

Analysis 3 MA0003: Zusammenfassung

Jonas Treplin

February 25, 2023

1 Maßtheorie

Definition 1 (σ -Algebra) Ein System $\mathcal{A} \subset P(\Omega)$ heißt σ -Algebra falls:

$$\Omega \in \mathcal{A}$$

$$A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}$$

$$A_i \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A},$$

Die Elemente $A \in \mathcal{A}$ heißen messbar. Eine Menge (Ω, \mathcal{A}) heißt Messraum.

Theorem 1 Für jede σ -Algebra \mathcal{A} gilt:

- $\emptyset \in \mathcal{A}$
- $A_j \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcap_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{A}$

Theorem 2 (σ -Algebra auf Urbildern) Folgende Konstruktion ist selbst wieder eine σ -Algebra:

$$\tilde{\mathcal{A}} = \{f^{-1}(A) | A \in \mathcal{A}\}$$

Definition 2 (Erzeugen von σ -Algebren) Für $\mathcal{E} \subset P(\Omega)$ ist die erzeugte σ -Algebra definiert als:

$$\sigma(\mathcal{E}) = \bigcap \{\mathcal{A} | \mathcal{A} \text{ ist } \sigma\text{-Algebra und } \mathcal{E} \subset \mathcal{A}\}$$

Theorem 3 Es gilt:

- $E \subset F \Rightarrow \sigma(E) \subset \sigma(F)$
- ist E selbst σ -Algebra dann ist $\sigma(E) = E$

Definition 3 (Borel- σ -Algebra) Wir definieren die Borel- σ -Algebra als:

$$\sigma(\{O | O \in \Omega \text{ offen}\})$$

Theorem 4 Seien \mathcal{J}^n die halboffenen Quader und $\mathcal{J}_{\mathbb{Q}}^n$ die halboffenen Quader mit rationalen Koeffizienten im \mathbb{R}^n . Sowie $\mathcal{O}^n, \mathcal{C}^n, \mathcal{K}^n$ die offenen, abgeschlossenen und kompakten Mengen auf dem \mathbb{R}^n , dann gilt:

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) = \sigma(\mathcal{J}^n) = \sigma(\mathcal{J}_{\mathbb{Q}}^n) = \sigma(\mathcal{O}^n) = \sigma(\mathcal{C}^n) = \sigma(\mathcal{K}^n)$$

Definition 4 (Grenzwert von Mengen) Wir definieren für $(A_j)_{j \in \mathbb{N}}$:

- $\liminf A_j := \bigcup_{i=1}^{\infty} \bigcap_{j=i}^{\infty} A_j$ Also alle Elemente von die in nur endlich vielen A_j nicht enthalten sind.
- $\limsup A_j := \bigcap_{i=1}^{\infty} \bigcup_{j=i}^{\infty} A_j$ Also alle Elemente die in unendlich vielen A_j enthalten sind.

Definition 5 (Figur) Eine Figur ist jede Menge, die durch die Vereinigung endlich vieler Quader erzeugt werden kann. Man bezeichnet \mathcal{F}^n als den Raum der Figuren.

Definition 6 (Ring) Sei $\mathcal{R} \subset P(\Omega)$ mit:

$$A, B \in \mathcal{R} \Rightarrow AB \in \mathcal{R}$$

$$A, B \in \mathcal{R} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{R}$$

Dann heißt \mathcal{R} Ring.

Definition 7 (Äußeres Maß) Das äußere Maß $\lambda^{n,*}$ von M ist das Infimum der Größen aller Überdeckungen im Raum der Figuren von M .

Definition 8 (Maß) Ein Maß $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty)$ auf einer σ -Algebra \mathcal{A} ist charakterisiert durch folgende Eigenschaften:

$$\mu(\emptyset) = 0$$

$$\mu\left(\biguplus_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j)$$

Ein Maß heißt endlich falls $\mu(\Omega) < \infty$ und σ -endlich falls eine Folge von $A_1 \subset A_2 \subset \dots$ existiert mit $A_j \nearrow \Omega$ und $\mu(A_j) < \infty$.

Eine Menge $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ heißt Maßraum.

Theorem 5 (Rechenregeln für Maße) Es gilt:

- $\mu(A \cap B) + \mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$
- $\mu(A \cup B) \leq \mu(A) + \mu(B)$
- $A \subset B \Rightarrow \mu(A) \leq \mu(B)$
- $A_j \nearrow A \Rightarrow \mu(A_j) \nearrow \mu(A)$
- Falls $\mu(A_0) < \infty$ dann gilt auch $A_j \nearrow A \Rightarrow \mu(A_j) \nearrow \mu(A)$
- $\mu\left(\bigcup_{j=0}^{\infty} A_j\right) \leq \sum_{j=0}^{\infty} \mu(A_j)$

Definition 9 (Dynkin-System) Ein System $\mathcal{D} \subset P(\Omega)$ heißt Dynkin-System falls:

$$\Omega \in \mathcal{D}$$

$$D \in \mathcal{D} \Rightarrow D^c \in \mathcal{D}$$

$$D_j \in \mathcal{D} \Rightarrow \biguplus_{j=1}^{\infty} D_j \in \mathcal{D}$$

Definition 10 (Minimales Dynkin-System) Wir definieren das minimale Dynkin System für $\mathcal{E} \subset P(\Omega)$ als:

$$\delta(\mathcal{E}) = \bigcup \{ \mathcal{D} \mid \mathcal{D} \text{ ist Dynkin-System und } \mathcal{E} \subset \mathcal{D} \}$$

Theorem 6 Es gilt:

- $E \subset F \Rightarrow \delta(E) \subset \delta(F)$
- Ist E selbst Dynkin System so ist $\delta(E) = E$.
- $E \subset \delta(E) \subset \sigma(E)$

Theorem 7 Es gilt für alle Dynkin-Systeme \mathcal{D} :

$$\mathcal{D} \text{ schnittstabil} \iff \mathcal{D} \text{ ist } \sigma\text{-Algebra}$$

Außerdem falls ein Erzeugendensystem E schnittstabil ist, dann ist $\delta(E) = \sigma(E)$.

