2022 年上海市崇明区中考数学一模试卷

2022.1

一、选择题：（本大题共 6 题，每题 4 分，满分 24 分）

【下列各题的四个选项中，有且只有一个选项是正确的，选择正确项的代号并填涂在答题纸的相应位置上】

1. 将抛物线 $y=2x^2$ 向上平移 3 个单位后所得抛物线的表达式是（　　）

A. $y=2x^2+3$；　B. $y=2(x+3)^2$；　C. $y=2(x-3)^2$；　D. $y=2x^2-3$.

2. 如果两个相似三角形的周长比为 1：4，那么这两个三角形的对应中线的比为（　　）

A.1：2；　B.1：4；　C.1：8；　D.1：16.

3. 如果向量 $\vec{a}$ 与向量 $\vec{b}$ 方向相反，且，那么向量 $\vec{a}$ 用向量 $\vec{b}$ 表示为（　　）

A. $\vec{a}=3\vec{b}$；　B. $\vec{a}=-3\vec{b}$；　C. $\vec{a}=\frac{1}{3}\vec{b}$；　D. $\vec{a}=-\frac{1}{3}\vec{b}$.

4. 在 $Rt\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$，$AB=2$，$AC=1$，那么 $\cos B$ 的值是（　　）

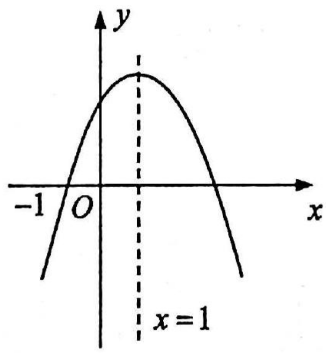
A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$；　B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$；　C. $\frac{1}{2}$；　D. 2.

5. 下列各组条件中，一定能推得 $\triangle ABC$ 与 $\triangle DEF$ 相似的是（　　）

A. $\angle A=\angle E$ 且 $\angle D=\angle F$；　B. $\angle A=\angle B$ 且 $\angle D=\angle F$；

C. $\angle A=\angle E$ 且 $\frac{AB}{AC}=\frac{EF}{ED}$；　D. $\angle A=\angle E$ 且 $\frac{AB}{BC}=\frac{FD}{DE}$.

6. 已知二次函数 $y=ax^2+bx+c\,(a\neq 0)$ 的图像如图所示，那么下列结论中正确的是（　　）



A. $ac>0$；　B. 当 $x>-1$ 时，$y>0$

C. $b=2a$；　D. $9a+3b+c=0$

二、填空题：（本大题共 12 题，每题 4 分，满分 48 分）

【请将结果直接填入答题纸的相应位置】

7. 如果 $\frac{x-y}{y}=\frac{2}{3}$，那么 $\frac{x}{y}=$________.

8. 计算：$2(3\vec{a}+2\vec{b})-5\vec{a}=$________.

9. 已知线段 AB=8cm，点 C 是 AB 的黄金分割点，且 $AC>BC$，那么线段 AC 的长为

____________cm.

10. 如果抛物线 $y=(k-2)x^2$ 的开口向上，那么 k 的取值范围是____________.

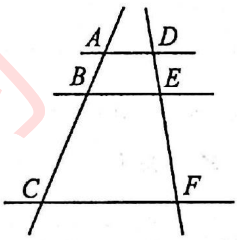
11. 如果抛物线 $y=-x^2+3x-1+m$ 经过原点，那么 $m=$____________.

12. 已知二次函数 $y=ax^2+bx+c\left(a\neq 0\right)$ 自变量 x 的值和它对应的函数值 y 如下表所示：

x	…	-1	0	1	2	3	…
y	…	0	3	4	3	m	…

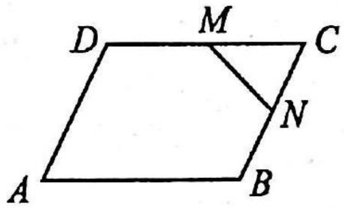
那么上表中 m 的值为____________.

13. 某滑雪运动员沿着坡比为 $1:\sqrt{3}$ 的斜坡向下滑行了 100 米，那么运动员下降的垂直高度为____________米.



（第 14 题图）

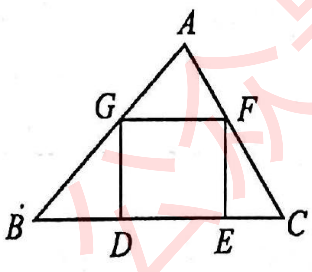
14. 如图，直线 $AD\parallel BE\parallel CF$，如果 $\dfrac{AB}{BC}=\dfrac{1}{3}$，$AD=2$，$CF=6$，那么线段 BE 的长是____________.



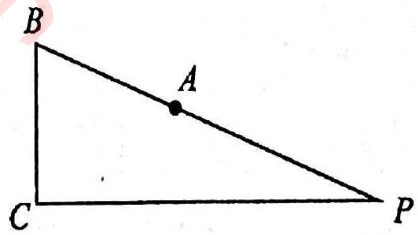
（第 15 题图）

15. 如图，在平行四边形 $ABCD$ 中，点 M 是边 CD 中点，点 N 是边 BC 的中点，设 $AB=\vec{a}$，$BC=\vec{b}$，那么 $\overrightarrow{MN}$ 可用 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 表示为____________.

