

# Analysis 3 MA0003: Zusammenfassung

Jonas Treplin

February 24, 2023

## 1 Maßtheorie

**Definition 1 ( $\sigma$ -Algebra)** Ein System  $\mathcal{A} \subset P(\Omega)$  heißt  $\sigma$ -Algebra falls:

$$\Omega \in \mathcal{A}$$

$$A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}$$

$$A_i \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A},$$

Die Elemente  $A \in \mathcal{A}$  heißen messbar. Eine Menge  $(\Omega, \mathcal{A})$  heißt Messraum.

**Theorem 1** Für jede  $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{A}$  gilt:

- $\emptyset \in \mathcal{A}$
- $A_j \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcap_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{A}$

**Theorem 2 ( $\sigma$ -Algebra auf Urbildern)** Folgende Konstruktion ist selbst wieder eine  $\sigma$ -Algebra:

$$\tilde{\mathcal{A}} = \{f^{-1}(A) | A \in \mathcal{A}\}$$

**Definition 2 (Erzeugen von  $\sigma$ -Algebren)** Für  $\mathcal{E} \subset P(\Omega)$  ist die erzeugte  $\sigma$ -Algebra definiert als:

$$\sigma(\mathcal{E}) = \bigcap \{\mathcal{A} | \mathcal{A} \text{ ist } \sigma\text{-Algebra und } \mathcal{E} \subset \mathcal{A}\}$$

**Theorem 3** Es gilt:

- $E \subset F \Rightarrow \sigma(E) \subset \sigma(F)$
- ist  $E$  selbst  $\sigma$ -Algebra dann ist  $\sigma(E) = E$

**Definition 3 (Borel- $\sigma$ -Algebra)** Wir definieren die Borel- $\sigma$ -Algebra als:

$$\sigma(\{O | O \in \Omega \text{ offen}\})$$

**Theorem 4** Seien  $\mathcal{J}^n$  die halboffenen Quader und  $\mathcal{J}_{\mathbb{Q}}^n$  die halboffenen Quader mit rationalen Koeffizienten im  $\mathbb{R}^n$ . Sowie  $\mathcal{O}^n, \mathcal{C}^n, \mathcal{K}^n$  die offenen, abgeschlossenen und kompakten Mengen auf dem  $\mathbb{R}^n$ , dann gilt:

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) = \sigma(\mathcal{J}^n) = \sigma(\mathcal{J}_{\mathbb{Q}}^n) = \sigma(\mathcal{O}^n) = \sigma(\mathcal{C}^n) = \sigma(\mathcal{K}^n)$$

**Definition 4 (Grenzwert von Mengen)** Wir definieren für  $(A_j)_{j \in \mathbb{N}}$ :

- $\liminf A_j := \bigcup_{i=1}^{\infty} \bigcap_{j=i}^{\infty} A_j$  Also alle Elemente von die in nur endlich vielen  $A_j$  nicht enthalten sind.
- $\limsup A_j := \bigcap_{i=1}^{\infty} \bigcup_{j=i}^{\infty} A_j$  Also alle Elemente die in unendlich vielen  $A_j$  enthalten sind.

**Definition 5 (Figur)** Eine Figur ist jede Menge, die durch die Vereinigung endlich vieler Quader erzeugt werden kann. Man bezeichnet  $\mathcal{F}^n$  als den Raum der Figuren.

**Definition 6 (Ring)** Sei  $\mathcal{R} \subset P(\Omega)$  mit:

$$A, B \in \mathcal{R} \Rightarrow AB \in \mathcal{R}$$

$$A, B \in \mathcal{R} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{R}$$

Dann heißt  $\mathcal{R}$  Ring.

**Definition 7 (Äußeres Maß)** Das äußere Maß  $\lambda^{n,*}$  von  $M$  ist das Infimum der Größen aller Überdeckungen im Raum der Figuren von  $M$ .

**Definition 8 (Maß)** Ein Maß  $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty)$  auf einer  $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{A}$  ist charakterisiert durch folgende Eigenschaften:

$$\mu(\emptyset) = 0$$

$$\mu\left(\biguplus_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j)$$

Ein Maß heißt endlich falls  $\mu(\Omega) < \infty$  und  $\sigma$ -endlich falls eine Folge von  $A_1 \subset A_2 \subset \dots$  existiert mit  $A_j \nearrow \Omega$  und  $\mu(A_j) < \infty$ .

Eine Menge  $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$  heißt Maßraum.

**Theorem 5 (Rechenregeln für Maße)** Es gilt:

- $\mu(A \cap B) + \mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$
- $\mu(A \cup B) \leq \mu(A) + \mu(B)$
- $A \subset B \Rightarrow \mu(A) \leq \mu(B)$
- $A_j \nearrow A \Rightarrow \mu(A_j) \nearrow \mu(A)$
- Falls  $\mu(A_0) < \infty$  dann gilt auch  $A_j \nearrow A \Rightarrow \mu(A_j) \nearrow \mu(A)$
- $\mu\left(\bigcup_{j=0}^{\infty} A_j\right) \leq \sum_{j=0}^{\infty} \mu(A_j)$

**Definition 9 (Dynkin-System)** Ein System  $\mathcal{D} \subset P(\Omega)$  heißt Dynkin-System falls:

$$\Omega \in \mathcal{D}$$

$$D \in \mathcal{D} \Rightarrow D^c \in \mathcal{D}$$

$$D_j \in \mathcal{D} \Rightarrow \biguplus_{j=1}^{\infty} D_j \in \mathcal{D}$$

**Definition 10 (Minimales Dynkin-System)** Wir definieren das minimale Dynkin System für  $\mathcal{E} \subset P(\Omega)$  als:

$$\delta(\mathcal{E}) = \bigcup \{ \mathcal{D} \mid \mathcal{D} \text{ ist Dynkin-System und } \mathcal{E} \subset \mathcal{D} \}$$

**Theorem 6** Es gilt:

- $E \subset F \Rightarrow \delta(E) \subset \delta(F)$
- Ist  $E$  selbst Dynkin System so ist  $\delta(E) = E$ .
- $E \subset \delta(E) \subset \sigma(E)$

**Theorem 7** Es gilt für alle Dynkin-Systeme  $\mathcal{D}$ :

$$\mathcal{D} \text{ schnittstabil} \iff \mathcal{D} \text{ ist } \sigma\text{-Algebra}$$

Außerdem falls ein Erzeugendensystem  $E$  schnittstabil ist, dann ist  $\delta(E) = \sigma(E)$ .

