Analysis 3 MA0003: Zusammenfassung

Jonas Treplin

February 25, 2023

1 Maßtheorie

Definition 1 (σ-Algebra) *Ein System $\mathcal{A} \subset P(\Omega)$ heißt σ-Algebra falls:*

$$\Omega \in \mathcal{A}$$

$$A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}$$

$$A_i \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A},$$

Die Elemente $A \in \mathcal{A}$ heißen messbar. Eine Menge $(\Omega, \mathcal{A})$ heißt Messraum.

Theorem 1 *Für jede σ-Algebra $\mathcal{A}$ gilt:*

- $\emptyset \in \mathcal{A}$
- $A_j \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcap_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{A}$

Theorem 2 (σ-Algebra auf Urbildern) *Folgende Konstruktion ist selbst wieder eine σ-Algebra:*

$$\tilde{\mathcal{A}} = \{f^{-1}(A) | A \in \mathcal{A}\}$$

Definition 2 (Erzeugen von σ-Algebren) *Für $\mathcal{E} \subset P(\Omega)$ ist die erzeugte σ-Algebra definiert als:*

$$\sigma(\mathcal{E}) = \bigcap \{\mathcal{A} | \mathcal{A} \textit{ ist } \sigma\textit{-Algebra und } \mathcal{E} \subset \mathcal{A}\}$$

Theorem 3 *Es gilt:*

- $E \subset F \Rightarrow \sigma(E) \subset \sigma(F)$
- *ist E selbst σ-Algebra dann ist $\sigma(E) = E$*

Definition 3 (Borel-σ-Algebra) *Wir definieren die Borel-σ-Algebra als:*

$$\sigma(\{O | O \in \Omega \textit{ offen}\})$$

Theorem 4 *Seien $\mathcal{J}^n$ die halboffenen Quader und $\mathcal{J}^n_{\mathbb{Q}}$ die halboffenen Quader mit rationalen Koeffizienten im $\mathbb{R}^n$. Sowie $\mathcal{O}^n, \mathcal{C}^n, \mathcal{K}^n$ die offenen, abgeschlossenen und kompakten Mengen auf dem $\mathbb{R}^n$, dann gilt:*

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) = \sigma(\mathcal{J}^n) = \sigma(\mathcal{J}^n_{\mathbb{Q}}) = \sigma(\mathcal{O}^n) = \sigma(\mathcal{C}^n) = \sigma(\mathcal{K}^n)$$

Definition 4 (Grenzwert von Mengen) *Wir definieren für* $(A_j)_{j\in\mathbb{N}}$*:*

- $\liminf A_j := \bigcup_{i=1}^{\infty}\bigcap_{j=i}^{\infty} A_j$ *Also alle Elemente von die in nur endlich vielen* A_j *nicht enthalten sind.*
- $\limsup A_j := \bigcap_{i=1}^{\infty}\bigcup_{j=i}^{\infty} A_j$ *Also alle Elemente die in unendlich vielen* A_j *enthalten sind.*

Definition 5 (Figur) *Eine Figur ist jede Menge, die durch die Vereinigung endlich vieler Quader erzeugt werden kann. Man bezeichnet* $\mathcal{F}^n$ *als den Raum der Figuren.*

Definition 6 (Ring) *Sei* $\mathcal{R} \subset P(\Omega)$ *mit:*

$$A, B \in \mathcal{R} \Rightarrow A \in \mathcal{R}$$

$$A, B \in \mathcal{R} \Rightarrow A \cup B \in \mathbb{R}$$

Dann heißt $\mathcal{R}$ *Ring.*

Definition 7 (Äußeres Maß) *Das äußere Maß* $\lambda^{n,*}$ *von* M *ist das Infimum der Größen aller Überdeckungen im Raum der Figuren von* M*.*

Definition 8 (Maß) *Ein Maß* $\mu : \mathcal{A} \to [0,\infty)$ *auf einer* σ*-Algebra* $\mathcal{A}$ *ist charakterisiert durch folgende Eigenschaften:*

$$\mu(\emptyset) = 0$$

$$\mu(\biguplus_{j=1}^{\infty}) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j)$$

Ein Maß heißt endlich falls $\mu(\Omega) < \infty$ *und* σ*-endlich falls eine Folge von* $A_1 \subset A_2 \subset ...$ *existiert mit* $A_j \nearrow \Omega$ *und* $\mu(A_j) < \infty$*.*
Eine Menge $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ *heißt Maßraum.*

Theorem 5 (Rechenregeln für Maße) *Es gilt:*

- $\mu(A \cap B) + \mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$
- $\mu(A \cup B) \leq \mu(A) + \mu(A)$
- $A \subset B \Rightarrow \mu(A) \leq \mu(B)$
- $A_j \nearrow A \Rightarrow \mu(A_j) \nearrow \mu(A)$
- *Falls* $\mu(A_0) < \infty$ *dann gilt auch* $A_j \nwarrow A \Rightarrow \mu(A_j) \nwarrow \mu(A)$
- $\mu(\bigcup_{j=0}^{\infty} A_j) \leq \sum_{j=0}^{\infty} \mu(A_j)$

Definition 9 (Dynkin-System) *Ein System* $\mathcal{D} \subset P(\Omega)$ *heißt Dynkin-System falls:*

$$\Omega \in \mathcal{D}$$

$$D \in \mathcal{D} \Rightarrow D^c \in \mathcal{D}$$

$$D_j \in \mathcal{D} \Rightarrow \biguplus_{j=1}^{\infty} D_j \in \mathcal{D}$$

Definition 10 (Minimales Dynkin-System) *Wir definieren das minimale Dynkin System für $\mathcal{E} \subset P(\Omega)$ als:*

$$\delta(\mathcal{E}) = \bigcup \{\mathcal{D} | \mathcal{D} \text{ ist Dynkin-System und } \mathcal{E} \subset \mathcal{D}\}$$

Theorem 6 *Es gilt:*

- $E \subset F \Rightarrow \delta(E) \subset \delta(F)$
- *Ist E selbst Dynkin System so ist $\delta(E) = E$.*
- $E \subset \delta(E) \subset \sigma(E)$

Theorem 7 *Es gilt für alle Dynkin-Systeme $\mathcal{D}$:*

$$\mathcal{D} \text{ schnitstabil} \iff \mathcal{D} \text{ ist } \sigma\text{-Algebra}$$

Außerdem falls ein Erzeugendensystem E schnittstabil ist, dann ist $\delta(E) = \sigma(E)$.