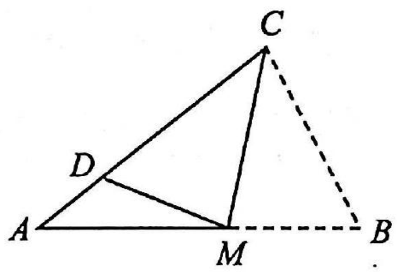
16. 如图，已知正方形 $DEFG$ 的顶点 D、E 在△ABC 的边 BC 上，顶点 G、F 分别在边 AB、AC 上，如果 $BC=4$，△ABC 的面积为 6，那么这个正方形的边长是____________.



（第 16 题图）



（第 17 题图）



（第 18 题图）

17. 定义：有一组对边相等而另一组对边不相等的凸四边形叫做“对等四边形”，如图，在 $Rt\triangle PBC$ 中，$\angle PCB=90^\circ$，点 A 在边 BP 上，点 D 在边 CP 上，如果 $BC=11$，$\tan\angle PBC=\dfrac{12}{5}$，$AB=13$，四边形 $ABCD$ 为“对等四边形”，那么 CD 的长为____________.

18. 如图所示，在三角形纸片 ABC 中，AB=9，BC=6，$\angle ACB$=2$\angle A$，如果将△ABC 沿过顶点 C 的直线折叠，使点 B 落在边 AC 上的点 D 处，折痕为 CM，那么

$\cos\angle DMA=$____________.

三、解答题：（本大题共 7 题，满分 78 分）

19. （本题满分 10 分）

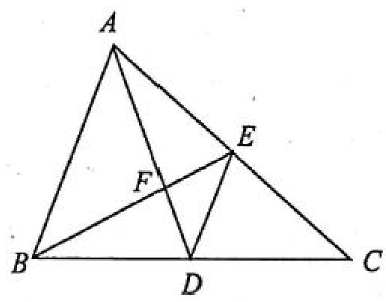
计算：$3\tan 30°+2\cos 45°-2\sin 60°\times\cot 45°$

20. （本题满分 10 分）

如图，在$\triangle ABC$中，点F为$\triangle ABC$的重心，联结AF并延长交BC于点D，联结BF并延长交AC于点E.

（1）求$\dfrac{S_{\triangle DEF}}{S_{\triangle ABF}}$的值；

（1）如果$AB=\vec{a}$，$AC=\vec{b}$，用$\vec{a}$，$\vec{b}$表示$\overrightarrow{BE}$和$\overrightarrow{AF}$.

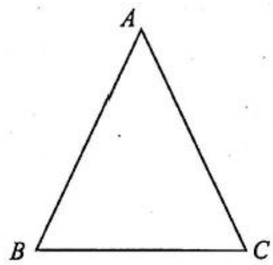


21. （本题满分 10 分，第(1)小题满分 5 分，第(2)小题满分 5 分）

如图，在$\triangle ABC$中，$AB=AC=\sqrt{5}$，$\sin B=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.

（1）求边BC的长度；

（2）求$\cos A$的值.

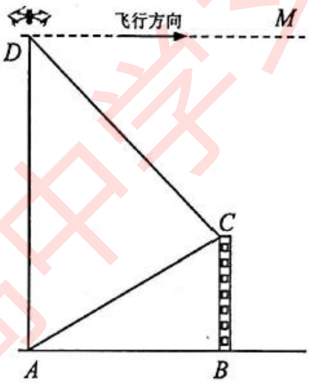


22. （本题满分 10 分，第(1)小题满分 6 分，第(2)小题满分 4 分）

如图，小明同学在学习了解直角三角形及其应用的知识后，尝试利用无人机测量他所住小区的楼房 BC 的高度，当无人机在地面 A 点处时，测得小区楼房 BC 顶端点 C 处的仰角为 30°，当无人机垂直向上飞行到距地面 60 米的 D 点处时，测得小区楼房 BC 顶端点 C 处的俯角为 45°.

（1）求小区楼房 BC 的高度；

（2）若无人机保持现有高度沿平行于 AB 的方向，并以 5 米/秒的速度继续向前匀速飞行，问：经过多少秒后，无人机无法观察到地面上点 A 的位置（计算结果保留根号）

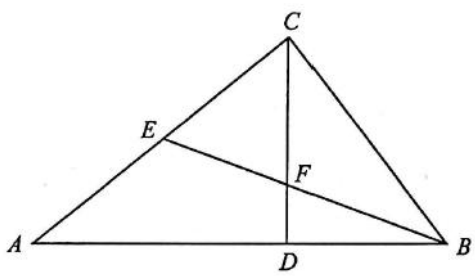


23. （本题满分 12 分，每小题满分各 6 分）

已知：如图，在 $Rt\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=90°$，$CD\perp AB$，垂足为点 D，E 为边 AC 上一点，联结 BE 交 CD 于点 F，并满足 $BC^2=CD\cdot BE$.