**Theorem 8 (Eindeutigkeit der Maßerweiterung)** Sei  $E \subset P(\Omega)$  schnittstabil und seien  $\mu, \nu$  Maße mit:

$$\mu|_E = \nu|_E$$

und sei  $E_j \in E$  mit  $E_j \nearrow \Omega$ , dann ist:  $\mu(A) = \nu(A) \forall A \in \sigma(E)$

**Definition 11 (Lebesgue-Borel-Maß)** Die Maßerweiterung für den Flächeninhalt eines Quaders ist eindeutig und wird mit  $\lambda^n$  als Lebesgue-Borel-Maß bezeichnet

**Definition 12 (Vervollständigung eines Maßes)** Ein Maßraum heißt vollständig, falls jede Teilmenge einer Nullmenge wieder messbar ist. Man kann einen Maßraum vervollständigen durch:

$$\tilde{\mathcal{A}} = \{ A \mid \exists M, N \in \mathcal{A} : M \subset A \subset N \wedge \mu(N/M) = 0 \}$$

Man definiert dann  $\mu(A) := \mu(N)$ . Die Vervollständigung des Lebesgue-Borel-Maß wird als Lebesgue-Maß bezeichnet.

**Theorem 9 (Erstes Littlewood'sches Prinzip)** Sei  $A \subset \mathbb{R}^n$ ,  $A$  ist Lebesgue-messbar genau dann wenn zu jedem  $\epsilon > 0$  eine offene Menge  $A \subset O_\epsilon$  existiert, sodass:

$$\lambda^{n,*}(O_\epsilon A) < \epsilon$$

**Definition 13 (messbare Abbildung)** Für eine messbare Abbildung  $f : (\Omega, \mathcal{A}) \rightarrow (\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{A}})$  gilt:  $f^{-1}(A) \in \mathcal{A} \forall A \in \tilde{\mathcal{A}}$ .

**Theorem 10** Sei  $f : (\Omega, \mathcal{A}) \rightarrow (\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{A}})$  und  $\mathcal{E}$  ein Erzeugendensystem von  $\tilde{\mathcal{A}}$ , dann ist  $f$  bereits messbar falls gilt:

$$f(E) \in \tilde{\mathcal{A}} \forall E \in \mathcal{E}$$

**Theorem 11** Für  $f : \Omega \rightarrow [-\infty, \infty]$  sind folgende Eigenschaften äquivalent:

- $f$  ist messbar.

- $\{\omega | f(\omega) \geq a\} \in \mathcal{A} \forall a$
- $\{\omega | f(\omega) > a\} \in \mathcal{A} \forall a$
- $\{\omega | f(\omega) \leq a\} \in \mathcal{A} \forall a$
- $\{\omega | f(\omega) < a\} \in \mathcal{A} \forall a$

**Theorem 12** Sei  $\Omega_j$  eine Folge mit  $\Omega = \bigcup \Omega_j$  dann ist  $f$  messbar gdw.  $f|_{\Omega_j}$  alle messbar sind.

**Theorem 13** Sei  $f_j : \Omega \rightarrow [-\infty, \infty]$  eine Folge messbarer Funktionen, dann ist auch:

$$\sup f_j, \inf f_j, \limsup f_j, \liminf f_j$$

alle messbar. Auch ist der Punktweise Grenzwert dieser Funktion falls er existiert messbar.

**Theorem 14** Kompositionen zweier messbarer Funktionen sind wieder messbar.

**Theorem 15 (Bildmaß)** Wir definieren  $f(\mu)$  als  $f(\mu)(A) = \mu(f^{-1}(A))$  als das Bildmaß.

**Theorem 16** Das Lebesgue-Borel-Maß  $\lambda^n$  ist translationsinvariant. D.h. für jede affine Abbildung  $T(x) = Ax + b, A \in \mathbb{R}^{n \times n}, b \in \mathbb{R}^n$  gilt:

$$\mu(T(A)) = \mu(A)$$

Außerdem ist jedes andere translationsinvariante Maß ein skalares Vielfaches des Lebesgue-Maß. Zudem ist falls  $U \in O(n)$ :

$$\mu(U(A)) = \mu(A)$$

Zusammen ergibt sich, dass  $\lambda^n$  bewegungsinvariant ist:

**Theorem 17** Sei  $L \in GL(n)$  dann gilt für das Bildmaß:

$$L(\lambda^n) = \frac{1}{|\det(L)|} \lambda^n$$

**Theorem 18 (Vitali-Menge)** Es gibt eine Menge  $K$  die nicht Borel-Messbar ist.

## 2 Lebesgue-Integral

**Definition 14 (Einfache Funktion)** Eine Funktion  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  heißt einfache Funktion wenn sie messbar ist und nur endlich viele Werte annimmt. Jede einfache Funktion hat also die Form:

$$f(\omega) = \sum_{j=1}^n 1_{A_j}(\omega) \alpha_j$$

Wir definieren  $E(\Omega)$  als den Raum der einfachen Funktionen auf  $\Omega$  und  $E_+(\Omega)$  als den Raum der positiven einfachen Funktionen.

