2022 年上海市静安区中考数学一模试卷

2022.1

一、选择题：（本大题共 6 题，每题 4 分，满分 24 分）

【下列各题的四个选项中，有且只有一个选项是正确的，选择正确项的代号并填涂在答题纸的相应位置上．】

1. 下列实数中，有理数是（ ）

   A. $\sqrt{3}$　　*B*. π　　*C*. $\sqrt{4}$　　*D*. $\sqrt[3]{9}$

2. 计算 $x \div 2x^2$ 的结果是（ ）

   A. $\frac{2}{x}$　　*B*. $\frac{1}{2x}$　　*C*. $\frac{x}{2}$　　*D*. $2x$

3. 已知点 *D*、*E* 分别在△*ABC* 的边 *AB*、*AC* 的反向延长线上，且 *ED*//*BC*，如果 *AD*:*DB*=1:4，*ED*=2，那么 *BC* 的长是（ ）

   A. 8　　*B*. 10　　*C*. 6　　*D*. 4

4. 将抛物线 $y = x^2 - 2x$ 向左平移 1 个单位，再向上平移 1 个单位后，所得抛物线的顶点坐标是（ ）

   A. $(1,-1)$　　*B*. $(-1,1)$　　*C*. $(1,0)$　　*D*. $(0,0)$

5. 如果锐角 *A* 的度数是 25°，那么下列结论中正确的是（ ）

   A. $0 < \sin A < \frac{1}{2}$　　*B*. $0 < \cos A < \frac{\sqrt{3}}{2}$

   C. $\frac{\sqrt{3}}{3} < \tan A < 1$　　*D*. $1 < \cot A < \sqrt{3}$

6. 下列说法错误的是（ ）

   A. 任意一个直角三角形都可以被分割成两个等腰三角形

   B. 任意一个等腰三角形都可以被分割成两个等腰三角形

   C. 任意一个直角三角形都可以被分割成两个直角三角形

   D. 任意一个等腰三角形都可以被分割成两个直角三角形

二、填空题：（本大题共 12 题，每题 4 分，满分 48 分）

【请直接将结果填入答题纸的相应位置】

7. -5 的绝对值是____________.

8. 如果 $\sqrt{3-x}$ 在实数范围内有意义，那么实数 x 的取值范围是____________.

9. 已知 $\frac{a}{2}=\frac{b}{3}$，那么 $\frac{b-a}{b+a}$ 的值是____________.

10. 已知线段 $AB=2cm$，点 P 是 AB 的黄金分割点，且 $AP>PB$，那么 AP 的长度是____________cm（结果保留根号）

11. 如果某抛物线开口方向与抛物线 $y=\frac{1}{2}x^2$ 的开口方向相同，那么该抛物线有最____________点（填“高”或“低”）

12. 已知反比例函数 $y=\frac{1}{x}$ 的图像上的三点 $(-2,y_1),(-1,y_2),(1,y_3)$，判断 y_1,y_2,y_3 的大小关系：____________（用“<”连接）

13. 如果抛物线 $y=x^2+mx+4$ 的顶点在 x 轴上，那么常数 m 的值是____________.

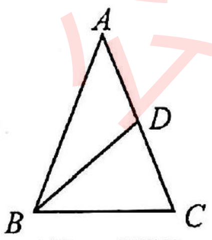
14. 如果在 A 点处观察 B 点的仰角为 α，那么在 B 点处观察 A 点的俯角为____________.(用含 α 的式子表示)

15. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，$AB=AC=6$，$BC=4$，点 D 在边 AC 上，$BD=BC$，那么 AD 的长是____________.

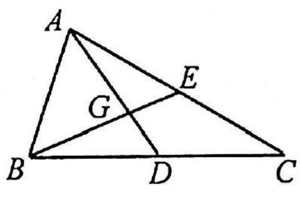
16. 在 $\triangle ABC$ 中，$DE//BC$，DE 交边 AB、AC 分别于点 D、E，如果 $\triangle ADE$ 与四边形 $BCED$ 的面积相等，那么 $AD:DB$ 的值为____________.

17. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，中线 AD、BE 相交于点 G，如果 $\overrightarrow{AD}=\vec{a},\overrightarrow{BE}=\vec{b}$，那么 $\overrightarrow{BC}=$____________.（用含向量 $\vec{a},\vec{b}$ 的式子表示）

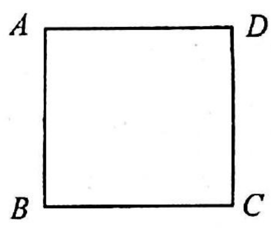
18. 如图，正方形 $ABCD$ 中，将边 BC 绕着点 C 旋转，当点 B 落在边 AD 的垂直平分线上的点 E 处时，$\angle AEC$ 的度数为____________.



（第 15 题图）



（第 17 题图）

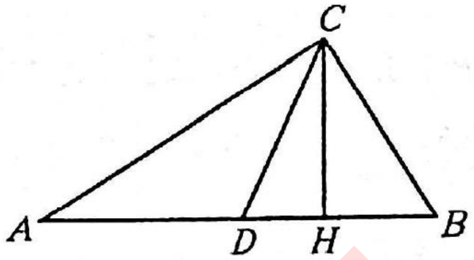


（第 18 题图）

三、解答题：（本大题共 7 题，满分 78 分）

19. 计算：$\frac{\tan 45^\circ}{\sin 60^\circ \cdot \cot 30^\circ}-\sqrt{(\sin 30^\circ-1)^2}+2\cos^2 45^\circ$

20. 如图，在 $Rt\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=90°$，CD、CH 分别是 AB 边上的中线和高，$BC=\sqrt{14}$，$\cos\angle ACD=\dfrac{3}{4}$，求 AB、CH 的长



（第 20 题图）

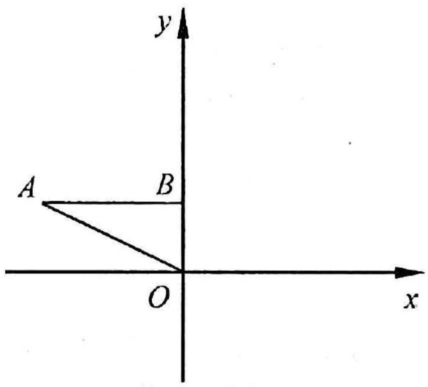
21. 我们将平面直角坐标系 xOy 中的图形 D 和点 P 给出如下定义：如果将图形 D 绕点 P 顺时针旋转 90°得到图形 D'，那么图形 D' 称为图形 D 关于点 P 的“垂直图形”.

已知点 A 的坐标为 $(-2,1)$，点 B 的坐标为 $(0,1)$，$\triangle ABO$ 关于原点 O 的“垂直图形”记为 $\triangle A'B'O'$，点 A、B 的对应点分别为点 A',B'.

（1）请写出：点 A' 的坐标为____________；点 B' 的坐标为____________；

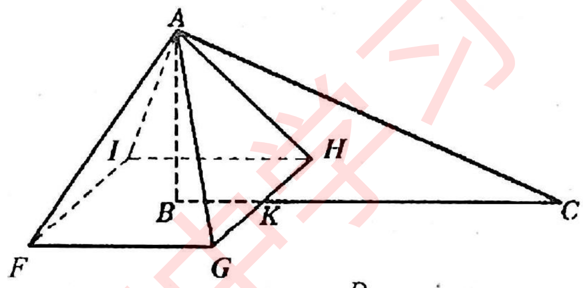
（2）请求出经过点 A、B、B' 的二次函数解析式；

（3）请直接写出经过点 A、B、A' 的抛物线的表达式为____________.



