2.1 Prove that L is positive semidefinite

$$x^T L x \geq 0$$

$$L = D - A$$

$$D_i = \sum_j A_{ij} \qquad A = e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\|x_i - x_j\|^2}$$

$$x^T L x = x^T (D - A) x$$

$$= \sum_i d_i x_i^2 - \sum_{ij} A_{ij} x_i x_j$$

$$= 2 \sum A_{ij} (x_i)^2 - 2 \sum A_{ij} x_i x_j$$

$$= \sum A_{ij} x_i^2 - 2 \sum A_{ij} x_i x_j + \sum A_{ij} x_j^2$$

$$= \sum A_{ij} (x_i - x_j)^2$$

$A_{ij} \geq 0 \qquad (x_i - x_j)^2 \geq 0$

$\Rightarrow x^T L x \geq 0$