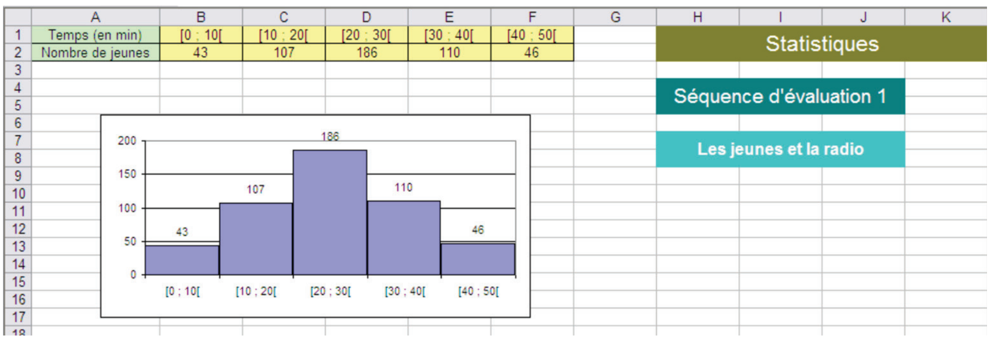
Étendue de la série : $e = 5 - 1 = 4$ récepteurs radio.

Moyenne de la série : $\overline{x} = \dfrac{81 \times 1 + 162 \times 2 + 183 \times 3 + 54 \times 4 + 12 \times 5}{81 + 162 + 183 + 54 + 12} = \dfrac{1230}{492} = 2{,}5$ postes de radios.

Médiane de la série : $\dfrac{N}{2} = \dfrac{492}{2} = 246$ et $81 + 162 < 246$, donc $Me = 3$.

$\overline{x} < Me$: on peut dire que :
- plus de 50 % des jeunes écoutent régulièrement un nombre de récepteurs radios supérieur à la moyenne ;
- moins de 50 % des jeunes écoutent régulièrement un nombre de récepteurs radios inférieur à la moyenne.

2.



3. Première enquête :

La distribution n'est pas symétrique. La plus grande partie des jeunes écoute au plus 3 radios.

Le nombre de jeunes qui écoutent 2 radios est peu différent de ceux écoutant 3 radios. Peu de jeunes écoutent 5 radios. Les effectifs des valeurs du caractère inférieures à *Me* sont plus dispersés que ceux des valeurs supérieures, ce qui explique que la moyenne et la médiane sont différentes.

Deuxième enquête :

L'histogramme présente un axe de symétrie : les effectifs sont donc régulièrement répartis autour de la moyenne et la médiane qui sont peu différentes et appartiennent à l'intervalle [20 ; 30[.

Plus du tiers (≈ 38 %) des jeunes écoutent la radio entre 20 et 30 minutes.

Séquence 2 : QUELLE CHANCE DE TROUVER DE L'EAU ?

1. a. Effectif minimale : 0 réussite.
Effectif maximal : 7 réussites.
Étendue de la série : $e = 7 - 0 = 7$ réussites.

b. Pour calculer la moyenne de la série :

$$\overline{x} = \frac{2+4+1+7+3+5+5+3+2+1+5+5+0+1+1+3}{16} = \frac{48}{16} = 3 \text{ réussites.}$$

Pour calculer la médiane de la série :

- $\frac{N}{2} = \frac{16}{2} = 8.$
- Série rangée par ordre croissant : 0 ; 1 ; 1 ; 1 ; 1 ; 2 ; 2 ; 3 ; 3 ; 3 ; 4 ; 5 ; 5 ; 5 ; 5 ; 7
- $Me = \frac{3+3}{2} = 3$ réussites.

Remarque : $\overline{x}$ et *Me* peuvent aussi être déterminés avec une calculatrice graphique.

c. On a $\overline{x} = Me$.
Dans 50 % des expériences, le sourcier a un nombre de réussites égal ou inférieur à la moyenne.
De même, dans 50 % des expériences, le sourcier a un nombre de réussites égal ou supérieur à la moyenne.

d. $16 \times 0,25 = 4$ donc $Q_1 = 1$ réussite.
$16 \times 0,75 = 12$ donc $Q_3 = 5$ réussites.