求证：(1) $\triangle BCE\backsim\triangle ACB$；

(2) 过点 C 作 $CM\perp BE$，交 BE 于点 G，交 AB 于点 M，求证：$BE\cdot CM=AB\cdot CF$.



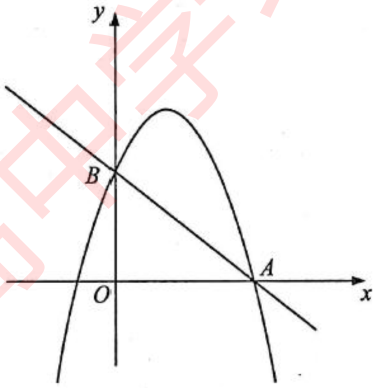
24. （本题满分 12 分，每小题满分各 4 分）

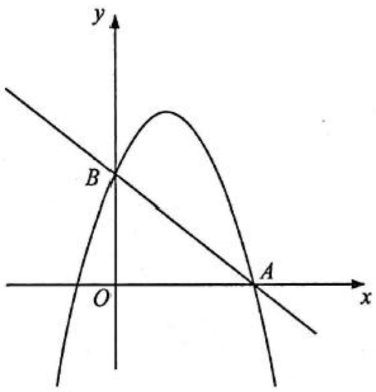
如图，抛物线 $y=-\frac{3}{4}x^2+bx+c$ 与 x 轴交于点 $A(4,0)$，与 y 轴交于点 $B(0,3)$，点 $M(m,0)$ 为线段 OA 上一动点，过点 M 且垂直于 x 轴的直线与直线 AB 及抛物线分别交于点 P，N.

（1）求抛物线的解析式，并写出此抛物线的对称轴和顶点坐标；

（2）如果以点 P、N、B、O 为顶点的四边形为平行四边形，求 m 的值；

（3）如果以 B、P、N 为顶点的三角形与相似，求点 M 的坐标.





（备用图）

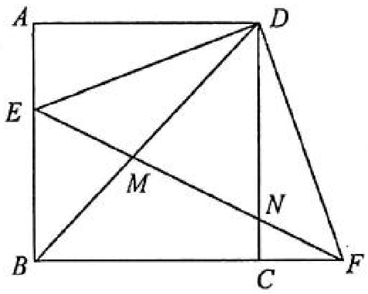
25. （本题满分 14 分，第（1）小题满分 4 分，第（2）、（3）小题满分各 5 分）

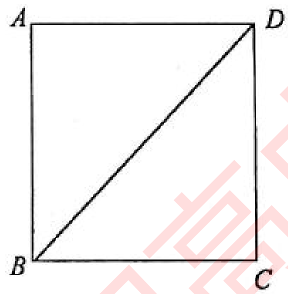
已知：如图，正方形的边长为 1，在射线 AB 上取一点 E，联结 DE，将 ADE 绕点 D 针旋转 90°，E 点落在点 F 处，联结 EF，与对角线 BD 所在的直线交于点 M，与射线 DC 交于点 N.

求证：（1）当 $AE=\frac{1}{3}$ 时，求 $\tan\angle EDB$ 的值；

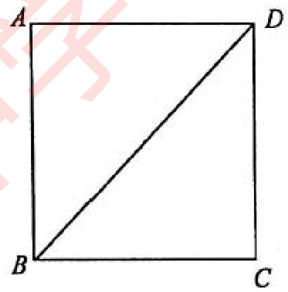
（2）当点 E 在线段 AB 上，如果 $AE=x$，$FM=y$，求 y 关于 x 的函数解析式，并写出定义域；

（3）联结 AM，直线 AM 与直线 BC 交于点 G，当 $BG=\frac{1}{3}$ 时，求 AE 的值.





（备用图）



（备用图）

2022年上海市崇明区中考数学一模试卷

答案

一、选择题（本大题共6题，每题4分，满分24分）

1. A　　2. B　　A. D　　4.C　　5.C　　6.D

二、填空题（本大题共12题，每题4分，满分36分）

7. $\frac{5}{3}$　　8. $\vec{a}+4\vec{b}$.　　9. $4\sqrt{5}-4$　　10. $k>2$

11. 1　　12. 0　　13. 50　　14. 3

15. $\frac{1}{2}\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}$　　16. $\frac{12}{7}$　　17. 13 或 12-$\sqrt{85}$ 或 12+$\sqrt{85}$　　18. $\frac{31}{32}$

三、解答题（本大题共7题，满分78分）

19. 解：$3\tan 30°+2\cos 45°-2\sin 60°\times\cot 45°$

$=3\times\frac{\sqrt{3}}{3}+2\times\frac{\sqrt{2}}{2}-2\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times 1$

$=\sqrt{3}+\sqrt{2}-\sqrt{3}$

$=\sqrt{2}$

20. 【答案】(1) $\frac{1}{4}$　　(2) $\overrightarrow{BE}=\frac{1}{2}\vec{b}-\vec{a}$，$\overrightarrow{AF}=\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}$