Theorem 8 (Eindeutigkeit der Maßerweiterung) Sei $E \subset P(\Omega)$ schnittstabil und seien μ, ν Maße mit:

$$\mu|_E = \nu|_E$$

und sei $E_j \in E$ mit $E_j \nearrow \Omega$, dann ist: $\mu(A) = \nu(A) \forall A \in \sigma(E)$

Definition 11 (Lebesgue-Borel-Maß) Die Maßerweiterung für den Flächeninhalt eines Quaders ist eindeutig und wird mit λ^n als Lebesgue-Borel-Maß bezeichnet

Definition 12 (Vervollständigung eines Maßes) Ein Maßraum heißt vollständig, falls jede Teilmenge einer Nullmenge wieder messbar ist. Man kann einen Maßraum vervollständigen durch:

$$\tilde{\mathcal{A}} = \{ A \mid \exists M, N \in \mathcal{A} : M \subset A \subset N \wedge \mu(N/M) = 0 \}$$

Man definiert dann $\mu(A) := \mu(N)$. Die Vervollständigung des Lebesgue-Borel-Maß wird als Lebesgue-Maß bezeichnet.

Theorem 9 (Erstes Littlewood'sches Prinzip) Sei $A \subset \mathbb{R}^n$, A ist Lebesgue-messbar genau dann wenn zu jedem $\epsilon > 0$ eine offene Menge $A \subset O_\epsilon$ existiert, sodass:

$$\lambda^{n,*}(O_\epsilon A) < \epsilon$$

Definition 13 (messbare Abbildung) Für eine messbare Abbildung $f : (\Omega, \mathcal{A}) \rightarrow (\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{A}})$ gilt: $f^{-1}(A) \in \mathcal{A} \forall A \in \tilde{\mathcal{A}}$.

Theorem 10 Sei $f : (\Omega, \mathcal{A}) \rightarrow (\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{A}})$ und \mathcal{E} ein Erzeugendensystem von $\tilde{\mathcal{A}}$, dann ist f bereits messbar falls gilt:

$$f(E) \in \tilde{\mathcal{A}} \forall E \in \mathcal{E}$$

Theorem 11 Für $f : \Omega \rightarrow [-\infty, \infty]$ sind folgende Eigenschaften äquivalent:

- f ist messbar.

- $\{\omega | f(\omega) \geq a\} \in \mathcal{A} \forall a$
- $\{\omega | f(\omega) > a\} \in \mathcal{A} \forall a$
- $\{\omega | f(\omega) \leq a\} \in \mathcal{A} \forall a$
- $\{\omega | f(\omega) < a\} \in \mathcal{A} \forall a$

Theorem 12 Sei Ω_j eine Folge mit $\Omega = \bigcup \Omega_j$ dann ist f messbar gdw. $f|_{\Omega_j}$ alle messbar sind.

Theorem 13 Sei $f_j : \Omega \rightarrow [-\infty, \infty]$ eine Folge messbarer Funktionen, dann ist auch:

$$\sup f_j, \inf f_j, \limsup f_j, \liminf f_j$$

alle messbar. Auch ist der Punktweise Grenzwert dieser Funktion falls er existiert messbar.

Theorem 14 Kompositionen zweier messbarer Funktionen sind wieder messbar.

Theorem 15 (Bildmaß) Wir definieren $f(\mu)$ als $f(\mu)(A) = \mu(f^{-1}(A))$ als das Bildmaß.

Theorem 16 Das Lebesgue-Borel-Maß λ^n ist translationsinvariant. D.h. für jede affine Abbildung $T(x) = Ax + b, A \in \mathbb{R}^{n \times n}, b \in \mathbb{R}^n$ gilt:

$$\mu(T(A)) = \mu(A)$$

Außerdem ist jedes andere translationsinvariante Maß ein skalares Vielfaches des Lebesgue-Maß. Zudem ist falls $U \in O(n)$:

$$\mu(U(A)) = \mu(A)$$

Zusammen ergibt sich, dass λ^n bewegungsinvariant ist:

Theorem 17 Sei $L \in GL(n)$ dann gilt für das Bildmaß:

$$L(\lambda^n) = \frac{1}{|\det(L)|} \lambda^n$$

Theorem 18 (Vitali-Menge) Es gibt eine Menge K die nicht Borel-Messbar ist.

2 Lebesgue-Integral

Definition 14 (Einfache Funktion) Eine Funktion $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ heißt einfache Funktion wenn sie messbar ist und nur endlich viele Werte annimmt. Jede einfache Funktion hat also die Form:

$$f(\omega) = \sum_{j=1}^n 1_{A_j}(\omega) \alpha_j$$

Wir definieren $E(\Omega)$ als den Raum der einfachen Funktionen auf Ω und $E_+(\Omega)$ als den Raum der positiven einfachen Funktionen.

Theorem 19 (Approximation durch einfache Funktionen) Sei $f : \Omega \rightarrow [0, \infty]$ messbar, dann gibt es eine monoton wachsende Folge von positiven einfachen Funktionen f_j , sodass $f = \sup f_j$. Es ist sogar f nur genau dann messbar, wenn eine solche Folge existiert.

