ФУНКЦИИ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

§1. Функции двух переменных и способы их задания

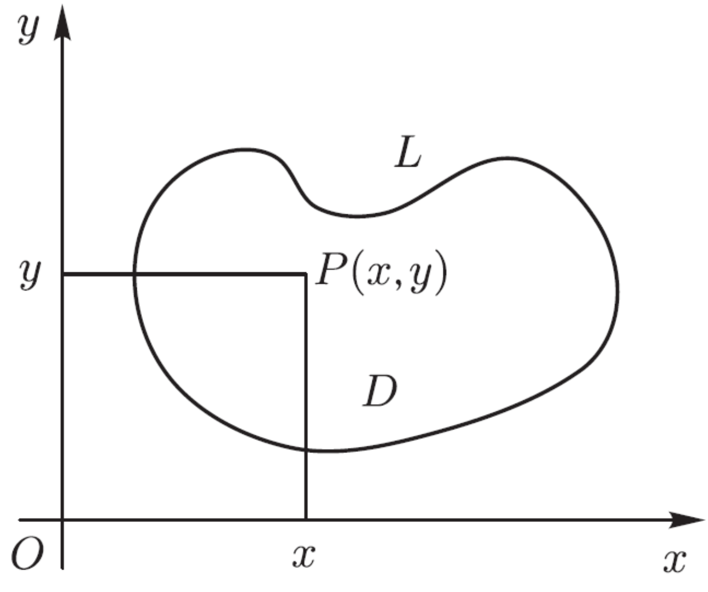
Пусть M — некоторое множество пар (x, y) действительных чисел, N — некоторое множество действительных чисел z.

Функцией двух переменных x, y называется правило, согласно которому каждой паре чисел (x, y) из множества M отвечает одно определенное число z из множества N. Числа x, y называют ***аргументами***, или ***независимыми переменными***, а z — *зависимой переменной*. Множество M называют ***областью определения функции***, а множество N — ***областью значений функции***.

Функция обозначается $z = f(x, y)$, например, $z = x^2 + y^2$. Если конкретной паре аргументов $x = x_0$, $y = y_0$ отвечает определенное значение $z = z_0$ функции $z = f(x, y)$, то пишут $z_0 = f(x_0, y_0)$.

Каждой паре чисел (x, y) на плоскости Oxy отвечает определенная точка $P(x, y)$, поэтому функцию двух переменных $z = f(x, y)$ можно рассматривать как функцию точки P, при этом пишут $z = f(x, y) = f(P)$, помня, что P — точка с координатами (x, y). Ясно, что множеству M — области определения функции $z = f(x, y) = f(P)$ — на плоскости Oxy отвечает некоторое множество точек, которое также будем называть областью определения функции.

Пусть плоскость Oxy разбита простой (то есть без точек самопересечения) замкнутой кривой L на две части: внутреннюю D и внешнюю. Каждую из этих частей называют областью, а кривую L — границей области. Точки области, не лежащие на границе L, называются внутренними точками области, а точки границы — граничными. Если в область входят также все точки ее границы L, то эту ***область называют замкнутой***. Область, из которой исключены все граничные точки, называется открытой.



Область называется конечной (ограниченной), если все ее точки расположены на конечном расстоянии от начала координат. Например, область D, внутренняя для кривой L, является конечной, а область, внешняя по отношению к кривой L, — бесконечной. Другими примерами бесконечных областей служат вся плоскость Oxy и верхняя полуплоскость с осью Ox в качестве границы. В дальнейшем области, внешние к замкнутой кривой, не рассматриваются. Строгое математическое определение области мы не приводим.

Способы задания функции двух переменных.

1. ***Табличный способ задания функции*** заключается в том, что значения функции задают с помощью таблицы. Например, таблица может иметь следующий вид: в первом столбце указывают ряд значений x, а в первой строке — ряд значений y. На пересечении строк и столбцов записывают соответствующие значения функции $f(x, y)$:

$x \backslash y$	y_1	y_2	$\dots$	y_m
x_1	$f(x_1, y_2)$	$f(x_1, y_2)$	$\dots$	$f(x_1, y_m)$
x_2	$f(x_2, y_1)$	$f(x_2, y_2)$	$\dots$	$f(x_2, y_m)$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
x_n	$f(x_n, y_1)$	$f(x_n, y_2)$	$\dots$	$f(x_n, y_m)$

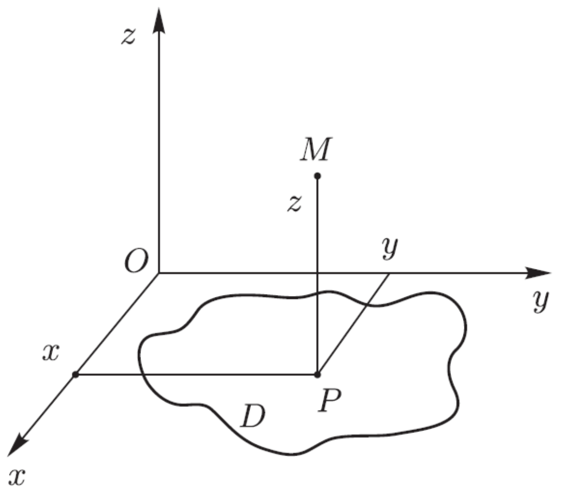
2. ***Аналитический способ задания функции*** — это способ задания функции с помощью формул. Пусть, например, функция двух переменных задана формулой

$$z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}.$$

Если функция $z = f(x, y)$ задана одной формулой, без указания области определения, то под областью определения понимают совокупность всех точек $P(x, y)$ плоскости Oxy, в которых по данной формуле можно найти соответствующее значение $z = f(x, y)$, то есть для которых эта формула имеет смысл и позволяет найти соответствующее значение функции (в литературе часто называют ее естественной областью определения).

§2. Геометрическое представление функции двух переменных

Пусть в области D плоскости Oxy пространства $Oxyz$ задана функция двух переменных $z = f(x, y) = f(P)$. Через точку $P(x, y)$ области D проведем прямую, параллельную оси Oz.



На этой прямой возьмем точку $M(x, y, z)$, абсцисса x и ордината y которой равны соответственно абсциссе x и ординате y точки P, а аппликата z равна значению $z = f(x, y) = f(P)$ функции в точке P. Это означает, что расстояние $PM = z = f(x, y)$ при $z > 0$, когда точка M лежит выше плоскости Oxy, и $PM = -z = -f(x, y)$ при $z < 0$, когда точка M лежит ниже плоскости Oxy (при $z = 0$ точка M лежит в плоскости Oxy и совпадает с точкой P). Такое построение выполним для всех точек $P(x, y)$ области D. Тогда в пространстве получим множество точек $M(x, y, z)$. Как правило будем рассматривать функции, для которых это множество образует некоторую сплошную поверхность. Эту поверхность будем называть ***графиком рассматриваемой функции*** $z = f(x, y)$.

По построению координаты x, y, z любой точки M этой поверхности удовлетворяют соотношению $z = f(x, y)$, следовательно, последнее соотношение является уравнением этой поверхности. Таким образом, график функции есть геометрическое место точек (x, y, z), удовлетворяющих соотношению $z = f(x, y)$.

Итак, мы показали, что каждой функции двух переменных $z = f(x, y)$ в пространстве $Oxyz$ отвечает поверхность с уравнением $z = f(x, y)$. Это и есть геометрическое истолкование функции двух переменных.

Например, функции, определенной формулой

$$z = \sqrt{1 - x^2 - y^2},$$

в пространстве $Oxyz$ отвечает верхняя часть сферы радиуса $r = 1$ с центром в начале координат. В самом деле, согласно формулы $z \geq 0$, то есть поверхность расположена выше плоскости Oxy, а возведя уравнение в квадрат, получим уравнение сферы

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1.$$

Это означает, что координаты любой точки рассматриваемой поверхности, отвечающей данной функции, удовлетворяют последнему уравнению. Отметим, что указанная часть сферы включает в себя и свою границу — окружность с уравнением $x^2 + y^2 = 1$.

Множество точек области D, в которых функция $z(x; y)$ принимает заданное значение c, называется ***линией уровня*** функции и задаётся уравнением

$$z = z(x;y) \equiv const = c.$$

Пример. Найти область определения и линии уровня функции $z = x^2 + y^2$.

Решение. Выражение справа имеет смысл при всех x и y, значит, областью определения функции будет вся плоскость Oxy.

На линии уровня $x^2 + y^2 = c$ и $c \geq 0$, значит, линии уровня – концентрические окружности радиуса $\sqrt{c}$ с центром в начале координат. Графиком функции является параболоид вращения.