【解析】

【分析】(1) 根据重心是三角形三边中线的交点即可得到 DE 是△ABC 的中位线，则 $DE=\frac{1}{2}AB$，$DE//AB$，即可证明△ABF∽△DEF，得到 $\frac{S_{\triangle DEF}}{S_{\triangle ABF}}=\left(\frac{DE}{AB}\right)^2=\frac{1}{4}$；

(2) 先求出 $\overrightarrow{AE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\vec{b}$，再由 $\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AB}$，即可求出 $\overrightarrow{BE}$；由△ABF∽△DEF，得到 $\frac{BF}{EF}=\frac{AB}{DE}=2$，可以推出 $\overrightarrow{BF}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BE}=\frac{1}{3}\vec{b}-\frac{2}{3}\vec{a}$，则 $\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BF}=\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}$.

【小问1详解】

解：∵F 是三角形 ABC 的重心，

∴D、E 分别是 BC、AC 的中点，

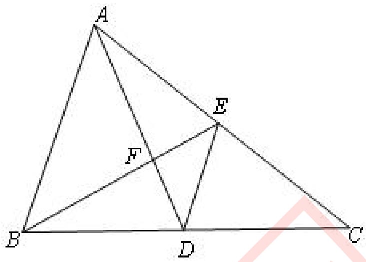
∴DE 是△ABC 的中位线，

∴ $DE=\frac{1}{2}AB$，$DE//AB$，

$\therefore \triangle ABF \backsim \triangle DEF$，

$\therefore \dfrac{S_{\triangle DEF}}{S_{\triangle ABF}}=\left(\dfrac{DE}{AB}\right)^2=\dfrac{1}{4}$；

【小问 2 详解】



解：$\because F$ 是$\triangle ABC$ 的重心，

$\therefore D$、E 分别是 BC、AC 的中点，

$\because \overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AC}=\vec{b}$，

$\therefore \overrightarrow{AE}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}=\dfrac{1}{2}\vec{b}$，

$\therefore \overrightarrow{BE}=\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AB}=\dfrac{1}{2}\vec{b}-\vec{a}$，

$\because \triangle ABF \backsim \triangle DEF$，

$\therefore \dfrac{BF}{EF}=\dfrac{AB}{DE}=2$，

$\therefore EF=\dfrac{1}{2}BF$，

$\therefore BF=\dfrac{2}{3}BE$，

$\therefore \overrightarrow{BF}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{BE}=\dfrac{1}{3}\vec{b}-\dfrac{2}{3}\vec{a}$，

$\therefore \overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BF}=\dfrac{1}{3}\vec{a}+\dfrac{1}{3}\vec{b}$．

21. （1）2；　　（2）$\dfrac{3}{5}$．

【解析】

【分析】（1）作$\triangle ABC$ 的高 AD，由等腰三角形的性质“三线合一”，可知 $AB=AC$．在 $\mathrm{Rt}\triangle ABD$ 中，由 $\sin B=\dfrac{AD}{AB}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$，即可求出 AD 的长，再根据勾股定理即可求出 BD 的长，从而即可求出 BC 的长；

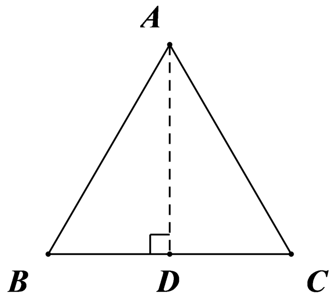
（2）再作$\triangle ABC$ 的高 BE，由面积法即可求出 BE 的长，再在 $Rt\triangle ABE$ 中，由勾股定理即可求出 AE 的长，最后根据 $\cos A=\dfrac{AE}{AB}$ 求值即可．

【小问 1 详解】

解：如图，作△ABC的高AD，

∵ $AB=AC$，

∴点D为BC中点，即$BD=CD$.



∵在Rt△ABD中，$\sin B=\dfrac{AD}{AB}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$，即$\dfrac{AD}{\sqrt{5}}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$，

∴ $AD=2$，

∴ $BD=\sqrt{AB^2-AD^2}=\sqrt{(\sqrt{5})^2-2^2}=1$，

∴ $BC=2BD=2$.

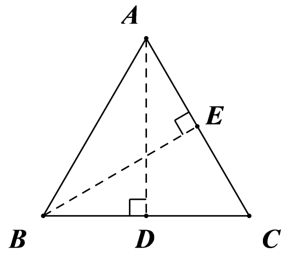
【小问 2 详解】

如图，再作△ABC的高BE，

∵ $S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}BC\cdot AD=\dfrac{1}{2}AC\cdot BE$，

∴ $2\cdot 2=\sqrt{5}\cdot BE$，

∴ $BE=\dfrac{4\sqrt{5}}{5}$.