**Theorem 19 (Approximation durch einfache Funktionen)** Sei  $f : \Omega \rightarrow [0, \infty]$  messbar, dann gibt es eine monoton wachsende Folge von positiven einfachen Funktionen  $f_j$ , sodass  $f = \sup f_j$ . Es ist sogar  $f$  nur genau dann messbar, wenn eine solche Folge existiert.

**Theorem 20 (Monotonieprinzip)** Sei  $F$  eine Menge von Funktionen mit folgenden Eigenschaften:

- $1_A \in F$  für alle  $A \in \mathcal{A}$ .
- $f, g \in F \Rightarrow \alpha f + \beta g \in F$
- Sei  $f_j$  eine monoton wachsende Folge in  $F$ , dann ist  $\sup f_j \in F$ .

Dann enthält  $F$  die Menge aller messbaren Funktionen.

**Definition 15 (Lebesgue-Integral für einfache Funktionen)** Sei  $f$  eine einfache positive Funktion mit Darstellung:  $f = \sum_{j=1}^n \alpha_j 1_{A_j}$ , wobei die  $A_j$  paarweise disjunkt seien. Dann definieren wir:

$$\int_{\Omega} f d\mu = \sum_{j=1}^n \alpha_j \mu(A_j)$$

**Definition 16 (Lebesgue-Integral für messbare positive Funktionen)** Sei  $f : \Omega \rightarrow [0, \infty]$  messbar. Dann existiert eine monotone Folge von einfachen Funktionen  $f_j$  mit  $\sup f_j = f$ . Das Lebesgue-integral von  $f$  ist definiert als:

$$\int_{\Omega} f d\mu = \sup \int_{\Omega} f_j d\mu$$

**Theorem 21 (Markov-Ungleichung)** Es gilt für jede positive messbare Funktion  $f$  und jede positive reelle Zahl  $w$ :

$$\int_{\Omega} f d\mu \geq w \mu(f \geq w)$$

**Definition 17** Sei  $f : \Omega \rightarrow [-\infty, \infty]$  messbar, dann heißt  $f$  integrierbar, falls:

$$\int_{\Omega} f_+ d\mu < \infty, \int_{\Omega} f_- d\mu < \infty$$

Das Lebesgue-integral ist dann definiert als:

$$\int_{\Omega} f d\mu := \int_{\Omega} f_+ d\mu - \int_{\Omega} f_- d\mu$$

**Theorem 22** Es ist äquivalent:

1.  $f$  ist integrierbar
2.  $f_+$  und  $f_-$  sind integrierbar.
3. Es gibt integrierbare Funktionen  $u, v$  sodass  $f = u - v$ .
4. Es gibt eine integrierbare Funktion  $g$  sodass  $|f| \leq g$ .

5.  $|f|$  ist integrierbar.

**Theorem 23** Das Integral ist monoton linear. Außerdem ist:  $|\int_{\Omega} f d\mu| \leq \int_{\Omega} |f| d\mu$

**Theorem 24 (Klopapiersatz)** Ist  $f = g$  fast überall dann gilt:

$$\int_{\Omega} f d\mu = \int_{\Omega} g d\mu$$

**Theorem 25 (Beppo-Levi)** Sei  $f_j$  eine fast überall monoton wachsende Folge nicht negativer messbarer Funktionen. Dann gilt:

$$\lim \int_{\Omega} f_j d\mu = \int_{\Omega} \lim f_j d\mu$$

**Theorem 26 (Lemma von Fatou)** Sei  $f_j : \Omega \rightarrow [-\infty, \infty]$  fast überall nicht negativ und messbar Dann gilt:

$$\int_{\Omega} \liminf f_j d\mu \leq \liminf \int_{\Omega} f_j d\mu$$

**Theorem 27 (Satz der dominierten Konvergenz)** Sei  $f_j : \Omega \rightarrow [-\infty, \infty]$  eine Folge messbarer Funktionen, die punktweise f.ü. gegen  $f$  konvergiert. Weiter existiere eine integrierbare Majorante  $M : \Omega \rightarrow [0, \infty]$  mit  $|f_j| \leq M$  f.ü. Dann ist:

$$\lim \int_{\Omega} f_j d\mu = \int_{\Omega} f d\mu$$

**Theorem 28** Ist  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar und  $f'$  beschränkt dann gilt:  $f(b) - f(a) = \int_a^b f'(x) dx$

**Theorem 29** Auf einem kompakten Intervall ist jede regelintegrierbare Funktion auch Lebesgue-integrierbar

**Definition 18 (Absolut stetig)** Eine Funktion  $f$  heißt absolut stetig falls für jedes  $\epsilon > 0$  ein  $\delta > 0$  existiert, sodass für jede endliche Folge von Teilintervallen  $]x_k, y_k[$  mit  $\sum_{j=1}^n y_j - x_j < \delta$  gilt:

$$\sum_{j=1}^n |f(y_k) - f(x_k)| < \delta$$

**Theorem 30** Eine Funktion  $F$  ist genau dann darstellbar als:  $F(x) = \int_0^x f(t) dt$  wenn sie absolut stetig ist. Es gilt dann  $F' = f$  f.ü.

### 3 $L^p$ -Räume

**Definition 19** Sei  $p \in [1, \infty)$  dann definieren wir:

$$s_p(f) = (\int |f|^p d\mu)^{1/p}$$

und

$$\mathcal{L}^p(\Omega) := \{f|f : \Omega \rightarrow [-\infty, \infty] \text{ messbar und } s_p(f) < \infty\}$$

Außerdem sei

$$L^p := \mathcal{L}^p / \sim$$

Wobei  $f \sim g \iff \int f - g d\mu = 0$ .

