2020 年上海市普陀区一模解析—2020.1.7

一、选择题

1. 已知$\frac{x}{y}=\frac{3}{5}$，那么下列等式中，不一定正确的是（　）

A. $5x=3y$　　　　B. $x+y=8$

C. $\frac{x+y}{y}=\frac{8}{5}$　　　　D. $\frac{x}{y}=\frac{x+3}{y+5}$

【答案】B

【解析】比例的基本性质

2. 下列二次函数中，如果函数图像的对称轴是 y 轴，那么这个函数是（　）

A. $y=x^2+2x$　　　　B. $y=x^2+2x+1$

C. $y=x^2+2$　　　　D. $y=(x-1)^2$

【答案】C

【解析】二次函数的图像性质

3. 已知在 $Rt\Delta ABC$ 中，$\angle C=90°$，$\sin A=\frac{1}{3}$，那么下列说法中正确的是（　）

A. $\cos B=\frac{1}{3}$　　　　B. $\cot A=\frac{1}{3}$

C. $\tan A=\frac{2\sqrt{2}}{3}$　　　　D. $\cot B=\frac{2\sqrt{2}}{3}$

【答案】A

【解析】锐角三角比的应用

4. 下列说法中，正确的是（　）

A. 如果 k 等于 0，$\vec{a}$ 是非零向量，那么 $k\vec{a}=0$

B. 如果 $\vec{e}$ 是单位向量，那么 $\vec{e}=1$

C. 如果 $|\vec{b}|=|\vec{a}|$，那么 $\vec{b}=\vec{a}$ 或 $\vec{b}=-\vec{a}$

D. 已知 $\vec{a}$ 非零向量，如果向量 $\vec{b}=-5\vec{a}$，那么 $\vec{b}\parallel\vec{a}$

【答案】D

【解析】向量的线性运算

5. 如果二次函数 $y=(x-m)^2+n$ 的图像如图 1 所示，那么一次函数 $y=mx+n$ 的图像经过（　）

A. 第一、二、三象限

B. 第一、三、四象限

C. 第一、二、四象限

D. 第二、三、四象限

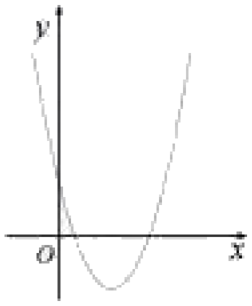


图 1

【答案】B

【解析】二次函数及一次函数的图像性质

6. 如图 2，在 $Rt\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=90°$，$CD\perp AB$，垂足为点 D，如果 $\frac{C_{\triangle ABC}}{C_{\triangle CDB}}=\frac{3}{2}$，$AD=9$，那么 BC 的长是（　）

A. 4　B. 6　C. $2\sqrt{13}$　D. $3\sqrt{10}$

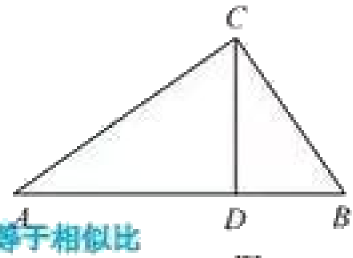


图 2

【答案】C

【解析】(1) 相似模型——"母子型"；(2) 相似的性质：周长之比等于相似比

二、填空题：(本大题共 12 题，每题 4 分，满分 48 分)

7. 化简：$2\left(\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}\right)-\left(\vec{a}-\vec{b}\right)=$ ▲ .

【答案】$\vec{a}+2\vec{b}$

【解析】考察向量的基本运算

8. 抛物线 $y=(a-2)x^2$ 在对称轴左侧的部分是上升的，那么 a 的取值范围是 ▲ .

【答案】$a<2$

【解析】考察二次函数的开口方向和二次项系数关系

9. 已知函数 $f(x)=3x^2-2x-1$，如果 $x=2$，那么 $f(x)=$ ▲ .

【答案】7

【解析】考察二次函数的代入求值

10. 如果抛物线 $y=ax^2+2ax+c$ 与 x 轴的一个交点的坐标是（1，0），那么与 x 轴的另一个交点的坐标是 ▲ .

【答案】（－3，0）

【解析】考察二次函数的对称轴、与 x 轴的交点坐标的关系

11. 将二次函数 $y=x^2-2x+2$ 的图像向下平移 m（$m>0$）个单位后，它的顶点恰好落在 x 轴上，那么 m 的值等于 ▲ .