∵在$Rt\triangle ABE$中，$AE=\sqrt{AB^2-BE^2}=\sqrt{(\sqrt{5})^2-(\dfrac{4\sqrt{5}}{5})^2}=\dfrac{3\sqrt{5}}{5}$，

∴ $\cos A=\dfrac{AE}{AB}=\dfrac{\frac{3\sqrt{5}}{5}}{\sqrt{5}}=\dfrac{3}{5}$.

22. （1） $30\left(\sqrt{3}-1\right)$ 米　　（2） $12\sqrt{3}$ 秒

【解析】

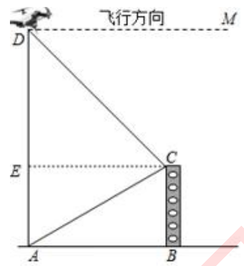
【分析】(1) 过点C作$CE\perp AD$于点E，可得四边形$ABCE$为平行四边形，从而得到$AB=CE$，$AE=BC$，$\angle ACE=30°$，然后在$Rt\triangle ACE$ 和$Rt\triangle CDE$中，利用锐角三角函数，可得$CE=\dfrac{AE}{\tan 30°}=\sqrt{3}AE$ ，$DE=CE$，即可求解；

(2) 设直线DM交AC延长线于点F，则$DF\parallel AB$，可得$\angle F=\angle BAC=30°$，在$Rt\triangle ADF$ 中，可得$DF=\dfrac{AD}{\tan 30°}=60\sqrt{3}$ 米，再除以速度，即可求解.

【小问 1 详解】

解：如图，过点 C 作 $CE\perp AD$ 于点 E，

根据题意得：$AD\perp AB$，$BC\perp AB$，AD=60 米，$\angle BAC$=30°，$\angle CDE$=45°，



∴AD∥BC，AB∥CE，

∴四边形 $ABCE$ 为平行四边形，

∴AB=CE，AE=BC，$\angle ACE$=30°，

在 $Rt\triangle ACE$ 中，$\angle ACE$=30°，

$\therefore CE=\dfrac{AE}{\tan 30°}=\sqrt{3}AE$，

在 $Rt\triangle CDE$ 中，$\angle CDE$=45°，

∴$\angle DCE$=45°，

∴$\angle CDE$=$\angle DCE$，

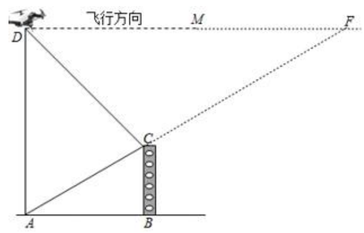
∴DE=CE，

$\therefore 60-AE=\sqrt{3}AE$，解得：$AE=30\left(\sqrt{3}-1\right)$ 米，

即小区楼房 BC 的高度为 $30\left(\sqrt{3}-1\right)$ 米；

【小问 2 详解】

如图，设直线 DM 交 AC 延长线于点 F，则 DF∥AB，



∴$\angle F$=$\angle BAC$=30°，

在 $Rt\triangle ADF$ 中，

$DF=\dfrac{AD}{\tan 30°}=60\sqrt{3}$ 米，

$\therefore 60\sqrt{3}\div 5=12\sqrt{3}$ 秒，

即经过 $12\sqrt{3}$ 秒后，无人机无法观察到地面上点 A 的位置．

23. （1）见解析　（2）见解析

【解析】

【分析】（1）由 $BC^2=CD\cdot BE$ 可得 $\dfrac{BC}{CD}=\dfrac{BE}{BC}$ 可得 $\triangle BCE\backsim\triangle BCD$，然后再说明 $\triangle ABC\backsim\triangle BCD$，即可证明结论；

（2）说明 $\triangle ABE\backsim\triangle CMF$ 即可证明结论．

【小问 1 详解】

证明：∵ $BC^2 = CD \cdot BE$

∴ $\dfrac{BC}{CD} = \dfrac{BE}{BC}$

∵ $\angle ACB = 90°$，$CD \perp AB$

∴ $\angle BDC = \angle ACB = 90°$

∴ $\triangle EBC \backsim \triangle BCD$

∵ $\angle ACB = 90°$，$CD \perp AB$

∴ $\angle A + \angle ABC = 90°$，$\angle DCB + \angle ABC = 90°$，

∴ $\angle A = \angle DCB$

∵ $\angle CBD = \angle CBD$

∴ $\triangle ABC \backsim \triangle BCD$

∴ $\triangle BCE \backsim \triangle ACB$.

【小问 2 详解】

解：∵ $\triangle BCE \backsim \triangle ACB$

∴ $\angle A = \angle CBE$

∵ $\triangle BCE \backsim \triangle BCD$

∴ $\angle DCB = \angle CBE$

∵ $\angle AEB = \angle CBE + \angle BCE, \angle CFM = \angle CDA + \angle FMD$

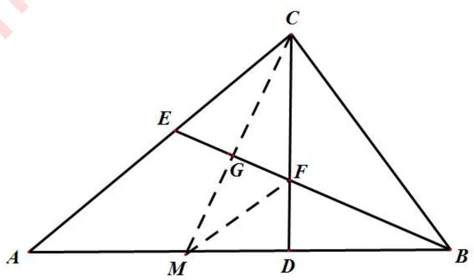
∴ $\angle AEB = \angle CFM$

∵ $CG \perp BE$，$CD \perp AB$，$\angle CFD = \angle DFB$

∴ $\angle MCF = \angle FBD$

∴ $\triangle ABE \backsim \triangle CMF$

∴ $BE \cdot CM = AB \cdot CF$.