**Theorem 31 (Young'sche Ungleichung)** Seien  $a, b \geq 0$  und  $p, q > 1$ , sodass  $1/p + 1/q = 1$ . Dann ist:

$$ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q$$

**Theorem 32 (Hölder Ungleichung)** Für  $p, q > 1$ , sodass  $1/p + 1/q = 1$  gilt:

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q$$

**Theorem 33 (Minkowski Ungleichung)** Es gilt die Dreiecksungleichung:

$$\left(\int |f + g|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int |g|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$$

**Definition 20 (p-Norm)** Sei  $p \in [0, \infty)$ , dann ist

$$\|f\|_p := \left(\int |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$$

eine Norm in  $L^p$ .

**Definition 21 (Wesentliches Supremum)** Das wesentliche Supremum für messbares  $f$  sei definiert als:

$$\text{esssup}(f) := \inf\{M | M \geq f \text{ fast überall}\}$$

Außerdem seien  $\mathcal{L} := \{f | \text{esssup}(f) < \infty\}$  und  $L^\infty = \mathcal{L}^\infty / \sim$ .

**Theorem 34** Auf  $L^p$  ist  $\|f\|_\infty := \text{esssup}(f)$  eine Norm.

**Definition 22 (Konvergenzbegriffe)** Eine Folge  $f_j$  konvergiert gegen  $f$ :

- in der  $p$ -Norm oder im  $p$ -ten Mittel falls:

$$\|f_j - f\|_p \rightarrow 0$$

- punktweise fast überall falls:

$$f_j(x) \rightarrow f(x)$$

fast überall.

- im Maß falls:

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \mu(|f_j - f| > \epsilon) = 0$$

**Theorem 35 (Vollständigkeit der  $L^p$ -Räume)** Für  $p \in [1, \infty]$  ist

**Theorem 36** Falls  $f_j \rightarrow f$  in  $\|\cdot\|_p$  Dann gibt es eine Teilfolge, sodass  $f_{j_k} \rightarrow f$  fast überall.

**Theorem 37** Für die Konvergenz im Maß gilt:

- $f_j \rightarrow g$  und  $f_j \rightarrow f$  dann ist  $f = g$  fast überall.
- $g_j \rightarrow g$  und  $f_j \rightarrow f$  dann gilt:  $\alpha f_j + \beta g_j \rightarrow \alpha f + \beta g$ .
- Konvergiert  $f_j \rightarrow f$  punktweise f.ü. dann gilt auch Konvergenz im Maß
- $f_j \rightarrow f$  im Maß, dann existiert eine Teilfolge  $f_{j_k} \rightarrow f$  punktweise fast überall.

## 4 Parameterabhängige Integrale

**Theorem 38** Sei  $f : X \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $X \subset \mathbb{R}^n$  und weiterhin sei:

- $\omega \mapsto f(x, \omega)$  integrierbar für alle  $x$
- $x \mapsto f(x, \omega)$  stetig in  $x^*$  für fast alle  $\omega$ .
- $M \in \mathcal{L}^1$  eine Majorante:  $|f(x, \omega)| \leq M(\omega)$  für alle  $x$  und fast alle  $\omega$ .

Dann ist  $g(x) = \int_{\Omega} f(x, \omega) d\mu$  stetig an  $x^*$ .

**Theorem 39** Sei  $f : X \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $X \subset \mathbb{R}^n$  und weiterhin sei:

- $\omega \mapsto f(x, \omega)$  integrierbar für alle  $x$
- $\partial_i f(x, \omega)$  existiert für fast alle  $\omega$  und alle  $x$ .
- $M \in \mathcal{L}^1$  eine Majorante:  $|\partial_i f(x, \omega)| \leq M(\omega)$  für alle  $x$  und fast alle  $\omega$ .

Dann gilt für  $g(x) = \int_{\Omega} f(x, \omega) d\mu$ :

$$\partial_i g(x) = \int_{\Omega} \partial_i f(x, \omega) d\mu$$

## 5 Mehrfachintegrale

**Definition 23 (Produkt- $\sigma$ -Algebra)** Seien  $(\Omega_j, \mathcal{A}_j)$  Messräume. Dann ist die Produkt- $\sigma$ -Algebra definiert als:

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{A}_n = \sigma\left(\bigcup_{j=1}^n \pi_j^{-1}(\mathcal{A}_j)\right)$$

Wobei  $\pi_j(\omega_1, \dots, \omega_n) = \omega_j$  die Projektion auf die  $j$ -te Komponente sei.

**Theorem 40** Seien  $(\Omega_j, \mathcal{A}_j)$  Messräume mit Erzeugendensystemen  $\mathcal{E}_j$ . Existieren für jedes  $j$  eine Folge von  $E_k \in \mathcal{E}_j$ , sodass  $\sup E_k = \Omega_j$  gilt, dann ist für  $\mathcal{E}_1 \star \dots \star \mathcal{E}_n := \{E_1 \times \dots \times E_n | E_j \in \mathcal{E}_j\}$ :

$$\sigma(\mathcal{E}_1) \otimes \dots \otimes \sigma(\mathcal{E}_n) = \sigma(\mathcal{E}_1 \star \dots \star \mathcal{E}_n)$$



**Definition 24 (Schnitte)** Wir definieren für eine Menge  $A \subset X_1 \times X_2$  die Schnitte:

- $A_{x_1} := \{x_2 | (x_1, x_2) \in A\} \subset X_2$
- $A^{x_2} := \{x_1 | (x_1, x_2) \in A\} \subset X_1$

Analog für eine Funktion  $f : X_1 \times X_2 \rightarrow Y$ :

- $f_{x_1}(x_2) := f(x_1, x_2)$
- $f_{x_2}(x_1) := f(x_1, x_2)$

**Theorem 41 (Prinzip von Cavalieri)** Sei  $A \in \mathcal{A}_2 \otimes \mathcal{A}_2$  und  $f : X_1 \times X_2 \rightarrow Y$  messbar. Dann sind  $A_{x_1}$  und  $f_{x_1}$  messbar für jedes feste  $x_1$ . Analog gilt dies auch für  $X_2$ . Mit den Maßen  $\mu_1, \mu_2$  ist auch die Funktion  $m_1(x_1) = \mu_2(A_{x_1})$  messbar. Dies gilt auch analog für  $X_2$ .