（第 21 题图）

22. 据说，在距今 2500 多年前，古希腊数学家就已经较准确地测出了埃及金字塔的高度，操作过程大致如下：如图所示，设 AB 是金字塔的高，在某一时刻，阳光照射下的金字塔在底面上投下了一个清晰的阴影，塔顶 A 的影子落在地面上的点 C 处，金字塔底部可看作方正形 $FGHI$，测得正方形边长 FG 长为 160 米，点 B 在正方形的中心，BC 与金字塔底部一边垂直于点 K，与此同时，直立地面上的一根标杆 DO 留下的影子是 OE，射向地面的太阳光线可看作平行线（$AC//DE$），此时测得标杆 DO 长为 1.2 米，影子 OE 长为 2.7 米，KC 长为 250 米，求金字塔的高度 AB 及斜坡 AK 的坡度（结果均保留四个有效数字）

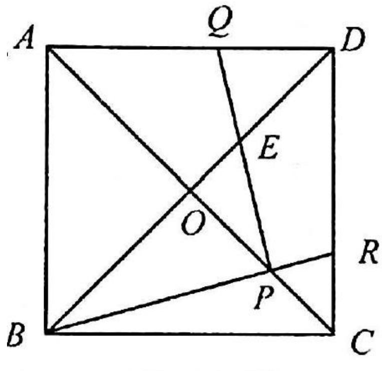


（第 22 题图）

23. 如图，边长为 1 的正方形 $ABCD$ 中，对角线 AC、BD 相交于点 O，点 Q、R 分别在边 AD、DC 上，BR 交线段 OC 于点 P，$QP \perp BP$，QP 交 BD 于点 E.

（1）求证：$\triangle APQ \sim \triangle DBR$；

（2）当$\angle QED$ 等于 60°时，求 $\dfrac{AQ}{DR}$ 的值.



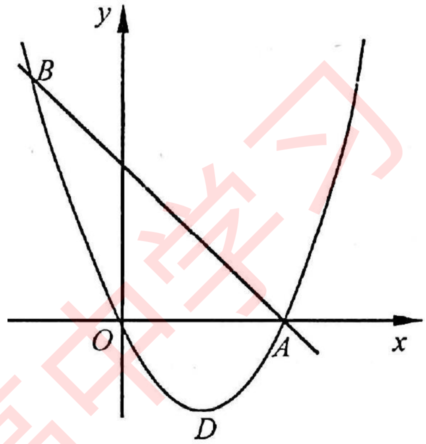
（第 23 题图）

24. 如图，在平面直角坐标系 xOy 中，已知抛物线 $y=x^2+bx$ 经过点 $A(2,0)$ 和点 $B(-1,m)$，顶点为点 D.

（1）求直线 AB 的表达式；

（2）求 $\tan\angle ABD$ 的值；

（3）设线段 BD 与 x 轴交于点 P，如果点 C 在 x 轴上，且 $\triangle ABC$ 与 $\triangle ABP$ 相似，求点 C 的坐标.



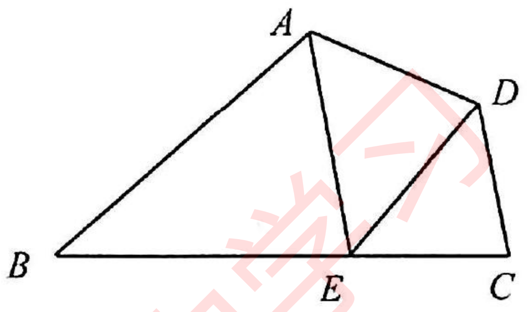
（第 24 题图）

25. 如图 1，四边形 $ABCD$ 中，$\angle BAD$ 的平分线 AE 交边 BC 于点 E，已知 $AB=9$，$AE=6$，$AE^2 = AB \cdot AD$，且 $DC//AE$.

