# РЯДЫ

## §1. Понятие числового ряда. Сходимость и сумма ряда.

Пусть задана некоторая числовая последовательность $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ Выражение вида

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

называется ***числовым рядом***, числа $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ - ***членами числового ряда***, число $a_n$ – $n$-ым или ***общим членом ряда.***

Например,

$$1 + 2 + \cdots . + 2^{n-1} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1},$$

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}.$$

Если имеем дело с суммой конечного числа членов, то охарактеризовать ее легко – с помощью полученного выражения суммы. В случае бесконечной суммы на помощь приходит предельный переход. Введем в рассмотрение сумму конечного числа первых $n$ членов ряда

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{n=1}^{n} a_k,$$

которую называют ***n-ой частичной суммой ряда***. То есть

$S_1 = a_1,$
$S_2 = a_1 + a_2,$
$S_3 = a_1 + a_2 + a_3,$
……………………………….
$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n,$
……………………………….

Таким образом, имеем последовательность частичных сумм ряда. Если для этой последовательности $S_n$ существует конечный предел $\lim_{n\to\infty} S_n = S \neq \infty$, то ***ряд называют сходящимся***, а число $S$ – ***суммой числового ряда*** и обозначают

$$S \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Если предел не существует или бесконечен, то ряд называется ***расходящимся.***

*Пример.* Исследовать на сходимость бесконечную геометрическую прогрессию

$$\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}.$$

*Решение.* Формула суммы $n$ первых членов геометрической прогрессии, как известно из курса средней школы, при $|q| \neq 1$ имеет вид

$$S_n = \frac{a(1-q^n)}{1-q}.$$

Так как

$$\lim_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} 0, & \text{если } |q| < 1, \\ \infty, & \text{если } |q| > 1, \end{cases}$$

то

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \begin{cases} \dfrac{a}{1-q}, & \text{если } |q| < 1, \\ \infty, & \text{если } |q| > 1. \end{cases}$$

При $q = -1$ имеем ряд

$$a - a + a - a + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a$$

для которого $S_{2n-1}=a$, $S_{2n}=0$. Следовательно, последовательность $S_n$ предела не имеет.

При $q = 1$ последовательность $S_n=na$ и, следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$.

Окончательно имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} = \begin{cases} \dfrac{a}{1-q}, & |q| < 1, \\ \text{расходится}, & |q| \geq 1. \end{cases}$$

Числовой ряд вида

$$r_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k$$

называется $n$-ым ***остатком числового ряда.***

Тогда любой числовой ряд можно представить в виде

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k = S_n + r_n\ .$$

Если ряд сходящийся, то $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$ и, следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = 0$. Последнее условие является необходимым и достаточным условием для сходимости ряда.

***Свойства сходящихся числовых рядов***:

1. Перестановка, отбрасывание или добавление конечного числа членов ряда не влияет на его сходимость (расходимость).

2. Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ сходится и его сумма равна $S$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} c \cdot a_n$, где $c$ – произвольное число, также сходится и его сумма равна $cS$. Если же ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ расходится и $c \neq 0$, то и ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} c \cdot a_n$ расходится.

3. Если ряды $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ сходятся, а их суммы равны $S_1$ и $S_2$ соответственно, то сходятся и ряды $\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n \pm b_n)$, причем $\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n \pm b_n) = S_1 \pm S_2$.
Следует, однако, иметь в виду, что из сходимости ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty}(a_k + b_k)$$

в общем случае не следует сходимость рядов

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ и } \sum_{k=1}^{\infty} b_k.$$

Например, ряд (1-1)+(1-1)+(1-1)+… сходится, а ряды 1+1+1+…. и -1-1-1-1… расходятся.

## §2. Необходимый признак сходимости числового ряда.

Рассмотрим некоторый числовой ряд и предположим, что он сходится. Тогда по определению сходящегося ряда $S = \lim_{n\to\infty} S_n$, но $S_n = S_{n-1} + a_n$ и, следовательно, $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(S_n - S_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S - S = 0$. Таким образом, доказана следующая теорема.