**Theorem 42 (Produktmaß)** Wir definieren das Produktmaß auf  $(X_1 \times X_2, \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2)$  als:

$$\mu_1 \otimes \mu_2(A_1 \times A_2) = \mu_1(A_1)\mu_2(A_2)$$

Dieses Maß erfüllt für  $A \subset X_1 \times X_2$ :

$$\mu_1 \otimes \mu_2(A) = \int_{X_1} \mu_2(A_{x_1}) dx_1 = \int_{X_2} \mu_1(A^{x_2}) dx_2$$

**Theorem 43 (Satz von Tonelli)** Sei  $f : X_1 \times X_2 \rightarrow [0, \infty]$ , dann gilt: Die Funktionen  $x_1 \mapsto \int_{X_2} f_{x_1}(x_2) dx_2$  und  $x_2 \mapsto \int_{X_1} f^{x_2}(x_1) dx_1$  sind messbar und:

$$\int_{X_1 \times X_2} f(x, x) dx = \int_{X_1} \left( \int_{X_2} f(x_1, x_2) dx_2 \right) dx_1 = \int_{X_2} \left( \int_{X_1} f(x_1, x_2) dx_1 \right) dx_2$$

**Theorem 44 (Satz von Fubini)** Sei  $f : X_1 \times X_2 \rightarrow \mathbb{R}$  integrierbar, dann ist:

- $f_{x_1}$  und  $f^{x_2}$  für fast alle  $x_1$  bzw.  $x_2$  integrierbar.
- $x_1 \mapsto \int_{X_2} f_{x_1}(x_2) dx_2$  und  $x_2 \mapsto \int_{X_1} f^{x_2}(x_1) dx_1$  integrierbar.
- 

$$\int_{X_1 \times X_2} f(x, x) dx = \int_{X_1} \left( \int_{X_2} f(x_1, x_2) dx_2 \right) dx_1 = \int_{X_2} \left( \int_{X_1} f(x_1, x_2) dx_1 \right) dx_2$$

Um die Integrierbarkeit zu beweisen kann der Satz von Tonelli verwendet werden.

## 6 Parametertransformationen

**Theorem 45 (Transformationsformel)** Seien  $\Phi : \tilde{\Omega} \rightarrow \Omega$  und  $f : \Omega \rightarrow [0, \infty]$  messbar. Dann gilt:

$$\int_{\Omega} f d\Phi(\mu) = \int_{\tilde{\Omega}} f \circ \Phi d\mu$$

**Theorem 46 (Transformationssatz von Jacobi)** Sei  $U, V \subset \mathbb{R}^n, \Phi : U \rightarrow V$  ein Diffeomorphismus. Sei  $f : V \rightarrow [-\infty, \infty]$  messbar, dann gilt:

$$\int_V f(y) d\lambda^n(y) = \int_U f(\Phi(u)) |\det D\Phi(u)| d\lambda^n(u)$$

falls  $f \geq 0$  oder einer der beiden Seiten integrierbar ist.

Einige nützliche Transformationen:

1. Polarkoordinaten in der Ebene  $\Phi : (0, \infty) \times (-\pi, \pi) \rightarrow \mathbb{R}^2, r, \theta \mapsto (r \cos \theta, r \sin \theta)$ , es ist  $|\det \Phi(r, \theta)| = r$ .
2. Kugelkoordinaten  $\Phi : (0, \infty) \times (-\pi, \pi) \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \rightarrow \mathbb{R}^3$ :

$$\Phi(r, \theta, \phi) = (r \cos(\theta) \cos(\phi), r \sin(\theta) \cos(\phi), r \sin(\phi))$$

$$\text{Mit } |\det D\Phi(r, \theta, \phi)| = r^2 \cos(\phi)$$

## 7 Approximationssätze

**Theorem 47 (Jensen'sche Ungleichung)** Sei  $\mu$  ein Wahrscheinlichkeitsmaß. Sei  $I$  ein Intervall und  $k : I \rightarrow \mathbb{R}$  konvex und  $f : \Omega \rightarrow I$  integrierbar, dann ist:

$$k\left(\int_{\Omega} f d\mu\right) \leq \int_{\Omega} k \circ f d\mu$$

**Definition 25 (Faltung)** Sei  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow [-\infty, \infty]$ , dann heißt:

$$(f \star g)(y) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x) g(y - x) dx$$

falls existent Faltung von  $f$  und  $g$ .

**Theorem 48** Es gilt:

$$\|f \star g\|_p \leq \|f\|_p \|g\|_1$$

**Definition 26 (mollifier)** Eine Funktion  $\phi \in \mathcal{L}^1$  mit  $\phi \geq 0$  und  $\|\phi\|_1 = 1$  heißt Mollifier/Glättungskern.

**Theorem 49** Sei  $f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)$  und  $\phi$  ein Mollifier dann gilt für  $\phi_\epsilon := \epsilon^{-n} \phi(x/\epsilon)$ :

$$\|f \star \phi_\epsilon - f\|_p \rightarrow 0$$

**Definition 27 (Support)** Der Support spielt mit dem ADC auf der Botlane. Der Träger/Support von  $f$  ist definiert als:

$$\text{supp}(f) = \overline{\{x | f(x) \neq 0\}}$$

Weiter definieren wir  $C_c^\infty$  als die Menge der  $C^\infty$ -Funktionen mit kompakten Träger.