§3. Функции трех и большего числа переменных. Частное и полное приращения функции

Аналогично предыдущему можно ввести понятия функций трех и большего числа переменных. Например, функции трех переменных обозначаются

$u = f(x, y, z)$. Мы знаем, что в пространстве $Oxyz$ тройке чисел x, y, z отвечает точка $P(x, y, z)$. Поэтому $u = f(x, y, z)$ можно рассматривать как функцию точки P и писать $u = f(x, y, z) = f(P)$. Как правило, будем рассматривать функции трех переменных, для которых областью определения служит некоторая конечная область — часть пространства $Oxyz$, ограниченная замкнутой поверхностью (например, сферой). Эту поверхность называют границей области. Функцию n переменных будем обозначать $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, здесь $x_1, x_2, \dots, x_n$— аргументы функции. Мы знаем, что в n-мерном пространстве каждой совокупности n чисел $x_1, x_2, \dots, x_n$ отвечает точка P, для которой эти числа являются координатами. Поэтому функцию n переменных можно рассматривать как функцию $u = f(P)$ этой точки P в n-мерном пространстве. Функции трех и большего числа переменных геометрического истолкования не имеют.

Пусть дана функция двух переменных $z = f(x, y)$. Пусть из двух аргументов этой функции второй аргумент y — постоянная, а первый аргумент x изменяется и получает приращение Δx. Тогда соответствующее приращение функции обозначается $\Delta_x z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y)$ и называется ***частным приращением по*** x ***функции*** $z = f(x, y)$ в точке (x, y), соответствующим приращению Δx.

Пусть теперь $x = const$, а y изменяется и получает приращение Δy. Тогда соответствующее приращение функции обозначается $\Delta_y z = f(x, y + \Delta y) - f(x, y)$ и называется ***частным приращением по y функции*** $z = f(x, y)$ в точке (x, y), соответствующим приращению Δy.

Пусть, наконец, оба аргумента x, y изменяются и получают соответственно приращения Δx, Δy. Тогда выражение $\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$ называется ***полным приращением функции*** $z = f(x, y)$ в точке (x, y), соответствующим приращениям Δx, Δy. Аналогично определяются частное и полное приращения функции трех и большего числа переменных.

§4. Предел функции

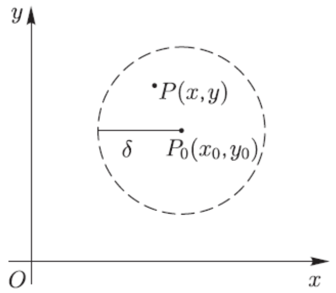
Пусть в некоторой области D плоскости Oxy заданы:

- функция $z = f(x, y) = f(P)$;
- $P_0(x_0, y_0)$ — фиксированная точка области D (x_0, y_0 — заданные числа);
- $P(x, y)$ — переменная (текущая) точка этой области.

Положим, что точка P стремится к точке P_0 произвольно. Пусть при этом значение функции в точке P стремится к некоторому значению b в том смысле, что $|f(P) - b| \to 0$. В этом случае число b называют пределом функции $f(P)$. Чтобы дать строгое определение предела, введем следующие понятия.

Окрестностью точки P_0 называется внутренность круга с центром в точке P_0. Если радиус круга равен δ, то окрестность называют δ-окрестностью точки P_0. Ясно, что для любой точки $P(x, y)$ δ-окрестности точки P_0 расстояние от точки P до точки P_0 меньше δ, то есть $|PP_0| < \delta$, или

$$\sqrt{(x - x_0)^2 - (y - y_0)^2} < \delta.$$



Теперь дадим строгое определение предела функции двух переменных.

Число b называется пределом функции $z = f(x,y) = f(P)$ при $P(x,y)$ стремящемся к $P_0(x_0,y_0)$, если для любого сколь угодно малого положительного числа ε, существует такое положительное число δ, что для всех точек $P(x,y)$ из из проколотой δ-окрестности точки $P_0(x_0,y_0)$ (за исключением, возможно, точки P_0) выполняется неравенство

$$|f(P) - b| < \varepsilon.$$

В этом случае будем писать

$$\lim_{P\to P_0} f(P) = b \text{ или } \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y) = b.$$

Из приведенного определения ясно, что речь идет о пределе функции $z = f(x,y) = f(P)$, когда точка $P(x,y)$ стремится к $P_0(x_0,y_0)$ произвольным образом, то есть по любому пути (по кривой любой формы), так как неравенство $|f(x,y) - b| < \varepsilon$. выполняется для всех точек $P(x, y)$ δ-окрестности точки P_0. Если предел функции $f(P)$ при $P \to P_0$ равен нулю, то $f(P)$ называют бесконечно малой функцией при $P \to P_0$. Легко проверить, например, что функция $z = x^2 + y^2$ является бесконечно малой при $P(x, y) \to P_0(0,0)$, то есть

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(x^2 + y^2) = 0.$$

Замечание. Согласно определению предела функции неравенства

$$|f(P) - b| < \varepsilon \text{ или } |f(x,y) - b| < \varepsilon$$

должны выполняться для всех точек $P(x, y)$ из δ-окрестности точки P_0. В противном случае функция предела не имеет. Возьмем, например, функцию

$$z = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

и рассмотрим ее поведение при $P(x, y) \to P_0(0,0)$. В любой окрестности точки P_0 для всех точек, лежащих на оси Ox, для которых $y = 0$, имеем z = 1. Для всех точек оси Oy этой окрестности, для которых $x = 0$, получаем z = −1. Таким образом, каким бы ни было число b, неравенство $|f(x,y) - b| < \varepsilon$ не может выполняться для всех точек δ-окрестности точки P_0. Это и означает, что указанная функция при $P \to P_0$ предела не имеет. Другими словами, указали два пути стремления $P \to P_0$ при которых получили различные значения предела.

Нетрудно видеть, что если предел существует, то он единственный. При вычислении пределов используются известные теоремы о пределах. Если

$$\lim_{M\to M_0} f(M) = A,\ \lim_{M\to M_0} g(M) = B, \text{ то}$$

1) $\lim\limits_{M\to M_0}(f(M) \pm g(M)) = A \pm B$; 2) $\lim\limits_{M\to M_0}(f(M)\bullet g(M)) = A\bullet B$;

3) $\lim\limits_{M\to M_0}\left(\dfrac{f(M)}{g(M)}\right)=\dfrac{A}{B}(B\neq 0)$; 4) $\lim\limits_{M\to M_0} f(M)^{g(M)}=A^B$, $(A>0)$.

Введенный выше предел называется ***двойным*** пределом в отличие от так называемых ***повторных*** пределов:

$$\lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0} f(x;y),\ \lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0} f(x;y).$$

Пример. Вычислить предел $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 1}}\dfrac{\sin(x+y-2)}{(x+y)^2-4}$.

Решение. Будем использовать первый замечательный предел $\lim\limits_{\alpha\to 0}\dfrac{\sin\alpha}{\alpha}=1$ при α = $x+y-2$, стремящемся к нулю при $x\to 1$, $y\to 1$.

Тогда $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 1}}\dfrac{\sin(x+y-2)}{(x+y-2)(x+y+2)}=\dfrac{1}{4}$.

Пример. Показать, что $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{2x-y}{x+2y}$ не существует.

Решение. Исследуемая функция рассматривается в некоторой проколотой окрестности точки (0; 0). Поэтому $(x;y)\to(0;0)$, но $x+2y\neq 0$ в этой окрестности. Рассмотрим теперь приближение $M(x;y)$ к (0;0), например, вдоль прямых $y=kx$. Тогда

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=kx}}\frac{2x-y}{x+2y}=\lim_{x\to 0}\frac{2x-kx}{x+2kx}=\frac{2-k}{1+2k}$$

и значение предела зависит от k, что противоречит его единственности. Полученное противоречие означает, что двойной предел не существует, в то время как повторные пределы существуют:

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0}\frac{2x-y}{x+2y}=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{x}=2,\ \lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0}\frac{2x-y}{x+2y}=\lim_{y\to 0}\frac{-y}{2y}=-\frac{1}{2}.$$

Другими словами, из существования двойного предела следует существование повторных. Обратное не верно.

Определения предела функции трех и большего числа переменных аналогичны определению предела для функции двух переменных.

§5. Непрерывность функций многих переменных

Первоначально введем некоторые понятия, которые нам необходимы в дальнейшем. ***Областью (открытой областью)*** называется множество точек плоскости, обладающих следующими двумя свойствами:

1) каждая точка области принадлежит ей вместе с некоторой окрестностью этой точки (свойство открытости);
2) всякие две точки области можно соединить непрерывной линией, лежащей в этой области (свойство связности).