Theorem 8 (EIndeutigkeit der Maßerweiterung) *Sei $E \subset P(\Omega)$ schnittstabil und seien μ, ν Maße mit:*

$$\mu|_E = \nu|_E$$

und sei $E_j \in E$ mit $E_j \nearrow \Omega$, dann ist: $\mu(A) = \nu(A) \forall A \in \sigma(E)$

Definition 11 (Lebesgue-Borel-Maß) *Die Maßerweiterung für den Flächeninhalt eines Quaders ist eindeutig und wird mit λ^n als Lebesgue-Borel-Maß bezeichnet*

Definition 12 (Vervollständigung eines Maßes) *Ein Maßraum heißt vollständig, falls jede Teilmenge einer Nullmenge wieder messbar ist. Man kann einen Maßraum vervollständigen durch:*

$$\tilde{\mathcal{A}} = \{A | \exists M, N \in \mathcal{A} : M \subset A \subset N \land \mu(N/M) = 0\}$$

Man definiert dann $\mu(A) := \mu(N)$. Die Vervollständigung des Lebesgue-Borel-Maß wird als Lebesgue-Maß bezeichnet.

Theorem 9 (Erstes Littlewood'sches Prinzip) *Sei $A \subset \mathbb{R}^n$, A ist Lebesgue-messbar genau dann wenn zu jedem $\epsilon > 0$ eine offene Menge $A \subset O_\epsilon$ existiert, sodass:*

$$\lambda^{n,*}(O_\epsilon \backslash A) < \epsilon$$

Definition 13 (messbare Abbildung) *Für eine messbare Abbildung $f : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{A}})$ gilt: $f^{-1}(A) \in \mathcal{A} \forall A \in \tilde{\mathcal{A}}$.*

Theorem 10 *Sei $f : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{A}})$ und $\mathcal{E}$ ein Erzeugendensystem von $\tilde{\mathcal{A}}$, dann ist f bereits messbar falls gilt:*

$$f^{-1}(E) \in \mathcal{A} \forall E \in \mathcal{E}$$

Theorem 11 *Für $f : \Omega \to [-\infty, \infty]$ sind folgende Eigenschaften äquivalent:*

- *f ist messbar.*

- $\{\omega | f(\omega) \geq a\} \in \mathcal{A} \forall a$
- $\{\omega | f(\omega) > a\} \in \mathcal{A} \forall a$
- $\{\omega | f(\omega) \leq a\} \in \mathcal{A} \forall a$
- $\{\omega | f(\omega) < a\} \in \mathcal{A} \forall a$

Theorem 12 *Sei Ω_j eine Folge mit $\Omega = \bigcup \Omega_j$ dann ist f messbar gdw. $f|_{\Omega_j}$ alle messbar sind.*

Theorem 13 *Sei $f_j : \Omega \to [-\infty, \infty]$ eine Folge messbarer Funktionen, dann ist auch:*

$$\sup f_j, \inf f_j, \limsup f_j, \liminf f_j$$

alle messbar. Auch ist der Punktweise Grenzwert dieser Funktion falls er existiert messbar.

Theorem 14 *Kompositionen zweier messbarer Funktionen sind wieder messbar.*

Theorem 15 (Bildmaß) *Wir definieren $f(\mu)$ als $f(\mu)(A) = \mu(f^{-1}(A))$ als das Bildmaß.*

Theorem 16 *Das Lebesgue-Borel-Maß λ^n ist translationsinvariant. D.h. für jede affine Abbildung $T(x) = Ax + b, A \in \mathbb{R}^{n \times n}, b \in \mathbb{R}^n$ gilt:*

$$\mu(T(A)) = \mu(A)$$

Außerdem ist jedes andere translationsinvariante Maß ein skalares Vielfaches des Lebesgue-Maß. Zudem ist falls $U \in O(n)$:

$$\mu(U(A)) = \mu(A)$$

Zusammen ergibt sich, dass λ^n bewegungsinvariant ist:

Theorem 17 *Sei $L \in GL(n)$ dann gilt für das Bildmaß:*

$$L(\lambda^n) = \frac{1}{|det(L)|}\lambda^n$$

Theorem 18 (Vitali-Menge) *Es gibt eine Menge K die nicht Borel-Messbar ist.*

2 Lebesgue-Integral

Definition 14 (Einfache Funktion) *Eine Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}$ heißt einfache FUnktion wenn sie messbar ist und nur endlich viele Werte annimmt. Jede einfache Funktion hat also die Form:*

$$f(\omega) = \sum_{j=1}^{n} 1_{A_j}(\omega)\alpha_j$$

Wir definieren $E(\Omega)$ als den Raum der einfachen Funktionen auf Ω und $E_+(\Omega)$ als den Raum der positiven einfachen Funktionen.