【答案】1

【解析】考察二次函数的平移变换

12. 已知在 $Rt\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$，$\cot B=\frac{1}{3}$，$BC=2$，那么 $AC=$ ▲ .

【答案】6

【解析】考察锐角三角比的应用

13.如图 3，$\triangle ABC$ 的中线 AD、CE 交于点 G,点 F 在边 AC 上，$GF \parallel BC$,那么 $\dfrac{GF}{BC}$ 的值是________.

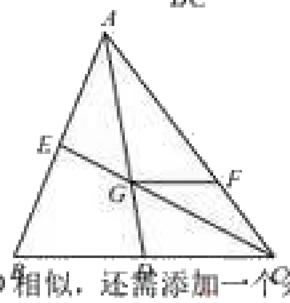


图 3

【答案】$\dfrac{1}{3}$

【解析】三角形的重心及平行线的应用.

14.如图 4，在$\triangle ABC$ 与$\triangle AED$ 中，$\dfrac{AB}{AE}=\dfrac{BC}{ED}$，要使$\triangle ABC$ 与$\triangle AED$ 相似，还需添加一个条件，这个条件可以是________.(只需填一个条件)

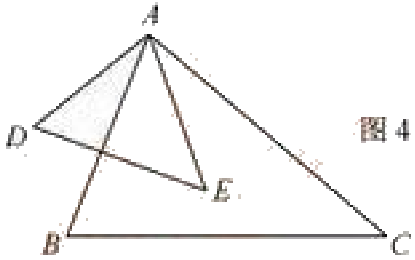


图 4

【答案】$\angle E=\angle C$

【解析】三角形相似的判定.

15.如图 5，在 $Rt\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$，AD 是三角形的角平分线，如果 $AB=3\sqrt{5}$，$AC=2\sqrt{5}$ ，那么点 D 到直线 AB 距离等于________.

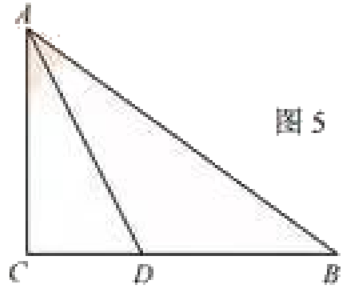


图 5

【答案】2

【解析】勾股定理与角平分线的综合.

16.如图 6.斜坡 AB 长为 100 米，坡角 $\angle ABC=30°$，现因"改小坡度"工程的需要，将斜坡 AB 改造成坡度 i=1:5 的坡度 BD(A、D、C 三点在地面的同一垂线上)，那么由点 A 到点 D 下降了________米.（结果保留根号）

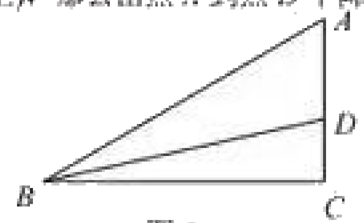


图 6

【答案】$50-10\sqrt{3}$

【解析】锐角三角比的应用.

17.如图 7，在四边形 $ABCD$ 中，$\angle ABC=90°$，对角线 AC、BD 交于点 O，$AO=CO$，$CD\perp BD$，如果 $CD=3$，$BC=5$，那么 AB=________.

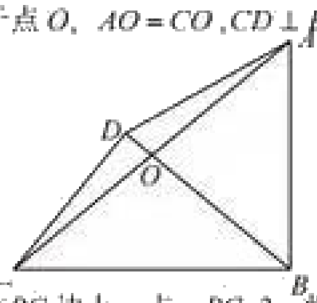


图 7

【答案】$\dfrac{15}{4}$

【解析】直角三角形的斜边中线与锐角三角比.

18.如图 8，在 $Rt\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$，$AC=5$，$\sin B=\dfrac{5}{13}$，点 P 为 BC 边上一点，PC=3，将$\triangle ABC$ 绕点 P 旋转得到$\triangle A'B'C'$（点 A、B、C 分别与 A'、B'、C'对应）使 $B'C' \parallel AB$，边 $A'C'$ 与边 AB 交于点 G,那么 $A'G$ 的长等于________.

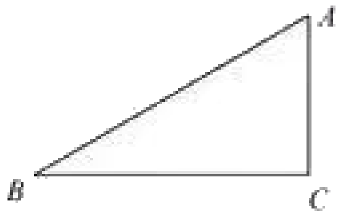


图 8

【答案】 20/13

【解析】图形的旋转与锐角三角比.