Точка P_0 называется ***граничной точкой*** области, если любая окрестность этой точки содержит как точки, принадлежащие ей, так и точки ей не принадлежащие. Множество всех граничных точек области образует ***границу области***. Если к открытой области добавить границу, то область называется ***замкнутой.*** Область называется ***ограниченной,*** если можно подобрать круг конечного радиуса, полностью покрывающий её (область находиться внутри круга), в противном случае область называется ***неограниченной.***

Функция $z = f(x, y)$ называется ***непрерывной*** (по совокупности переменных x и y) в точке $P_0(x_0; y_0)$, если она определена в некоторой окрестности точки $P_0(x_0; y_0)$ и имеет конечный предел $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = f(x_0, y_0)$ ($P \to P_0$ произвольным образом, оставаясь в окрестности точки P_0).

Другое (эквивалентное) определение непрерывности функции в точке: функция $z = f(x, y)$ называется ***непрерывной*** в точке $P_0(x_0; y_0)$ из области определения, если бесконечно малым приращениям аргументов соответствует бесконечно малое полное приращение функции.

Функция, непрерывная в каждой точке некоторой области, называется ***непрерывной в этой области*** (в случае граничных точек имеет место соответствующая односторонняя непрерывность «изнутри»).

Если нарушено хотя одно из условий определения непрерывности функции в точке (то есть функция определена в некоторой проколотой окрестности точки $P_0(x_0; y_0)$, но не определена в самой точке $P_0(x_0; y_0)$, предел $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = \infty$ или $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) \neq f(x_0, y_0)$) то точка $P_0(x_0; y_0)$ называется ***точкой разрыва***. В отличие от функции одной переменной, точки разрыва функции $z = f(x, y)$ могут образовывать целые линии разрыва.

Непрерывность функции по одной из переменных при фиксированном значении других переменных называется ***непрерывностью функции по этой переменной***. Если функция $z = f(x, y)$ непрерывна в точке $P_0(x_0; y_0)$ по совокупности переменных, то $\lim\limits_{x \to x_0} f(x, y_0) = f(x_0, y_0)$ и $\lim\limits_{y \to y_0} f(x_0, y) = f(x_0, y_0)$, и, таким образом, функция в этой точке непрерывна по каждой переменной (в отдельности). Обратное утверждение, в общем случае, неверно.

Пример. Исследовать на непрерывность функцию $f(x, y) = \dfrac{1}{x^2 + y^2}$.

Решение. Данная функция имеет единственную точку разрыва $O(0;0)$. В этой точке функция не определена и $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)=+\infty$. В остальных точках функция непрерывна.

Как и для функции одной переменной, для функции двух переменных справедливы следующие теоремы:

Теорема (Вейерштрасса). Непрерывная в замкнутой области функция достигает своего наибольшего $f_{наиб}$ и наименьшего $f_{наим}$ значения.

Теорема (о промежуточных значениях непрерывной функции). Для непрерывной функции в замкнутой области и любого числа m, заключенного между наименьшим и наибольшим значениями функции, найдется по крайней мере одна точка из этой области, в которой значение функции будет равно m.

§6. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ. ДИФФЕРЕНЦИАЛ ФУНКЦИИ

§6.1. Частные производные первого порядка

Пусть функция $z=f(x,y)$ определена и непрерывна в некоторой окрестности точки $P_0(x_0;y_0)$. Будем изменять x, считая постоянной величиной $y=y_0$. Тогда частное приращение функции z по переменной x равно

$$\Delta_x z=f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0).$$

Аналогично, при фиксированном $x=x_0$ имеем частное приращением функции z по переменной y:

$$\Delta_y z=f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0).$$

Частной производной функции $z=f(x,y)$ по переменной x или по y называется предел отношения соответствующего частного приращения функции к приращению переменной, при условии, что приращение переменной стремится к нулю: $z'_x=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x z}{\Delta x}$ и $z'_y=\lim\limits_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta_y z}{\Delta y}$. Используются также обозначения: $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial x}$, f'_x (аналогичные обозначения для частной производной по переменной y).

Из определения частной производной следует правило их нахождения: п***ри дифференцировании по x переменная y зафиксирована (считается постоянной), а при дифференцировании по y переменная x считается постоянной.*** Если находится частная производная функции $u=u(x_1;...;x_n)$, по некоторой переменной, то все остальные переменные рассматриваются как постоянные.

Пример. Найти частные приращения и полное приращение функции $z=xy$.

Решение. Используя формулы

$$\Delta_x z=f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0) \text{ и } \Delta_y z=f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0),$$

получаем

$$\Delta_x z = (x + \Delta x)\, y - xy = y\, \Delta x,\ \Delta_y z = x(y + \Delta y) - xy = x\, \Delta y.$$

Полное приращение $\Delta z = (x + \Delta x)\,(y + \Delta y) - x\,y = = y\,\Delta x + x\,\Delta y + \Delta x\cdot\Delta y$.
В данном случае полное приращение не равно сумме частных приращений.

Пример. Дана функция $z = y^3x^5 + \sin(xy)$. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$.

Решение. При дифференцировании по x переменная y рассматривается как постоянная, поэтому $\frac{\partial z}{\partial x} = 5y^3x^4 + y\cos(xy)$. При дифференцировании по y переменная x рассматривается как постоянная, поэтому $\frac{\partial z}{\partial y} = 3y^2x^5 + x\cos(xy)$.

Пример. Дана функция $u = x^2 + yz^3$. Найти частные производные первого порядка.

Решение. Все переменные, кроме той, по которой дифференцируем, считаются постоянными. Тогда $\frac{\partial u}{\partial x} = 2x$; $\frac{\partial u}{\partial y} = z^3$; $\frac{\partial u}{\partial z} = 3yz^2$.

§6.2. Дифференциал функции двух переменных.

Рассмотрим функцию двух переменных $z = f(x, y)$ и их частные приращения $\Delta_x z = f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)$ и $\Delta_y z = f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$.

Частным дифференциалом функции $z = f(x, y)$ ***по переменной x***, называется главная часть приращения $\Delta_x z$, линейная относительно приращения Δx, и отличающаяся от $\Delta_x z$ на бесконечно малую величину, более высокого порядка малости чем Δx. Он обозначается $d_x z$. Аналогично вводится частный дифференциал $d_y z$ по переменной y.

Пусть функция $z = f(x, y)$ имеет частные производные первого порядка. Вычислим $d_x z$. Поскольку приращение получает только переменная x, а y остается без изменения, то мы фактически имеем функцию одной переменной x. Из дифференциального исчисления функции одной переменной известно, что дифференциал функции одной переменной равен произведению производной на дифференциал независимой переменной. Поскольку производная функции $z = f(x, y)$ по переменной x при условии, что y не меняется, есть не что иное, как частная производная $\frac{\partial f(x.y)}{\partial x}$, то для частного дифференциала $d_x z$ имеет место формула $d_x z = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} dx$ (так как в случае независимой переменной $\Delta x = dx$). Аналогично получается, что $d_y z = \frac{\partial f(x.y)}{\partial y} dy$.

Таким образом, ***частный дифференциал представляет собой произведение частной производной по соответствующей переменной на дифференциал этой переменной***. Из формул для частных дифференциалов получаем, что

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{d_x z}{dx};\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{d_y z}{dy},$$

то есть частные производные можно рассматривать как дроби, в числителе которой записывается соответствующий частный дифференциал, а в знаменателе – дифференциал независимой переменной. Заметим, что запись $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ нельзя рассматривать как дробь, это просто символическая запись частной производной.

При рассмотрении частных дифференциалов изменяли лишь один аргумент, а остальные оставались фиксированными. Теперь мы рассмотрим полное приращение, которое получит функция при изменении всех аргументов. Напомним, что полным приращением функции $z=f\left(x,y\right)$ соответствующим приращениям Δx и Δy аргументов x и y, называется разность

$$\Delta\, z=f\left(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y\right)-f\left(x_0,y_0\right).$$

Функция $z=f\left(x,y\right)$ ***называется дифференцируемой в точке*** $P_0\left(x_0;y_0\right)$ если она определена в некоторой окрестности этой точки и её полное приращение представимо в виде

$$\Delta z=A\cdot\Delta x+B\cdot\Delta y+\omega\left(\Delta x,\Delta y\right),$$

где постоянные величины A и B не зависят от Δx и Δy, а $\omega\left(\Delta x,\Delta y\right)$ – бесконечно малая функция более высокого порядка малости, чем расстояние $\rho=\sqrt{\left(\Delta x\right)^2+\left(\Delta y\right)^2}$ между точками $P\left(x;y\right)$ и $P_1\left(x+\Delta x;y+\Delta y\right)$.