2. Effectif minimal : 0 réussite.
Effectif maximal : 5 – 0 = 5 réussites.

3.

Indicateurs	$\overline{x}$	e	Q_1	Me	Q_3
1er sourcier	3	7	1	3	5
2nd sourcier	2	5	0	1,5	4

Tous les indicateurs du premier sourcier sont supérieurs à ceux du second : il a donc plus souvent réussi.

4. a. $p = \frac{1}{5} = 0,2$ soit 20 %.

b.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P
1	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0
2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	1
3	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1
4	0	0	0	0	1	1	0	1	0	1	0	0	1	0	0	0
5	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1
6	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1
7	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	1	1	1
8	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1
9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
10	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1
11	1	2	1	2	2	1	1	1	3	1	2	0	4	2	2	7
12																
13																
14		Effectif minimal			0			Effectif maximal			7					

Statistiques
Séquence d'évaluation 2
Quelle chance de trouver de l'eau ?

Effectif minimal : 0.
Effectif maximal : 7.

5. La simulation informatique donne des valeurs aléatoires comprises entre 0 et 7. Les sourciers ont obtenu des résultats dans cet intervalle de valeurs : leurs résultats peuvent donc être dus au hasard.

Séquence 3 : QUEL PRIX POUR CHAQUE BOÎTE DE VIS ?

Sur l'édition 01, une coquille s'est glissée dans l'énoncé ; il faut lire :
8 boîtes de 500 vis de 4×20 ;
10 boîtes … de 4×40 ;
12 boîtes … de 12×60…
Et modifier l'équation centrale de la question **3. a.** par $8\boldsymbol{x} + 20\boldsymbol{x} + 36\boldsymbol{x} = 375$.

1. a. Prix de vente moyen d'une boîte de vis : 375/30 = 12,50 €.

b. Exemple de réponse possible de la part d'un élève :
Non car les vis 4×60 sont plus « grosses » que les vis 4×20.

2. a. Prix de vente d'une boîte de vis courtes : 12,50 € – 5 € = 7,50 €.
Prix de vente d'une boîte de vis moyennes : 12,50 €.
Prix de vente d'une boîte de vis longues : 12,50 € + 5 € = 17,50 €.
Non, ces prix ne sont pas en accord avec les données du problème car $7{,}50 \times 8 + 12{,}50 \times 10 + 17{,}50 \times 12 = 395$ € et non 375 €.

b. Voir le travail proposé par l'élève.

3. a. La mise en équation du problème correspond à : $8x + 20x + 36x = 375$.

b. $8x + 20x + 36x = 375 \Leftrightarrow x = 5{,}86$ à 0,01 près.
On peut donc déterminer les prix suivants :
- prix de vente d'une boîte de vis courtes : 5,86 € ;
- prix de vente d'une boîte de vis moyennes : $2 \times 5{,}86$ € = 11,72 € ;
- prix de vente d'une boîte de vis longues : $3 \times 5{,}86$ € = 17,58 €.

Séquence 4 : S'ÉQUIPER POUR LE CAMPING

1. a. On a bien 232 – 219,5 = 12,50 €.
b. À partir du deuxième lot, on peut écrire que 3 tables modèle métal vont coûter 232 + 12,5 soit 244,5.
Une table modèle métal coûte 244,5/3 = 81,5 € alors que le modèle bois coûte 81,5 – 12,5 soit 69 €.

2. a. Résolution de l'équation à une inconnue : $x + 2(x + 12{,}5) = 232 \Leftrightarrow 3x = 207 \Leftrightarrow x = 69$.
La résolution du système donne $x = 69$ et $y = 81{,}5$
b. Le prix d'une table modèle bois est 69 € et celui d'un modèle métal 81,50 €.

3. Extrait du tableau :

68,00 €	80,50 €	216,50 €	229,00 €
68,50 €	81,00 €	218,00 €	230,50 €
69,00 €	81,50 €	219,50 €	232,00 €
69,50 €	82,00 €	221,00 €	233,50 €

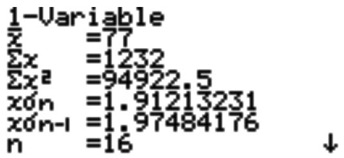
4. On peut donc lire dans le tableau que les prix sont 69,00 € et 81,50 €.