**Theorem 50** Für  $\phi \in C_c^\infty$  gilt:

$$\partial^\alpha (f \star \phi) = f \star \partial^\alpha \phi$$

**Theorem 51**

$$\overline{C_c^\infty}^{\|\cdot\|_p} = L^p$$

**Theorem 52 (Egorov)** Sei  $\lambda(\omega)$  endlich. Sei  $f_j \rightarrow f$  fast überall so konvergiert  $f_j$  fast gleichmäßig gegen  $f$ . D.h. zu jedem  $\delta > 0$  existiert eine Menge  $E$  mit  $\mu(E) < \delta$ , sodass  $f_j|_{E^c} \rightarrow f|_{E^c}$  gleichmäßig.

**Theorem 53 (Lusin)** Sei  $\lambda(\omega)$  endlich und  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  integrierbar dann gibt es zu jedem  $\epsilon > 0$  eine kompakte Menge  $K$  mit  $\mu(\Omega \setminus K) < \epsilon$  sodass  $f|_K$  stetig ist.

## 8 Hilberträume

**Definition 28 (Skalarprodukt)** Eine Abbildung  $\langle \cdot, \cdot \rangle : H \times H \rightarrow \mathbb{K}$  heißt Skalarprodukt falls sie die folgenden Eigenschaften erfüllt:

- Positiv Definit:  $\langle x, x \rangle > 0$  für  $x \neq 0$ .
- Hermiteisch:  $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$
- Sesquilinear:  $\langle x, \alpha y + \beta z \rangle = \alpha \langle x, y \rangle + \beta \langle x, z \rangle$

Das Skalarprodukt induziert eine Norm:  $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ . Ist  $H$  unter dieser Norm vollständig so heißt  $H$  Hilbertraum.

**Theorem 54 (Parallelogrammgleichung)** Für die von einem Skalarprodukt definierte Norm gilt:

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

**Theorem 55 (Projektionssatz)** Sei  $K \subset X$  eine konvexe, abgeschlossene, nichtleere Teilmenge des Hilbertraum  $X$ . Dann gibt es zu jedem  $x \in X$  genau ein  $y \in K$ , sodass:

$$\|x - y\| = \inf_{z \in K} \|x - z\|$$

Die Abbildung  $P_K : X \rightarrow K, x \mapsto y$  heißt Projektion.

**Theorem 56 (Variationsungleichung)** Sei  $K \subset X$  eine konvexe, abgeschlossene, nichtleere Teilmenge des Hilbertraum  $X$ . Die Projektion  $y = P_K x$  wird charakterisiert durch:

$$\Re(\langle x - y, z - y \rangle) \leq 0 \quad \forall z \in K$$

Ist  $K$  ein abgeschlossener Unterraum, dann vereinfacht sich dies zu:

$$\langle x - y, z \rangle = 0 \quad \forall z \in K$$

**Theorem 57 (Projektionssatz für Unterräume)** Sei  $U$  Untervektorraum des Hilbertraum  $H$ . Es gilt:

$$P_{U^\perp} = Id - P_U$$

Wenn  $U \neq \{0\}$  dann ist:  $\|P_U\| = 1$

**Theorem 58** Es gilt:

$$Y^{\perp\perp} = \overline{\text{span}Y}$$

**Theorem 59 (Darstellungssatz von Riesz)** Für jedes Funktional  $x^* \in X^*$  existiert ein  $x \in X$ , sodass:

$$x^*(y) = \langle x, y \rangle$$

Die Abbildung  $J : X \rightarrow X^*$  ist bijektiv isometrisch und konjugiert linear.

**Theorem 60** Die abgeschlossene Einheitskugel ist genau dann kompakt, wenn der Raum endlichdimensional ist.

**Definition 29 (Orthonormalbasis)** Eine Menge  $S \subset X$  heißt Orthonormalsystem, falls  $\|e\| = 1 \forall e \in S$  und  $e \perp f \forall e \neq f \in S$ .  $S$  heißt Orthonormalbasis, falls es kein Orthonormal System  $\tilde{S}$  mit  $S \subsetneq \tilde{S}$  gibt.

**Theorem 61 (Existenz einer Basis und Basiserweiterung)** Jeder nicht-triviale Hilbertraum hat eine Orthonormalbasis. Zu jedem Orthonormalsystem  $S$  gibt es eine Orthonormalbasis  $\tilde{S}$  mit  $S \subset \tilde{S}$ .

**Definition 30 (Separabilität)** Ein Banachraum  $X$  heißt separabel, wenn es eine abzählbare Teilmenge  $D$  gibt, sodass:  $\overline{D} = X$ .

**Theorem 62** In einem separablen Hilbertraum ist jede Orthonormalbasis abzählbar.

**Theorem 63** Sei  $X$  Hilbertraum und  $S \subset X$  Orthonormalsystem und  $\{e_1, \dots, e_n\} \subset S$ , und  $U = \text{span}\{e_1, \dots, e_n\}$ . Dann ist:

$$P_U(x) = \sum_{j=1}^n \langle x, e_j \rangle e_j$$

Außerdem gilt die Bessel'sche Ungleichung:

$$\sum_{j=1}^n |\langle x, e_j \rangle|^2 \leq \|x\|^2$$

**Theorem 64** Sei  $S = \{e_j, j \in \mathbb{N}\} \subset X$  ein Orthonormalsystem. Es ist Äquivalent:

- $S$  ist eine Orthonormalbasis
- $S^\perp = \{0\}$
- $\overline{\text{span}S} = X$
- Für alle  $x \in X$  gilt:

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} \langle x, e_j \rangle e_j$$

- Es gilt die Parsevalsche Gleichung:

$$\|x\|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} |\langle x, e_j \rangle|^2$$

**Theorem 65 (Eindeutigkeit der stetigen Fortsetzung)** Sei  $X$  normiert und  $Y$  Banach, sowie  $U \subset X$  ein dichter Unterraum und  $S : U \rightarrow Y$  linear und stetig. Dann gibt es eine eindeutige Abbildung  $T : X \rightarrow Y$ , sodass  $T|_U = S$  und  $\|S\| = \|T\|$

**Theorem 66** Jeder separable Hilbertraum ist isometrisch isomorph zu  $l^2(\mathbb{K})$ .

## 9 Fourier-Analysis

**Definition 31 (Trigonometrisches Polynom)** Eine Funktion der Form:

$$x \mapsto \sum_{k=-N}^N c_k e^{ikx}$$

heißt *trigonometrisches Polynom vom Grad  $N$* .

