# Analysis 3 MA0003: Zusammenfassung

Jonas Treplin

February 23, 2023

## 1 Maßtheorie

**Definition 1 ($\sigma$-Algebra)** *Ein System $\mathcal{A} \subset P(\Omega)$ heißt $\sigma$-Algebra falls:*

$$\Omega \in \mathcal{A}$$

$$A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}$$

$$A_i \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A},$$

*Die Elemente $A \in \mathcal{A}$ heißen messbar. Eine Menge $(\Omega, \mathcal{A})$ heißt Messraum.*

**Theorem 1** *Für jede $\sigma$-Algebra $\mathcal{A}$ gilt:*

- $\emptyset \in \mathcal{A}$
- $A_j \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcap_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{A}$

**Theorem 2 ($\sigma$-Algebra auf Urbildern)** *Folgende Konstruktion ist selbst wieder eine $\sigma$-Algebra:*

$$\tilde{\mathcal{A}} = \{f^{-1}(A) | A \in \mathcal{A}\}$$

**Definition 2 (Erzeugen von $\sigma$-Algebren)** *Für $\mathcal{E} \subset P(\Omega)$ ist die erzeugte $\sigma$-Algebra definiert als:*

$$\sigma(\mathcal{E}) = \bigcap \{\mathcal{A} | \mathcal{A} \text{ ist } \sigma\text{-Algebra und } \mathcal{E} \subset \mathcal{A}\}$$

**Theorem 3** *Es gilt:*

- $E \subset F \Rightarrow \sigma(E) \subset \sigma(F)$
- *ist $E$ selbst $\sigma$-Algebra dann ist $\sigma(E) = E$*

**Definition 3 (Borel-$\sigma$-Algebra)** *Wir definieren die Borel-$\sigma$-Algebra als:*

$$\sigma(\{O | O \in \Omega \text{ offen}\})$$

**Theorem 4** *Seien $\mathcal{J}^n$ die halboffenen Quader und $\mathcal{J}^n_{\mathbb{Q}}$ die halboffenen Quader mit rationalen Koeffizienten im $\mathbb{R}^n$. Sowie $\mathcal{O}^n, \mathcal{C}^n, \mathcal{K}^n$ die offenen, abgeschlossenen und kompakten Mengen auf dem $\mathbb{R}^n$, dann gilt:*

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) = \sigma(\mathcal{J}^n) = \sigma(\mathcal{J}^n_{\mathbb{Q}}) = \sigma(\mathcal{O}^n) = \sigma(\mathcal{C}^n) = \sigma(\mathcal{K}^n)$$

**Definition 4 (Grenzwert von Mengen)** *Wir definieren für* $(A_j)_{j\in\mathbb{N}}$*:*

- $\liminf A_j := \bigcup_{i=1}^{\infty}\bigcap_{j=i}^{\infty} A_j$ *Also alle Elemente von die in nur endlich vielen* $A_j$ *nicht enthalten sind.*
- $\limsup A_j := \bigcap_{i=1}^{\infty}\bigcup_{j=i}^{\infty} A_j$ *Also alle Elemente die in unendlich vielen* $A_j$ *enthalten sind.*

**Definition 5 (Figur)** *Eine Figur ist jede Menge, die durch die Vereinigung endlich vieler Quader erzeugt werden kann. Man bezeichnet* $\mathcal{F}^n$ *als den Raum der Figuren.*

**Definition 6 (Ring)** *Sei* $\mathcal{R} \subset P(\Omega)$ *mit:*

$$A, B \in \mathcal{R} \Rightarrow AB \in \mathcal{R}$$

$$A, B \in \mathcal{R} \Rightarrow A \cup B \in \mathbb{R}$$

*Dann heißt* $\mathcal{R}$ *Ring.*

**Definition 7 (Äußeres Maß)** *Das äußere Maß* $\lambda^{n,*}$ *von* $M$ *ist das Infimum der Größen aller Überdeckungen im Raum der Figuren von* $M$*.*

**Definition 8 (Maß)** *Ein Maß* $\mu : \mathcal{A} \to [0,\infty)$ *auf einer* $\sigma$*-Algebra* $\mathcal{A}$ *ist charakterisiert durch folgende Eigenschaften:*

$$\mu(\emptyset) = 0$$

$$\mu(\biguplus_{j=1}^{\infty}) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j)$$