三、解答题：（本大题共 7 题，满分 78 分）

19.（本题满分 10 分）

计算：$\dfrac{2\sin^2 60^\circ - \cos 60^\circ}{\tan^2 60^\circ - 4\cos 45^\circ}$．

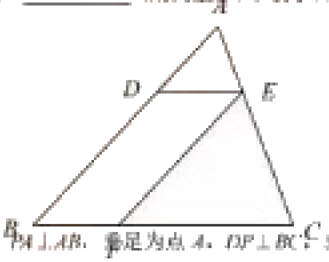
【解析】$=3+2\sqrt{2}$

20.（本题满分 10 分）

如图 9，在△ABC 中，点 D、E、F 分别在边 AB、AC、BC 上，DE∥BC，EF∥AB，$AD:AB=1:3$．

（1）当 DE＝5 时，求 FC 的长；

（2）设 $\overrightarrow{AD}=\vec{a}$，$\overrightarrow{CF}=\vec{b}$，那么 $\overrightarrow{FE}=$__________，$\overrightarrow{EA}=$__________（用向量 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 表示）．



【解析】（1）DE＝5，则 BC＝15，CF＝15－5＝10

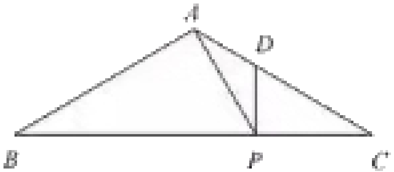
（2）$\overrightarrow{FE}=-2\vec{a}$，$\overrightarrow{EA}=\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{DA}=\frac{1}{2}\vec{b}-\vec{a}$

21.（本题满分 10 分）

如图 10，在△ABC 中，点 P、D 分别在边 BC、AC 上，PA⊥AB，垂足为点 A，DP⊥BC，垂足为点 P，$\dfrac{AP}{PD}=\dfrac{BP}{CD}$．

（1）求证：∠APD＝∠C；

（2）如果 AB＝3，DC＝2，求 AP 的长．



【解析】（1）易得△ABP∽△PCD

$\therefore$ ∠C＝∠B 又$\because$ ∠B＝∠APD

$\therefore$ ∠C＝∠APD

（2）易得△ADP∽△APC

$\therefore AP^2=AD\cdot AC=1\times 3=3$

$\therefore AP=\sqrt{3}$

22.（本题满分 10 分）

函数 $y=\dfrac{m}{x}$ 与函数 $y=\dfrac{x}{k}$（m,k 为不等于的零的常数）的图像有一个公共点 $A(3,k-2)$，其中正比例函数 y 的值随 x 增大而减小，求这两个函数的解析式．

【解析】易得 $\dfrac{3}{k}=k-2$，整理得 $k^2-2k-3=0$，解得 $k_1=3$（舍去），$k_2=-1$

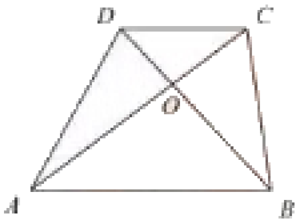
所以 $y=-x$，$y=-\dfrac{9}{x}$

23.（本题满分 12 分）

已知：如图 11，四边形 $ABCD$ 的对角线 AC、BD 相交于点 O，$S_{\triangle AOD}=S_{\triangle BOC}$．

（1）求证：$\dfrac{DO}{OB}=\dfrac{CO}{OA}$；

（2）设$\triangle OAB$ 的面积为 S，$\dfrac{CD}{AB}=k$，求证：$S_{四边形ABCD}=(k+1)^2S$.



【解析】（1）$\because S_{\triangle AOD}=S_{\triangle BOC}$

$\therefore S_{\triangle AOD}:S_{\triangle AOB}=S_{\triangle BOC}:S_{\triangle AOB}$

即：$\dfrac{DO}{OB}=\dfrac{CO}{OA}$

（2）易得$\triangle COD\backsim\triangle AOB$，$\dfrac{S_{\triangle AOD}}{S_{\triangle AOB}}=\dfrac{DO}{OB}=k$，$\therefore S_{\triangle AOD}=S_{\triangle BOC}=kS$

$\dfrac{S_{\triangle COD}}{S_{\triangle AOB}}=\left(\dfrac{CD}{AB}\right)^2=k^2$，$\therefore S_{\triangle COD}=k^2S$

$\therefore S_{四边形ABCD}=S_{\triangle COD}+S_{\triangle AOD}+S_{\triangle COB}+S_{\triangle AOB}=(k+1)^2S$

【总结】面积比等于相似比的平方；三角形高相等时面积比等于底的比.