24. 【答案】(1) 抛物线的解析式为 $y=-\dfrac{3}{4}x^2+\dfrac{9}{4}x+3$，对称轴为 $x=\dfrac{3}{2}$，顶点坐标为$(\dfrac{3}{2}，\dfrac{75}{16})$；

(2) $m=2$；　　(3) 点 M 的坐标为（$\dfrac{11}{9}$，0）或（3，0）.

【解析】

【分析】(1) 利用待定系数法求抛物线解析式，利用配方法可求得此抛物线的对称轴和顶点坐标；

（2）先求得直线 AB 的解析式，得到 $NP=-\frac{3}{4}m^2+3m$，根据 $NP=OB$，列出方程求解即可；

（3）利用两点间的距离公式计算出 $AB=5$，$BP=\frac{5}{4}m$，$NP=-\frac{3}{4}m^2+3m$，分 $\frac{PB}{OB}=\frac{PN}{AB}$ 时，$\triangle BPN\backsim\triangle OBA$；$\frac{PB}{AB}=\frac{PN}{OB}$ 时，$\triangle BPN\backsim\triangle ABO$ 两种情况讨论即可求解．

【小问 1 详解】

解：∵抛物线 $y=-\frac{3}{4}x^2+bx+c$ 与 x 轴交于点 $A(4，0)$，与 y 轴交于点 $B(0，3)$，

∴$\begin{cases}-\frac{3}{4}\times 4^2+4b+c=0\\ c=3\end{cases}$，

解得：$\begin{cases}b=\frac{9}{4}\\ c=3\end{cases}$，

∴抛物线的解析式为 $y=-\frac{3}{4}x^2+\frac{9}{4}x+3$，

∵$y=-\frac{3}{4}x^2+\frac{9}{4}x+3=-\frac{3}{4}(x-\frac{3}{2})^2+\frac{75}{16}$，

∴此抛物线的对称轴为 $x=\frac{3}{2}$，

顶点坐标为($\frac{3}{2}$，$\frac{75}{16}$)；

【小问 2 详解】

解：设直线 AB 的解析式为 $y=px+q$，

把 A（4，0），B（0，3）代入得 $\begin{cases}4p+q=0\\ q=3\end{cases}$，

解得：$\begin{cases}p=-\frac{3}{4}\\ q=3\end{cases}$，

∴直线 AB 的解析式为 $y=-\frac{3}{4}x+3$，

∵M（m，0），$MN\perp x$ 轴，

∴N（m，$-\frac{3}{4}m^2+\frac{9}{4}m+3$），$P$（$m$，$-\frac{3}{4}m+3$），

$\therefore NP=-\frac{3}{4}m^2+3m$，$OB=3$，

$\because NP\parallel OB$，且以点 P、N、B、O 为顶点的四边形为平行四边形，

$\therefore NP=OB$，即$-\frac{3}{4}m^2+3m=3$，

整理得：$m^2-4m+4=0$，

解得：$m=2$；

【小问 3 详解】

$\because A$（4，0），B（0，3），P（m，$-\frac{3}{4}m+3$），

$\therefore AB=\sqrt{4^2+3^2}=5$，$BP=\sqrt{m^2+\left(-\frac{3}{4}m+3-3\right)^2}=\frac{5}{4}m$，

而 $NP=-\frac{3}{4}m^2+3m$，

$\because PN\parallel OB$，

$\therefore \angle BPN=\angle ABO$，

当$\frac{PB}{OB}=\frac{PN}{AB}$时，$\triangle BPN\backsim\triangle OBA$，

即$\frac{\frac{5}{4}m}{3}=\frac{-\frac{3}{4}m^2+3m}{5}$，

整理得 $9m^2-11m=0$，解得 $m_1=0$（舍去），$m_2=\frac{11}{9}$，

此时 M 点的坐标为（$\frac{11}{9}$，0）；

当$\frac{PB}{AB}=\frac{PN}{OB}$时，$\triangle BPN\backsim\triangle ABO$，

即$\frac{\frac{5}{4}m}{5}=\frac{-\frac{3}{4}m^2+3m}{3}$，

整理得 $2m^2-5m=0$，解得 $m_1=0$（舍去），$m_2=3$，

此时 M 点的坐标为（3，0）；

综上所述，点 M 的坐标为（$\frac{11}{9}$，0）或（3，0）.

25. 【答案】（1）$\frac{1}{2}$；（2）$y=\frac{1}{2}(1+x)\sqrt{2+2x^2}$，0≤x≤1；（3）$AE$ 的值为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 或 $\sqrt{2}$.