Theorem 19 (Approximation durch einfache Funktionen) *Sei $f : \Omega \to [0, \infty]$ messbar, dann gibt es eine monoton wachsende Folge von positiven einfachen Funktionenf_j, sodass $f = \sup f_j$. Es ist sogar f nur genau dann messbar, wenn eine solche Folge existiert.*

Theorem 20 (Monotonieprinzip) *Sei F eine Menge von Funktionen mit folgenden Eigenschaften:*

- $1_A \in F$ *für alle* $A \in \mathcal{A}$.
- $f, g \in F \Rightarrow \alpha f + \beta g \in F$
- *Sei f_j eine monoton wachsende Folge in F, dann ist $\sup f_j \in F$.*

Dann enthält F die Menge aller messbaren Funktionen.

Definition 15 (Lebesgue-Integral für einfache Funktionen) *Sei f eine einfache positive Funktion mit Darstellung: $f = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j 1_{A_j}$, wobei die A_j paarweise disjunkt seien. Dann definieren wir:*

$$\int_\Omega f d\mu = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \mu(A_j)$$

Definition 16 (Lebesgue-Integral für messbare positive Funktionen) *Sei $f : \Omega \to [0, \infty]$ messbar. Dann existiert eine monotone Folge von einfachen Funktionen f_j mit $\sup f_j = f$. Das Lebesgue-integral von f ist definiert als:*

$$\int_\Omega f d\mu = \sup \int_\Omega f_j d\mu$$

Theorem 21 (Markov-Ungleichung) *Es gilt für jede positive messbare Funktion f und jede positive reelle Zahl w:*

$$\int_\Omega f d\mu \geq w\mu(f \geq w)$$

Definition 17 *Sei $f : \Omega \to [-\infty, \infty]$ messbar, dann heißt f integrierbar, falls:*

$$\int_\Omega f_+ d\mu < \infty, \int_\Omega f_- d\mu < \infty$$

Das Lebesgue-integral ist dann definiert als:

$$\int_\Omega f d\mu := \int_\Omega f_+ d\mu - \int_\Omega f_- d\mu$$

Theorem 22 *Es ist äquivalent:*

1. *f ist integrierbar*
2. *f_+ und $_-$ sind integrierbar.*
3. *Es gibt integrierbare Funktionen u, v sodass $f = u - v$.*
4. *Es gibt eine integrierbare Funktion g sodass $|f| \leq g$.*

5. *$|f|$ ist integrierbar.*

Theorem 23 *Das Integral ist monoton linear. Außerdem ist:* $|\int_\Omega f d\mu| \leq \int_\Omega |f| d\mu$

Theorem 24 (Klopapiersatz) *Ist $f = g$ fast überall dann gilt:*

$$\int_\Omega f d\mu = \int_\Omega g d\mu$$

Theorem 25 (Beppo-Levi) *Sei f_j eine fast überall monoton wachsende Folge nicht negativer messbarer Funktionen. Dann gilt:*

$$\lim \int_\Omega f_j d\mu = \int_\Omega \lim f_j d\mu$$

Theorem 26 (Lemma von Fatou) *Sei $f_j : \Omega \to [-\infty, \infty]$ fast überall nicht negativ und messbar Dann gilt:*

$$\int_\Omega \liminf f_j d\mu \leq \liminf \int_\Omega f_j d\mu$$

Theorem 27 (Satz der dominierten Konvergenz) *Sei $f_j : \Omega \to [-\infty, \infty]$ eine Folge messbarer Funktionen, die punktweise f.ü. gegen f konvergiert. Weiter existiere eine integrierbare Majorante $M : \Omega \to [0, \infty]$ mit $|f_j| \leq M$ f.ü. Dann ist:*

$$\lim \int_\Omega f_j d\mu = \int_\Omega f d\mu$$

Theorem 28 *Ist $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar und f' beschränkt dann gilt:* $f(b) - f(a) = \int_a^b f'(x) dx$

Theorem 29 *Auf einem kompakten Intervall ist jede regelintegrierbare Funktion auch Lebesgue-integrierbar*

Definition 18 (Absolut stetig) *Eine Funktion f heißt absolut stetig falls für jedes $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, sodass für jede endliche Folge von Teilintervallen $]x_k, y_k[$ mit $\sum_{j=1}^n y_j - x_j < \delta$ gilt:*

$$\sum_{j=1}^n |f(y_k) - f(x_k)| < \delta$$

Theorem 30 *Eine Funktion F ist genau dann darstellbar als: $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ wenn sie absolut stetig ist. Es gilt dann $F' = f$ f.ü.*

3 L^p-Räume

Definition 19 *Sei $p \in [1, \infty)$ dann definieren wir:*

$$s_p(f) = (\int |f|^p d\mu)^{1/p}$$

und
$$\mathcal{L}^p(\Omega) := \{f | f : \Omega \to [-\infty, \infty] \text{ messbar und } s_p(f) < \infty\}$$

Außerdem sei
$$L^p := \mathcal{L}^p / \sim$$

Wobei $f \sim g \iff \int f - g d\mu = 0$.

Theorem 31 (Young'sche Ungleichung) *Seien* $a, b \geq 0$ *und* $p, q > 1$, *sodass* $1/p + 1/q = 1$. *Dann ist:*

$$ab \leq \frac{1}{p} a^p + \frac{1}{q} b^q$$

Theorem 32 (Hölder Ungleichung) *Für* $p, q > 1$, *sodass* $1/p + 1/q = 1$ *gilt:*

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q$$

Theorem 33 (Minkowski Ungleichung) *Es gilt die Dreiecksungleichung:*

$$(\int |f + g|^p d\mu)^{\frac{1}{p}} \leq (\int |f|^p d\mu)^{\frac{1}{p}} + (\int |g|^p d\mu)^{\frac{1}{p}}$$

Definition 20 (p-Norm) *Sei* $p \in [0, \infty)$, *dann ist*

$$\|f\|_p := (\int |f|^p d\mu)^{\frac{1}{p}}$$

eine Norm in L^p.