Theorem 20 (Monotonieprinzip) Sei F eine Menge von Funktionen mit folgenden Eigenschaften:

- $1_A \in F$ für alle $A \in \mathcal{A}$.
- $f, g \in F \Rightarrow \alpha f + \beta g \in F$
- Sei f_j eine monoton wachsende Folge in F , dann ist $\sup f_j \in F$.

Dann enthält F die Menge aller messbaren Funktionen.

Definition 15 (Lebesgue-Integral für einfache Funktionen) Sei f eine einfache positive Funktion mit Darstellung: $f = \sum_{j=1}^n \alpha_j 1_{A_j}$, wobei die A_j paarweise disjunkt seien. Dann definieren wir:

$$\int_{\Omega} f d\mu = \sum_{j=1}^n \alpha_j \mu(A_j)$$

Definition 16 (Lebesgue-Integral für messbare positive Funktionen) Sei $f : \Omega \rightarrow [0, \infty]$ messbar. Dann existiert eine monotone Folge von einfachen Funktionen f_j mit $\sup f_j = f$. Das Lebesgue-integral von f ist definiert als:

$$\int_{\Omega} f d\mu = \sup \int_{\Omega} f_j d\mu$$

Theorem 21 (Markov-Ungleichung) Es gilt für jede positive messbare Funktion f und jede positive reelle Zahl w :

$$\int_{\Omega} f d\mu \geq w \mu(f \geq w)$$

Definition 17 Sei $f : \Omega \rightarrow [-\infty, \infty]$ messbar, dann heißt f integrierbar, falls:

$$\int_{\Omega} f_+ d\mu < \infty, \int_{\Omega} f_- d\mu < \infty$$

Das Lebesgue-integral ist dann definiert als:

$$\int_{\Omega} f d\mu := \int_{\Omega} f_+ d\mu - \int_{\Omega} f_- d\mu$$

Theorem 22 Es ist äquivalent:

1. f ist integrierbar
2. f_+ und f_- sind integrierbar.
3. Es gibt integrierbare Funktionen u, v sodass $f = u - v$.
4. Es gibt eine integrierbare Funktion g sodass $|f| \leq g$.

5. $|f|$ ist integrierbar.

Theorem 23 Das Integral ist monoton linear. Außerdem ist: $|\int_{\Omega} f d\mu| \leq \int_{\Omega} |f| d\mu$

Theorem 24 (Klopapiersatz) Ist $f = g$ fast überall dann gilt:

$$\int_{\Omega} f d\mu = \int_{\Omega} g d\mu$$

Theorem 25 (Beppo-Levi) Sei f_j eine fast überall monoton wachsende Folge nicht negativer messbarer Funktionen. Dann gilt:

$$\lim \int_{\Omega} f_j d\mu = \int_{\Omega} \lim f_j d\mu$$

Theorem 26 (Lemma von Fatou) Sei $f_j : \Omega \rightarrow [-\infty, \infty]$ fast überall nicht negativ und messbar. Dann gilt:

$$\int_{\Omega} \liminf f_j d\mu \leq \liminf \int_{\Omega} f_j d\mu$$

Theorem 27 (Satz der dominierten Konvergenz) Sei $f_j : \Omega \rightarrow [-\infty, \infty]$ eine Folge messbarer Funktionen, die punktweise f.ü. gegen f konvergiert. Weiter existiere eine integrierbare Majorante $M : \Omega \rightarrow [0, \infty]$ mit $|f_j| \leq M$ f.ü. Dann ist:

$$\lim \int_{\Omega} f_j d\mu = \int_{\Omega} f d\mu$$

Theorem 28 Ist $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar und f' beschränkt dann gilt: $f(b) - f(a) = \int_a^b f'(x) dx$

Theorem 29 Auf einem kompakten Intervall ist jede regelintegrierbare Funktion auch Lebesgue-integrierbar

Definition 18 (Absolut stetig) Eine Funktion f heißt absolut stetig falls für jedes $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, sodass für jede endliche Folge von Teilintervallen $]x_k, y_k[$ mit $\sum_{j=1}^n y_j - x_j < \delta$ gilt:

$$\sum_{j=1}^n |f(y_k) - f(x_k)| < \delta$$

Theorem 30 Eine Funktion F ist genau dann darstellbar als: $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ wenn sie absolut stetig ist. Es gilt dann $F' = f$ f.ü.

3 L^p -Räume

Definition 19 Sei $p \in [1, \infty)$ dann definieren wir:

$$s_p(f) = (\int |f|^p d\mu)^{1/p}$$

und

$$\mathcal{L}^p(\Omega) := \{f|f : \Omega \rightarrow [-\infty, \infty] \text{ messbar und } s_p(f) < \infty\}$$

Außerdem sei

$$L^p := \mathcal{L}^p / \sim$$

Wobei $f \sim g \iff \int f - g d\mu = 0$.

Theorem 31 (Young'sche Ungleichung) Seien $a, b \geq 0$ und $p, q > 1$, sodass $1/p + 1/q = 1$. Dann ist:

$$ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q$$

Theorem 32 (Hölder Ungleichung) Für $p, q > 1$, sodass $1/p + 1/q = 1$ gilt:

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q$$

Theorem 33 (Minkowski Ungleichung) Es gilt die Dreiecksungleichung:

$$\left(\int |f + g|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int |g|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$$

Definition 20 (p-Norm) Sei $p \in [0, \infty)$, dann ist

$$\|f\|_p := \left(\int |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$$

eine Norm in L^p .