5. Ces prix ne sont pas en désaccord avec ce que l'on a trouvé précédemment.

Séquence 5 : DISTANCE D'ARRÊT D'UN VÉHICULE

1. L'élève peut proposer un calcul de moyenne ou une représentation graphique du nuage de points faisant apparaître une répartition des valeurs autour de 77.

2. En utilisant une calculatrice :

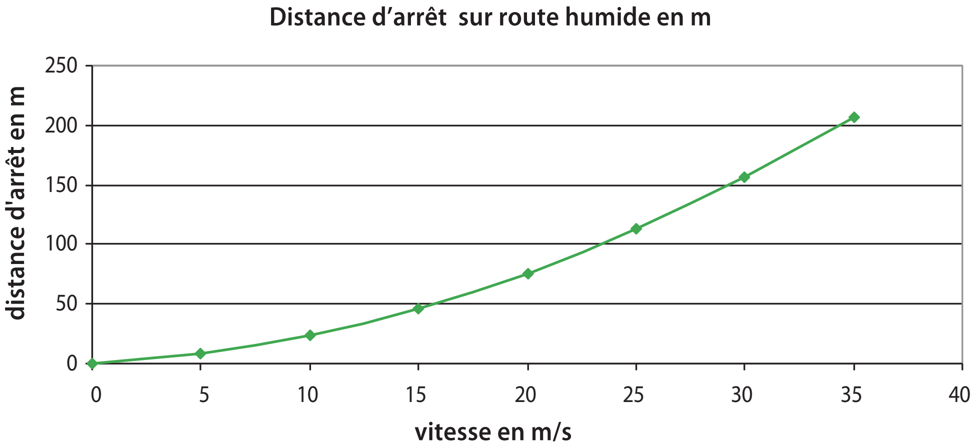


La moyenne de 77 m est confirmée.

3. Valeur arrondies au centimètre.

Vitesse en km/h	30	50	90	110	130
x en m/s	8,33	13,89	25,00	30,56	36,11
f(*x*) en m	14	30	77	108	144,5

4. Représentation graphique de la fonction *g* sur l'intervalle [0 ; 35]



5. Les élèves peuvent proposer une méthode graphique ou chercher à obtenir l'équation de la courbe de tendance pour comparer les distances d'arrêt sur route sèche à 130 km/h et 110 km/h sur route humide.

6. À 130 km/h sur route sèche, la distance d'arrêt est environ de 144,5 m.
Cette distance d'arrêt correspond à une vitesse de 28,8 m/s environ sur route humide, soit 104 km/h.
À 110 km/h, c'est-à-dire 30,5 m/s environ, la distance d'arrêt sur route humide est supérieure à 161 m.

7. Il paraît donc tout à fait nécessaire de limiter la vitesse à 110 km/h. Cette vitesse autorisée est même un peu élevée relativement à la limitation sur route sèche.