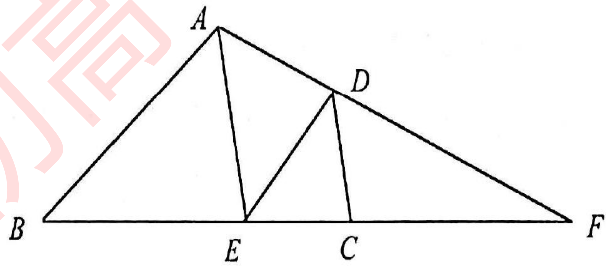
（1）求证：$DE^2 = AE \cdot DC$；

（2）如果 $BE=9$，求四边形 $ABCD$ 的面积；

（3）如图 2，延长 AD、BC 交于点 F，设 $BE = x, EF = y$，求 y 关于 x 的函数解析式，并写出定义域.



（第 25 题图 1）



（第 25 题图 2）

2022 年上海市静安区中考数学一模试卷

答案

一、选择题

1. C　2. B　3. B　4. D　5. A　6. B

二、填空题

7. 5　8. $x \le 3a$　9. $\frac{1}{5}$　10. $\sqrt{5}-1$　11. 低　12. $y_2 < y_1 <_3$

13. ± 4　14. a　15. $\frac{10}{3}$　16. $\sqrt{2}+1$　17. $\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{4}{3}\vec{b}$　18. 45°或 135°

三、解答题

19. 解：$\frac{\tan 45^\circ}{\sin 60^\circ \cdot \cot 30^\circ} - \sqrt{(\sin 30^\circ - 1)^2} + 2\cos^2 45^\circ$

$= \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2} \times \sqrt{3}} - \sqrt{\left(\frac{1}{2}-1\right)^2} + 2\times\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$

$= \frac{2}{3} - \frac{1}{2} + 1$

$= \frac{7}{6}$.

20. 解：过 D 作 $DE \perp AC$ 于 E，则 $\angle AED = \angle CED = 90^\circ$，

$\because \angle ACB = 90^\circ$，

$\therefore \angle AED = \angle ACB$，

$\therefore DE // BC$，

$\because CD$ 是$\triangle ABC$ 的中线，

$\therefore AD = BD$，

$\therefore CE = AE$，即 $AC = 2CE$

$\because BC = \sqrt{14}$，

$\therefore DE = \frac{1}{2}BC = \frac{\sqrt{14}}{2}$，

$\because \cos \angle ACD = \frac{CE}{CD} = \frac{3}{4}$

$\therefore$设 $CE = 3x$，$CD = 4x$，

由勾股定理得：$DE=\sqrt{CD^2-CE^2}=\sqrt{(4x)^2-(3x)^2}=\sqrt{7}x$

$\therefore \sqrt{7}x=\frac{\sqrt{14}}{2}$，即 $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\therefore AE=CE=3x=\frac{3\sqrt{2}}{2}$

$\therefore AC=AE+CE=3\sqrt{2}$

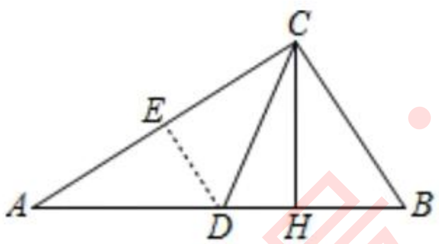
$\because \cos\angle ACD=\frac{AC}{AB}=\frac{3}{4}$,即 $\frac{3\sqrt{2}}{AB}=\frac{3}{4}$

$\therefore AB=4\sqrt{2}$

$\because S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\times AC\times BC=\frac{1}{2}\times AB\times CH$

$\therefore \frac{1}{2}\times 3\sqrt{2}\times\sqrt{14}=\frac{1}{2}\times 4\sqrt{2}\times CH$，解得：$CH=\frac{3}{4}\sqrt{14}$．