Definition 21 (Wesentliches Supremum) Das wesentliche Supremum für messbares f sei definiert als:

$$\text{esssup}(f) := \inf\{M | M \geq f \text{ fast überall}\}$$

Außerdem seien $\mathcal{L} := \{f | \text{esssup}(f) < \infty\}$ und $L^\infty = \mathcal{L}^\infty / \sim$.

Theorem 34 Auf L^p ist $\|f\|_\infty := \text{esssup}(f)$ eine Norm.

Definition 22 (Konvergenzbegriffe) Eine Folge f_j konvergiert gegen f :

- in der p -Norm oder im p -ten Mittel falls:

$$\|f_j - f\|_p \rightarrow 0$$

- punktweise fast überall falls:

$$f_j(x) \rightarrow f(x)$$

fast überall.

- im Maß falls:

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \mu(|f_j - f| > \epsilon) = 0$$

Theorem 35 (Vollständigkeit der L^p -Räume) Für $p \in [1, \infty]$ ist

Theorem 36 (Riesz-Fischer) Falls $f_j \rightarrow f$ in $\|\cdot\|_p$ Dann gibt es eine Teilfolge, sodass $f_{j_k} \rightarrow f$ fast überall.

Theorem 37 Für die Konvergenz im Maß gilt:

- $f_j \rightarrow g$ und $f_j \rightarrow f$ dann ist $f = g$ fast überall.
- $g_j \rightarrow g$ und $f_j \rightarrow f$ dann gilt: $\alpha f_j + \beta g_j \rightarrow \alpha f + \beta g$.
- Konvergiert $f_j \rightarrow f$ punktweise f.ü. dann gilt auch Konvergenz im Maß
- $f_j \rightarrow f$ im Maß, dann existiert eine Teilfolge $f_{j_k} \rightarrow f$ punktweise fast überall.

Definition 23 (Bernstein-Polynom) Wir definieren das Bernstein Polynom:

$$B_k f(x) := \sum_{j=1}^k f\left(\frac{j}{k}\right) \binom{k}{j} x^j (1-x)^{k-j}$$

Theorem 38 (Weierstraß-Approximationssatz) Für $f \in C[0, 1]$ gilt:

$$\|B_k f - f\|_\infty \rightarrow 0$$

Damit sind die Polynome dicht in $(C(K), \|\cdot\|_\infty)$ für kompakte K .

4 Parameterabhängige Integrale

Theorem 39 Sei $f : X \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ mit $X \subset \mathbb{R}^n$ und weiterhin sei:

- $\omega \mapsto f(x, \omega)$ integrierbar für alle x
- $x \mapsto f(x, \omega)$ stetig in x^* für fast alle ω .
- $M \in \mathcal{L}^1$ eine Majorante: $|f(x, \omega)| \leq M(\omega)$ für alle x und fast alle ω .

Dann ist $g(x) = \int_\Omega f(x, \omega) d\mu$ stetig an x^* .

Theorem 40 Sei $f : X \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ mit $X \subset \mathbb{R}^n$ und weiterhin sei:

- $\omega \mapsto f(x, \omega)$ integrierbar für alle x
- $\partial_i f(x, \omega)$ existiert für fast alle ω und alle x .
- $M \in \mathcal{L}^1$ eine Majorante: $|\partial_i f(x, \omega)| \leq M(\omega)$ für alle x und fast alle ω .

Dann gilt für $g(x) = \int_\Omega f(x, \omega) d\mu$:

$$\partial_i g(x) = \int_\Omega \partial_i f(x, \omega) d\mu$$

5 Mehrfachintegrale

Definition 24 (Produkt- σ -Algebra) Seien $(\Omega_j, \mathcal{A}_j)$ Messräume. Dann ist die Produkt- σ -Algebra definiert als:

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{A}_n = \sigma\left(\bigcup_{j=1}^n \pi_j^{-1}(\mathcal{A}_j)\right)$$

Wobei $\pi_j(\omega_1, \dots, \omega_n) = \omega_j$ die Projektion auf die j -te Komponente sei.

Theorem 41 Seien $(\Omega_j, \mathcal{A}_j)$ Messräume mit Erzeugendensystemen \mathcal{E}_j . Existieren für jedes j eine Folge von $E_k \in \mathcal{E}_j$, sodass $\sup E_k = \Omega_j$ gilt, dann ist für $\mathcal{E}_1 \star \dots \star \mathcal{E}_n := \{E_1 \times \dots \times E_n \mid E_j \in \mathcal{E}_j\}$:

$$\sigma(\mathcal{E}_1) \otimes \dots \otimes \sigma(\mathcal{E}_n) = \sigma(\mathcal{E}_1 \star \dots \star \mathcal{E}_n)$$

Definition 25 (Schnitte) Wir definieren für eine Menge $A \subset X_1 \times X_2$ die Schnitte:

- $A_{x_1} := \{x_2 \mid (x_1, x_2) \in A\} \subset X_2$
- $A^{x_2} := \{x_1 \mid (x_1, x_2) \in A\} \subset X_1$

Analog für eine Funktion $f : X_1 \times X_2 \rightarrow Y$:

- $f_{x_1}(x_2) := f(x_1, x_2)$
- $f_{x_2}(x_1) := f(x_1, x_2)$

Theorem 42 (Prinzip von Cavalieri) Sei $A \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ und $f : X_1 \times X_2 \rightarrow Y$ messbar. Dann sind A_{x_1} und f_{x_1} messbar für jedes feste x_1 . Analog gilt dies auch für X_2 . Mit den Maßen μ_1, μ_2 ist auch die Funktion $m_1(x_1) = \mu_2(A_{x_1})$ messbar. Dies gilt auch analog für X_2 .