*Ein Maß heißt endlich falls* $\mu(\Omega) < \infty$ *und* $\sigma$*-endlich falls eine Folge von* $A_1 \subset A_2 \subset ...$ *existiert mit* $A_j \nearrow \Omega$ *und* $\mu(A_j) < \infty$*.*
*Eine Menge* $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ *heißt Maßraum.*

**Theorem 5 (Rechenregeln für Maße)** *Es gilt:*

- $\mu(A \cap B) + \mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$
- $\mu(A \cup B) \leq \mu(A) + \mu(A)$
- $A \subset B \Rightarrow \mu(A) \leq \mu(B)$
- $A_j \nearrow A \Rightarrow \mu(A_j) \nearrow \mu(A)$
- *Falls* $\mu(A_0) < \infty$ *dann gilt auch* $A_j \nwarrow A \Rightarrow \mu(A_j) \nwarrow \mu(A)$
- $\mu(\bigcup_{j=0}^{\infty} A_j) \leq \sum_{j=0}^{\infty} \mu(A_j)$

**Definition 9 (Dynkin-System)** *Ein System* $\mathcal{D} \subset P(\Omega)$ *heißt Dynkin-System falls:*

$$\Omega \in \mathcal{D}$$

$$D \in \mathcal{D} \Rightarrow D^c \in \mathcal{D}$$

$$D_j \in \mathcal{D} \Rightarrow \biguplus_{j=1}^{\infty} D_j \in \mathcal{D}$$

**Definition 10 (Minimales Dynkin-System)** *Wir definieren das minimale Dynkin System für $\mathcal{E} \subset P(\Omega)$ als:*

$$\delta(\mathcal{E}) = \bigcup \{\mathcal{D} | \mathcal{D} \textit{ ist Dynkin-System und } \mathcal{E} \subset \mathcal{D}\}$$

**Theorem 6** *Es gilt:*

- $E \subset F \Rightarrow \delta(E) \subset \delta(F)$
- *Ist $E$ selbst Dynkin System so ist $\delta(E) = E$.*
- $E \subset \delta(E) \subset \sigma(E)$

**Theorem 7** *Es gilt für alle Dynkin-Systeme $\mathcal{D}$:*

$$\mathcal{D} \textit{ schnitstabil} \iff \mathcal{D} \textit{ ist } \sigma\textit{-Algebra}$$

*Außerdem falls ein Erzeugendensystem $E$ schnittstabil ist, dann ist $\delta(E) = \sigma(E)$.*

**Theorem 8 (EIndeutigkeit der Maßerweiterung)** *Sei $E \subset P(\Omega)$ schnittstabil und seien $\mu, \nu$ Maße mit:*

$$\mu|_E = \nu|_E$$

*und sei $E_j \in E$ mit $E_j \nearrow \Omega$, dann ist: $\mu(A) = \nu(A) \forall A \in \sigma(E)$*

**Definition 11 (Lebesgue-Borel-Maß)** *Die Maßerweiterung für den Flächeninhalt eines Quaders ist eindeutig und wird mit $\lambda^n$ als Lebesgue-Borel-Maß bezeichnet*

**Definition 12 (Vervollständigung eines Maßes)** *Ein Maßraum heißt vollständig, falls jede Teilmenge einer Nullmenge wieder messbar ist. Man kann einen Maßraum vervollständigen durch:*

$$\tilde{\mathcal{A}} = \{A | \exists M, N \in \mathcal{A} : M \subset A \subset N \wedge \mu(N/M) = 0\}$$

*Man definiert dann $\mu(A) := \mu(N)$. Die Vervollständigung des Lebesgue-Borel-Maß wird als Lebesgue-Maß bezeichnet.*

**Theorem 9 (Erstes Littlewood'sches Prinzip)** *Sei $A \subset \mathbb{R}^n$, $A$ ist Lebesgue-messbar genau dann wenn zu jedem $\epsilon > 0$ eine offene Menge $A \subset O_\epsilon$ existiert, sodass:*

$$\lambda^{n,*}(O_\epsilon A) < \epsilon$$

**Definition 13 (messbare Abbildung)** *Für eine messbare Abbildung $f : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{A}})$ gilt: $^{-1}(A) \in \mathcal{A} \forall A \in \tilde{\mathcal{A}}$.*