Таким образом, если функция $z=f\left(x,y\right)$ дифференцируема в данной точке, то её полное приращение в этой точке состоит суммы главной части приращения $A\cdot\Delta x+B\cdot\Delta y$, линейной относительно приращения аргументов Δx и Δy, и бесконечно малой $\omega\left(\Delta x,\Delta y\right)$, более высокого порядка малости, чем расстояние между заданной и приращенной точками.

Полным дифференциалом функции $z=f\left(x,y\right)$ называется главная часть приращения функции Δz, линейной относительно приращения аргументов Δx и Δy, и обозначается $dz=A\cdot\Delta x+B\cdot\Delta y$. Величины A и B не зависят от приращения аргументов Δx и Δy, а зависят только от точки $P\left(x\,;y\right)$. Поскольку x и y – независимые переменные, то $\Delta x = dx$, $\Delta y = dy$ и формула нахождения дифференциала записывается в виде

$$dz = A \cdot dx + B \cdot dy.$$

Теорема. Если функция $z = f(x, y)$ дифференцируема в точке и в некоторой ее окрестности, то справедливо равенство

$$dz = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} dx + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} dy.$$

Рассмотрим схему доказательства теоремы. Формула $dz = Adx + Bdy$ справедлива для произвольных любых значений приращений аргументов dx и dy, в частности, и при $dy = 0$. В этом случае полное приращение Δz становится частным $\Delta_x z$ и полный дифференциал переходит в частный, то есть $d_x z = A \cdot dx$. Откуда $A = \frac{d_x z}{dx} = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}$. Аналогично доказывается, что $B = \frac{d_y z}{dy} = \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$.

Сформулируем, далее, условия дифференцируемости функции двух переменных.

Необходимые условия дифференцируемости:

1) если функция дифференцируема в точке, то она непрерывна в этой точке по совокупности переменных;

2) если функция дифференцируема в точке, то в этой точке существуют частные производные z'_x и z'_y.

Достаточное условие дифференцируемости:

Если в точке $P_0(x_0; y_0)$ и в некоторой ее окрестности существуют ***непрерывные*** частные производные по переменным *x* и по *y*, то функция дифференцируема в этой точке.

Все вышесказанное легко распространяется на функции большего числа переменных. Так для функции $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ полный дифференциал будет находиться по формуле $du = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + ... + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n$.

§6.3. Применение полного дифференциала к приближенным вычислениям.

Пусть дана дифференцируемая функция $z = f(x, y)$. Тогда её полное приращение

$$\Delta z = A \cdot \Delta x + B \cdot \Delta y + \omega(\Delta x, \Delta y),$$

где $\omega(\Delta x, \Delta y)$ стремится к нулю быстрее, чем $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$. Поэтому при малых $|\Delta x|$ и $|\Delta y|$ слагаемым $\omega(\Delta x, \Delta y)$ можно пренебречь, то есть

$$\Delta z \approx f'_x(x,y)\Delta x + f'_y(x,y)\Delta y .$$

Так как $\Delta z = f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0, y).$, то из последней формулы имеем

$$f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) \approx f(x_0,y_0) + f'_x(x_0,y_0)\Delta x + f'_y(x_0,y_0)\Delta y.$$

Эта формула означает ***линеаризацию*** функции $z = f(x,y)$ в окрестности точки $P_0(x_0;y_0)$, то есть в этой окрестности функцию *заменяем* ее линейным приближением. Её (формулу) используют для приближенных вычислений значений функции в точке.

Пример. Найти полное приращение и полный дифференциал функции z = xy в точке (2; 3) при $\Delta x = 0{,}1$, $\Delta y = 0{,}2$.

Решение. Полное приращение $\Delta z = (x+\Delta x)(y+\Delta y) - xy = y\Delta x + +x\Delta y + \Delta x\cdot\Delta y$, $dz = \dfrac{\partial z}{\partial x}dx + \dfrac{\partial z}{\partial y}dy = ydx + xdy = y\Delta x + x\Delta y$. Следовательно, $\Delta z = 3\cdot 0{,}1 + 2\cdot 0{,}2 + 0{,}1\cdot 0{,}2 = 0{,}72$; $dz = 3\cdot 0{,}1 + 2\cdot 0{,}2 = 0{,}7$.

Пример. Вычислить приближённо $1{,}05^{3{,}98}$.

Решение. Рассмотрим функцию $f(x,y) = x^y$ и применим формулу линеаризации при $x_0 = 1;\ y_0 = 4;\ \Delta x = 0{,}05;\ \Delta y = -0{,}02.$

Поскольку $f'_x = y\cdot x^{y-1},\ f'_y = x^y\cdot\ln x$, то $f(1{,}4) = 1,\ f'_x(1;4) = 4,\ f'_y(1;4) = 0$;

$$df(1;4) = = 4\cdot 0{,}05 + 0\cdot(-0{,}02) = 0{,}2.$$

Таким образом, $1{,}05^{3{,}98} \approx 1 + 0{,}2 = 1{,}2.\cdot$

§7. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ СЛОЖНЫХ И НЕЯВНЫХ ФУНКЦИЙ. ЧАСТНЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЫ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ.

Пусть $z = f(x,y)$ – дифференцируемая функция двух переменных в области D, а $x = x(t)$, $y = y(t)$ – дифференцируемые функции переменной t в некотором промежутке и при изменении t точка $(x;\ y)$ не выходит за пределы D. Тогда $z = f(x(t), y(t))$ является сложной функцией переменной t. Производная $\dfrac{dz}{dt}$ вычисляется по формуле

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}.$$

Пример. Найти производную $\dfrac{dz}{dt}$, если $z = x^3y^5$, $x = \sin 2t$, $y = \cos 3t$.

Решение. Непосредственная подстановка не упрощает функцию и поэтому действуем по приведенной выше формуле:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3y^5x^2,\ \frac{\partial z}{\partial y} = 5y^4x^3,\ \frac{dx}{dt} = 2\cos 2t,\ \frac{dy}{dt} = -3\sin 3t.$$

В результате можно как сохранить переменные x и y, так и заменить их через t (как проще): $\frac{dz}{dt} = 3y^5x^2(2\cos 2t) + 5y^4x^3(-3\sin 3t) = 6y^5x^2\cos 2t - 15y^4x^3\sin 3t$.

Пусть, далее, $z = f(x, y)$ – дифференцируемая функция двух переменных в области D, а в свою очередь $x = x(u, v)$; $y = y(u, v)$ – дифференцируемые функции переменных u и v. Другими словами функция $z = f(x, y)$ является сложной функцией переменных u и v. Тогда частные производные вычисляются по формулам

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u}; \quad \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}.$$

Структура этих формул сохраняется и при большем числе переменных.

Пример. Найти производные $\frac{\partial z}{\partial u}$ и $\frac{\partial z}{\partial v}$, если $z = x^3y^5$, $x = u + \sin 2v$, $y = u\cos 3v$.

Решение. $\frac{\partial z}{\partial x} = 3y^5x^2$, $\frac{\partial z}{\partial y} = 5y^4x^3$, $\frac{\partial x}{\partial u} = 1$, $\frac{\partial x}{\partial v} = 2\cos 2v$, $\frac{\partial y}{\partial u} = \cos 3v$, $\frac{\partial y}{\partial v} = -3u\sin 3v$. В результате можно сохранить переменные x и y, или выразить их через u и v: $\frac{\partial z}{\partial u} = 3y^5x^2 + 5y^4x^3\cos 3v$,

$$\frac{\partial z}{\partial v} = 3y^5x^2(2\cos 2v) + 5y^4x^3(-3u\sin 3v) = 6y^5x^2\cos 2v - 15y^4x^3u\sin 3v.$$

Используя приведенные формулы, дифференциал сложной функции $z = f(x, y)$, $x = x(u; v)$, $y = y(u; v)$ можно получить, если в формуле нахождения дифференциала $dz = z'_x\,dx + z'_y\,dy$ заменить дифференциалы dx и dy их выражениями

$$dx = \frac{\partial x}{\partial u}du + \frac{\partial x}{\partial v}dv, \; dy = \frac{\partial y}{\partial u}du + \frac{\partial y}{\partial v}dv.$$

Тогда получим

$$dz = z'_x\left(\frac{\partial x}{\partial u}du + \frac{\partial x}{\partial v}dv\right) + z'_y\left(\frac{\partial y}{\partial u}du + \frac{\partial y}{\partial v}dv\right) = \left(z'_x\frac{\partial x}{\partial u} + z'_y\frac{\partial y}{\partial u}\right)du + \left(z'_x\frac{\partial x}{\partial v} + z'_y\frac{\partial y}{\partial v}\right)dv = \frac{\partial z}{\partial u}du + \frac{\partial z}{\partial v}dv.$$

То есть

$$dz = \frac{\partial z}{\partial u}du + \frac{\partial z}{\partial v}dv.$$

Таким образом, ***форма дифференциала первого порядка не зависит от того, будут ли аргументы функции независимыми переменными или функциями других переменных***. Это свойство называется свойством ***инвариантности*** формы первого дифференциала.