【解析】

【分析】（1）过点 E 作 $EH\perp BD$ 与 H，根据正方形的边长为 1，$AE=\frac{1}{3}$，求出 EB=1- $AE=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$，根据正方形性质可求∠$ABD$=45°，根据 $EH\perp BD$，得出∠BEH=180°-∠EBH-∠EHB=180°-45°-90°=45°，求出 EH=BH=$BE\sin45=\frac{2}{3}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{3}$，以及 DH=DB-BH=$\sqrt{2}-\frac{\sqrt{2}}{3}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$，利用三角函数定义求解即可；

（2）解：根据 AE=x，求出 BE=1-x，根据旋转将△ADE 绕点 D 针旋转 90°，得到△DCF，CF=AE=x，根据勾股定理

ED=FD=$\sqrt{AD^2+AE^2}=\sqrt{1+x^2}$,EF=$\sqrt{BE^2+BF^2}=\sqrt{(1-x)^2+(1+x)^2}=\sqrt{2+2x^2}$，可证△$DEF$ 为等腰直角三角形，先证△BEM∽△FDM，得出 $\frac{1-x}{\sqrt{1+x^2}}=\frac{BM}{y}$，再证△$EMD$∽△$BMF$，得出 $\frac{\sqrt{1+x^2}}{1+x}=\frac{\sqrt{2+2x^2}-y}{BM}$，两式相乘得出 $\frac{1-x}{1+x}=\frac{\sqrt{2+2x^2}-y}{y}$，整理即可；

（3）当点 G 在 BC 上，$BG=\frac{1}{3}$，先证△BGM∽△DAM，得出 $\frac{BG}{DA}=\frac{BM}{DM}=\frac{\frac{1}{3}}{1}=\frac{1}{3}$，由（2）知△$BEM$∽△$FDM$，得出 $\frac{BM}{MF}=\frac{BE}{DF}$，得出 $\frac{\frac{\sqrt{2}}{4}}{y}=\frac{1-x}{\sqrt{1+x^2}}$，结合 $y=\frac{1}{2}(1+x)\sqrt{2+2x^2}$，消去 y， 当点 G 在 CB 延长线上，$BG=\frac{1}{3}$，过 M 作 $ML\perp BC$，交直线 BC 于 L，证明△BGM∽△DAM，得出 $BM=\frac{1}{2}BD$，根据∠LBM=∠CBD=45°，$ML\perp BC$，证出△MLB 为等腰直角三角形，再证△MLB∽△DCB，$\frac{BM}{BD}=\frac{ML}{DC}=\frac{1}{2}$，$CD$=1，$ML$=$\frac{1}{2}$，$ML$∥$BE$，结

合$\triangle LMF \backsim \triangle BEF$，得出$\dfrac{LM}{BE}=\dfrac{LF}{BF}$即$\dfrac{\frac{1}{2}}{x-1}=\dfrac{\frac{3}{2}+x}{1+x}$解方程即可．

【小问 1 详解】

解：过点 E 作 $EH\perp BD$ 与 H，

∵正方形的边长为 1，$AE=\dfrac{1}{3}$，

∴$EB=1-AE=1-\dfrac{1}{3}=\dfrac{2}{3}$，

∵BD 为正方形对角线，

∴BD 平分$\angle ABC$，

∴$\angle ABD=45°$，

∵$EH\perp BD$，

∴$\angle BEH=180°-\angle EBH-\angle EHB=180°-45°-90°=45°$，

∴$EH=BH$，

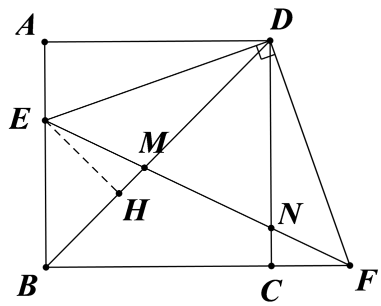
∴$EH=BH=BE\sin45°=\dfrac{2}{3}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{\sqrt{2}}{3}$，$AB=BD\cos45°$，

∴$BD=1\div\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$，

∴$DH=DB-BH=\sqrt{2}-\dfrac{\sqrt{2}}{3}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$，

$\tan\angle EDB=\dfrac{EH}{HD}=\dfrac{\frac{\sqrt{2}}{3}}{\frac{2\sqrt{2}}{3}}=\dfrac{1}{2}$；

【小问 2 详解】



解：如上图，∵$AE=x$，

∴$BE=1-x$，

∵将$\triangle ADE$ 绕点 D 针旋转 90°，得到$\triangle DCF$，

∴$CF=AE=x$，$ED=FD=\sqrt{AD^2+AE^2}=\sqrt{1+x^2}$，

∴$BF=BC+CF=1+x$，

在 Rt$\triangle EBF$ 中 $EF=\sqrt{BE^2+BF^2}=\sqrt{(1-x)^2+(1+x)^2}=\sqrt{2+2x^2}$，