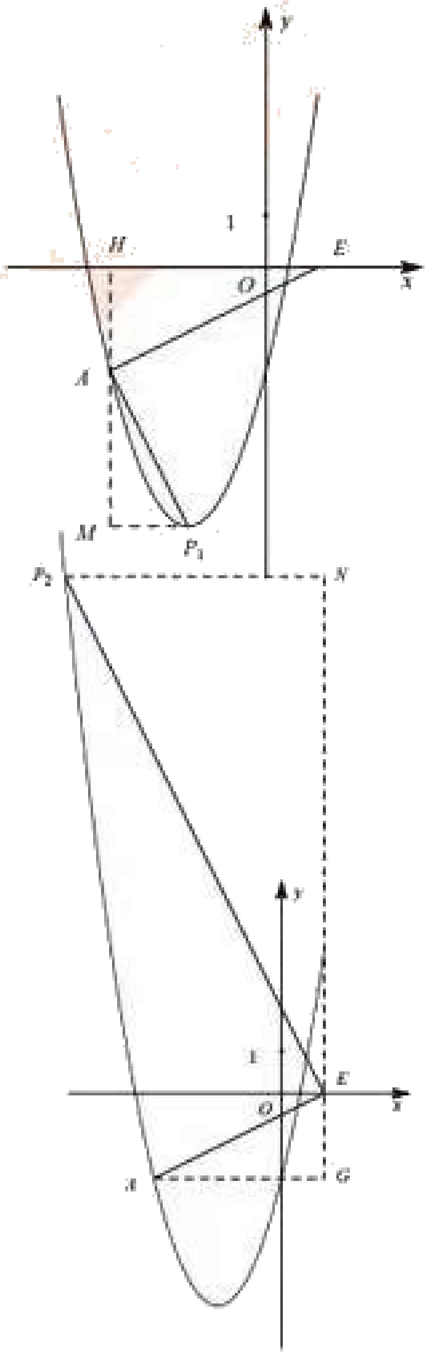
24、(本题满分 12 分)

在平面直角坐标系 xOy 中（如图 12），已知抛物线 $y=ax^2+(a+\frac{8}{3})x+c(a\neq 0)$ 经过点 A（－3，－2），与 y 轴交于点 B（0，－2），抛物线的顶点为点 C，对称轴与 x 轴交于点 D．

（1）求抛物线的表达式及点 C 的坐标；

（2）点 E 是 x 轴正半轴上的一点，如果 $\angle AED=\angle BCD$，求点 E 的坐标；

（3）在（2）的条件下，点 P 是位于 y 轴左侧抛物线上的一点，如果 $\triangle PAE$ 是以 AE 为直角边的直角三角形，求点 P 的坐标．



【解析】

（1） $y=\frac{4}{3}x^2+4x-2$，$C(-\frac{3}{2},-5)$

（2） $\tan\angle BCD=\frac{\frac{3}{2}}{3}=\frac{1}{2}$，则 $\tan\angle AED=\frac{1}{2}$，

过 A 作 $AH\perp DE$，$\tan\angle AED=\frac{AH}{EH}=\frac{2}{EH}=\frac{1}{2}$，

则 $EH=4$，$\therefore E$（1,0）

【总结】利用相等角的正切值相等解决问题

（3） ①当 $\angle EAP=90°$时，$\triangle AHE\backsim\triangle AMP$，

则 $\frac{MP}{AM}=\frac{AH}{HE}=\frac{1}{2}$，设 $PM=t$，则 $AM=2t$

将 P（$t-3$，$-2-2t$）代入 $y=\frac{4}{3}x^2+4x-2$

得 $t_1=0$（舍），　$t_2=\frac{3}{2}$，

$\therefore P_1(-\frac{3}{2},-5)$

②当 $\angle AEP=90°$时，$\triangle AEG\backsim\triangle PEN$，则 $\frac{PN}{EN}=\frac{EG}{AG}=\frac{1}{2}$