Definition 21 (Wesentliches Supremum) *Das wesentliche Supremum für messbares* f *sei definiert als:*

$$esssup(f) := \inf\{M | M \geq f \text{ fast überall}\}$$

Außerdem seien $\mathcal{L} := \{f | esssup(f) < \infty\}$ *und* $L^\infty = \mathcal{L}^\infty / \sim$.

Theorem 34 *Auf* L^p *ist* $\|f\|_\infty := esssup(f)$ *eine Norm.*

Definition 22 (Konvergenzbegriffe) *Eine Folge* f_j *konvergiert gegen* f:

- *in der p-Norm oder im p-ten Mittel falls:*
$$\|f_j - f\|_p \to 0$$
- *punktweise fast überall falls:*
$$f_j(x) \to f(x)$$
fast überall.
- *im Maß falls:*
$$\lim_{j \to \infty} \mu(|f_j - f| > \epsilon) = 0$$

Theorem 35 (Vollständigkeit der L^p-Räume) *Für* $p \in [1, \infty]$ *ist*

Theorem 36 (Riesz-Fischer) *Falls $f_j \to f$ in $\|.\|_p$ Dann gibt es eine Teilfolge, sodass $f_{j_k} \to f$ fast überall.*

Theorem 37 *Für die Konvergenz im Maß gilt:*

- *$f_j \to g$ und $f_j \to f$ dann ist $f = g$ fast überall.*
- *$g_j \to g$ und $f_j \to f$ dann gilt: $\alpha f_j + \beta g_j \to \alpha f + \beta g$.*
- *Konvergiert $f_j \to f$ punktweise f.ü. dann gilt auch Konvergenz im Maß*
- *$f_j \to f$ im Maß, dann existiert eine Teilfolge $f_{j_k} \to f$ punktweise fast überall.*

Definition 23 (Bernstein-Polynom) *Wir definieren das Bernstein Polynom:*

$$B_k f(x) := \sum_{j=0}^{k} f(\frac{j}{k}) \binom{k}{j} x^j (1-x)^{k-j}$$

Theorem 38 (Weierstraß-Approximationssatz) *Für $f \in C[0,1]$ gilt:*

$$\|B_k f - f\|_\infty \to 0$$

Damit sind die Polynome dicht in $(C(K), \|.\|_\infty)$ für kompakte K.

4 Parameterabhängige Integrale

Theorem 39 *Sei $f : X \times \Omega \to \mathbb{R}$ mit $X \subset \mathbb{R}^n$ und weiterhin sei:*

- *$\omega \mapsto f(x,\omega)$ integrierbar für alle x*
- *$x \mapsto f(x,\omega)$ stetig in x^* für fast alle ω.*
- *$M \in \mathcal{L}^1$ eine Majorante: $|f(x,\omega)| \leq M(\omega)$ für alle x und fast alle ω.*

Dann ist $g(x) = \int_\Omega f(x,\omega) d\mu$ stetig an x^*.

Theorem 40 *Sei $f : X \times \Omega \to \mathbb{R}$ mit $X \subset \mathbb{R}^n$ und weiterhin sei:*

- *$\omega \mapsto f(x,\omega)$ integrierbar für alle x*
- *$\partial_i f(x,\omega)$ existiert für fast alle ω und alle x.*
- *$M \in \mathcal{L}^1$ eine Majorante: $|\partial_i f(x,\omega)| \leq M(\omega)$ für alle x und fast alle ω.*

Dann gilt für $g(x) = \int_\Omega f(x,\omega) d\mu$:

$$\partial_i g(x) = \int_\Omega \partial_i f(x,\omega) d\mu$$

5 Mehrfachintegrale

Definition 24 (Produkt-σ-Algebra) *Seien $(\Omega_j, \mathcal{A}_j)$ Messräume. Dann ist die Produkt-σ-Algebra definiert als:*

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \otimes ... \otimes \mathcal{A}_n = \sigma(\bigcup_{j=1}^{n} \pi_j^{-1}(\mathcal{A}_j))$$

Wobei $\pi_j(\omega_1, ..., \omega_n) = \omega_j$ die Projektion auf die j-te Komponente sei.

Theorem 41 *Seien $(\Omega_j, \mathcal{A}_j)$ Messräume mit Erzeugendensystemen $\mathcal{E}_j$. Existieren für jedes j eine Folge von $E_k \in \mathcal{E}_j$, sodass $\sup E_k = \Omega_j$ gilt, dann ist für $\mathcal{E}_1 \star ... \star \mathcal{E}_n := \{E_1 \times ... \times E_n | E_j \in \mathcal{E}_j\}$:*

$$\sigma(\mathcal{E}_1) \otimes ... \otimes \sigma(\mathcal{E}_n) = \sigma(\mathcal{E}_1 \star ... \star \mathcal{E}_n)$$

Definition 25 (Schnitte) *Wir definieren für eine Menge $A \subset X_1 \times X_2$ die Schnitte:*

- $A_{x_1} := \{x_2 | (x_1, x_2) \in A\} \subset X_2$
- $A^{x_2} := \{x_1 | (x_1, x_2) \in A\} \subset X_1$

Analog für eine Funktion $f : X_1 \times X_2 \to Y$:

- $f_{x_1}(x_2) := f(x_1, x_2)$
- $f_{x_2}(x_1) := f(x_1, x_2)$

Theorem 42 (Prinzip von Cavalieri) *Sei $A \in \mathcal{A}_2 \otimes \mathcal{A}_2$ und $f : X_1 \times X_2 \to Y$ messbar. Dann sind A_{x_1} und f_{x_1} messbar für jedes Feste x_1. Analog gilt dies auch für X_2. Mit den Maßen μ_1, μ_2 ist auch die Funktion $m_1(x_1) = \mu_2(A_{x_1})$ messbar. Dies gilt auch analog für X_2.*