Séquence 6 : ÉVOLUTIONS DU PRIX DU PÉTROLE

1. La valeur du baril selon le modèle correspondant à la fonction g en 2030 serait $g(30) = 200$ $.

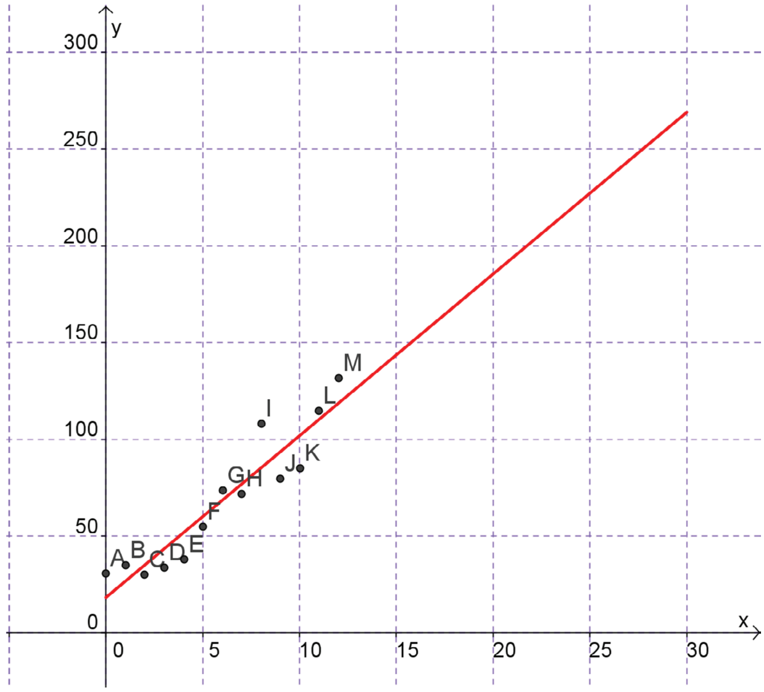
2. $h(30) = 85$. Cette valeur correspond au prix du baril de pétrole brut estimé par l'organisme C en 2030.

3. Prix du baril que donnerait le modèle choisi par l'organisme A en 2030 :

$$f(30) = 8{,}36 \times 30 + 18{,}24 = 269{,}04 \text{ \$}.$$

4. Seul l'organisme C considère que le prix du baril n'est pas en constante augmentation puisque seule la fonction h n'est pas strictement croissante.

5. L'élève propose une méthode utilisant le logiciel GeoGebra, permettant d'apprécier la validité du modèle A. Il peut, pour cela, placer les points et tracer la fonction grâce au logiciel.



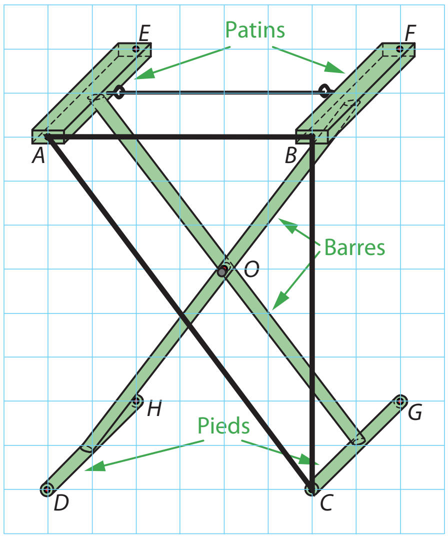
6. Toute justification argumentée visant à confirmer ou infirmer le choix du modèle choisi par l'organisme A peut être acceptée.

7. L'élève peut proposer au choix une méthode graphique (TIC ou non) ou la résolution d'une inéquation.

8. L'année où le prix du baril dépassera la valeur de 200 $ selon le modèle établi par l'organisme A est 2022.

9. $f(21) = 193{,}8$ $ et $f(22) = 202{,}16$ $.

Séquence 7 : LE SUPPORT DE PIANO



1. Sur le dessin en perspective cavalière :
- *ABCD* et *EFGH* sont des rectangles ;
- (*AE*) // (*BF*) // (*CG*) // (*DH*) ;
- $\widehat{EAB} = 45°$.

ABCDEFGH est donc un parallélépipède rectangle.