$\therefore CH$ 的长为 $\frac{3}{4}\sqrt{14}$，AB 的长为 $4\sqrt{2}$．



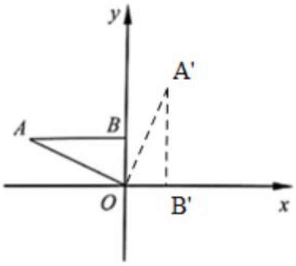
21.（1）根据旋转的性质得出 $OB=OB'$，$AB=A'B'$；

（2）利用待定系数法进行求解解析式即可；

（3）利用待定系数法求解解析式即可，或利用与（2）中对对称轴相同，开口方向相反可以快速得出答案．

【小问 1 详解】

解：根据题意作下图：



根据旋转的性质得：$OB=OB'=1$，$AB=A'B'=0-(-2)=2$，

$\therefore$ $A'(1,2)$，$B'(1,0)$，

故答案是：（1，2）；（1，0）；

【小问 2 详解】

解：设过点 A、B、B' 的二次函数解析式为：$y=ax^2+bx+c,(a\neq 0)$，

将点 $A(-2,1),B(0,1),B'(1,0)$ 分别代入 $y=ax^2+bx+c,(a\neq 0)$ 中得：

$$\begin{cases}1=a(-2)^2-2b+c\\ 1=c\\ 0=a+b+c\end{cases},$$

解得：$a=-\dfrac{1}{3},b=-\dfrac{2}{3},c=1$，

$\therefore y=-\dfrac{1}{3}x^2-\dfrac{2}{3}x+1$；

【小问 3 详解】

解：设过点 A、B、A' 的二次函数解析式为：$y=ax^2+bx+c,(a\neq 0)$，

将点 $A(-2,1),B(0,1),A'(1,2)$ 分别代入 $y=ax^2+bx+c,(a\neq 0)$ 中得：

$$\begin{cases}1=a(-2)^2-2b+c\\ 1=c\\ 2=a+b+c\end{cases},$$

解得：$a=\dfrac{1}{3},b=\dfrac{2}{3},c=1$，

$\therefore y=\dfrac{1}{3}x^2+\dfrac{2}{3}x+1$；

故答案为：$y=\dfrac{1}{3}x^2+\dfrac{2}{3}x+1$.

22. 解：$\because FGHI$ 是正方形，点 B 在正方形的中心，$BC\perp HG$，

∴$BK // FG$，$BK=\frac{1}{2}FG=\frac{1}{2}\times160=80$，

∵根据同一时刻物高与影长成正比例，

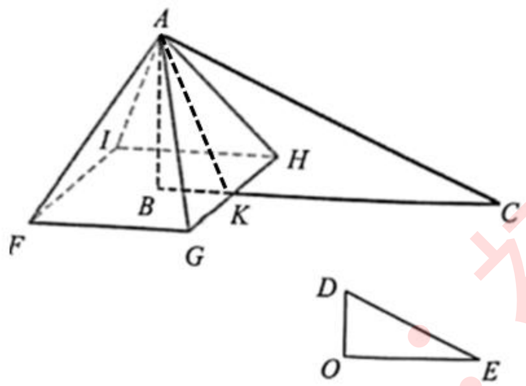
∴$\frac{AB}{BC}=\frac{DO}{OE}$，即$\frac{AB}{80+250}=\frac{1.2}{2.7}$，

解得：$AB=\frac{440}{3}$米，

连接AK，

$\frac{AB}{BK}=\frac{\frac{440}{3}}{80}=1.833$.

∴金字塔的高度AB为$\frac{440}{3}$米，斜坡AK的坡度为1.833.



23.（1）根据正方形的性质，可得$\angle CAD=\angle BDC=45°$，$\angle OBP+\angle OPB=90°$，再由$QP\perp BP$，可得$\angle OBP=\angle OPE$，即可求证；

（2）设$OE=a$，根据$\angle QED$等于60°，可得$\angle BEP=60°$，然后利用锐角三角函数，可得$BD=2OB=6a$，$AP=OA+OP=\left(3+\sqrt{3}\right)a$，然后根据相似三角形的对应边成比例，即可求解.