Theorem 43 (Produktmaß) *Wir definieren das Produktmaß auf $(X_1 \times X_2, \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2)$ als:*

$$\mu_1 \otimes \mu_2(A_1 \times A_2) = \mu_1(A_1)\mu_2(A_2)$$

Dieses Maß erfüllt für $A \subset X_1 \times X_2$:

$$\mu_1 \otimes \mu_2(A) = \int_{X_1} \mu_2(A_{x_1}) dx_1 = \int_{X_2} \mu_1(A_{x_2}) dx_2$$

Theorem 44 (Satz von Tonelli) *Sei $f : X_1 \times X_2 \to [0, \infty]$, dann gilt: Die Funktionen $x_1 \mapsto \int_{X_2} f_{x_1}(x_2) dx_2$ und $x_2 \mapsto \int_{X_1} f^{x_2}(x_1) dx_1$ sind messbar und:*

$$\int_{X_1 \times X_2} f(x, x) dx = \int_{X_1} (\int_{X_2} f(x_1, x_2) dx_2) dx_1 = \int_{X_2} (\int_{X_1} f(x_1, x_2) dx_1) dx_2$$

Theorem 45 (Satz von Fubini) *Sei $f : X_1 \times X_2 \to \mathbb{R}$ integrierbar, dann ist:*

- f_{x_1} *und* f^{x_2} *für fast alle* x_1 *bzw.* x_2 *integrierbar.*
- $x_1 \mapsto \int_{X_2} f_{x_1}(x_2) dx_2$ *und* $x_2 \mapsto \int_{X_1} f^{x_2}(x_1) dx_1$ *integrierbar.*
- $$\int_{X_1 \times X_2} f(x, x) dx = \int_{X_1} (\int_{X_2} f(x_1, x_2) dx_2) dx_1 = \int_{X_2} (\int_{X_1} f(x_1, x_2) dx_1) dx_2$$

Um die Integrierbarkeit zu beweisen kann der Satz von Tonelli verwendet werden.

6 Parametertransformationen

Theorem 46 (Transformationsformel) *Seien* $\Phi : \tilde{\Omega} \to \Omega$ *und* $f : \Omega \to [0, \infty]$ *messbar. Dann gilt:*

$$\int_{\Omega} f d\Phi(\mu) = \int_{\tilde{\Omega}} f \circ \Phi d\mu$$

Theorem 47 (Transformationssatz von Jacobi) *Sei* $U, V \subset \mathbb{R}^n, \Phi : U \to V$ *ein Diffeomorphismus Sei* $f : V \to [-\infty, \infty]$ *messbar, dann gilt:*

$$\int_V f(y) d\lambda^n(y) = \int_U f(\Phi(u)) |\det D\Phi(u)| d\lambda^n(u)$$

falls $f \geq 0$ *oder einer der beiden Seiten integrierbar ist.*

Einige nützliche Transformationen:

1. Polarkoordinaten in der Ebene $\Phi : (0, \infty) \times (-\pi, \pi) \to \mathbb{R}^2, r, \theta \mapsto (r \cos\theta, r \sin\theta)$, es ist $|\det \Phi(r, \theta)| = r$.

2. Kugelkoordinaten $\Phi : (0, \infty) \times (-\pi, \pi) \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}^2$:

   $$\Phi(r, \theta, \phi) = (r \cos(\theta) \cos(\phi), r \sin(\theta) \cos(\phi), r \sin(\phi))$$

   Mit $|\det D\Phi(r, \theta, \phi)| = r^2 \cos(\phi)$

7 Approximationssätze

Theorem 48 (Jensen'sche Ungleichung) *Sei* μ *ein Wahrscheinlichkeitsmaß. Sei* I *ein Intervall und* $k : I \to \mathbb{R}$ *konvex und* $f : \Omega \to I$ *integrierbar, dann ist:*

$$k(\int_{\Omega} f d\mu) \leq \int_{\Omega} k \circ f d\mu$$

Definition 26 (Faltung) *Sei* $f, g : \mathbb{R}^n \to [-\infty, \infty]$*, dann heißt:*

$$(f \star g)(y) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x) g(y - x) dx$$

falls existent Faltung von f *und* g*.*

Theorem 49 *Es gilt:*

$$\|f \star g\|_p \leq \|f\|_p \|g\|_1$$

Definition 27 (mollifier) *Eine Funktion* $\phi \in \mathcal{L}^1$ *mit* $\phi \geq 0$ *und* $\|\phi\|_1 = 1$ *heißt Mollifier/Glättungskern.*

Theorem 50 *Sei* $f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)$ *und* ϕ *ein Mollifier dann gilt für* $\phi_\epsilon := \epsilon^{-n} \phi(x/\epsilon)$*:*

$$\|f \star \phi_\epsilon - f\|_p \to 0$$

Definition 28 (Support) *Der Support spielt mit dem ADC auf der Botlane. Der Träger/Support von f ist definiert als:*

$$supp(f) = \overline{\{x|f(x) \neq 0\}}$$

Weiter definieren wir C_c^∞ als die Menge der C^∞-Funktionen mit kompakten Träger.