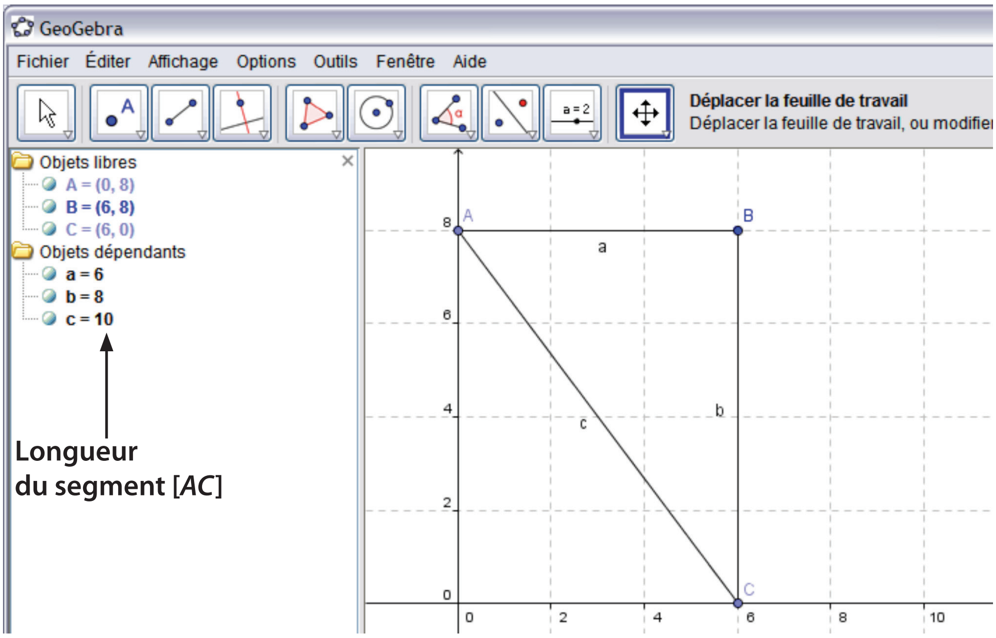
2. Solides usuels : 2 parallélépipèdes rectangles et 4 cylindres.
Figures planes : 12 rectangles et 4 disques.

3. a. Voir schéma ci-dessus à droite

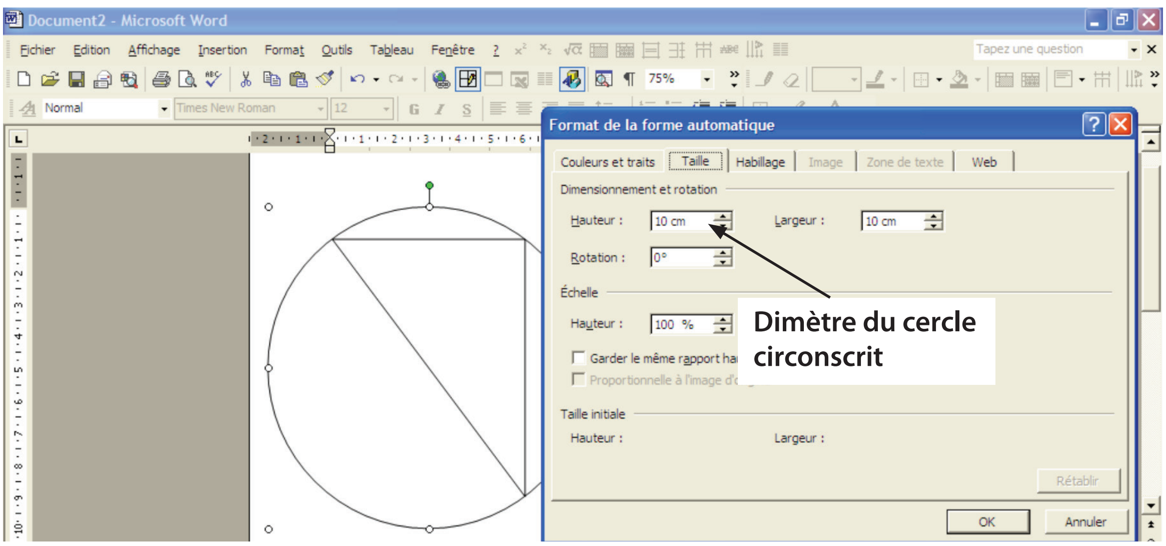
b. *ABC* est un triangle rectangle en *B* car *ABCD* est un rectangle dont *AC* est une diagonale.

4. Théorème de Pythagore :
$AC^2 = AB^2 + BC^2 \Rightarrow AC^2 = 60^2 + 80^2 \Rightarrow AC^2 = 3\,600 + 6\,400 \Rightarrow AC^2 = 10\,000$
Donc $AC = \sqrt{10\ 000} = 100$ cm

5. Avec GeoGebra :



Avec Word :



Séquence 8 : COMMENT DÉTERMINER LES GRADUATIONS D'UNE JAUGE ?