Пример. Найти дифференциал dz функции $z = x^3y^5$, $x = u + \sin 2v$, $y = u\cos 3v$.

Решение. По формуле дифференциала сложной функции, используя результаты предыдущего примера, получаем:

$dz = (3y^5x^2 + 5y^4x^3\, cos3v)du + (6y^5x^2cos2v - 15y^4x^3u\, sin3v)dv.$

Дифференцирование неявной функции двух переменных.

В дифференциальном исчислении функций одной переменной неоднократно сталкивались с функциями, заданными неявно, то есть функциями, заданными уравнением, не разрешенным относительно зависимой переменной. Так и функция двух переменных x и y в неявном виде задается уравнением $F(x,y,z)=0$, не разрешенным относительно зависимой переменной z. Однако на частных примерах видно, что такое уравнение может и не задавать функцию. Например, $x^2+y^2+z^2+7=0$. Нет таких действительных чисел x, y, z *которые* удовлетворяют данному уравнению. Ответ на вопрос, когда данное уравнение определяет функцию, дает следующая теорема существования неявной функции.

Теорема. Пусть $F(x,y,z)$ определена и непрерывна в некоторой окрестности точки $M_0(x_0;y_0;z_0)$, причем $F(x_0,y_0,z_0)=0$. Если её частные производные F'_x, F'_y, F'_z существуют и непрерывны в указанной окрестности и $F'_z(x_0,y_0,z_0)\neq 0$, то уравнение $F(x,y,z)=0$ определяет в окрестности точки $P_0(x_0;y_0)$ z, как однозначную и непрерывную функцию переменных x и y то есть $z=\varphi(x,y)$, такую, что $z_0=\varphi(x_0,y_0)$, причем она имеет непрерывные частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$.

Пусть уравнение $F(x,y,z)=0$ определяет $z=\varphi(x,y)$, как функцию (выполнены условия теоремы существования). Если в уравнение вместо z подставить $\varphi(x,y)$, то оно превратиться в тождество. Дифференцируя его по x и y получим:

$$F'_x + F'_z\cdot\frac{\partial z}{\partial x}=0,\quad F'_y + F'_z\cdot\frac{\partial z}{\partial y}=0.$$

Откуда получаем формулы, для вычисления частных производных

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F'_x}{F'_z},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F'_y}{F'_z}.$$

Пример. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ для неявной функции $z=\varphi(x,y)$, заданной уравнением $z^3 + xz + xy - 2x = 0$.

Решение. $F(x,y,z)=z^3+xz+xy-2x$. Найдём частные производные функции: $F'_x = z + y - 2$, $F'_y = x$, $F'_z = 3z^2 + x$.

Тогда $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{z+y-2}{3z^2+x}$; $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{x}{3z^2+x}$.

Если частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ функции $z = f(x, y)$ являются дифференцируемыми функциями, то их производные по *x* или *y* будут частными производными второго порядка. Приняты следующие обозначения:

$\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial z}{\partial x}) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ – вторая производная по переменной *x*;

$\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial z}{\partial y}) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ – вторая производная по *y*;

$\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial z}{\partial y}) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$, или $\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial z}{\partial x}) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ – смешанные производные второго порядка.

Используются также обозначения $z''_{xx}; z''_{xy}; z''_{yx}; z''_{yy}$. Частные производные высшего порядка, взятые по различным переменным, называются ***смешанными.***

Теорема. Если смешанные частные производные второго порядка функции $z = f(x, y)$ непрерывны, то они равны, то есть не зависят от порядка дифференцирования: $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$.

Пример. Найти вторые производные для функции $z = x^2 y^3 + \cos(2x + 3y)$.

Решение. Частные производные первого порядка равны:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2xy^3 - 2\sin(2x + 3y), \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 3x^2 y^2 - 3\sin(2x + 3y).$$

От каждой из этих производных вычисляем по две частные производные:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = (2xy^3 - 2\sin(2x + 3y))'_x = 2y^3 - 4\cos(2x + 3y),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = (2xy^3 - 2\sin(2x + 3y))'_y = 6xy^2 - 6\cos(2x + 3y),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = (3x^2 y^2 - 3\sin(2x + 3y))'_x = 6xy^2 - 6\cos(2x + 3y),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = (3x^2 y^2 - 3\sin(2x + 3y))'_y = 6x^2 y \;\; - 9\cos(2x + 3y).$$

Аналогично определяются производные третьего, четвёртого и других порядков. Например, $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial y^2}(\frac{\partial u}{\partial x})$: сначала функцию дифференцируем по *x*, а результат дифференцируем два раза по *y*.

Понятие о дифференциалах высших порядков

Выражение $d^2z = d(dz) = z''_{xx}\, dx^2 + 2z''_{xy}\, dx\, dy + z''_{yy}\, dy^2$ называется ***дифференциалом второго порядка***.

Выражение $d(d^{\,n-1}z) = d^n z$ ***называется дифференциалом n-го порядка***. В случае независимых переменных x и y дифференциал $d^{\,n}z$ символически можно записать в виде $d^n z = (\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy)^n (z)$, которое понимается следующим образом: сначала формально возводим в степень n, затем все члены «умножаем» (точнее применяем операторы дифференцирования) на z, которое записывается в числитель при ∂^n, и после всем символам возвращается их смысл как производных и дифференциалов. Например,

$$d^2z = (\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy)^2 (z) = [\frac{\partial^2}{\partial x^2}(dx)^2 + 2\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\, dx\, dy + \frac{\partial^2}{\partial y^2}(dy)^2]\,(z) =$$

$$= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}dx\, dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2 = z''_{xx}\, dx^2 + 2z''_{xy}\, dx\, dy + z''_{yy}\, dy^2.$$

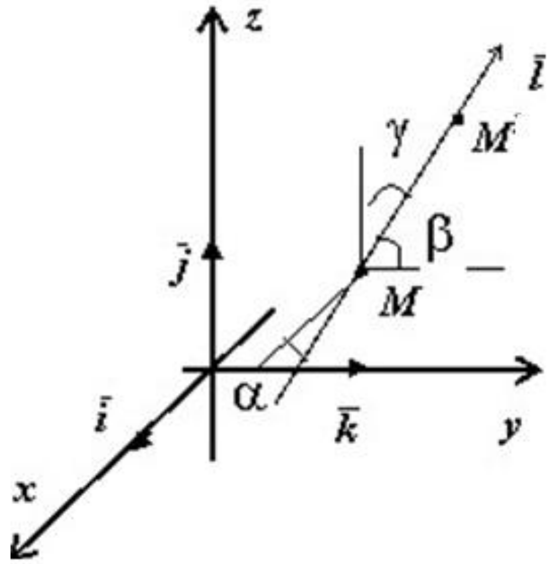
В общем случае (зависимых переменных x и y) ***дифференциалы высших порядков не обладают свойством инвариантности формы.***

Пример. Найти d^2z для функции $z = x^3y^5$.

Решение. Используем приведенную выше формулу, найдя предварительно производные второго порядка: $\frac{\partial z}{\partial x} = 3y^5x^2$, $\frac{\partial z}{\partial y} = 5y^4x^3$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = 15y^4x^2$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6y^5x$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 20y^3x^3$, тогда $d^2z = 6y^5x\, dx^2 + 30y^4x^2\, dxdy + 20y^3x^3\, dy^2$.

§8. ПРОИЗВОДНАЯ ПО НАПРАВЛЕНИЮ

Пусть в некоторой области G трехмерного пространства задана дифференцируемая функция $u = u(x, y, z)$. Из этой области рассмотрим произвольную точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ и некоторый луч l, выходящий из точки M_0 в направлении единичного вектора $\vec{I} = \cos\alpha\,\vec{i} + \cos\beta\,\vec{j} + \cos\gamma\,\vec{k}$, где α, β, γ углы вектора с координатными осями.



Пусть $M\left(x_0+\Delta x; y_0+\Delta y; z_0+\Delta z\right)$ другая точка этого луча. Разность

$$u\left(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y, z_0+\Delta z\right)-u\left(x_0, y_0, z_0\right)=\Delta_l u\left(x_0, y_0, z_0\right)$$

называется ***приращением функции*** $u=u\left(x,y,z\right)$. ***в точке M₀ в направлении луча*** l.