**Theorem 10** *Sei $f : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{A}})$ und $\mathcal{E}$ ein Erzeugendensystem von $\tilde{\mathcal{A}}$, dann ist $f$ bereits messbar falls gilt:*

$$f^(E) \in \mathcal{A} \forall E \in \mathcal{E}$$

**Theorem 11** *Für $f : \Omega \to [-\infty, \infty]$ sind folgende Eigenschaften äquivalent:*

- *$f$ ist messbar.*

- $\{\omega | f(\omega) \geq a\} \in \mathcal{A} \forall a$
- $\{\omega | f(\omega) > a\} \in \mathcal{A} \forall a$
- $\{\omega | f(\omega) \leq a\} \in \mathcal{A} \forall a$
- $\{\omega | f(\omega) < a\} \in \mathcal{A} \forall a$

**Theorem 12** *Sei $\Omega_j$ eine Folge mit $\Omega = \bigcup \Omega_j$ dann ist $f$ messbar gdw. $f|_{\Omega_j}$ alle messbar sind.*

**Theorem 13** *Sei $f_j : \Omega \to [-\infty, \infty]$ eine Folge messbarer Funktionen, dann ist auch:*

$$\sup f_j, \inf f_j, \limsup f_j, \liminf f_j$$

*alle messbar. Auch ist der Punktweise Grenzwert dieser Funktion falls er existiert messbar.*

**Theorem 14** *Kompositionen zweier messbarer Funktionen sind wieder messbar.*

**Theorem 15 (Bildmaß)** *Wir definieren $f(\mu)$ als $f(\mu)(A) = \mu(f^{-1}(A))$ als das Bildmaß.*

**Theorem 16** *Das Lebesgue-Borel-Maß $\lambda^n$ ist translationsinvariant. D.h. für jede affine Abbildung $T(x) = Ax + b, A \in \mathbb{R}^{n \times n}, b \in \mathbb{R}^n$ gilt:*

$$\mu(T(A)) = \mu(A)$$

*Außerdem ist jedes andere translationsinvariante Maß ein skalares Vielfaches des Lebesgue-Maß. Zudem ist falls $U \in O(n)$:*

$$\mu(U(A)) = \mu(A)$$

*Zusammen ergibt sich, dass $\lambda^n$ bewegungsinvariant ist:*

**Theorem 17** *Sei $L \in GL(n)$ dann gilt für das Bildmaß:*

$$L(\lambda^n) = \frac{1}{|det(L)|} \lambda^n$$

**Theorem 18 (Vitali-Menge)** *Es gibt eine Menge $K$ die nicht Borel-Messbar ist.*

# 2 Lebesgue-Integral

**Definition 14 (Einfache Funktion)** *Eine Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}$ heißt einfache FUnktion wenn sie messbar ist und nur endlich viele Werte annimmt. Jede einfache Funktion hat also die Form:*

$$f(\omega) = \sum_{j=1}^{n} 1_{A_j}(\omega) \alpha_j$$

*Wir definieren $E(\Omega)$ als den Raum der einfachen Funktionen auf $\Omega$ und $E_+(\Omega)$ als den Raum der positiven einfachen Funktionen.*

**Theorem 19 (Approximation durch einfache Funktionen)** *Sei $f : \Omega \to [0, \infty]$ messbar, dann gibt es eine monoton wachsende Folge von positiven einfachen Funktionen$f_j$, sodass $f = \sup f_j$. Es ist sogar $f$ nur genau dann messbar, wenn eine solche Folge existiert.*

**Theorem 20 (Monotonieprinzip)** *Sei $F$ eine Menge von Funktionen mit folgenden Eigenschaften:*

- *$1_A \in F$ für alle $A \in \mathcal{A}$.*
- *$f, g \in F \Rightarrow \alpha f + \beta g \in F$*
- *Sei $f_j$ eine monoton wachsende Folge in $F$, dann ist $\sup f_j \in F$.*

*Dann enthält $F$ die Menge aller messbaren Funktionen.*

**Definition 15 (Lebesgue-Integral für einfache Funktionen)** *Sei $f$ eine einfache positive Funktion mit Darstellung: $f = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j 1_{A_j}$, wobei die $A_j$ paarweise disjunkt seien. Dann definieren wir:*

$$\int_\Omega f d\mu = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \mu(A_j)$$