Theorem 51 *Für $\phi \in C_c^\infty$ gilt:*

$$\partial^\alpha(f \star \phi) = f \star \partial^\alpha \phi$$

Theorem 52

$$\overline{C_c^\infty}^{\|\cdot\|_p} = L^p$$

Theorem 53 (Egorov) *Sei $\lambda(\Omega)$ endlich. Sei $f_j \to f$ fast überall so konvergiert f_j fast gleichmäßig gegen f. D.h. zu jedem $\delta > 0$ existiert eine abgeschlossene Menge E mit mit $\mu(E) < \delta$, sodass $f_j|_{E^c} \to f|_{E^c}$ gleichmäßig.*

Theorem 54 (Lusin) *Sei $\lambda(\Omega)$ endlich und $f\Omega \to \mathbb{R}$ integrierbar dann gibt es zu jedem $\epsilon > 0$ eine kompakte Menge K mit $\mu(\Omega \backslash K) < \epsilon$ sodass $f|_K$ stetig ist.*

8 Hilberträume

Definition 29 (Skalarprodukt) *Eine Abbildung $\langle .,. \rangle : H \times H \to \mathbb{K}$ heißt Skalarprodukt falls sie die folgenden Eigenschaften erfüllt:*

- *Positiv Definit: $\langle x, x \rangle > 0$ für $x \neq 0$.*
- *Hermitesch: $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$*
- *Sesquilinear: $\langle x, \alpha y + \beta z \rangle = \alpha \langle x, y \rangle + \beta \langle x, z \rangle$*

Das Skalarprodukt induziert eine Norm: $\|x\| = \sqrt{\langle x, x, \rangle}$. Ist H unter dieser Norm vollständig so heißt H Hilbertraum.

Theorem 55 (Parallelogrammgleichung) *Für die von einem Skalarprodukt definierte Norm gilt:*

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

Theorem 56 (Projektionssatz) *Sei $K \subset X$ eine konvexe, abgleschlossene, nichtleere Teilmenge des Hilbertaum X. Dann gibt es zu jedem $x \in X$ genau ein $y \in K$, sodass:*

$$\|x - y\| = \inf_{z \in K} \|z - x\|$$

Die Abbildung $P_K : X \to K, x \mapsto y$ heißt Projektion.

Theorem 57 (Variationsungleichung) *Sei $K \subset X$ eine konvexe, abgleschlossene, nichtleere Teilmenge des Hilbertaum X. Die Projektion $y = P_K x$ wird charakterisiert durch:*

$$\Re(\langle x - y, z - y \rangle) \leq 0 \forall z \in K$$

Ist K ein abgeschlossener Unterraum, dann vereinfacht sich dies zu:

$$\langle x - y, z \rangle = 0 \forall z \in K$$

Theorem 58 (Projektionssatz für Unterräume) *Sei U Unterverktorraum des Hilbertraum H. Es gilt:*

$$P_{U^\perp} = Id - P_U$$

Wenn $U \neq \{0\}$ dann ist: $\|P_U\| = 1$

Theorem 59 *Es gilt:*

$$Y^{\perp\perp} = \overline{spanY}$$

Theorem 60 (Darstellungssatz von Riesz) *Für jedes Funktional $x^* \in X^*$ existiert ein $x \in X$, sodass:*

$$x^*(y) = \langle x, y \rangle$$

Die Abbildung $J : X \to X^*$ ist bijektiv isometrisch und konjugiert linear.

Theorem 61 *Die abgeschlossene Einheitskugel ist genau dann kompakt, wenn der Raum endlichdimensional ist.*

Definition 30 (Orthonormalbasis) *Eine Menge $S =\subset X$ heißt Orthonormalsystem, falls $\|e\| = 1 \forall e \in S$ und $e \perp f \forall e \neq f \in S$. S heißt Orthonormalbasis, falls es kein Orthonormal System $\tilde{S}$ mit $S \subsetneq \tilde{S}$ gibt.*

Theorem 62 (Existenz einer Basis und Basiserweiterung) *Jeder nichttriviale Hilbertraum hat eine Orthonormalbasis. Zu jedem Orthonormalsystem S gibt es eine Orthonormalbasis $\tilde{S}$ mit $S \subset \tilde{S}$.*

Definition 31 (Separabilität) *Ein Banachraum X heißt separabel, wenn es eine abzählbare Teilmenge D gibt, sodass: $\overline{D} = X$.*

Theorem 63 *In einem separablen Hilbertraum ist jede Orthonormalbasis abzählbar.*

Theorem 64 *Sei X Hilbertraum und $S \subset X$ Orthonormalsystem und $\{e_1, ..., e_n\} \subset S$, und $U = span\{e_1, ..., e_n\}$. Dann ist:*

$$P_U(x) = \sum_{j=1}^{n} \langle x, e_j \rangle e_j$$

Außerdem gilt die Bessel'sche Ungleichung:

$$\sum_{j=1}^{n} |\langle x, e_j \rangle|^2 \leq \|x\|^2$$

Theorem 65 *Sei $S = \{e_j, j \in \mathbb{N}\} \subset X$ ein Orthonormalsystem. Es ist Äquivalent:*

- *S ist eine Orthonormalbasis*
- *$S^\perp = \{0\}$*
- *$\overline{spanS} = X$*

- *Für alle $x \in X$ gilt:*

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} \langle x, e_j \rangle e_j$$

- *Es gilt die Pasevalsche Gleichung:*

$$\|x\|^2 = \sum_{j=1}^{n} |\langle x, e_j \rangle|^2$$

Theorem 66 (Eindeutigkeit der stetigen Fortsetzung) *Sei X normiert und Y Banach, sowie $U \subset X$ ein dichter Unterraum und $S : U \to Y$ linear und stetig. Dann gibt es eine eindeutige Abbildung $T : X \to Y$, sodass $T|_U = S$ und $\|S\| = \|T\|$*

Theorem 67 *Jeder separable Hilbertraum ist isometrisch isomorph zu $l^2(\mathbb{K})$.*