***Теорема (необходимый признак сходимости ряда).*** Если числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

сходится, то $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Как следствие из теоремы можно сформулировать ***достаточный признак расходимости числового ряда.***

***Следствие.*** Если предел $\lim_{n\to\infty} a_n$ не равен нулю или не существует, то ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

расходится.

*Пример*. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n.$$

*Решение.* Предел общего члена ряда

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e \neq 0$$

и, следовательно, ряд расходится.

Теорема является необходимым признаком сходимости, то есть из стремления к нулю общего члена в общем случае не следует сходимость ряда. Покажем это на примере ряда:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}.$$

Такой ***ряд называется гармоническим***, так как каждый его член, начиная со второго, представляет собой среднее гармоническое двух соседних членов: число $c$ называется средним гармоническим чисел $a$ и $b$ если

$$\frac{1}{\mathrm{c}}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right).$$

Очевидно, что предел общего члена $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$. Предположим, что ряд сходится и его сумма равна $S$. Тогда

$$\lim_{n\to\infty}(S_{2n}-S_n)=\lim_{n\to\infty}S_{2n}-\lim_{n\to\infty}S_n=S-S=0.$$

С дугой стороны,

$$S_{2n}-S_n=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}=|n\text{ слагаемых}|=$$

$$=\frac{1}{2n}\left(\frac{2n}{n+1}+\frac{2n}{n+2}+\cdots+1\right)=\frac{1}{2n}\left(\frac{n+n}{n+1}+\frac{n+n}{n+2}+\cdots+\frac{n+n}{n+n-1}+1\right)=$$

$$=|\text{слагаемых всего } n \text{ и каждое } \geq 1|\geq n\frac{1}{2n}=\frac{1}{2}.$$

Предельным переходом при $n\to\infty$ получаем $0\geq\frac{1}{2}$, что неверно и, следовательно, предположение о сходимости гармонического ряда было неверным. Значит, ***гармонический ряд расходится.***

## §3. Признаки сходимости числовых рядов с положительными членами

### §3.1. Признаки сравнения

Озаботимся, далее, вопросом установления сходимости (или расходимости) ряда. Проще всего этот вопрос решается для рядов, члены которых неотрицательны. Для краткости будем называть такие ***ряды положительными***. Пусть ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$$

является положительным. То есть для $\forall n\in\mathbb{N}\ a_n\geq 0$. Тогда для частичных сумм этого ряда выполняется неравенство $S_{n+1}=S_n+a_{n+1}\geq S_n$, то есть последовательность частичных сумм неубывающая. По теореме о пределе монотонной последовательности, приходим к следующей теореме.

***Теорема.*** Для того, чтобы ряд с положительными членами сходился, необходимо и достаточно, чтобы последовательность его частичных сумм была ограниченной.

Все признаки сходимости положительных рядов основаны на этой простой теореме. Но непосредственное ее применение лишь в редких случаях позволяет судить о характере сходимости ряда. Это происходит хотя бы потому, что записать формулу последовательности частичных сумм в общем виде для многих рядов достаточно сложно. Сходимость или расходимость положительного ряда часто устанавливают путем сравнения его с другим рядом, заведомо сходящимся либо расходящимся. В основе такого сравнения лежит следующая теорема.

***Теорема.*** Пусть заданы два положительных ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ и } \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

Если начиная с некоторого номера $n_0$ для всех $n \geq n_0$ выполняется неравенство $0 \leq a_n \leq b_n$, то:

1. из сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ следует сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$;
2. из расходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ следует расходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ .

Схема доказательства этой теоремы достаточно проста. Так как отбрасывание конечного числа членов ряда не влияет на сходимость ряда, то, не ограничивая общности, можно считать, что $a_n \leq b_n$ для всех натуральных $n$. Обозначим частичные суммы рядов через $A_n$ и $B_n$, соответственно. Тогда очевидно, что $A_n \leq B_n$ для $\forall n \in \mathbb{N}$. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится, то последовательность частичных сумм ограничена, то есть $\exists L = const$, что $B_n \leq L$. Следовательно, и $A_n \leq L$, то есть ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ тоже сходится.

Аналогично доказывается и второй пункт теоремы.