Расстояние между точками $M_0\left(x_0; y_0; z_0\right)$ и $M\left(x_0+\Delta x; y_0+\Delta y; z_0+\Delta z\right)$ равно

$$\Delta l=\sqrt{\left(\Delta x\right)^2+\left(\Delta y\right)^2+\left(\Delta z\right)^2}.$$

Если существует конечный предел

$$\lim_{\Delta l\to 0}\frac{\Delta_l u\left(x_0, y_0, z_0\right)}{\Delta l}=\frac{\partial u}{\partial l},$$

то он называется ***производной функции*** $u=u\left(x,y,z\right)$ ***в точке M_0 в направлении луча*** l **.**

Заметим, что если $\frac{\partial u}{\partial l}>0$, то функция в этом направлении возрастает, если же $\frac{\partial u}{\partial l}<0$, то функция в этом направлении убывает. Можно сказать, что производная $\frac{\partial u}{\partial l}$ задает скорость изменения функции в направлении l.

Выведем формулу для вычисления производной по направлению. Нетрудно видеть, что приращения переменных $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ связаны с длиной Δl отрезка M_0M формулами

$$\Delta x=\Delta l\cdot\cos\alpha,\ \Delta y=\Delta l\cdot\cos\beta,\ \Delta z=\Delta l\cdot\cos\gamma.$$

Поскольку функция $u = u(x, y, z)$ дифференцируема в точке $M_0(x_0; y_0; z_0)$, то её приращение можно представить в виде

$$\Delta u = \frac{\partial u(x_0, y_0, z_0)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u(x_0, y_0, z_0)}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial u(x_0, y_0, z_0)}{\partial z}\Delta z + \omega,$$

где ω стремится к нулю быстрее чем Δl. Если рассматривать приращение вдоль луча l, то получим

$$\Delta_l u = \frac{\partial u(x_0, y_0, z_0)}{\partial x}\Delta l\cos\alpha + \frac{\partial u(x_0, y_0, z_0)}{\partial y}\Delta l\cos\beta + \frac{\partial u(x_0, y_0, z_0)}{\partial z}\Delta l\cos\gamma + \omega$$

Разделив последнюю на Δl и переходя к пределу при $\Delta l \to 0$, получим формулу для вычисления производной по направлению:

$$\frac{\partial u(M_0)}{\partial l} = \frac{\partial u(x_0, y_0, z_0)}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u(x_0, y_0, z_0)}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u(x_0, y_0, z_0)}{\partial z}\cos\gamma.$$

Пример. Найти производную функции $u = x^2 - 2xz + y^2$ в точке $M_0(1;2;-1)$ по направлению от точки M_0 к точке $M_1(2;4;-3)$.

Решение. $\overrightarrow{M_0M_1} = (2-1)\vec{i} + (4-2)\vec{j} + (-3-1)\vec{k} = \vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}.$

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2}} = \frac{1}{3};\ \cos\beta = \frac{2}{3};\ \cos\gamma = -\frac{2}{3};$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{M_0} = (2x - 2z)\big|_{M_0} = 4;\ \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{M_0} = 2y\big|_{M_0} = 4;\ \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{M_0} = -2x\big|_{M_0} = -2.$$

Искомая производная будет равна $\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_{M_0} = \frac{1}{3}\cdot 4 + \frac{2}{3}\cdot 4 + \frac{2}{3} = \frac{14}{3}.$

В случае функции двух переменных $z = f(x, y)$, формула для вычисления производной по направлению упрощается:

$$\frac{\partial z}{\partial l} = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}\sin\alpha,$$

так как $\cos\beta = \cos(90^0 - \alpha) = \sin\alpha.$

§8. Градиент

Пусть в некоторой области G трехмерного пространства задана дифференцируемая функция $u = u(x, y, z)$. ***Градиентом*** функции $u = u(x;y;z)$ называется вектор

$$grad\ u = \left\{ \frac{\partial u}{\partial x}; \frac{\partial u}{\partial y}; \frac{\partial u}{\partial z} \right\}.$$

Для градиента справедливы следующие теоремы.

Теорема. Проекция вектора $grad\ u$ на единичный вектор $\vec{I} = \cos\alpha\,\vec{i} + \cos\beta\,\vec{j} + \cos\gamma\,\vec{k},$ равна производной функции $u = u(x, y, z)$ в направлении вектора $\vec{I}$ то есть $np_l\, grad\ u = \frac{\partial u}{\partial l}$.

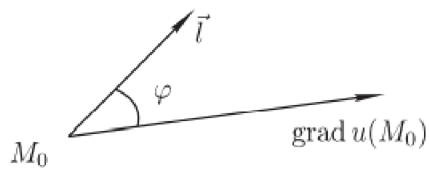
Доказательство. Поскольку по определению скалярного определения векторов $\vec{a} \cdot \vec{b} = np_{\vec{a}}\vec{b}$, то

$$np_l\, grad\ u = \vec{I} \cdot grad\ u = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma = \frac{\partial u}{\partial l}.$$

Теорема доказана.

Теорема (***физический смысл градиента***). Градиент показывает направление наибольшего возрастания функции в данной точке. Скорость возрастания функции равна $|grad\ u|$.

Доказательство. Обозначим через φ угол между векторами $\vec{I}$ и $grad\ u$



Тогда

$$\frac{\partial u}{\partial l} = np_l\, grad\ u = |grad\ u| \cdot \left|\vec{I}\right| \cos\varphi = |grad\ u| \cdot \cos\varphi,$$

$\left|\vec{I}\right| = 1$ как единичный вектор. Из предпоследнего равенства видим, что $\frac{\partial u}{\partial l}$ (скорость возрастания) достигает своего наибольшего значения при $\varphi = 0$. То есть когда направление $\vec{I}$ совпадает с направлением $grad\ u$.

Теорема доказана.

Следствие. Производная по направлению вектора, перпендикулярного к направлению $grad\ u$ равна нулю.

Пример. Дана функция $u = x^2 + y^2 + 2z^3$ точка $M(1;2;1)$ и вектор

Найти $grad\ u$ и максимальную скорость возрастания функции в точке M.

Решение. Найдем частные производные в точке $M(1;2;1)$.

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_M = 2x|_M = 2; \quad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_M = 2y|_M = 4; \quad \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_M = 6z^2|_M = 6.$$

Искомый вектор - градиент будет равен

$$grad\ u = 2\vec{i} + 4\vec{j} + 6\vec{k}; \quad V_{\max} = |grad\ u| = \sqrt{2^2 + 4^2 + 6^2} = \sqrt{56}.$$

Замечание. В случае функции двух переменных $z = f(x, y)$, формула для вычисления градиента имеет вид

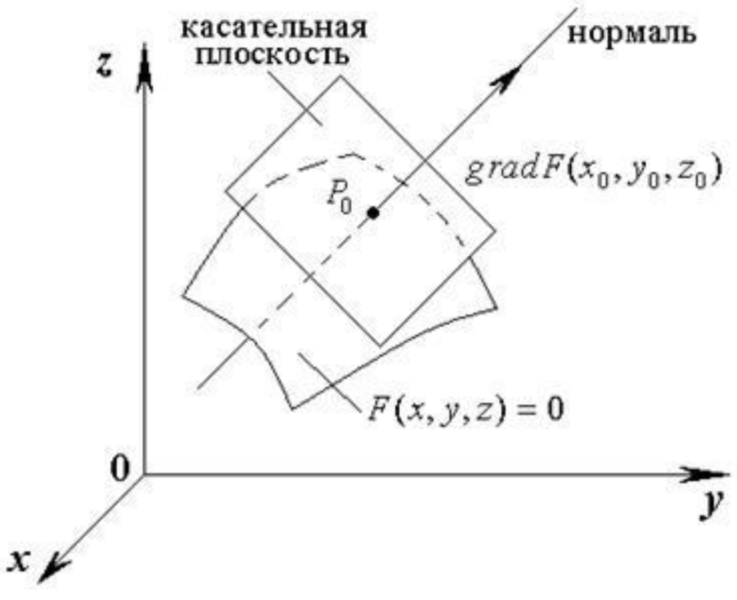
$$grad\ z = \left\{\frac{\partial f}{\partial x}; \frac{\partial f}{\partial y}\right\}, \quad |grad\ z| = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}.$$

§9. Касательная плоскость и нормаль к поверхности

Касательной плоскостью к поверхности S в точке $P_0(x_0; y_0; z_0)$ называется плоскость (если такая существует), в которой расположены касательные к всевозможным кривым, лежащим на поверхности S и проходящим через точку P_0.

***Нормалью* к поверхности** в точке $P_0(x_0; y_0; z_0)$ называется прямая *l*, перпендикулярная касательной плоскости в точке P_0.

Из определения касательной плоскости и нормали следует, что нормальный вектор касательной плоскости является направляющим вектором нормали.