【小问1详解】

证明：在正方形$ABCD$中，

$\angle CAD=\angle BDC=45°$，$BD\perp AC$，

∴$\angle BOC=90°$，

∴$\angle OBP+\angle OPB=90°$，

∵$QP\perp BP$，

∴$\angle BPQ$=90°，

∴$\angle OPE+\angle OPB$=90°，

∴$\angle OBP=\angle OPE$，

∴$\triangle APQ\sim\triangle DBR$；

【小问 2 详解】

解：设 $OE=a$，

在正方形 $ABCD$ 中，$\angle POE$=90°，$OA=OB=OD$，

∵$\angle QED$ 等于 60°，

∴$\angle BEP$=60°，

在 $Rt\triangle OEP$ 中，

$PE=\dfrac{OE}{\cos 60^\circ}=2a$，$OP=OE\cdot\tan 60^\circ=\sqrt{3}a$，

∵$QP\perp BP$，$\angle BEP$=60°，

∴$\angle PBE$=30°，

∴$BE=2PE=4a$，$BP=PE\cdot\tan 60^\circ=2\sqrt{3}a$，

∴$OA=OB=BE-OE=3a$，

∴$BD=2OB=6a$，

∴$AP=OA+OP=3a+\sqrt{3}a=\left(3+\sqrt{3}\right)a$，

∵$\triangle APQ\sim\triangle DBR$，

∴$\dfrac{AQ}{DR}=\dfrac{AP}{BD}=\dfrac{\left(3+\sqrt{3}\right)a}{6a}=\dfrac{3+\sqrt{3}}{6}$.

24.（1）根据抛物线 $y=x^2+bx$ 经过点 A（2，0），可得抛物线解析式为 $y=x^2-2x$，再求出点 B 的坐标，即可求解；

（2）先求出点 D 的坐标为 $D(1,-1)$，然后利用勾股定理逆定理，可得△ABD 为直角三角形，即可求解；

（3）先求出直线 BD 的解析式，可得到点 P 的坐标为 $P\left(\dfrac{1}{2},0\right)$，然后分两种情况讨论即可求解.

【小问 1 详解】

解：∵抛物线 $y=x^2+bx$ 经过点 A（2，0），

∴ $2^2+2b=0$ ，解得：$b=-2$ ，

∴抛物线解析式为 $y=x^2-2x$，

当 $x=-1$ 时，$y=3$ ，

∴点 B 的坐标为 $B(-1,3)$ ，

设直线 AB 的解析式为 $y=kx+m(k\neq 0)$ ，

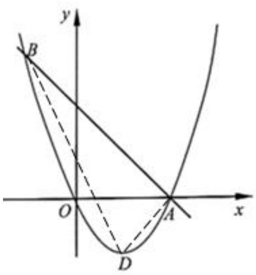
把 A（2，0），$B(-1,3)$，代入得：

$\begin{cases}2k+m=0\\-k+m=3\end{cases}$，解得：$\begin{cases}k=-1\\m=2\end{cases}$ ，

∴直线 AB 的解析式为 $y=-x+2$；

【小问 2 详解】

如图，连接 BD，AD，



∵ $y=x^2-2x=(x-1)^2-1$，

∴点 D 的坐标为 $D(1,-1)$ ，

∵A（2，0），$B(-1,3)$，

∴

$AB^2=(-1-2)^2+3^2=18, AD^2=(2-1)^2+(-1)^2=2, BD^2=(-1-1)^2+(-1-3)^2=20$ ，

∴ $AB^2+AD^2=BD^2$ ，

∴$\triangle ABD$ 为直角三角形，

∴ $\tan\angle ABD=\dfrac{AD}{AB}=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{18}}=\dfrac{1}{3}$；