**Definition 16 (Lebesgue-Integral für messbare positive Funktionen)** *Sei $f : \Omega \to [0, \infty]$ messbar. Dann existiert eine monotone Folge von einfachen Funktionen $f_j$ mit $\sup f_j = f$. Das Lebesgue-integral von $f$ ist definiert als:*

$$\int_\Omega f d\mu = \sup \int_\Omega f_j d\mu$$

**Theorem 21 (Markov-Ungleichung)** *Es gilt für jede positive messbare Funktion $f$ und jede positive reelle Zahl $w$:*

$$\int_\Omega f d\mu \geq w\mu(f \geq w)$$

**Definition 17** *Sei $f : \Omega \to [-\infty, \infty]$ messbar, dann heißt $f$ integrierbar, falls:*

$$\int_\Omega f_+ d\mu < \infty, \int_\Omega f_- d\mu < \infty$$

*Das Lebesgue-integral ist dann definiert als:*

$$\int_\Omega f d\mu := \int_\Omega f_+ d\mu - \int_\Omega f_- d\mu$$

**Theorem 22** *Es ist äquivalent:*

1. *$f$ ist integrierbar*
2. *$f_+$ und $_-$ sind integrierbar.*
3. *Es gibt integrierbare Funktionen $u, v$ sodass $f = u - v$.*
4. *Es gibt eine integrierbare Funktion $g$ sodass $|f| \leq g$.*

5. $|f|$ *ist integrierbar.*

**Theorem 23** *Das Integral ist monoton linear. Außerdem ist:* $|\int_\Omega f d\mu| \leq \int_\Omega |f| d\mu$

**Theorem 24 (Klopapiersatz)** *Ist* $f = g$ *fast überall dann gilt:*

$$\int_\Omega f d\mu = \int_\Omega g d\mu$$

**Theorem 25 (Beppo-Levi)** *Sei* $f_j$ *eine fast überall monoton wachsende Folge nicht negativer messbarer Funktionen. Dann gilt:*

$$\lim \int_\Omega f_j d\mu = \int_\Omega \lim f_j d\mu$$

**Theorem 26 (Lemma von Fatou)** *Sei* $f_j : \Omega \to [-\infty, \infty]$ *fast überall nicht negativ und messbar Dann gilt:*

$$\int_\Omega \liminf f_j d\mu \leq \liminf \int_\Omega f_j d\mu$$

**Theorem 27 (Satz der dominierten Konvergenz)** *Sei* $f_j : \Omega \to [-\infty, \infty]$ *eine Folge messbarer Funktionen, die punktweise f.ü. gegen* $f$ *konvergiert. Weiter existiere eine integrierbare Majorante* $M : \Omega \to [0, \infty]$ *mit* $|f_j| \leq M$ *f.ü. Dann ist:*

$$\lim \int_\Omega f_j d\mu = \int_\Omega f d\mu$$

**Theorem 28** *Ist* $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ *differenzierbar dann gilt:* $f(b) - f(a) = \int_a^b f'(x)dx$

**Theorem 29** *Auf einem kompakten Intervall ist jede regelintegrierbare Funktion auch Lebesgue-integrierbar*

**Definition 18 (Absolut stetig)** *Eine Funktion* $f$ *heißt absolut stetig falls für jedes* $\epsilon > 0$ *ein* $\delta > 0$ *existiert, sodass für jede endliche Folge von Teilintervallen* $]x_k, y_k[$ *mit* $\sum_{j=1}^n y_j - x_j < \delta$ *gilt:*

$$\sum_{j=1}^n |f(y_k) - f(x_k)| < \delta$$

**Theorem 30** *Eine Funktion* $F$ *ist genau dann darstellbar als:* $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ *wenn sie absolut stetig ist. Es gilt dann* $F' = f$ *f.ü.*

# 3 $L^p$-Räume

**Definition 19** *Sei* $p \in [1, \infty)$ *dann definieren wir:*

$$s_p(f) = (\int |f|^p d\mu)^{1/p}$$

*und*

$$\mathcal{L}^p(\Omega) := \{f | f : \Omega \to [-\infty, \infty] \text{ messbar und } s_p(f) < \infty\}$$

*Außerdem sei*

$$L^p := \mathcal{L}^p / \sim$$

*Wobei* $f \sim g \iff \int f - g d\mu = 0$.