Theorem 43 (Produktmaß) Wir definieren das Produktmaß auf $(X_1 \times X_2, \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2)$ als:

$$\mu_1 \otimes \mu_2(A_1 \times A_2) = \mu_1(A_1)\mu_2(A_2)$$

Dieses Maß erfüllt für $A \subset X_1 \times X_2$:

$$\mu_1 \otimes \mu_2(A) = \int_{X_1} \mu_2(A_{x_1}) dx_1 = \int_{X_2} \mu_1(A^{x_2}) dx_2$$

Theorem 44 (Satz von Tonelli) Sei $f : X_1 \times X_2 \rightarrow [0, \infty]$, dann gilt: Die Funktionen $x_1 \mapsto \int_{X_2} f_{x_1}(x_2) dx_2$ und $x_2 \mapsto \int_{X_1} f^{x_2}(x_1) dx_1$ sind messbar und:

$$\int_{X_1 \times X_2} f(x, x) dx = \int_{X_1} \left(\int_{X_2} f(x_1, x_2) dx_2 \right) dx_1 = \int_{X_2} \left(\int_{X_1} f(x_1, x_2) dx_1 \right) dx_2$$

Theorem 45 (Satz von Fubini) Sei $f : X_1 \times X_2 \rightarrow \mathbb{R}$ integrierbar, dann ist:

- f_{x_1} und f^{x_2} für fast alle x_1 bzw. x_2 integrierbar.
- $x_1 \mapsto \int_{X_2} f_{x_1}(x_2) dx_2$ und $x_2 \mapsto \int_{X_1} f^{x_2}(x_1) dx_1$ integrierbar.

•

$$\int_{X_1 \times X_2} f(x, x) dx = \int_{X_1} \left(\int_{X_2} f(x_1, x_2) dx_2 \right) dx_1 = \int_{X_2} \left(\int_{X_1} f(x_1, x_2) dx_1 \right) dx_2$$

Um die Integrierbarkeit zu beweisen kann der Satz von Tonelli verwendet werden.

6 Parametertransformationen

Theorem 46 (Transformationsformel) Seien $\Phi : \tilde{\Omega} \rightarrow \Omega$ und $f : \Omega \rightarrow [0, \infty]$ messbar. Dann gilt:

$$\int_{\Omega} f d\Phi(\mu) = \int_{\tilde{\Omega}} f \circ \Phi d\mu$$

Theorem 47 (Transformationssatz von Jacobi) Sei $U, V \subset \mathbb{R}^n, \Phi : U \rightarrow V$ ein Diffeomorphismus. Sei $f : V \rightarrow [-\infty, \infty]$ messbar, dann gilt:

$$\int_V f(y) d\lambda^n(y) = \int_U f(\Phi(u)) |\det D\Phi(u)| d\lambda^n(u)$$

falls $f \geq 0$ oder einer der beiden Seiten integrierbar ist.

Einige nützliche Transformationen:

1. Polarkoordinaten in der Ebene $\Phi : (0, \infty) \times (-\pi, \pi) \rightarrow \mathbb{R}^2, r, \theta \mapsto (r \cos \theta, r \sin \theta)$, es ist $|\det \Phi(r, \theta)| = r$.
2. Kugelkoordinaten $\Phi : (0, \infty) \times (-\pi, \pi) \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \rightarrow \mathbb{R}^3$:

$$\Phi(r, \theta, \phi) = (r \cos(\theta) \cos(\phi), r \sin(\theta) \cos(\phi), r \sin(\phi))$$

$$\text{Mit } |\det D\Phi(r, \theta, \phi)| = r^2 \cos(\phi)$$

7 Approximationssätze

Theorem 48 (Jensen'sche Ungleichung) Sei μ ein Wahrscheinlichkeitsmaß. Sei I ein Intervall und $k : I \rightarrow \mathbb{R}$ konvex und $f : \Omega \rightarrow I$ integrierbar, dann ist:

$$k\left(\int_{\Omega} f d\mu\right) \leq \int_{\Omega} k \circ f d\mu$$

Definition 26 (Faltung) Sei $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow [-\infty, \infty]$, dann heißt:

$$(f \star g)(y) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x) g(y - x) dx$$

falls existent Faltung von f und g .

Theorem 49 Es gilt:

$$\|f \star g\|_p \leq \|f\|_p \|g\|_1$$

Definition 27 (mollifier) Eine Funktion $\phi \in \mathcal{L}^1$ mit $\phi \geq 0$ und $\|\phi\|_1 = 1$ heißt Mollifier/Glättungskern.

Theorem 50 Sei $f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)$ und ϕ ein Mollifier dann gilt für $\phi_{\epsilon} := \epsilon^{-n} \phi(x/\epsilon)$:

$$\|f \star \phi_{\epsilon} - f\|_p \rightarrow 0$$

Definition 28 (Support) Der Support spielt mit dem ADC auf der Botlane. Der Träger/Support von f ist definiert als:

$$\text{supp}(f) = \overline{\{x | f(x) \neq 0\}}$$

Weiter definieren wir C_c^∞ als die Menge der C^∞ -Funktionen mit kompakten Träger.