【小问 3 详解】

设直线 BD 的解析式为 $y=k_1x+b_1\left(k_1\neq 0\right)$ ，

把点 $D(1,-1)$，$B(-1,3)$ 代入得：

$\begin{cases} k_1+b_1=-1 \\ -k_1+b_1=3 \end{cases}$，解得：$\begin{cases} k_1=-2 \\ b_1=1 \end{cases}$，

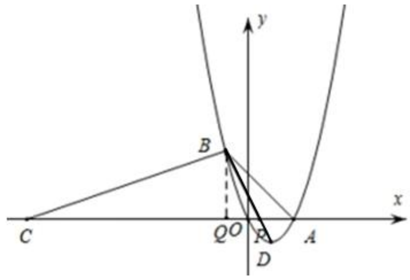
∴直线 BD 的解析式为 $y=-2x+1$，

当 $y=0$ 时，$x=\dfrac{1}{2}$，

∴点 P 的坐标为 $P\left(\dfrac{1}{2},0\right)$，

当△ABP∽△ABC 时，∠ABC=∠APB，

如图，过点 B 作 $BQ\perp x$ 轴于点 Q，则 BQ=3，OQ=1，



∵△ABP∽△ABC，

∴∠ABD=∠BCQ，

由（2）知 $\tan\angle ABD=\dfrac{1}{3}$，

∴ $\tan\angle BCQ=\dfrac{1}{3}$，

∴ $\dfrac{BQ}{CQ}=\dfrac{1}{3}$，

∴CQ=9，

∴OC=OQ+CQ=10，

∴点 C 的坐标为 $C(-10,0)$；

当△ABP∽△ABC 时，∠APB=∠ACB，此时点 C 与点 P 重合，

∴点 C 的坐标为 $C\left(\dfrac{1}{2},0\right)$，

综上所述，点 C 的坐标为 $C(-10,0)$ 或 $\left(\dfrac{1}{2},0\right)$.

25.(1)先证明$\triangle ABE\backsim\triangle AED$，可得$\angle AEB=\angle ADE$，再由平行线性质可推出$\angle ADE=\angle DCE$，进而证得$\triangle ADE\backsim\triangle ECD$，根据相似三角形性质可证得结论；

（2）如图，过点B作$BG\perp AE$，运用等腰三角形的性质可得G为AE的中点，进而可证得$\triangle ADE\cong\triangle ECD$（$SAS$），再求得$S_{\triangle ABE}=\dfrac{1}{2}\times AE\times BG=18\sqrt{2}$，根据$\triangle ABE\backsim\triangle AED$且相似比为3:2，可求得$S_{\triangle ABE}=S_{\triangle CDE}=8\sqrt{2}$，由$S_{四边形ABCE}=S_{\triangle ABE}+S_{\triangle AED}+S_{\triangle CDE}$可求答案；

（3）由$\triangle ABE\backsim\triangle AED$，可求得：$DE=\dfrac{2}{3}x$，进而得出$DC=\dfrac{2}{27}x^2$，再利用$\triangle ADE\backsim\triangle ECD$，进而求得：$CF=\dfrac{x^2}{81}EF$，再结合题意得出答案．