**Theorem 31 (Young'sche Ungleichung)** *Seien* $a, b \geq 0$ *und* $p, q > 1$, *sodass* $1/p + 1/q = 1$. *Dann ist:*

$$ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q$$

**Theorem 32 (Hölder Ungleichung)** *Für* $p, q > 1$, *sodass* $1/p + 1/q = 1$ *gilt:*

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q$$

**Theorem 33 (Minkowski Ungleichung)** *Es gilt die Dreiecksungleichung:*

$$(\int |f + g|^p d\mu)^{\frac{1}{p}} \leq (\int |f|^p d\mu)^{\frac{1}{p}} + (\int |g|^p d\mu)^{\frac{1}{p}}$$

**Definition 20 (p-Norm)** *Sei* $p \in [0, \infty)$, *dann ist*

$$\|f\|_p := (\int |f|^p d\mu)^{\frac{1}{p}}$$

*eine Norm in* $L^p$.

**Definition 21 (Wesentliches Supremum)** *Das wesentliche Supremum für messbares* $f$ *sei definiert als:*

$$esssup(f) := \inf\{M | M \geq f \text{ fast überall}\}$$

*Außerdem seien* $\mathcal{L} := \{f | eesssup(f) < \infty\}$ *und* $L^\infty = \mathcal{L}^\infty / \sim$.

**Theorem 34** *Auf* $L^p$ *ist* $\|f\|_\infty := esssup(f)$ *eine Norm.*

**Definition 22 (Konvergenzbegriffe)** *Eine Folge* $f_j$ *konvergiert gegen* $f$:

- *in der p-Norm oder im p-ten Mittel falls:*

  $$\|f_j - f\|_p \to 0$$

- *punktweise fast überall falls:*

  $$f_j(x) \to f(x)$$

  *fast überall.*

- *im Maß falls:*

  $$\lim_{j \to \infty} \mu(|f_j - f| > \epsilon) = 0$$

**Theorem 35 (Vollständigkeit der $L^p$-Räume)** *Für* $p \in [1, \infty]$ *ist*

**Theorem 36** *Falls $f_j \to f$ in $\|.\|_p$ Dann gibt es eine Teilfolge, sodass $f_{j_k} \to f$ fast überall.*

**Theorem 37** *Für die Konvergenz im Maß gilt:*

- *$f_j \to g$ und $f_j \to f$ dann ist $f = g$ fast überall.*
- *$g_j \to g$ und $f_j \to f$ dann gilt: $\alpha f_j + \beta g_j \to \alpha f + \beta g$.*
- *Konvergiert $f_j \to f$ punktweise f.ü. dann gilt auch Konvergenz im Maß*
- *$f_j \to f$ im Maß, dann existiert eine Teilfolge $f_{j_k} \to f$ punktweise fast überall.*

# 4 Parameterabhängige Integrale

**Theorem 38** *Sei $f : X \times \Omega \to \mathbb{R}$ mit $X \subset \mathbb{R}^n$ und weiterhin sei:*

- *$\omega \mapsto f(x, \omega)$ integrierbar für alle $x$*
- *$x \mapsto f(x, \omega)$ stetig in $x^*$ für fast alle $\omega$.*
- *$M \in \mathcal{L}^1$ eine Majorante: $|f(x, \omega)| \leq M(\omega)$ für alle $x$ und fast alle $\omega$.*

*Dann ist $g(x) = \int_\Omega f(x, \omega) d\mu$ stetig an $x^*$.*

**Theorem 39** *Sei $f : X \times \Omega \to \mathbb{R}$ mit $X \subset \mathbb{R}^n$ und weiterhin sei:*

- *$\omega \mapsto f(x, \omega)$ integrierbar für alle $x$*
- *$\partial_i f(x, \omega)$ existiert für fast alle $\omega$ und alle $x$.*
- *$M \in \mathcal{L}^1$ eine Majorante: $|\partial_i f(x, \omega)| \leq M(\omega)$ für alle $x$ und fast alle $\omega$.*