Theorem 51 Für $\phi \in C_c^\infty$ gilt:

$$\partial^\alpha(f \star \phi) = f \star \partial^\alpha \phi$$

Theorem 52

$$\overline{C_c^\infty}^{\|\cdot\|_p} = L^p$$

Theorem 53 (Egorov) Sei $\lambda(\omega)$ endlich. Sei $f_j \rightarrow f$ fast überall so konvergiert f_j fast gleichmäßig gegen f . D.h. zu jedem $\delta > 0$ existiert eine abgeschlossene Menge E mit $\mu(E) < \delta$, sodass $f_j|_{E^c} \rightarrow f|_{E^c}$ gleichmäßig.

Theorem 54 (Lusin) Sei $\lambda(\omega)$ endlich und $f\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ integrierbar dann gibt es zu jedem $\epsilon > 0$ eine kompakte Menge K mit $\mu(\Omega \setminus K) < \epsilon$ sodass $f|_K$ stetig ist.

8 Hilberträume

Definition 29 (Skalarprodukt) Eine Abbildung $\langle \cdot, \cdot \rangle : H \times H \rightarrow \mathbb{K}$ heißt Skalarprodukt falls sie die folgenden Eigenschaften erfüllt:

- *Positiv Definit:* $\langle x, x \rangle > 0$ für $x \neq 0$.
- *Hermesch:* $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$
- *Sesquilinear:* $\langle x, \alpha y + \beta z \rangle = \alpha \langle x, y \rangle + \beta \langle x, z \rangle$

Das Skalarprodukt induziert eine Norm: $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$. Ist H unter dieser Norm vollständig so heißt H Hilbertraum.

Theorem 55 (Parallelogrammgleichung) Für die von einem Skalarprodukt definierte Norm gilt:

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

Theorem 56 (Projektionssatz) Sei $K \subset X$ eine konvexe, abgeschlossene, nichtleere Teilmenge des Hilbertraum X . Dann gibt es zu jedem $x \in X$ genau ein $y \in K$, sodass:

$$\|x - y\| = \inf_{z \in K} \|x - z\|$$

Die Abbildung $P_K : X \rightarrow K, x \mapsto y$ heißt Projektion.

Theorem 57 (Variationsungleichung) Sei $K \subset X$ eine konvexe, abgeschlossene, nichtleere Teilmenge des Hilbertraum X . Die Projektion $y = P_K x$ wird charakterisiert durch:

$$\Re(\langle x - y, z - y \rangle) \leq 0 \forall z \in K$$

Ist K ein abgeschlossener Unterraum, dann vereinfacht sich dies zu:

$$\langle x - y, z \rangle = 0 \forall z \in K$$

Theorem 58 (Projektionssatz für Unterräume) Sei U Untervektorraum des Hilbertraum H . Es gilt:

$$P_{U^\perp} = Id - P_U$$

Wenn $U \neq \{0\}$ dann ist: $\|P_U\| = 1$

Theorem 59 Es gilt:

$$Y^{\perp\perp} = \overline{\text{span}Y}$$

Theorem 60 (Darstellungssatz von Riesz) Für jedes Funktional $x^* \in X^*$ existiert ein $x \in X$, sodass:

$$x^*(y) = \langle x, y \rangle$$

Die Abbildung $J : X \rightarrow X^*$ ist bijektiv isometrisch und konjugiert linear.

Theorem 61 Die abgeschlossene Einheitskugel ist genau dann kompakt, wenn der Raum endlichdimensional ist.

Definition 30 (Orthonormalbasis) Eine Menge $S \subset X$ heißt Orthonormalsystem, falls $\|e\| = 1 \forall e \in S$ und $e \perp f \forall e \neq f \in S$. S heißt Orthonormalbasis, falls es kein Orthonormal System \tilde{S} mit $S \subsetneq \tilde{S}$ gibt.

Theorem 62 (Existenz einer Basis und Basiserweiterung) Jeder nicht-triviale Hilbertraum hat eine Orthonormalbasis. Zu jedem Orthonormalsystem S gibt es eine Orthonormalbasis \tilde{S} mit $S \subset \tilde{S}$.

Definition 31 (Separabilität) Ein Banachraum X heißt separabel, wenn es eine abzählbare Teilmenge D gibt, sodass: $\overline{D} = X$.

Theorem 63 In einem separablen Hilbertraum ist jede Orthonormalbasis abzählbar.

Theorem 64 Sei X Hilbertraum und $S \subset X$ Orthonormalsystem und $\{e_1, \dots, e_n\} \subset S$, und $U = \text{span}\{e_1, \dots, e_n\}$. Dann ist:

$$P_U(x) = \sum_{j=1}^n \langle x, e_j \rangle e_j$$

Außerdem gilt die Bessel'sche Ungleichung:

$$\sum_{j=1}^n |\langle x, e_j \rangle|^2 \leq \|x\|^2$$

Theorem 65 Sei $S = \{e_j, j \in \mathbb{N}\} \subset X$ ein Orthonormalsystem. Es ist Äquivalent:

- S ist eine Orthonormalbasis
- $S^\perp = \{0\}$
- $\overline{\text{span}S} = X$

- Für alle $x \in X$ gilt:

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} \langle x, e_j \rangle e_j$$

- Es gilt die Parsevalsche Gleichung:

$$\|x\|^2 = \sum_{j=1}^n |\langle x, e_j \rangle|^2$$

Theorem 66 (Eindeutigkeit der stetigen Fortsetzung) Sei X normiert und Y Banach, sowie $U \subset X$ ein dichter Unterraum und $S : U \rightarrow Y$ linear und stetig. Dann gibt es eine eindeutige Abbildung $T : X \rightarrow Y$, sodass $T|_U = S$ und $\|S\| = \|T\|$

Theorem 67 Jeder separable Hilbertraum ist isometrisch isomorph zu $l^2(\mathbb{K})$.

