Раздел 13. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

§ 1. Основные понятия теории дифференциальных уравнений

Опр. 1. ***Дифференциальным уравнением*** (ДУ) называется уравнение, связывающее независимую переменную (переменные), искомую функцию и производные этой функции. ***Порядком ДУ*** называется порядок старшей производной, входящей в это уравнение.

Опр. 2. Уравнение вида

$$F(x; y; y'; ...; y^{(n)}) = 0,$$

т. е. ДУ, в котором искомая функция y зависит от одной переменной x, называется ***обыкновенным дифференциальным уравнением***. ДУ, в котором искомая функция зависит от нескольких переменных, называется ***дифференциальным уравнением с частными производными***.

Пример 1.

1) $y' = 3x^2$ – обыкновенное ДУ 1-го порядка;

2) $x^3(y'')^4 + x^2(y')^5 - 2 = 0$ – обыкновенное ДУ 2-го порядка;

3) $y''' + y' - 2y = x^2 - 3\cos x + 5$ – обыкновенное ДУ 3-го порядка;

4) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ – уравнение колебаний струны – ДУ 2-го порядка с частными производными относительно неизвестной функции $u = u(x; t)$. •

Будем рассматривать только *обыкновенные ДУ*.

Опр. 3. Обыкновенное ДУ называется ***разрешенным относительно старшей производной***, если оно записано в виде

$$y^{(n)} = f(x; y; y'; ...; y^{(n-1)}). \qquad (1)$$

Опр. 4. ***Решением*** ДУ называется функция, которая при подстановке в уравнение обращает его в верное тождество.

Например, функция $y = x^3$ является решением ДУ $y' = 3x^2$. При этом функции $y = x^3 + 2$, $y = x^3 - 1$ также являются решениями этого ДУ.

Пример 2. Найдем все решения ДУ $y' = 3x^2$.

Решение. Чтобы восстановить функцию, зная ее производную, возьмем интеграл: $y = \int 3x^2 dx$. Таким образом, все решения данного уравнения задаются формулой $y = x^3 + C$, где C – произвольная постоянная.●

Опр. 5. Процесс нахождения решения ДУ называется ***интегрированием ДУ***. График решения ДУ называется ***интегральной кривой*** этого уравнения.

Пример 2 (*продолжение*). На рис. 1 изображены три интегральные кривые ДУ $y' = 3x^2$.●

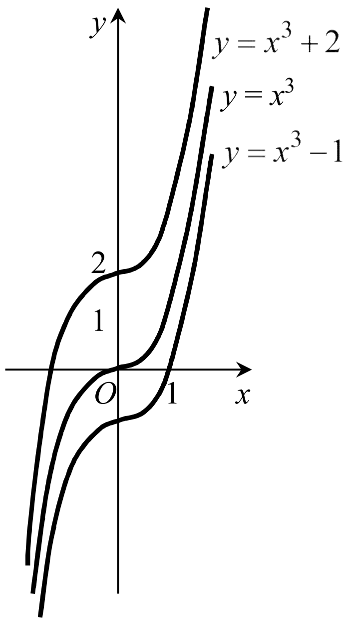


Рис. 1. Интегральные кривые ДУ $y' = 3x^2$

Таким образом, ДУ задает *семейство* интегральных кривых на плоскости.

Пример 3. Найдем все решения ДУ $y'' = x$.

Решение. Восстанавливаем функцию, зная ее производную, путем интегрирования:

$$y' = \int x dx; \qquad y' = \frac{x^2}{2} + C_1;$$

$$y = \int \left(\frac{x^2}{2} + C_1 \right) dx; \qquad y = \frac{x^3}{6} + C_1 x + C_2,$$

где C_1, C_2 – произвольные постоянные.•

Таким образом, множество решений ДУ 1-го порядка определяется одной произвольной постоянной, а 2-го порядка – двумя. Аналогично, множество решений ДУ n-го порядка определяется n произвольными постоянными.

Чтобы найти одно конкретное решение ДУ, задают дополнительные условия на искомую функцию y.