*Dann gilt für $g(x) = \int_\Omega f(x, \omega) d\mu$:*

$$\partial_i g(x) = \int_\Omega \partial_i f(x, \omega) d\mu$$

# 5 Mehrfachintegrale

**Definition 23 (Produkt-$\sigma$-Algebra)** *Seien $(\Omega_j, \mathcal{A}_j)$ Messräume. Dann ist die Produkt-$\sigma$-Algebra definiert als:*

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \otimes ... \otimes \mathcal{A}_n = \sigma(\bigcup_{j=1}^{n} \pi_j^{-1}(\mathcal{A}_j))$$

*Wobei $\pi_j(\omega_1, ..., \omega_n) = \omega_j$ die Projektion auf die $j$-te Komponente sei.*

**Theorem 40** *Seien $(\Omega_j, \mathcal{A}_j)$ Messräume mit Erzeugendensystemen $\mathcal{E}_j$. Existieren für jedes $j$ eine Folge von $E_k \in \mathcal{E}_j$, sodass $\sup E_k = \Omega_j$ gilt, dann ist für $\mathcal{E}_1 \star ... \star \mathcal{E}_n := \{E_1 \times ... \times E_n | E_j \in \mathcal{E}_j\}$:*

$$\sigma(\mathcal{E}_1) \otimes ... \otimes \sigma(\mathcal{E}_n) = \sigma(\mathcal{E}_1 \star ... \star \mathcal{E}_n)$$

**Definition 24 (Schnitte)** *Wir definieren für eine Menge $A \subset X_1 \times X_2$ die Schnitte:*

- $A_{x_1} := \{x_2 | (x_1, x_2) \in A\} \subset X_2$
- $A^{x_2} := \{x_1 | (x_1, x_2) \in A\} \subset X_1$

*Analog für eine Funktion $f : X_1 \times X_2 \to Y$:*

- $f_{x_1}(x_2) := f(x_1, x_2)$
- $f_{x_2}(x_1) := f(x_1, x_2)$

**Theorem 41 (Prinzip von Cavalieri)** *Sei $A \in \mathcal{A}_2 \otimes \mathcal{A}_2$ und $f : X_1 \times X_2 \to Y$ messbar. Dann sind $A_{x_1}$ und $f_{x_1}$ messbar für jedes Feste $x_1$. Analog gilt dies auch für $X_2$. Mit den Maßen $\mu_1, \mu_2$ ist auch die Funktion $m_1(x_1) = \mu_2(A_{x_1})$ messbar. Dies gilt auch analog für $X_2$.*

**Theorem 42 (Produktmaß)** *Wir definieren das Produktmaß auf $(X_1 \times X_2, \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2)$ als:*

$$\mu_1 \otimes \mu_2(A_1 \times A_2) = \mu_1(A_1)\mu_2(A_2)$$

*Dieses Maß erfüllt für $A \subset X_1 \times X_2$:*

$$\mu_1 \otimes \mu_2(A) = \int_{X_1} \mu_2(A_{x_1}) dx_1 = \int_{X_2} \mu_1(A_{x_2}) dx_2$$

**Theorem 43 (Satz von Tonelli)** *Sei $f : X_1 \times X_2 \to [0, \infty]$, dann gilt: Die Funktionen $x_1 \mapsto \int_{X_2} f_{x_1}(x_2) dx_2$ und $x_2 \mapsto \int_{X_1} f^{x_2}(x_1) dx_1$ sind messbar und:*

$$\int_{X_1 \times X_2} f(x, x) dx = \int_{X_1} (\int_{X_2} f(x_1, x_2) dx_2) dx_1 = \int_{X_2} (\int_{X_1} f(x_1, x_2) dx_1) dx_2$$

**Theorem 44 (Satz von Fubini)** *Sei $f : X_1 \times X_2 \to \mathbb{R}$ integrierbar, dann ist:*

- *$f_{x_1}$ und $f^{x_2}$ für fast alle $x_1$ bzw. $x_2$ integrierbar.*
- *$x_1 \mapsto \int_{X_2} f_{x_1}(x_2) dx_2$ und $x_2 \mapsto \int_{X_1} f^{x_2}(x_1) dx_1$ integrierbar.*
- $$\int_{X_1 \times X_2} f(x, x) dx = \int_{X_1} (\int_{X_2} f(x_1, x_2) dx_2) dx_1 = \int_{X_2} (\int_{X_1} f(x_1, x_2) dx_1) dx_2$$