1. **Fût de 220 L**

a. πR^2 est l'expression de l'aire d'un disque ; $V = \pi R^2 h$ avec $V = 0{,}220\ \text{m}^3$ d'où $h = \dfrac{0{,}220}{\pi\left(\dfrac{0{,}584}{2}\right)^2}$ d'où $h \approx 0{,}821$ m.

b. La hauteur du fût de 220 L est de 82,1 cm.

c. La distance entre deux graduations de « 20 L » correspond à la hauteur h' d'un cylindre de volume $V' = 0{,}020\ \text{m}^3$: $h' = \dfrac{0{,}020}{\pi\left(\dfrac{0{,}584}{2}\right)^2}$ d'où $h' \approx 0{,}075$ m.

La distance entre deux graduations de « 20 L » est d'environ 7,5 cm.

On peut également remarquer la proportionnalité entre volume et hauteur d'un cylindre de même diamètre (ou rayon) : $h' = \dfrac{20}{220} \times 82{,}1$ d'où $h' \approx 0{,}075$ m.

2. **a.** Voir ci-contre.

b. La représentation graphique obtenue est une droite passant par l'origine du repère. La fonction f représentée est une fonction linéaire ; $f(x)$ est de la forme « ax » avec $a = \pi \times 2{,}92^2$.

c. Voir ci-contre.

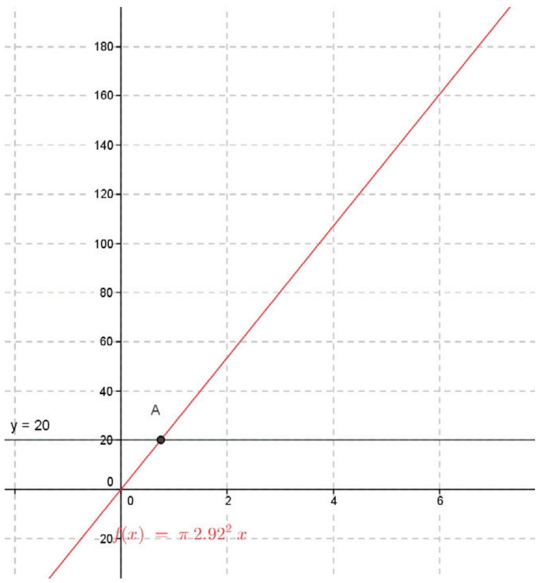
Par lecture du graphique pour l'équation $f(x) = 20$ on obtient $x = 0{,}75$.

3. **a.** $f(x)$ représente le volume du fût de diamètre 58,4 m (soit 2,92 dm de rayon) ; x est la hauteur de ce volume.

Le problème correspond à la résolution de l'équation : $f(x) = 220$.

b. Par lecture du graphique, on obtient : 8,21.

Ceci correspond à une hauteur d'environ 82,1 cm comme celle obtenue par calcul à la question **1. b.**



V, volume (L)	0	20	40	60	100	140	200	220
h, hauteur (dm)	0	0,75	1,49	2,24	3,73	5,23	7,47	8,21

4. **Fût de 110 L**

a. Pour obtenir un fut cylindrique de même diamètre mais dont le volume est divisé par 2, il suffit de diviser sa hauteur par 2. Le fût de 110 L a donc une hauteur d'environ 41,05 cm.

Pour vérifier ce résultat on peut :

- utiliser la représentation graphique de f pour résoudre $f(x) = 110$; on trouve $x = 4{,}11$: ceci correspond bien à environ 41, 05 cm ;
- on peut aussi calculer la hauteur h'' pour $V'' = 0{,}110\ \text{m}^3$; $h'' = \dfrac{0{,}110}{\pi\left(\dfrac{0{,}584}{2}\right)^2}\pi$ d'où $h'' \approx 0{,}411$ m.

b. En utilisant l'expression du volume d'un cylindre, pour un volume de 110 L et une hauteur de 0,82 m, on obtient pour rayon R''' : $R''' = \sqrt{\dfrac{0{,}110}{\pi \times 0{,}82}}$; d'où $R''' \approx 0{,}207$.