Theorem 68 (Lax-Milgram) Sei $a : X \times X \rightarrow \mathbb{K}$ eine Sesquilinearform mit:

$$|a(x, y)| \leq C_0 \|x\| \|y\|$$

$$\Re a(x, x) \geq c_0 \|x\|^2$$

Dann existiert ein $A : X \rightarrow X$ mit:

$$a(x, y) = \langle Ax, y \rangle$$

und es gilt:

$$\|A\| \leq C_0, \|A^{-1}\| \leq \frac{1}{c_0}$$

9 Fourier-Analysis

Definition 32 (Trigonometrisches Polynom) Eine Funktion der Form:

$$x \mapsto \sum_{k=-N}^N c_k e^{ikx}$$

heißt trigonometrisches Polynom vom Grad N .

Man kann sie auch in der Reellen Form darstellen als:

$$x \mapsto \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^N a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)$$

Mit

$$a_0 = wc_0, a_k = c_k + c_{-k}, b_k = i(c_k - c_{-k})$$

. Die Umformung in die andere Richtung funktioniert mit:

$$c_0 = a_0/2, c_k = (a_k - ib_k)/2, c_{-k} = (a_k + ib_k)/2$$

Theorem 69 Für ein trigonometrisches Polynom $t : I \rightarrow \mathbb{C}$ ist äquivalent:

- t ist reellwertig
- $c_k = \overline{c_{-k}}$
- $a_k, b_k \in \mathbb{R}$

Definition 33 Sei $f : (-\pi, \pi) \rightarrow \mathbb{C}$ integrierbar. Dann sei:

$$\hat{f}(k) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikx} f(x) dx$$

der k -te Fourierkoeffizient,

$$(S_N f)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=-N}^N \hat{f}(k) e^{ikx}$$

das N -te Fourier Polynom und

$$(S_{\infty} f)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}(k) e^{ikx}$$

die Fourierreihe.

Theorem 70 Die trigonometrischen Polynome liegen dicht in $L^p((-\pi, \pi))$. In L^2 ist $S := \{\frac{1}{\sqrt{2}} e^{ikx} | k \in \mathbb{Z}\}$ eine Orthonormalbasis.

Definition 34 (Dirichlet-Kern) Wir definieren den Dirichletkern als:

$$D_N(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-N}^N e^{ikx}$$

Es gilt $S_N f = (f \star D_N)$. Außerdem ist:

$$D_N(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} (2N+1) & \text{falls } x = 2k\pi \\ \frac{1}{2\pi} \frac{\sin((2N+1)x/2)}{x/2} & \text{andernfalls} \end{cases}$$

Theorem 71 (Riemann-Lebesgue) Für reelles $f \in L^1((-\pi, \pi))$ gilt:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \hat{f}(N) = 0$$

Weiter ist:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \hat{f}(N) \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(Nx) dx = 0$$

sowie

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \hat{f}(N) \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(Nx) dx = 0$$

Theorem 72 (Punktweise Konvergenz der Fourierreihe) Sei $f \in L^1((-\pi, \pi))$ und besitze im Punkt x links- und rechtsseitige Ableitung, dann gilt:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} (S_N f)(x) = \frac{f(x+) - f(x-)}{2}$$

Definition 35 Man betrachtet auch das arithmetische Mittel der Fourierreihen:

$$(\Sigma_N f)(x) = \frac{1}{N} \sum_{K=0}^N (S_K f)(x)$$

Dies lässt sich mit dem Fejer-Kern darstellen:

$$K_N = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^N D_j$$

$$\Sigma_N f = (f \star K_N)$$

Theorem 73 Der Fejer Kern hat folgende Darstellung:

$$K_N(x) = \frac{1}{2\pi N} \left(\frac{\sin(\frac{N}{2}x)}{\sin(x/2)} \right)^2$$

Theorem 74 Sei $f \in C[-\pi, \pi]$ mit $f(-\pi) = f(\pi)$. Dann gilt:

$$\|\Sigma_N f - f\|_\infty \rightarrow 0$$

Theorem 75 $S_N f$ ist die Bestapproximation von f auf den Raum der trigonometrischen Funktionen vom Grad maximal f im L^2 -Sinn. Es gilt:

$$\|f - S_N f\|_2^2 = \|f\|_2^2 - \sum_{k=-N}^N |\langle e_k, f \rangle|^2$$

10 Kurvenintegral

Definition 36 (Kurvenintegral) Sei $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ und $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$ stetig differenzierbar, dann definiert man das Kurvenintegral über:

$$\int_{S(\gamma)} F d\gamma = \int_a^b \langle F(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt$$

Theorem 76 Für differenzierbare Skalarfelder $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ gilt:

$$\int_{S(\gamma)} \nabla f d\gamma = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))$$

Theorem 77 (Integrabilitätsbedingung) Für ein Gradientenfeld $F = \nabla f, f \in C^2$ gilt:

$$\partial_j F_i(x) = \partial_i F_j(x)$$

Definition 37 (sternförmig) Eine Menge Y heißt sternförmig, falls es einen Punkt $x \in Y$ gibt, sodass $[x, y] \subset Y, \forall y \in Y$.

Theorem 78 (Poincaré) Auf einem sternförmigen offenen Gebiet Ω ist für $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ äquivalent:

- Die Integrabilitätsbedingung ist erfüllt für F .