На бытовом языке, для облегчения запоминания, этот признак сравнения часто формулируют в следующей форме: ***из сходимости «большего» ряда следует сходимость «меньшего» ряда, а из расходимости «меньшего» ряда следует «расходимость» большего***. Термины не совсем (точнее совсем не) математические, однако, они позволяют осознать следующий факт: из сходимости «меньшего» ряда ничего не следует относительно сходимости или расходимости «большего» ряда, а из расходимости «большего» ничего конкретного нельзя утверждать о сходимости или расходимости «меньшего» ряда.

*Пример.* Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+a^n}, (a > 0).$$

*Решение*. Очевидно, что сходимость этого ряда зависит от того, какие значение принимает, $a$:

1) $0 < a \leq 1$. Тогда

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+a^n} = 1 \neq 0,$$

то есть общий член ряда не стремится к нулю, следовательно, ряд расходящийся;

2) $a > 1$. Очевидно, что

$$\frac{1}{1+a^n} \leq \left(\frac{1}{a}\right)^n,$$

а ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{a}\right)^n$ – бесконечная геометрическая прогрессия со знаменателем $q = \frac{1}{a} < 1$ , то есть ряд сходящийся, следовательно, сходится и исходный ряд.

Иногда на практике бывает удобнее пользоваться признаком сравнения, который вытекают из предыдущей теоремы.

***Теорема (предельный признак сравнения)***. Если для членов положительных рядов $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ существует предел $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = L$ (0<L<∞), то ряды $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ сходятся или расходятся одновременно.

*Доказательство.* Пусть $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = L$ . Тогда по определению предела для $\forall\varepsilon > 0$, $\exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, что для $\forall n > n_0 \Longrightarrow \left|\frac{a_n}{b_n} - L\right| < \varepsilon$. Следовательно, $L - \varepsilon < \frac{a_n}{b_n} < L + \varepsilon$ или $b_n(L-\varepsilon) < a_n < b_n(L+\varepsilon)$.

Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ сходится, то сходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(L+\varepsilon)b_n$ . Тогда по признаку сравнения сходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ . Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ расходится, то расходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(L+\varepsilon)b_n$ а, следовательно, расходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ .

Что и требовалось доказать.

*Пример.* Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{\pi}{n}.$$

*Решение.* Наряду с этим рядом, рассмотрим гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$.

Так как $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin\frac{\pi}{n}}{\frac{1}{n}}=\pi\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin\frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}}=\pi\neq 0$ (первый замечательный предел) и гармонический ряд расходится, то, следовательно, расходится и исходный ряд.

*Замечание.* Иногда предельный признак сравнения формулируется по другому: если $\exists\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=K$ $(0\leq K\leq\infty)$, то из сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ при $K<\infty$ следует сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ . А из расходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ при $K>0$ следует расходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ . Такая формулировка учитывает два крайних случая, не учтенных в предыдущей формулировке предельного признака если:

- $K=0$, то из сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ следует сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ ;
- $K=\infty$, то из расходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ следует расходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$.

Рассмотрим далее два положительных ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ . И пусть для всех натуральных чисел $n$ выполняется неравенство $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\leq\dfrac{b_{n+1}}{b_n}$ $(a_n, b_n\neq 0)$. Тогда имеем, что $\dfrac{a_2}{a_1}\leq\dfrac{b_2}{b_1}$, $\dfrac{a_3}{a_2}\leq\dfrac{b_3}{b_2}$ , … , $\dfrac{a_n}{a_{n-1}}\leq\dfrac{b_n}{b_{n-1}}$. Перемножив почленно, получаем $\dfrac{a_n}{a_1}\leq\dfrac{b_n}{b_1}$ или $a_n\leq\dfrac{a_1}{b_1}b_n$. Так как $\dfrac{a_1}{b_1}=const$ , то ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_1}{b_1}b_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ сходятся или расходятся одновременно. Далее, применяя признак сравнения, несложно закончить доказательство следующей теоремы.

***Теорема.*** Если начиная с некоторого номера $n_0$ для членов рядов $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ выполняется неравенство $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\leq\dfrac{b_{n+1}}{b_n}$ $(a_n, b_n\neq 0)$, то:

- из сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ следует сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ ;
- из расходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ следует расходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ .

Сходимость многих рядов можно исследовать сравнением с:

1. рядом геометрической прогрессии $\sum_{n=1}^{+\infty} aq^{n-1}$, который сходится при $|q|<1$;

2. гармоническим рядом $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$, который расходится;

3. обобщенным гармоническим рядом $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, который сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha \leq 1$ (доказательство этого факта в следующем параграфе).

Вопрос о сходимости ряда $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{P_k(n)}{Q_l(n)}$, где $P_k(n)$ и $Q_l(n)$ – многочлены от $n$ степени $k$ и $l$ соответственно, решается сравнением с обобщенным гармоническим рядом при $\alpha = l - k$.

## §3.2. Признак Даламбера

Приведенные выше признаки предусматривают сравнение исследуемого на сходимость ряда с некоторым специальным рядом, относительно которого известно, является он сходящимся либо расходящимся. Подбирать ряд для сравнения не всегда просто. Эта процедура требует навыка. Поэтому хотелось бы иметь признак, который по заданным членам ряда мог ответить на вопрос о сходимости (расходимости) ряда. Признак Даламбера, смысл которого выражает следующая теорема, часто удовлетворяет пожеланиям и его удобно применять в тех случаях, когда в записи общего члена ряда участвуют факториалы и степени.

***Теорема (признак Даламбера).*** Если для ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n > 0$, существует предел $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$ (отношения последующего члена ряда к предыдущему), то при:

$l < 1$ – ряд сходится;

$l > 1$ – ряд расходится.

*Доказательство.*

1. Пусть $l < 1$, тогда $0 \leq l < 1$, ввиду положительности ряда. Выберем некоторое число $0 < \varepsilon < 1 - l$. В этом случае $l + \varepsilon < 1$. По определению предела последовательности следует, что для любого сколь угодно малого положительного $\varepsilon$, найдется такой номер $n_0$, что для всех $n \geq n_0$ выполняется неравенство

$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}-l\right|<\varepsilon$, или $l-\varepsilon<\frac{a_{n+1}}{a_n}<l+\varepsilon=q$, следовательно, $a_{n+1}\le q\cdot a_n$ . Придавая *n* значения 1,2, …, построим серию неравенств:

$$0<a_2\le q\cdot a_1 \ ,$$
$$0<a_3\le q\cdot a_2<q\cdot q\cdot a_1<q^2\cdot a_1,\ \ldots$$
$$0<a_n<qa_{n-1}<q^2a_{n-2}<\ldots<q^{n-1}a_1,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

То есть члены ряда $a_2+a_3+a_4+\ldots$ меньше соответствующих членов ряда $qa_1+q^2a_1+q^3a_1+\ldots+q^{n-1}a_1+\ldots$ , который сходится как бесконечная геометрическая прогрессия со знаменателем $0<q<1$. На основании признака сравнения ряд $a_2+a_3+a_4+\ldots$сходится.

2. Пусть $l>1$. В этом случае $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=l>1$. Тогда начиная с некоторого номера *n* будет выполняться неравенство $\frac{a_{n+1}}{a_n}>1$ или $a_{n+1}>a_n$, то есть члены ряда возрастают с увеличением номера *n*. Поэтому $\lim\limits_{n\to\infty}a_n\ne 0$, значит исходный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ расходится. Что и требовалось доказать.

***Заметим, что при*** $l=1$***, ряд может быть как сходящимся, так и расходящимся. То есть в этом случае необходимы дополнительные исследования.***

*Пример.* С помощью признака Даламбера исследовать сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n!}.$$

*Решение:* Имеем: $a_n=\frac{1}{n!}$, $a_{n+1}=\frac{1}{(n+1)!}$,

$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{n!}{(n+1)!}=\frac{1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot n}{1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot n\cdot(n+1)}=\frac{1}{n+1}$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n+1}=0$. Так как $l=0<1$, то по признаку Даламбера данный ряд сходится.