Man kann sie auch in der Reellen Form darstellen als:

$$x \mapsto \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^N a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)$$

Mit

$$a_0 = wc_0, a_k = c_k + c_{-k}, b_k = i(c_k - c_{-k})$$

. Die Umformung in die andere Richtung funktioniert mit:

$$c_0 = a_0/2, c_k = (a_k - ib_k)/2, c_{-k} = (a_k + ib_k)/2$$

**Theorem 67** Für ein trigonometrisches Polynom  $t : I \rightarrow \mathbb{C}$  ist äquivalent:

- $t$  ist reellwertig
- $c_k = \overline{c_{-k}}$
- $a_k, b_k \in \mathbb{R}$

**Definition 32** Sei  $f : (-\pi, \pi) \rightarrow \mathbb{C}$  integrierbar. Dann sei:

$$\hat{f}(k) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikx} f(x) dx$$

der  $k$ -te Fourierkoeffizient,

$$(S_N f)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=-N}^N \hat{f}(k) e^{ikx}$$

das  $N$ -te Fourier Polynom und

$$(S_{\infty} f)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}(k) e^{ikx}$$

die Fourierreihe.

**Theorem 68** Die trigonometrischen Polynome liegen dicht in  $L^p((-\pi, \pi))$ . In  $L^2$  ist  $S := \{\frac{1}{\sqrt{2}}e^{ikx} | k \in \mathbb{Z}\}$  eine Orthonormalbasis.

**Definition 33 (Dirichlet-Kern)** Wir definieren den Dirichletkern als:

$$D_N(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-N}^N e^{ikx}$$

Es gilt  $S_N f = (f \star D_N)$ . Außerdem ist:

$$D_N(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi}(2N+1) & \text{falls } x = 2k\pi \\ \frac{1}{2\pi} \frac{\sin((2N+1)x/2)}{x/2} & \text{andernfalls} \end{cases}$$

**Theorem 69 (Riemann-Lebesgue)** Für reelles  $f \in L^1((-\pi, \pi))$  gilt:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \hat{f}(N) = 0$$

Weiter ist:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \hat{f}(N) \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(Nx) dx = 0$$

sowie

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \hat{f}(N) \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(Nx) dx = 0$$

**Theorem 70 (Punktweise Konvergenz der Fourierreihe)** Sei  $f \in L^1((-\pi, \pi))$  und besitze im Punkt  $x$  links- und rechtsseitige Ableitung, dann gilt:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} (S_N f)(x) = \frac{f(x+) - f(x-)}{2}$$

**Definition 34** Man betrachtet auch das arithmetische Mittel der Fourierreihen:

$$(\Sigma_N f)(x) = \frac{1}{N} \sum_{K=0}^N (S_K f)(x)$$

Dies lässt sich mit dem Fejer-Kern darstellen:

$$K_N = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^N D_j$$

$$\Sigma_N f = (f \star K_N)$$

**Theorem 71** Der Fejer Kern hat folgende Darstellung:

$$K_N(x) = \frac{1}{2\pi N} \left( \frac{\sin(\frac{N}{2}x)}{\sin(x/2)} \right)^2$$

**Theorem 72** Sei  $f \in C[-\pi, \pi]$  mit  $f(-\pi) = f(\pi)$ . Dann gilt:

$$\|\Sigma_N f - f\|_{\infty} \rightarrow 0$$

**Theorem 73**  $S_N f$  ist die Bestapproximation von  $f$  auf den Raum der trigonometrischen Funktionen vom Grad maximal  $f$  im  $L^2$ -Sinn. Es gilt:

$$\|f - S_N f\|_2^2 = \|f\|_2^2 - \sum_{k=-N}^N |\langle e_k, f \rangle|^2$$

## 10 Kurvenintegral

**Definition 35 (Kurvenintegral)** Sei  $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  und  $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$  stetig differenzierbar, dann definiert man das Kurvenintegral über:

$$\int_{S(\gamma)} F d\gamma = \int_a^b \langle F(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt$$

**Theorem 74** Für differenzierbare Skalarfelder  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  gilt:

$$\int_{S(\gamma)} \nabla f d\gamma = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))$$

**Theorem 75 (Integrabilitätsbedingung)** Für ein Gradientenfeld  $F = \nabla f, f \in C^2$  gilt:

$$\partial_j F_i(x) = \partial_i F_j(x)$$

**Definition 36 (sternförmig)** Eine Menge  $Y$  heißt sternförmig, falls es einen Punkt  $x \in Y$  gibt, sodass  $[x, y] \subset Y, \forall y \in Y$ .

**Theorem 76 (Poincaré)** Auf einem sternförmigen offenen Gebiet  $\Omega$  ist für  $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  äquivalent:

- Die Integrabilitätsbedingung ist erfüllt für  $F$ .
- $F$  ist ein Gradientenfeld

**Definition 37 (Wegzusammenhang)** Ein Raum  $X$  heißt wegzusammenhängend, wenn es für alle  $x, y \in X$  eine Kurve  $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$  gibt mit:

$$\gamma(0) = x, \gamma(1) = y$$

**Definition 38 (konservatives Vektorfeld)** Ein Vektorfeld  $F$  heißt konservativ, falls für alle Kurven  $\gamma_1, \gamma_2$  gilt:

$$\int_{S(\gamma_1)} F d\gamma_1 = \int_{S(\gamma_2)} F d\gamma_2$$

**Theorem 77** Auf einem wegzusammenhängend  $\Omega$  ist  $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  genau dann ein Gradientenfeld, wenn es konservativ ist.