设 $PN=t$，则 $EN=2t$

将 P（$1-t$，$2t$）代入 $y=\frac{4}{3}x^2+4x-2$

得 $t_1=\frac{13+\sqrt{129}}{4}$，$t_2=\frac{13-\sqrt{129}}{4}$（舍），

$\therefore P_2(-\frac{9+\sqrt{129}}{4},\frac{13+\sqrt{129}}{2})$

综上所述：$P_1(-\frac{3}{2},-5)$，$P_2(-\frac{9+\sqrt{129}}{4},\frac{13+\sqrt{129}}{2})$

【总结】直角三角形讨论，构造三直角相似

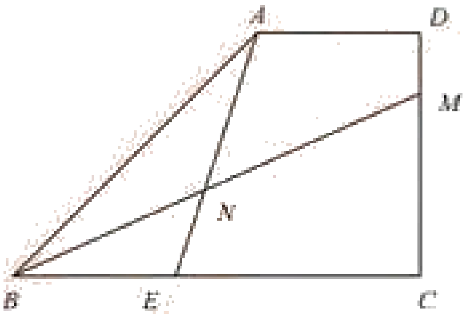
25.(本题满分 14 分)

如图 13，在梯形 $ABCD$ 中，$AD\parallel BC$，$\angle C=90°$，$AD=2$，$BC=5$，$DC=3$，点 E 在边 BC 上，$\tan\angle AEC=3$，点 M 是射线 DC 上一个动点（不与点 D、C 重合），联结 BM 交射线 AE 与点 N，设 $DM=x, AN=y$.

（1）求 BE 的长;

（2）当动点 M 在线段 DC 上时，试求 y 与 x 之间的函数解析式，并写出函数定义域;

（3）当动点 M 运动时，直线 BM 与直线 AE 的夹角是 45°，请直接写出这时线段 DM 的长.



【解析】

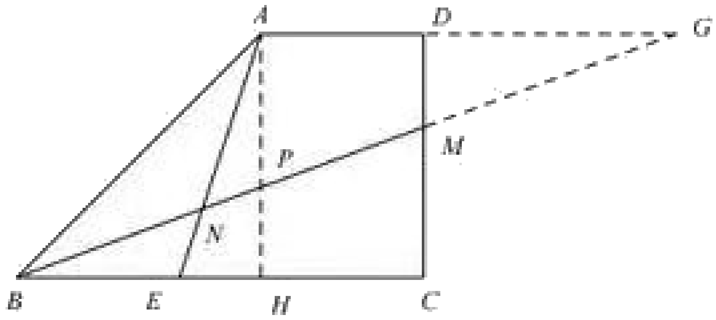
（1）作高，构建直角三角形，利用三角比来求解，$BE=2$;

（2）延长 BM，AD 交于点 G，

$$\frac{DG}{CB}=\frac{DM}{CM},\frac{DG}{5}=\frac{x}{3-x},DG=\frac{5x}{3-x},AG=2+\frac{5x}{3-x}=\frac{6+3x}{3-x}$$

$$\frac{AN}{EN}=\frac{AG}{BE},\frac{y}{\sqrt{10}-y}=\frac{\frac{6+3x}{3-x}}{2}.$$

解得：$y=\dfrac{3\sqrt{10}x+6\sqrt{10}}{x+12}(0<x<3)$

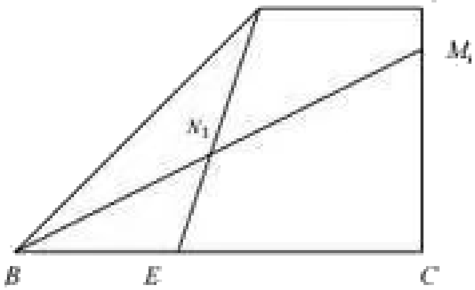


【总结】添加辅助线，构造 X 型，利用比例线段求解；

（3）①当 $\angle BNE=45°$时，$\Delta ENB\backsim\Delta EBA$，

$EB^2=EN\cdot EA$，

则有 $4=\dfrac{2\sqrt{10}(3-x)}{12+x}\cdot\sqrt{10}$，解得：$x=\dfrac{1}{2}$



②当∠ANB＝45°时，$\Delta BNA \backsim \Delta EBA$ $AB^2 = AN \cdot EA$，

则有$\left(3\sqrt{2}\right)^2 = \sqrt{10} \cdot \left(\sqrt{10} + \frac{2\sqrt{10}(x-3)}{12+x}\right)$，

解得 $x = 13$

综上所述：线段 DM 的长为$\frac{1}{2}$或 13.

【总结】分类讨论，等角转换找到子母型相似.