Пусть поверхность задана уравнением

$$F(x, y, z) = 0$$

левая часть которой является функцией, дифференцируемой в некоторой области. Предположим, что в точке $P_0(x_0;y_0;z_0)$, лежащей на данной поверхности $grad\,F(x_0,y_0,z_0)\neq 0$.

Рассмотрим произвольную линию, лежащую на поверхности и проходящую через точку $P_0(x_0;y_0;z_0)$. Пусть она задается векторным уравнением

$$\vec r = x(t)\vec i + y(t)\vec j + z(t)\vec k\ .$$

Подставляя в формулу $F(x,y,z)=0$ координаты линии получим

$$F\big(x(t),y(t),z(t)\big)\equiv 0.$$

Дифференцируя последнее тождество как сложную функцию получим

$$F'_x\cdot x' + F'_y\cdot y' + F'_z\cdot z' = 0.$$

В частности при $t=t_0$ имеем

$$F'_x(x_0,y_0,z_0)\cdot x'(t_0)+F'_y(x_0,y_0,z_0)\cdot y'(t_0)+F'_z(x_0,y_0,z_0)\cdot z'(t_0)=0.$$

Откуда получаем, что

$$grad\,F(x_0,y_0,z_0)\cdot\vec{r'}(t_0)=0.$$

Последнее равенство означает, что $grad\,F(x_0,y_0,z_0)$ перпендикулярен вектору $\vec{r'}(t_0)$. Здесь $\vec{r'}(t_0)$ направляющий вектор касательной к кривой в точке $P_0(x_0;y_0;z_0)$.

Так как кривая была выбрана произвольно, то мы приходим к следующему выводу. Все касательные, проведенные в точке P_0 к линиям, лежащим на поверхности и проходящими через эту точку, расположены в одной плоскости, перпендикулярной $grad\,F(x_0,y_0,z_0)$, при условии, что он не равен нулю. Эта плоскость и является касательной плоскостью.

Таким образом показали, что направляющим вектором нормали является вектор $grad\,F(x_0,y_0,z_0)$.

Уравнение касательной плоскости в точке $P_0(x_0;y_0;z_0)$ будет

$$F'_x(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)+F'_y(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)+F'_z(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)=0.$$

Уравнение (каноническое) нормали в точке $P_0(x_0;y_0;z_0)$ будет

$$\frac{x-x_0}{F'_x(x_0,y_0,z_0)}=\frac{y-y_0}{F'_y(x_0,y_0,z_0)}=\frac{z-z_0}{F'_z(x_0,y_0,z_0)}.$$

Предполагается, что в точке P_0 производные F'_x, F'_y, F'_z одновременно не обращаются в нуль.

Пример. Составить уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $z = x^2 + y^2$ в точке $P_0(1;2;5)$).

Решение. Найдём $z'_x = 2x$, $z'_y = 2y$, $z'_x(1;2) = 2$, $z'_y(1;2) = 4$ и подставим в формулы. Тогда уравнение касательной плоскости : $z - 5 = 2(x - 1) + 4(y - 2)$ или $2x + 4y - z - 5 = 0$, а уравнения нормали L имеют вид $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-5}{-1}$.

Пример. Составить уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $z = f(x, y)$, заданной уравнением $x^2 + 3y^2 - 4z^2 = 15$ в точке $P_0(2;-3;2)$.

Решение. Обозначим $F(x;y;z) = x^2 + 3y^2 - 4z^2 - 15$. Найдём $F'_x = 2x$, $F'_y = 6y$, $F'_z = -8z$, $F'_x(2;-3;2) = 4$, $F'_y(2;-3;2) = -18$, $F'_z(2;-3;2) = -16$.

Подставляя эти выражения в формулы, получаем уравнение касательной плоскости : $4(x-2) - 18(y+3) - 16(z-2) = 0$ или $2x - 9y - 8z - 1 = 0$, а уравнения нормали *:* – $\frac{x-2}{2} = \frac{y+3}{-9} = \frac{z-2}{-8}$.

§10. ЭКСТРЕМУМЫ ФУНКЦИЙ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ

§10.1. Необходимое и достаточное условия существования экстремума

Понятие минимума и максимума для функций многих переменных вводится аналогично функции одной переменной.

Пусть функция двух переменных $z = f(x, y)$ определена в области D и точка $P_0(x_0; y_0)$– внутренняя точка области. Если существует такая окрестность точки $P_0(x_0; y_0)$, что для всех точек P из этой окрестности $z(P_0) \geq z(P)$ ($z(P_0) \leq z(P)$), то точка P_0 называется точкой ***локального максимума*** **(*минимума*)** функции $z = f(x, y)$. Если эти неравенства строгие для $P_0 \neq P$, то и соответствующий ***локальный максимум (минимум) называется строгим***. Точки максимума и минимума называются точками ***экстремума***.

Заметим, что в силу определения, точка экстремума лежит внутри области определения функции.

***Теорема* (*необходимые условия экстремума*).** Если функция $z = f(x, y)$ дифференцируема в точке $P_0(x_0; y_0)$ и точка $P_0(x_0; y_0)$ есть точка экстремума, то частные производные в этой точке равны нулю

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} = 0.$$

Доказательство. Частная производная функции $z = f(x, y)$ по x в точке $P_0(x_0; y_0)$ есть не что иное, как производная функции одной переменной

$\varphi(x)=f(x,y_0)$ в точке $x=x_0$. Но в этой точке функция $\varphi(x)$ имеет экстремум, следовательно, $\varphi'(x_0)=0.$ Так как $\varphi'(x_0)=\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}$, то $\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}=0.$

Аналогично доказывается, что $\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}=0.$

Теорема доказана.

Точки, в которых $\frac{\partial z}{\partial x}$ = 0 и $\frac{\partial z}{\partial y}$ = 0 (одновременно!), называются ***стационарными.***

Заметим, что непрерывная функция может иметь экстремум также в точках, где хотя бы одна из частных производных не существует. Рассмотрим, например, функцию $z=\sqrt{x^2+y^2}$ (верхняя часть конуса). Она имеет минимум в точке $P_0(0;0)$, но частные производные $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ в этой точке не существуют.

Точки, в которых частные производные обращаются в ноль или не существуют, ***называются критическими (или подозрительными на экстремум)***. Из изложенного выше следует, что точки экстремума нужно искать среди критических точек. Однако, не все критические точки являются точками экстремума. Например, для функции $z=xy$ частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}=y, \frac{\partial z}{\partial y}=x$ в точке $P_0(0;0)$ равны нулю. Однако, эта точка не является точкой экстремума, так как в любой её окрестности содержаться точки где она положительна (I и III четверти) и где она отрицательна (II и IV четверти), то есть полное приращение функции не сохраняет свой знак в окрестности критической точки. Рассмотренный пример показывает, что необходимый признак не является достаточным.

Теорема (д*остаточные условия экстремума*). Пусть точка $P_0(x_0;y_0)$ является стационарной точкой для функции $z=f(x,y)$, причем в точке $P_0(x_0;y_0)$ и некоторой её окрестности существуют непрерывные вторые частные производные. Тогда если в точке $P_0(x_0;y_0)$:

$$1)\,\Delta(P_0)=\begin{vmatrix} z''_{xx}(P_0) & z''_{xy}(P_0) \\ z''_{yx}(P_0) & z''_{yy}(P_0) \end{vmatrix}=z''_{xx}(P_0)\cdot z''_{yy}(P_0)-z''_{yx}(P_0)\cdot z''_{xx}(P_0)>0$$

и $z''_{xx}(P_0)<0$ (или $z''_{yy}(P_0)<0$, что равносильно), то точка $P_0(x_0;y_0)$– точка строгого локального максимума;

2) $\Delta(P_0)>0$, и $z''_{xx}(P_0)>0$ (или $z''_{yy}(P_0)>0$, что равносильно), то точка $P_0(x_0,y_0)$ – точка строгого локального минимума;

3) в случае $\Delta(P_0)<0$ локального экстремума нет;

4) случай $\Delta(P_0)=0$ требует дополнительного исследования.

Пример. Найти экстремумы функции $z=f(x,y)=x^3+3xy^2-30x-18y$.