- F ist ein Gradientenfeld

Definition 38 (Wegzusammenhang) Ein Raum X heißt wegzusammenhängend, wenn es für alle $x, y \in X$ eine Kurve $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ gibt mit:

$$\gamma(0) = x, \gamma(1) = y$$

Definition 39 (konservatives Vektorfeld) Ein Vektorfeld F heißt konservativ, falls für alle Kurven γ_1, γ_2 gilt:

$$\int_{S(\gamma_1)} F d\gamma_1 = \int_{S(\gamma_2)} F d\gamma_2$$

Theorem 79 Auf einem wegzusammenhängend Ω ist $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ genau dann ein Gradientenfeld, wenn es konservativ ist.

11 Oberflächenintegral

Definition 40 (C^∞ -Zerlegung der 1) Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ und $\mathcal{U} = (O_j)_{j \in [n]}$ eine offene Überdeckung eine Familie $\alpha_j \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ heißt C^∞ -Zerlegung der 1, wenn:

$$0 \leq \alpha_j \leq 1$$

$$\text{supp}(\alpha_j) \subset O_j$$

$$\sum_{j=1}^n \alpha_j = 1$$

Für jede kompakte Teilmenge existiert eine offene Überdeckung mit passender C^∞ -Zerlegung.

Definition 41 (Maßtensor) Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine k -dimensionale C^1 Mannigfaltigkeit und $\psi : U \rightarrow O$ eine Parametrisierung. Wir definieren:

$$G_\psi(u) = J_\psi(u)^T J_\psi(u), g_\psi(u) = \det G_\psi(u)$$

Definition 42 Das Integral über die Oberfläche von M für eine Parametrisierung $\psi : U \rightarrow O$ ist definiert als:

$$\int_O f(\xi) dS(\xi) = \int_U f(\psi(u)) \sqrt{g_\psi(u)} du$$

Das Integral über das gesamte M ist definiert mit Hilfe einer Zerlegung der 1:

$$\int_M f(\xi) dS(\xi) = \sum_{j=1}^N \int_{O_j} \alpha_j(\xi) f(\xi) dS(\xi)$$

12 Sätze von Gauß, Green und Stokes

Theorem 80 (Satz von Gauß) Sei Ω offen und beschränkt mit C^1 -Rand und $\bar{\Omega} \subset V$. Sei $F : V \rightarrow \mathbb{R} \in C^1$, dann ist:

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} F(x) d\lambda^n(x) = \int_{\partial\Omega} \langle F(\xi), \nu(\xi) \rangle dS(\xi)$$

Wobei $\nu(\xi)$ der nach außen zeigende Normalenvektor an ξ sei.

Theorem 81 (Erste Greensche Formel) Sei $f \in C^1, g \in C^2$:

$$\int_{\Omega} f(x) \Delta g(x) = - \int_{\Omega} \langle \nabla f(x), \nabla g(x) \rangle d\lambda^n(x) + \int_{\partial\Omega} f(\xi) \partial_{\nu} g(\xi) dS(\xi)$$

Wobei $\partial_{\nu} g(\xi) = \langle \nabla g(\xi), \nu(\xi) \rangle$.

Theorem 82 (Zweite Greensche Formel) Sei $f \in C^1, g \in C^2$:

$$\int_{\Omega} \Delta g(x) d\lambda^n(x) = \int_{\partial\Omega} \partial_{\nu} g(\xi) dS(\xi)$$

Ist außerdem $f \in C^2$:

$$\int_{\Omega} (f \Delta g - g \Delta f)(x) d\lambda^n(x) = \int_{\partial\Omega} (f \partial_{\nu} g - g \partial_{\nu} f)(\xi) dS(\xi)$$

Theorem 83

$$\operatorname{div} F(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\operatorname{vol}(B(x, \epsilon))} \int_{\partial B(x, \epsilon)} \langle F(\xi), \nu(\xi) \rangle dS(\xi)$$

Theorem 84 (Stokes in \mathbb{R}^2) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ offen mit C^1 -Rand welcher von ψ im mathematisch positiven Sinn durchlaufen wird. Dann gilt:

$$\int_{S(\psi)} F(x) d\psi = \int_{\Omega} \partial_1 F_2 - \partial_2 F_1$$

Theorem 85 (Stokes in \mathbb{R}^3) Sei $O \subset \mathbb{R}^3$ eine 2-dimensionale C^1 -Mannigfaltigkeit mit C^1 -Rand welcher im mathematisch positiven Sinn von γ durchlaufen wird. Dann gilt:

$$\int_{\partial O} F(x) d\gamma = \int_{\Omega} \langle \operatorname{rot} F(\xi), \nu(\xi) \rangle dS(\xi)$$

Definition 43 Seien μ und ν Maße. Dann ist ν absolutstetig bzgl. μ ($\nu \ll \mu$), wenn

$$\mu(A) = 0 \Rightarrow \nu(A) = 0$$

Gilt die Umkehrung auch so heißen μ und ν äquivalent.

Das Maß μ heißt singulär zu ν ($\mu \perp \nu$), wenn ein A existiert, sodass:

$$\mu(A) = 0 \wedge \nu(\Omega \setminus A) = 0$$

Theorem 86 (Zerlegungssatz von Lebesgue) Seien μ und ν σ -endlich. Dann lässt sich ν auf eindeutige Weise in einen absolutstetigen Teil ν_a und singulären Teil ν_s bezüglich μ zerlegen:

$$\nu = \nu_a + \nu_s$$

Theorem 87 *Seien μ und ν σ -endlich, dann ist äquivalent:*

- $\nu \ll \mu$
- *Es gibt eine Dichte $\rho : \Omega \rightarrow [0, \infty)$ mit $d\nu = \rho d\mu$.*