Le diamètre d'un fût de 110 L et de hauteur 82 cm a un diamètre d'environ 41,4 cm.

Pour vérifier ce résultat, on peut recalculer le volume d'un cylindre de 41,4 cm de diamètre et de hauteur 82 cm : $V''' = \pi \times 0{,}207^2 \times 0{,}82$. On obtient : $V''' = 0{,}110\ \text{m}^3$.

c. • Si le diamètre reste le même (58,4 cm), la distance entre deux traits de jauge correspondant à 20 L reste la même : $h'_1 = \dfrac{0,020}{\pi\left(\dfrac{0,584}{2}\right)^2}$ d'où $h'_1 \approx 0,075$ m (résultat obtenu à la question 1.c.).

• Si la hauteur reste la même et que le diamètre change (environ 41,4 cm), alors la distance entre deux traits de jauge est doublée par rapport à la situation précédente : $h'_2 = \dfrac{0,020}{\pi\left(\dfrac{0,414}{2}\right)^2}$ soit environ 14,9 cm.

Séquence 9 : LES CUBES D'UNE CASCADE DE JARDIN

1. a. Non : lorsqu'une dimension d'une figure est multipliée par un nombre k (ici l'arête du cube n°1 est multipliée par $\frac{1}{2}$), son volume est multiplié par k^3 (ici $\frac{1}{8}$). On peut conclure que $V_2 \neq \frac{V_1}{2}$.

- Le volume du cube n°2 est 8 fois plus petit que celui du cube n°1.
- On peut aussi rechercher le volume du cube n°2 à partir de son arête. L'arête du cube n°1 de volume $V_1 = 1$ m^3 est $a_1 = 1$ m ; celle du cube n°2 est donc $a_2 = 0,5$ m ; d'où $V_2 = 0,125$ m^3. On peut conclure que $V_2 \neq \frac{V_1}{2}$.

b. $V_2 = \frac{V_1}{8}$.

c. De manière similaire, comme $a_3 = \frac{a_2}{2}$, $V_3 = \frac{V_2}{8}$.

On obtient : $V_3 = 0,015\,652\,5$ m^3.

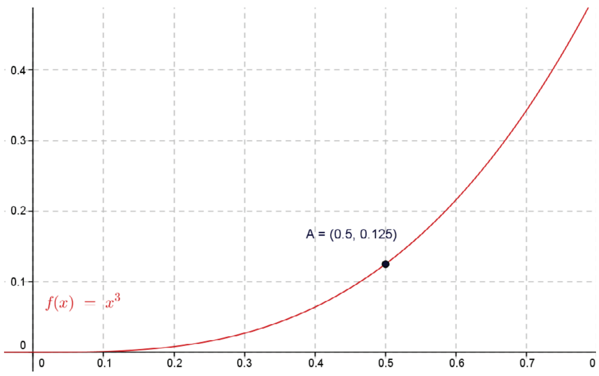
2. a. Voir graphique ci-contre.

b. Variation de f

x	0	1
f	0 ↗	1

c. La fonction f modélise la relation entre le volume d'un cube et la mesure de son arête.

x correspond à l'arête du cube et $f(x) = x^3$ au volume de celui-ci.



Sur le graphique, pour $x = 0,25$, on lit $f(x) = 0,016$; ce qui correspond au résultat de la question **1. c.**

3. a.

	Cube n°1	Cube n°2	Cube n°3
Arête (m)	1	0,500	0,250
Volume (m^3)	1	0,125	0,015625
Capacité (L)	1000	125	15,625

b. On retrouve les valeurs respectives des volumes des cubes n°2 et n°3 déterminés aux questions **1. b** et **1. c.**

4. Soit $V = V_1 + V_2 + V_3$ le volume total à remplir avant la mise en fonctionnement du système de circulation d'eau de la cascade. On trouve $V \approx 1,141$ m^3 soit environ 1 141 L.

Il faut donc 22,82 min $\left(\dfrac{1\,141}{50} \approx 22,82\right)$, soit environ 22 min et 49 s, pour remplir les trois cubes avec une pompe débitant 50 L/min.