Theorem 68 (Lax-Milgram) *Sei $a : X \times X \to \mathbb{K}$ eine Sesquilinearform mit:*

$$|a(x, y)| \leq C_0 \|x\| \|y\|$$

$$\Re a(x, x) \geq c_0 \|x\|^2$$

Dann exisitiert ein $A : X \to X$ mit:

$$a(x, y) = \langle Ax, y \rangle$$

und es gilt:

$$\|A\| \leq C_0, \|A^{-1}\| \leq \frac{1}{c_0}$$

9 Fourier-Analysis

Definition 32 (Trigonometrisches Polynom) *Eine Funktion der Form:*

$$x \mapsto \sum_{k=-N}^{N} c_k e^{ikx}$$

heißt trigonometrisches Polynom vom Grad N.
Man kann sie auch in der Reellen Form darstellen als:

$$x \mapsto \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{N} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)$$

Mit

$$a_0 = 2c_0, a_k = c_k + c_{-k}, b_k = i(c_k - c_{-k})$$

. Die Umformung in die andere Richtung funktioniert mit:

$$c_0 = a_0/2, c_k = (a_k - ib_k)/2, c_{-k} = (a_k + ib_k)/2$$

Theorem 69 *Für ein trigonometrisches Polynom $t : I \to \mathbb{C}$ ist äquivalent:*

- t *ist reellwertig*
- $c_k = \overline{c_{-k}}$
- $a_k, b_k \in \mathbb{R}$

Definition 33 *Sei $f : (-\pi, \pi) \to \mathbb{C}$ integrierbar. Dann sei:*

$$\hat{f}(k) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikx} f(x) dx$$

der k-te Fourierkoeffizient,

$$(S_N f)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=-N}^{N} \hat{f}(k) e^{ikx}$$

das N-te Fourier Polynom und

$$(S_\infty f)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}(k) e^{ikx}$$

die Fourierreihe.

Theorem 70 *Die trigonometrischen Polynome liegen dicht in $L^p((-\pi, \pi))$. In L^2 ist $S := \{\frac{1}{\sqrt{2}} e^{ikx} | k \in \mathbb{Z}\}$ eine Orthonormalbasis.*

Definition 34 (Dirichlet-Kern) *Wir definieren den Dirchletkern als:*

$$D_N(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-N}^{N} e^{ikx}$$

Es gilt $S_N f = (f \star D_N)$. Außerdem ist:

$$D_N(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi}(2N+1) & \text{falls } x = 2k\pi \\ \frac{1}{2\pi} \frac{\sin((2N+1)x/2)}{\sin(x/2)} & \text{andernfalls} \end{cases}$$

Theorem 71 (Riemann-Lebesgue) *Für reelles $f \in L^((-\pi, \pi))$ gilt:*

$$\lim_{N\to\infty} \hat{f}(N) = 0$$

Weiter ist:

$$\lim_{N\to\infty} \hat{f}(N) \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(Nx) dx = 0$$

sowie

$$\lim_{N\to\infty} \hat{f}(N) \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(Nx) dx = 0$$

Theorem 72 (Punktweise Konvergenz der Fourierreihe) *Sei $f \in L^1((-\pi, \pi))$ und besitze im Punkt x links- und rechsseitige Ableitung, dann gilt:*

$$\lim_{N\to\infty} (S_N f)(x) = \frac{f(x+) + f(x-)}{2}$$

Definition 35 *Man betrachtet auch das arithmetische Mittel der Fourierreihen:*

$$(\Sigma_N f)(x) = \frac{1}{N}\sum_{K=0}^{N}(S_K f)(x)$$

Dies lässt sich mit dem Fejer-Kern darstellen:

$$K_N = \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N} D_j$$

$$\Sigma_N f = (f \star K_N)$$

Theorem 73 *Der Fejer Kern hat folgende Darstellung:*

$$K_N(x) = \frac{1}{2\pi N}\left(\frac{\sin(\frac{N}{2}x)}{\sin(x/2)}\right)^2$$

Theorem 74 *Sei $f \in C[-\pi,\pi]$ mit $f(-\pi) = f(\pi)$. Dann gilt:*

$$\|\Sigma_N f - f\|_\infty \to 0$$

Theorem 75 *$S_N f$ ist die Bestapproximation von f auf den Raum der trigonometrischen Funktionen vom Grad maximal f im L^2-Sinn. Es gilt:*

$$\|f - S_N f\|_2^2 = \|f\|_2^2 - \sum_{k=-N}^{N} |\langle e_k, f\rangle|^2$$

10 Kurvenintegral

Definition 36 (Kurvenintegral) *Sei $F : \Omega \to \mathbb{R}^n$ und $\gamma : [a,b] \to \Omega$ stetig differenzierbar, dann definiert man das Kurvenintegral über:*

$$\int_{S(\gamma)} F d\gamma = \int_a^b \langle F(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle dt$$

Theorem 76 *Für differenzierbare Skalarfelder $f : \Omega \to \mathbb{R}$ gilt:*

$$\int_{S(\gamma)} \nabla f d\gamma = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))$$

Theorem 77 (Integrabilitätsbedingung) *Für ein Gradientenfeld $F = \nabla f, f \in C^2$ gilt:*

$$\partial_j F_i(x) = \partial_i F_j(x)$$

Definition 37 (sternförmig) *Eine Menge Y heißt sternförmig, falls es einen Punkt $x \in Y$ gibt, sodass $[x,y] \subset Y,\ \forall y \in Y$.*

Theorem 78 (Poincaré) *Auf einem sternförmigen offenen Gebiet Ω ist für $F : \Omega \to \mathbb{R}^n$ äquivalent:*