*Пример.* Исследовать на сходимость числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2^n}{3n-1}.$$

*Решение:* Имеем: $a_n=\frac{2^n}{3n-1}$, $a_{n+1}=\frac{2^{n+1}}{3(n+1)-1}=\frac{2^{n+1}}{3n+2}$,

$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{2^{n+1}}{3n+2}\cdot\frac{3n-1}{2^n}=\frac{2\cdot2^n}{2^n}\cdot\frac{3n-1}{3n+2}=2\frac{3n-1}{3n+2}$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\limits_{n\to+\infty}2\frac{3n-1}{3n+2}=2$. Так как $l=2>1$, то по признаку Даламбера данный ряд расходится.

## §3.3. Интегральный и радикальный признаки Коши

Признак Даламбера целесообразно применять, когда общий член ряда содержит выражения вида $n!$ или $a^n$. В некоторых других случаях более рационально применять другие признаки. В частности, радикальный признак Коши, который считается более мощным (с математической точки зрения), чем признак Даламбера.

***Теорема* (*радикальный признак Коши*)**. Пусть дан ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ с положительными членами и существует конечный или бесконечный предел $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=l$. Тогда при

$l<1$ – ряд сходится;

$l>1$ – ряд расходится.

Как и в случае признака Даламбера, ***при*** $l=1$ ***необходимы дополнительные исследования.***

*Пример.* Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{3n+2}\right)^n$.

*Решение*. Для исходного ряда $a_n=\left(\frac{n}{3n+2}\right)^n$, Вычислим предел

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n}{3n+2}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{3n+2}=\frac{1}{3}<1,$$

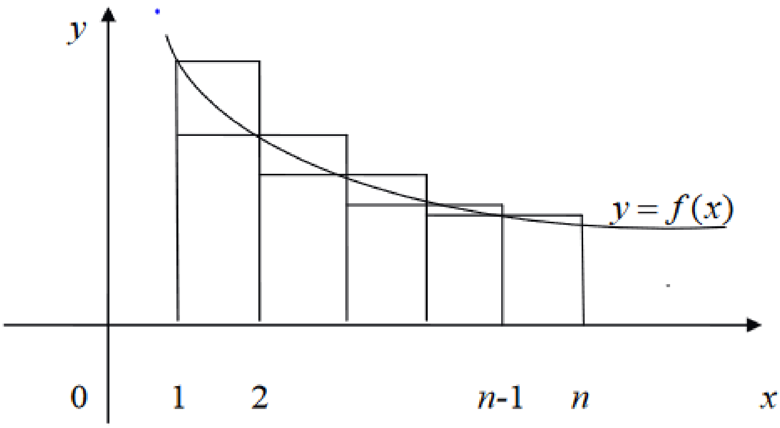
следовательно, данный ряд сходится.

Хоть радикальный признак Коши и более мощный по сравнению с признаком Даламбера (то есть если по радикальному признаку Коши ряд будет сходится, то он является сходящимся и по признаку Даламбера) , но мощность признаков Коши и Даламбера не весьма велика, так как они не позволяют даже судить о сходимости или расходимости такого простого ряда, как гармонический ряд. Более тонкие признаки можно получить, если сравнивать данный ряд с рядами, сходящимися или расходящимися «медленнее», чем ряд из элементов геометрической прогрессии. К более тонким (и соответственно сложным) относятся, например, признаки Раабе, Гаусса, Куммера и другие, не входящие в программу нашего курса. Реально применить один из, который является наиболее простым, суть которого выражает следующая теорема.

***Теорема* (*интегральный признак Коши*)**. Пусть члены ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ положительны и не возрастают, то есть $a_1 \ge a_2 \ge a_3 \ge \ldots$ и пусть $f(x)$ – такая непрерывная невозрастающая функция, что $f(1)=a_1, f(2)=a_2, \ldots, f(n)=a_n$. Тогда справедливы следующие утверждения:

- ❖ если несобственный интеграл $\int\limits_1^{\infty} f(x)dx$ сходится, то сходится и исходный ряд;
- ❖ если несобственный интеграл $\int\limits_1^{\infty} f(x)dx$ расходится, то расходится и исходный ряд.

*Доказательство.*




Изобразим члены ряда геометрически. Площадь криволинейной трапеции, изображенной на рисунке, равна $S = \int\limits_1^{n} f(x)dx$ .