## 11 Oberflächenintegral

**Definition 39 ( $C^\infty$ -Zerlegung der 1)** Sei  $K \subset \mathbb{R}^n$  und  $\mathcal{U} = (O_j)_{j \in [n]}$  eine offene Überdeckung eine Familie  $\alpha_j \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$  heißt  $C^\infty$ -Zerlegung der 1, wenn:

$$0 \leq \alpha_j \leq 1$$

$$\text{supp}(\alpha_j) \subset O_j$$

$$\sum_{j=1}^n \alpha_j = 1$$

Für jede kompakte Teilmenge existiert eine offene Überdeckung mit passender  $C^\infty$ -Zerlegung.

**Definition 40 (Maßtensor)** Sei  $M \subset \mathbb{R}^n$  eine  $k$ -dimensionale  $C^1$  Mannigfaltigkeit und  $\psi : U \rightarrow O$  eine Parametrisierung. Wir definieren:

$$G_\psi(u) = J_\psi(u)^T J_\psi(u), g_\psi(u) = \det G_\psi(u)$$

**Definition 41** Das Integral über die Oberfläche von  $M$  für eine Parametrisierung  $\psi : U \rightarrow O$  ist definiert als:

$$\int_O f(\xi) dS(\xi) = \int_U f(\psi(u)) \sqrt{g_\psi(u)} du$$

Das Integral über das gesamte  $M$  ist definiert mit Hilfe einer Zerlegung der 1:

$$\int_M f(\xi) dS(\xi) = \sum_{j=1}^N \int_{O_j} \alpha_j(\xi) f(\xi) dS(\xi)$$

## 12 Sätze von Gauß, Green und Stokes

**Theorem 78 (Satz von Gauß)** Sei  $\Omega$  offen und beschränkt mit  $C^1$ -Rand und  $\overline{\Omega} \subset V$ . Sei  $F : V \rightarrow \mathbb{R} \in C^1$ , dann ist:

$$\int_\Omega \operatorname{div} F(x) d\lambda^n(x) = \int_{\partial\Omega} \langle F(\xi), \nu(\xi) \rangle dS(\xi)$$

Wobei  $\nu(\xi)$  der nach außen zeigende Normalenvektor an  $\xi$  sei.

**Theorem 79 (Erste Greensche Formel)** Sei  $f \in C^1, g \in C^2$ :

$$\int_\Omega f(x) \Delta g(x) = - \int_\Omega \langle \nabla f(x), \nabla g(x) \rangle d\lambda^n(x) + \int_{\partial\Omega} f(\xi) \partial_\nu g(\xi) dS(\xi)$$

Wobei  $\partial_\nu g(\xi) = \langle \nabla g(\xi), \nu(\xi) \rangle$ .

**Theorem 80 (Zweite Greensche Formel)** Sei  $f \in C^1, g \in C^2$ :

$$\int_\Omega \Delta g(x) d\lambda^n(x) = \int_{\partial\Omega} \partial_\nu g(\xi) dS(\xi)$$

Ist außerdem  $f \in C^2$ :

$$\int_\Omega (f \Delta g - g \Delta f)(x) d\lambda^n(x) = \int_{\partial\Omega} (f \partial_\nu g - g \partial_\nu f)(\xi) dS(\xi)$$

**Theorem 81**

$$\operatorname{div} F(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\operatorname{vol}(B(x, \epsilon))} \int_{\partial B(x, \epsilon)} \langle F(\xi), \nu(\xi) \rangle dS(\xi)$$

**Theorem 82 (Stokes in  $\mathbb{R}^2$ )** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  offen mit  $C^1$ -Rand welcher von  $\psi$  im mathematisch positiven Sinn durchlaufen wird. Dann gilt:

$$\int_{S(\psi)} F(x) d\psi = \int_\Omega \partial_1 F_2 - \partial_2 F_1$$



**Theorem 83 (Stokes in  $\mathbb{R}^3$ )** Sei  $O \subset \mathbb{R}^3$  eine 2-dimensionale  $C^1$ -Mannigfaltigkeit mit  $C^1$ -Rand welcher im mathematisch positiven Sinn von  $\gamma$  durchlaufen wird. Dann gilt:

$$\int_{\partial O} F(x) d\gamma = \int_O \langle \text{rot} F(\xi), \nu(\xi) \rangle dS(\xi)$$

**Definition 42** Seien  $\mu$  und  $\nu$  Maße. Dann ist  $\nu$  absolutstetig bzgl.  $\mu$  ( $\nu \ll \mu$ ), wenn

$$\mu(A) = 0 \implies \nu(A) = 0$$

Gilt die Umkehrung auch so heißen  $\mu$  und  $\nu$  äquivalent.

Das Maß  $\mu$  heißt singulär zu  $\nu$  ( $\mu \perp \nu$ ), wenn ein  $A$  existiert, sodass:

$$\mu(A) = 0 \wedge \nu(\Omega \setminus A) = 0$$

**Theorem 84 (Zerlegungssatz von Lebesgue)** Seien  $\mu$  und  $\nu$   $\sigma$ -endlich. Dann lässt sich  $\nu$  auf eindeutige Weise in einen absolutstetigen Teil  $\nu_a$  und singulären Teil  $\nu_s$  bezüglich  $\mu$  zerlegen:

$$\nu = \nu_a + \nu_s$$

**Theorem 85** Seien  $\mu$  und  $\nu$   $\sigma$ -endlich, dann ist äquivalent:

- $\nu \ll \mu$
- Es gibt eine Dichte  $\rho : \Omega \rightarrow [0, \infty)$  mit  $d\nu = \rho d\mu$ .