Решение. Функция определена и дифференцируема во всех точках плоскости *Oxy*. Выполним следующие действия:
Найдём частные производные $f'_x(x,y)=3x^2+3y^2-30.$, $f'_y(x,y)=6xy-18.$
Приравняем их к нулю и решим систему

$$\begin{cases}3x^2+3y^2-30=0,\\ 6xy-18=0.\end{cases}.$$

Откуда

$$\begin{cases}x^2+y^2=10,\\ 2xy=6.\end{cases}.$$

Складывая и вычитая уравнения, получим:

$$\begin{cases}x^2+2xy+y^2=16,\\ x^2-2xy+y^2=4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x+y=\pm4,\\ x-y=\pm2\end{cases}.$$

Таким образом мы получили четыре линейные системы для нахождения критических точек:

$$1)\ \begin{cases}x+y=4,\\ x-y=2\end{cases},\quad 2)\ \begin{cases}x+y=4,\\ x-y=-2\end{cases},\quad 3)\ \begin{cases}x+y=-4,\\ x-y=2\end{cases},\quad 4)\begin{cases}x+y=-4,\\ x-y=-2\end{cases}.$$

Решая эти системы, находим четыре стационарных точки

$$P_1(3;1),\ P_2(1;3),\ P_3(-1;-3),\ P_4(-3;-1).$$

Для проверки достаточных условий экстремума найдём вторые частные производные: $f''_{xx}(x,y)=6x;\ f''_{xy}(x,y)=6y;\ f''_{yx}(x,y)=6y;\ f''_{yy}(x,y)=6x$ и вычислим определитель $\Delta(P_0)=\begin{vmatrix}z''_{xx}(P_0) & z''_{xy}(P_0)\\ z''_{yx}(P_0) & z''_{yy}(P_0)\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}6x & 6y\\ 6y & 6x\end{vmatrix}=36(x^2-y^2).$

Проверяем точки на экстремум:

$P_1(3;1)$. $\Delta(P_1)=288>0$, $f''_{xx}(P_1)=18>0$. Следовательно, в точке P_1 минимум.

$P_2(1;3)$. $\Delta(P_2)=-288<0$. В точке $P_2(1;3)$ экстремума нет.

$P_3(-1;-3)$. $\Delta(P_3)=-288<0$. В точке $P_2(1;3)$ экстремума нет.

$P_4(-3;-1)$. $\Delta(P_4)=288>0$, $f''_{xx}(P_4)=-18<0$. В точке P_4 максимум.

Пример2. Исследовать на экстремум функцию z = $2x^2+3y^2$.

Решение. Функция определена и дифференцируема во всех точках плоскости Oxy.

1. Найдём стационарные точки: $z'_x = 4x = 0$, $z'_y = 6y = 0$. Отсюда следует, что функция имеет одну критическую (стационарную) точку $O(0;\ 0)$.

2. Для проверки достаточных условий экстремума найдём вторые частные производные: $z''_{xx} = 4$, $z''_{xy} = 0$, $z''_{yx} = 0$, $z''_{yy} = 6$. Вычислим определитель $\Delta = 4\cdot 6 - 0 = 24>0$ и поскольку $z''_{xx} = 4>0$, то точка O – точка строгого локального минимума, $z(0;0) = 0$.

Пример. Исследовать на экстремум функцию $z = -2x^2 - 3y^2$.

Решение. Имеем одну критическую точку $O(0;0)$, в которой $z''_{xx} = -4$, $z''_{xy} = 0$, $z''_{yx} = 0$, $z''_{yy} = -6$, $\Delta = 24>0$ и поскольку $z''_{xx} = -4<0$, то O – точка строгого локального максимума, $z(0;0) = 0$.

Пример. Исследовать на экстремум функцию $z = 2x^2 - 3y^2$.

Решение. Имеем одну критическую точку $O(0;\ 0)$, в которой $z''_{xx} = 4$, $z''_{xy} = 0$, $z''_{yx} = 0$, $z''_{yy} = -6$, $\Delta = -24 < 0$ и поэтому точка O не является точкой локального экстремума. Локальных экстремумов функция не имеет.

Пример3. Исследовать на экстремум функцию $z = z(x;y)= 2x^2$.

Решение. Имеем: $z'_x = 4x = 0$, $z'_y = 0$ и, таким образом, целая прямая $x = 0$ (ось Oy) состоит из критических точек. Поскольку в этих точках $z''_{xx} = 4$, $z''_{xy} = 0$, $z''_{yx} = 0$, $z''_{yy} =0$, $\Delta = 0$, требуется дополнительное исследование. Нетрудно видеть, что графиком исследуемой функции является параболический цилиндр с направляющей $z = 2x^2$ в плоскости Oxz и образующей, параллельной оси Oy. Таким образом, в каждой точке прямой $x = 0$ (ось Oy) функция имеет локальный экстремум и принимает минимальное значение, равное 0.

§10.2. Условный экстремум

Рассмотрим экстремум функции $z = f\left(x, y\right)$ при условии $\varphi(x;\ y) = 0$, то есть экстремум функции при условии, что функция задана в точках некоторой плоской кривой $\varphi(x;\ y) = 0$. Это ***задача на условный экстремум.***

Если уравнение $\varphi(x;\ y) = 0$ можно разрешить относительно одной из переменных (либо записать функцию параметрически), то задача на условный экстремум сводится к задаче на экстремум функции одной переменной: если выразить из условия $\varphi(x;\ y) = 0$ одну переменную (x или y) через другую, например, $y = y(x)$ и подставить в функцию $z = f\left(x, y\right) = f\left(x, y\left(x\right)\right)$.

Пример. Найти экстремум функции $z = x^2 + y^2$ при условии, что $x + y = 2$.

Решение. Из второго уравнения находим $y = 2 - x$ и подставляем в первое. Получим $z = x^2 + \left(2 - x\right)^2 = 2x^2 - 4x + 4$. Исследуем на экстремум как функцию одной переменной. $z' = 4x - 4 = 0, \Rightarrow x_0 = 1$. Так как $z''(1) = 2 > 0$, то функция в точке $x_0 = 2$ имеет минимум (достаточное условие экстремума по второй производной). Из условия $x + y = 2$ получаем, что при $x_0 = 1, y = 1$. Следовательно, функция $z = x^2 + y^2$ в точке $P_0(1;1)$ имеет минимум $z_{min} = 2$.

Наряду с этим подходом используется (особенно, если найти $y(x)$ сложно) метод множителей Лагранжа, в котором условия экстремума формулируются в терминах ***функции Лагранжа*** $F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda\varphi(x, y)$, где λ – называется множителем Лагранжа.

§10.3. Глобальные экстремумы

Пусть функция $z = f(x, y)$ определена и непрерывна в некоторой ограниченной замкнутой области *D*. Тогда функция $z = f(x, y)$ достигает в этой области глобальных экстремумов, то есть своего наибольшего (***глобальный максимум***) и наименьшего (***глобальный минимум***) значений (теорема Вейерштрасса). Чтобы найти эти значения в области, нужно найти все критические точки внутри области, вычислить значения функции в этих точках и сравнить со значениями функции в граничных точках области.

Обозначаются глобальный максимум и минимум $\max_D z; \min_D z$.

Пример. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = 2x^2 + 3y^2$ в замкнутой области D, ограниченной линиями $y = 3$, $x = -2$, $x - y = 3$.

Решение.

1. Находим критические точки и вычисляем значение функции в этих точках, не исследуя характер этих точек, то есть проверку достаточных условий можно опускать. Критическая точка одна:

$$\begin{cases} z'_x = 4x = 0 \\ z'_y = 6y = 0 \end{cases}, \Rightarrow P_0(0;0);\ \underline{z(P_0) = z(0;0) = 0.}$$

2. Исследуем функцию на границе области D.

а) Рассмотрим участок границы $y = 3$, $x \in [-2; 6]$. Подставим $y = 3$ в функцию z и получим функцию одной переменной $z = 2x^2 + 27$, $x \in [-2;6]$. Найдём точки, в которых $z'_x = 0$ и вычислим значения z в этих точках и на концах отрезка: $z'_x = 4x = 0$, $x = 0$, $\underline{z(0; 3) = 27}$, $\underline{z(-2;3) = 35}$, $\underline{z(6;3) = 99}$.

б) Аналогично исследуем участок $x = -2$, $y \in [-5;3]$: $z = 8 + 3y^2$, $z'_y = 6y = 0$, $y = 0$, $\underline{z(-2;0) = 8}$, $\underline{z(-2;-5) = 83}$, $\underline{z(-2;3) = 35}$.

в) На участке $x - y = 3$ будем решать, как задачу на условный экстремум. Составим функцию Лагранжа

$$F(x, y, \lambda) = 2x^2 + 3y^2 + \lambda(x - y - 3).$$

Находим стационарные точки функции Лагранжа. Для этого вычислим частные производные по всем переменным и приравняем их к нулю

$$\begin{cases} F'_x = 4x + \lambda = 0, \\ F'_y = 6y - \lambda = 0, \\ F'_z = x - y - 3 = 0. \end{cases}$$

Решая эту систему, получаем x = 1,8; y = 1,2; $\underline{z(1{,}8;\ 1{,}2) = 10{,}8}$.

Из полученных (подчёркнутых) значений выбираем самое большое и самое малое значения. Итак, $\max_D z = 99$, $\min_D z = 0$.