- *Die Integrabilitätsbedingung ist erfüllt für F.*

- *F ist ein Gradientenfeld*

Definition 38 (Wegzusammenhang) *Ein Raum X heißt wegzusammendhängend, wenn es für alle $x, y \in X$ eine Kurve$\gamma : [0,1] \to X$ gibt mit:*

$$\gamma(0) = x, \gamma(1) = y$$

Definition 39 (konservatives Vektorfeld) *Ein Vektorfeld F heißt konservativ, falls für alle Kurven γ_1, γ_2 gilt:*

$$\int_{S(\gamma_1)} F d\gamma_1 = \int_{S(\gamma_2)} F d\gamma_2$$

Theorem 79 *Auf einem wegzusammenhängend Ω ist $F : \Omega \to \mathbb{R}^n$ genau dann ein Gradientenfeld, wenn es konservativ ist.*

11 Oberflächenintegral

Definition 40 (C^∞-Zerlegung der 1) *Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ und $\mathcal{U} = (O_j)_{j\in[n]}$ eine offene Überdeckung eine Familie $\alpha_j \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ heißt C^∞-Zerlegung der 1, wenn:*

$$0 \leq \alpha_j \leq 1$$

$$supp(\alpha_j) \subset O_j$$

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j = 1$$

Für jede kompakte Teilmenge existiert eine offene Überdeckung mit passender C^∞-Zerlegung.

Definition 41 (Maßtensor) *Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine k-dimensionale C^1 Mannigfaltigkeit und $\psi : U \to O$ eine Parametrisierung. Wir definieren:*

$$G_\psi(u) = J_\psi(u)^T J_\psi(u), g_\psi(u) = \det G_\psi(u)$$

Definition 42 *Das Integral über die Oberfläche von M für eine Parametrisierung $\psi : U \to O$ ist definiert als:*

$$\int_O f(\xi) dS(\xi) = \int_U f(\psi(u)) \sqrt{g_\psi(u)} du$$

Das Integral über das gesamte M ist definiert mit hilfe einer Zerlegung der 1:

$$\int_M f(\xi) dS(\xi) = \sum_{j=1}^{N} \int_{O_j} \alpha_j(\xi) f(\xi) dS(\xi)$$

12 Sätze von Gauß, Green und Stokes

Theorem 80 (Satz von Gauß) *Sei Ω offen und beschränkt mit C^1-Rand und $\overline{\Omega} \subset V$. Sei $F : V \to \mathbb{R} \in C^1$, dann ist:*

$$\int_\Omega divF(x)d\lambda^n(x) = \int_{\partial\Omega} \langle F(\xi), \nu(\xi)\rangle dS(\xi)$$

Wobei $\nu(\xi)$ der nach außen zeigende Normalenvektor an ξ sei.

Theorem 81 (Erste Greensche Formel) *Sei $f \in C^1, g \in C^2$:*

$$\int_\Omega f(x)\Delta g(x) = -\int_\Omega \langle \nabla f(x), \nabla g(x)\rangle d\lambda^n(x) + \int_{\partial\Omega} f(\xi)\partial_\nu g(\xi) dS(\xi)$$

Wobei $\partial_\nu g(\xi) = \langle \nabla g(\xi), \nu(\xi)\rangle$.

Theorem 82 (Zweite Greensche Formel) *Sei $f \in C^1, g \in C^2$:*

$$\int_\Omega \Delta g(x)d\lambda^n(x) = \int_{\partial\Omega} \partial_\nu g(\xi)dS(\xi)$$

Ist außerdem $f \in C^2$:

$$\int_\Omega (f\Delta g - g\Delta f)(x)\mathrm{d}\lambda^n(x) = \int_{\partial\Omega} \left(f\partial_\nu g - g\partial_\nu f\right)(\xi)\mathrm{d}S(\xi)$$

Theorem 83

$$divF(x) = \lim_{\epsilon\to 0} \frac{1}{vol(B(x,\epsilon))} \int_{\delta B(x,\epsilon)} \langle F(\xi), \nu(\xi)\rangle dS(\xi)$$

Theorem 84 (Stokes in $\mathbb{R}^2$) *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ offen mit C^1-Rand welcher von ψ im mathematisch positiven sinn durchlaufen wird. Dann gilt:*

$$\int_{S(\psi)} F(x)d\psi = \int_\Omega \partial_1 F_2 - \partial_2 F_1$$

Theorem 85 (Stokes in $\mathbb{R}^3$) *Sei $O \subset \mathbb{R}^3$ eine 2-dimensionale C^1-Mannigfaltigkeit mit C^1-Rand welcher im mathematisch positiven Sinn von γ durchlaufen wird. Dann gilt:*

$$\int_{\partial O} F(x)d\gamma = \int_\Omega \langle rotF(\xi), \nu(\xi)\rangle dS(\xi)$$

Definition 43 *Seien μ und ν Maße. Dann ist ν absolutstetig bzgl. μ ($\nu << \mu$), wenn*

$$\mu(A) \Rightarrow \nu(A) = 0$$

Gilt die Umkehrung auch so heißen μ und ν äquivalent.
Das Maß μ heißt singulär zu ν ($\mu \perp \nu$), wenn ein A existiert, sodass:

$$\mu(A) = 0 \wedge \nu(\Omega \backslash A) = 0$$

Theorem 86 (Zerlegungssatz von Lebesgue) *Seien μ und ν σ-endlich. Dann lässt sich ν auf eindeutige weise in einen absolutstetigen Teil ν_a und singulären Teil ν_s bezüglich μ zerlegen:*

$$\nu = \nu_a + \nu_s$$

Theorem 87 *Seien μ und ν σ-endlich, dann ist äquivalent:*

- $\nu << \mu$
- *Es gibt eine Dichte $\rho : \Omega \to [0, \infty)$ mit $d\nu = \rho d\mu$.*