【小问1详解】

$\because AE$平分$\angle BAD$

$\therefore\angle BAE=\angle DAE$

$\because AE^2=AB\cdot AD$

$\therefore\dfrac{AB}{AE}=\dfrac{AE}{AD}$

$\therefore\triangle ABE\backsim\triangle AED$

$\because\angle ABE=\angle ADE$

$\therefore DC\ /\!/\ AE$

$\therefore\angle AED=\angle DCE$，$\angle AED=\angle CDE$

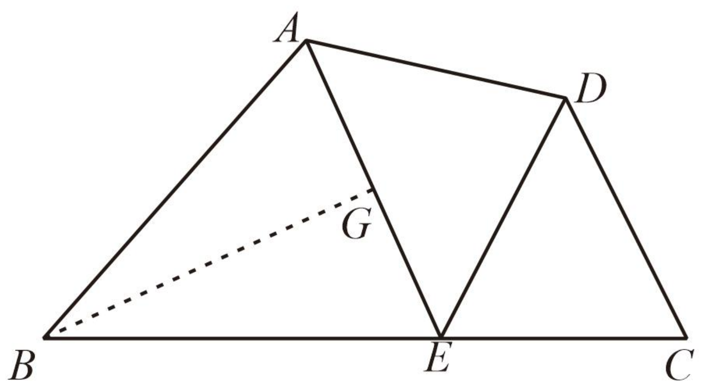
$\therefore\angle ADE=\angle DCE$，

$\therefore\triangle ADE\backsim\triangle ECD$

$\therefore\dfrac{AE}{DE}=\dfrac{DE}{DC}$

$\therefore DE^2=AE\cdot DC$

【小问2详解】



如图，过点 B 作 $BG \perp AE$

∵$BE=9=AB$

∴$\triangle ABE$ 是等腰三角形

∴G 为 AE 的中点，

由（1）可得$\triangle ADE$、$\triangle ECD$ 也是等腰三角形，

∵ $AE^2 = AB \cdot AD$，$AB=BE=9$，$AE=6$

∴$AD=4$，$DE=6$，$CE=4$，$AG=3$

∴$\triangle ADE \cong \triangle ECD$（$SAS$）

在 $Rt\triangle ABG$ 中，

$BG=\sqrt{AB^2-AG^2}=\sqrt{9^2-3^2}=6\sqrt{2}$

∴ $S_{\triangle ABE}=\frac{1}{2}\times AE\times BG=\frac{1}{2}\times 6\times 6\sqrt{2}=18\sqrt{2}$

∵$\triangle ABE \backsim \triangle AED$ 且相似比为 3:2

∴ $S_{\triangle ABE}$： $S_{\triangle AED}=9:4$

∴ $S_{\triangle AED}=S_{\triangle CDE}=8\sqrt{2}$

∴ $S_{四边形ABCD}=S_{\triangle ABE}+S_{\triangle AED}+S_{\triangle CDE}=18\sqrt{2}+8\sqrt{2}+8\sqrt{2}=34\sqrt{2}$

【小问 3 详解】

由（1）知：$\triangle ABE \backsim \triangle AED$

∴ $\frac{AB}{BE}=\frac{AE}{DE}$

∵$BE=x$，$AB=9$,$AE=6$，$AE^2=AB\cdot AD, AD=4$

∴ $\frac{9}{x}=\frac{6}{DE}$

∴ $DE=\frac{2}{3}x$

由（1）知： $DE^2=AE\cdot DC$，

∴ $DC=\frac{2}{27}x^2$

∵$\triangle ADE \backsim \triangle ECD$

∴ $\frac{AD}{AE}=\frac{CE}{DE}=\frac{2}{3}$

$\therefore CE=\dfrac{4}{9}x$

$\because DC\parallel AE$

$\therefore \triangle AEF\sim\triangle DCF$

$\therefore \dfrac{CE}{EF}=\dfrac{EF-CF}{EF}=\dfrac{EF-\dfrac{x^2}{81}EF}{EF}=\dfrac{81-x^2}{81}$

$y=EF=\dfrac{81}{81-x^2}CE=\dfrac{81}{81-x^2}\times\dfrac{4}{9}x=\dfrac{36x}{81-x^2}$

$\because \begin{cases}x>0\\ y>0\\ x+AE>AB\end{cases}$ 即$\begin{cases}x>0\\ y>0\\ x+6>9\end{cases}$

$\therefore 3<x<9$

$\therefore y$ 关于 x 的函数解析式为 $y=\dfrac{36x}{81-x^2}$，定义域为$3<x<9$