*Um die Integrierbarkeit zu beweisen kann der Satz von Tonelli verwendet werden.*

# 6 Parametertransformationen

**Theorem 45 (Transformationsformel)** *Seien $\Phi : \tilde{\Omega} \to \Omega$ und $f : \Omega \to [0, \infty]$ messbar. Dann gilt:*

$$\int_{\Omega} f d\Phi(\mu) = \in_{\tilde{\Omega}} f \circ \Phi d\mu$$

**Theorem 46 (Transformationssatz von Jacobi)** *Sei $U, V \subset \mathbb{R}^n, \Phi : U \to V$ ein Diffeomorphismus Sei $f : V \to [-\infty, \infty]$ messbar, dann gilt:*

$$\int_V f(y) d\lambda^n(y) = \int_U f(\Phi(u)) |\det D\Phi(u)| d\lambda^n(u)$$

*falls $f \geq 0$ oder einer der beiden Seiten integrierbar ist.*

Einige nützliche Transformationen:

1. Polarkoordinaten in der Ebene $\Phi : (0, \infty) \times (-\pi, \pi) \to \mathbb{R}^2, r, \theta \mapsto (r\cos\theta, r\sin\theta)$, es ist $|\det \Phi(r, \theta)| = r$.

2. Kugelkoordinaten $\Phi : (0, \infty) \times (-\pi, \pi) \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}^2$:

   $$\Phi(r, \theta, \phi) = (r\cos(\theta)\cos(\phi), r\sin(\theta)\cos(\phi), r\sin(\phi))$$

   Mit $|\det D\Phi(r, \theta, \phi)| = r^2 \cos(\phi)$

# 7 Approximationssätze

**Theorem 47 (Jensen'sche Ungleichung)** *Sei $\mu$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß. Sei $I$ ein Intervall und $k : I \to \mathbb{R}$ konvex und $f : \Omega \to I$ integrierbar, dann ist:*

$$k(\int_\Omega f d\mu) \leq \int_\Omega k \circ f d\mu$$

**Definition 25 (Faltung)** *Sei $f, g : \mathbb{R}^n \to [-\infty, \infty]$, dann heißt:*

$$(f \star g)(y) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x) g(y - x) dx$$

*falls existent Faltung von $f$ und $g$.*

**Theorem 48** *Es gilt:*

$$\|f \star g\|_p \leq \|f\|_p \|g\|_1$$

**Definition 26 (mollifier)** *Eine Funktion $\phi \in \mathcal{L}^1$ mit $\phi \geq 0$ und $\|\phi\|_1 = 1$ heißt Mollifier/Glättungskern.*

**Theorem 49** *Sei $f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)$ und $\phi$ ein Mollifier dann gilt für $\phi_\epsilon := \epsilon^{-n}\phi(x/\epsilon)$:*

$$\|f \star \phi_\epsilon - f\|_p \to 0$$

**Definition 27 (Support)** *Der Support spielt mit dem ADC auf der Botlane. Der Träger/Support von $f$ ist definiert als:*

$$supp(f) = \overline{\{x | f(x) \neq 0\}}$$

*Weiter definieren wir $C_c^\infty$ als die Menge der $C^\infty$-Funktionen mit kompakten Träger.*

**Theorem 50** *Für $\phi \in C_c^\infty$ gilt:*

$$\partial^\alpha (f \star \phi) = f \star \partial^\alpha \phi$$

**Theorem 51**

$$\overline{C_c^\infty}^{\|\cdot\|_p} = L^p$$

**Theorem 52 (Egorov)** *Sei $\mu$ ein endliches Maß. Sei $f_j \to f$ fast überall so konvergiert $f_j$ fast gleichmäßig gegen $f$. D.h. zu jedem $\delta > 0$ existiert eine Menge $E$ mit $\mu(E) < \delta$, sodass $f_j|_{E^c} \to f|_{E^c}$ gleichmäßig.*

**Theorem 53 (Lusin)** *Sei $\mu$ ein endliches Maß und $f\Omega \to \mathbb{R}$ integrierbar dann gibt es zu jedem $\epsilon > 0$ eine kompakte Menge $K$ mit $\mu(\Omega$
$K) < \epsilon$ sodass $f|_K$ stetig ist.*