∵$\angle EDF=90°$，$ED=FD$，

∴$\triangle DEF$为等腰直角三角形，

∴$\angle DFE=\angle DEF=45°$，

∴$\angle EBM=\angle MFD=45°$，

∵$\angle EMB=\angle DMF$，

∴$\triangle BEM\backsim\triangle FDM$，

∴$\frac{BE}{DF}=\frac{BM}{FM}$，即$\frac{1-x}{\sqrt{1+x^2}}=\frac{BM}{y}$，

∵$\angle DEM=\angle FBM=45°$，$\angle EMD=\angle BMF$，

∴$\triangle EMD\backsim\triangle BMF$，

∴$\frac{ED}{BF}=\frac{EM}{BM}$，即$\frac{\sqrt{1+x^2}}{1+x}=\frac{\sqrt{2+2x^2}-y}{BM}$，

∴$\frac{1-x}{\sqrt{1+x^2}}\times\frac{\sqrt{1+x^2}}{1+x}=\frac{BM}{y}\times\frac{\sqrt{2+2x^2}-y}{BM}$，

∴$\frac{1-x}{1+x}=\frac{\sqrt{2+2x^2}-y}{y}$，

∴$\frac{1-x+1+x}{1+x}=\frac{\sqrt{2+2x^2}-y+y}{y}$即$\frac{2}{1+x}=\frac{\sqrt{2+2x^2}}{y}$，

∴$y=\frac{1}{2}(1+x)\sqrt{2+2x^2}$，$0\le x\le 1$；

【小问3详解】

解：当点G在BC上，$BG=\frac{1}{3}$，

∵四边形$ABCD$为正方形，

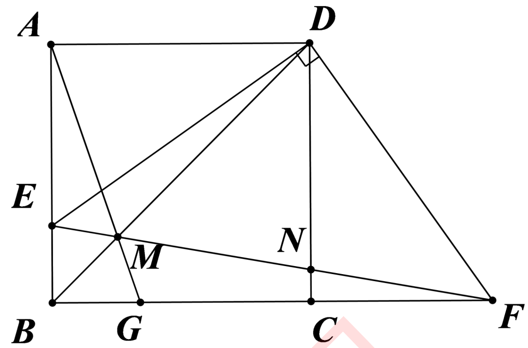
∴$AD\parallel BG$，

∴$\angle DAM=\angle BGM$，$\angle ADM=\angle GBM$，

∴$\triangle BGM\backsim\triangle DAM$，

∴$\frac{BG}{DA}=\frac{BM}{DM}=\frac{\frac{1}{3}}{1}=\frac{1}{3}$，

∵由（2）知$\triangle BEM\backsim\triangle FDM$，



$\therefore \dfrac{BM}{MF}=\dfrac{BE}{DF}$，

$\because DB=\sqrt{AB^2+AD^2}=\sqrt{2}$，

$\therefore BM=\dfrac{1}{3}DM$，$BM+DM=\sqrt{2}$，

$\therefore BM=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$，

$\therefore \dfrac{\frac{\sqrt{2}}{4}}{y}=\dfrac{1-x}{\sqrt{1+x^2}}$，

$\because y=\dfrac{1}{2}(1+x)\sqrt{2+2x^2}$，

$\therefore \dfrac{\frac{\sqrt{2}}{4}}{\frac{1}{2}(1+x)\sqrt{2+2x^2}}=\dfrac{1-x}{\sqrt{1+x^2}}$ 即 $1-x^2=\dfrac{1}{2}$，

解 $x_1=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$x_2=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 舍去；

当点 G 在 CB 延长线上，$BG=\dfrac{1}{3}$，过 M 作 $ML\perp BC$，交直线 BC 于 L，

$\because GB\parallel AD$，

$\therefore \therefore \angle DAM=\angle BGM$，$\angle ADM=\angle GBM$，

$\therefore \triangle BGM\backsim\triangle DAM$，

$\therefore \dfrac{BG}{DA}=\dfrac{BM}{DM}=\dfrac{\frac{1}{3}}{1}=\dfrac{1}{3}$，

$\therefore BM=\dfrac{1}{3}DM$，

$\therefore BM=\dfrac{1}{2}BD$，

$\because \angle LBM=\angle CBD=45°$，$ML\perp BC$，

$\therefore \triangle MLB$ 为等腰直角三角形，

$\because ML\parallel CD$，

$\therefore \angle LMB=\angle CDB$，$\angle L=\angle DCB$，

∴△MLB∽△DCB，

∴$\frac{BM}{BD}=\frac{ML}{DC}=\frac{1}{2}$，CD=1，

∴ML=$\frac{1}{2}$

∵ML∥BE，

∴∠L=∠FBE，∠LMF=∠BEF，

∴△LMF∽△BEF，

∴$\frac{LM}{BE}=\frac{LF}{BF}$，

∵BE=AE-AB=x-1，LF=LB+BC+CF=$\frac{1}{2}+1+x=\frac{3}{2}+x$，BF=BC+CF=1+x，

∴$\frac{\frac{1}{2}}{x-1}=\frac{\frac{3}{2}+x}{1+x}$，

整理得：$2x^2=4$，

解得$x_3=\sqrt{2}$，$x_4=-\sqrt{2}$舍去，

∴AE的值为$\frac{\sqrt{2}}{2}$或$\sqrt{2}$．