Возьмем $n-$ ю частичную сумму ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$:

$$S_n = f(1) + f(2) + f(3) + \ldots + f(n).$$

Тогда площадь $S_+$ выступающей фигуры будет равна

$$S_+ = f(1) + f(2) + \ldots + f(n-1) = S_{n-1},$$

а площадь $S_-$ входящей фигуры $S_- = f(2) + f(3) + \ldots + f(n) = S_n - f(1)$.

Из построения и свойств функции $f(x)$ следует, что $S_- < S < S_+$ и

$$S_n - f(1) < \int\limits_1^{n} f(x)dx < S_n, n = 1, 2, \ldots .$$

1. Пусть несобственный интеграл $\int\limits_1^{\infty} f(x)dx$ сходится.

Тогда существует предел $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_1^{n} f(x)dx = A$. Так как $\int\limits_1^{n} f(x)dx \le A = \int\limits_1^{+\infty} f(x)dx$ (в силу условия $f(x) > 0$ для $x \in [1;+\infty)$), то из неравенства следует, что

$$S_n < f(1) + \int_1^n f(x)dx < f(1) + S_n .$$

Последовательность $(S_n)$ ограничена и при возрастании $n$ сумма $S_n$ возрастает. Поэтому последовательность имеет предел $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$ .

Следовательно, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ сходится.

2. Пусть несобственный интеграл $\int\limits_1^{\infty} f(x)dx$ расходится.

Так как по условию $f(x) > 0$ для $x \geq 1$, то ,

$$\int_1^{\infty} f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_1^n f(x)dx = +\infty .$$

Из неравенства

$$S_n \geq \int_1^n f(x)dx,\ n = 1, 2, ...$$

следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = +\infty$, то есть ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ расходится.

Что и требовалось доказать.

*Замечание.* Вместо интеграла $\int\limits_1^{\infty} f(x)dx$ можно брать интеграл

$$\int_k^{\infty} f(x)dx,\ k > 1, k \in N .$$

*Пример*. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(n+1)\ln^2(n+1)}$ .

*Решение*. Функция $f(x) = \dfrac{1}{(x+1)\ln^2(x+1)}$ непрерывна, положительна и убывает, так как $f'(x) = -\dfrac{\ln(x+1)+2}{(x+1)^2 \ln^3(x+1)} < 0$. Вычислим несобственный интеграл

$$\int_1^{+\infty} f(x) = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)\ln^2(x+1)} = -\frac{1}{\ln(x+1)}\Bigg|_1^{+\infty} = \frac{1}{\ln 2},$$

следовательно, интеграл сходится, значит и ряд сходится.

Ряд вида $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^p} = \dfrac{1}{1^p} + \dfrac{1}{2^p} + \dfrac{1}{3^p} + ... + \dfrac{1}{n^p} + ...$ называется ***обобщенным гармоническим рядом.*** Исследуем его на сходимость.

Если $p \le 0$, то общий член ряда не стремится к нулю, поэтому ряд расходится (достаточное условие расходимости).

В случае $p > 0$ применим интегральный признак Коши. Функция $f(x) = \dfrac{1}{x^p}$ непрерывна, положительна и убывает при $x \ge 1$. При $p \ne 1$ имеем:

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p} = \lim_{A\to+\infty} \int_1^A x^{-p} = \lim_{A\to+\infty} \left. \frac{x^{1-p}}{1-p} \right|_1^A = \lim_{A\to+\infty} \left( \frac{A^{1-p}}{1-p} - \frac{1}{1-p} \right) = \begin{cases} \dfrac{1}{p-1}, & p > 1, \\ +\infty, & p < 1. \end{cases}$$

Если $p = 1$, то $\int_1^{+\infty} \dfrac{dx}{x} = \lim\limits_{A\to+\infty} \ln x \Big|_1^A = \lim\limits_{A\to+\infty} (\ln A - \ln 1) = +\infty$. Значит, интеграл, соответственно и данный ряд, сходятся при $p > 1$ и расходятся при $p \le 1$. Итак, окончательно: обобщенный гармонический ряд

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p} = \begin{cases} \text{сходится при } p > 1; \\ \text{рассходится при } p \le 1\,. \end{cases}$$