Опр. 6. ***Задачей Коши*** для ДУ n-го порядка (1) называется задача нахождения такого решения ДУ (1), которое удовлетворяет условиям

$$\begin{cases} y(x_0) = y_0, \\ y'(x_0) = y_{01}, \\ \ldots, \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_{0;\, n-1}. \end{cases} \qquad (2)$$

Эти условия называются ***начальными условиями***, или ***условиями Коши*** для ДУ (1).

Замечание 1. Количество начальных условий совпадает с порядком ДУ.

Замечание 2. Начальные условия Коши задают значения функции и ее производных в одной и той же точке x_0.

Рассмотрим *задачу Коши для ДУ 1-го порядка*:

$$\begin{cases} y' = f(x; y), \\ y(x_0) = y_0. \end{cases}$$

Т 1 (существования и единственности решения задачи Коши для ДУ 1-го порядка). Если функция $f(x; y)$ и ее частная производная $f'_y(x; y)$ непрерывны в некоторой области D, содержащей точку $(x_0; y_0)$, то существует единственное решение уравнения $y' = f(x; y)$, удовлетворяющее начальному условию $y(x_0) = y_0$.

Геометрически это означает, что при выполнении условий теоремы Коши в точке $(x_0; y_0) \in D$ через эту точку проходит ровно одна интегральная кривая данного ДУ.

Рассмотрим *задачу Коши для ДУ 2-го порядка*:

$$\begin{cases} y'' = f(x; y; y'), \\ y(x_0) = y_0, \\ y'(x_0) = y_{01}. \end{cases}$$

Т 2 (существования и единственности решения задачи Коши для ДУ 2-го порядка). Если функция $f(x; y; y')$ и ее частные производные $f'_y(x; y; y')$ и $f'_{y'}(x; y; y')$ непрерывны в некоторой области D, содержащей точку $(x_0; y_0; y_{01})$, то существует единственное решение уравнения $y'' = f(x; y; y')$, удовлетворяющее начальным условиям $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_{01}$.

Аналогично формулируется теорема существования и единственности решения задачи Коши (1), (2) для ДУ n-го порядка.

Опр. 7. ***Общим решением*** ДУ n-го порядка (1) называется функция $y = \varphi(x; C_1; C_2; ...; C_n)$, которая зависит от независимой переменной x и n произвольных постоянных и удовлетворяет условиям:

1) является решением ДУ (1) при любых конкретных значениях произвольных постоянных $C_1, C_2, ..., C_n$;

2) каковы бы ни были начальные условия (2), существуют такие значения произвольных постоянных $C_1 = C_1^0, C_2 = C_2^0, ..., C_n = C_n^0$, что функция $y = \varphi(x; C_1^0; C_2^0; ...; C_n^0)$ является решением ДУ (1) и удовлетворяет начальным условиям (2).

Замечание. Более точно, пункт 2) этого определения должен выполняться для таких начальных условий (2), что $(x_0; y_0; y_{01}; ...; y_{0;n-1}) \in D$, где D – некоторая область, в которой выполняются условия теоремы существования и единственности решения задачи Коши для ДУ (1).

Опр. 8. ***Частным решением*** ДУ n-го порядка (1) называется функция $y=\varphi(x; C_1^0; C_2^0; ...; C_n^0)$, которая получается из общего решения при конкретных значениях произвольных постоянных.

Опр. 9. Если общее решение ДУ найдено в неявном виде, т. е. задается уравнением $\Phi(x; y; C_1; C_2; ...; C_n)=0$, то говорят, что найден ***общий интеграл*** ДУ; уравнение $\Phi(x; y; C_1^0; C_2^0; ...; C_n^0)=0$ называется в этом случае ***частным интегралом***.

С геометрической точки зрения общее решение ДУ – это семейство интегральных кривых на плоскости, а частное решение – одна конкретная кривая этого семейства.

Если в точке $M_0(x_0; y_0)$ нарушено хотя бы одно из условий теоремы Коши (т. е. теоремы существования и единственности решения задачи Коши), то эта точка называется ***особой точкой*** соответствующего ДУ. Через эту точку может проходить более одной интегральной кривой или не проходить ни одна интегральная кривая.

Если нарушение условий теоремы Коши происходит вдоль некоторой линии и эта линия является интегральной кривой данного ДУ (это проверяется подстановкой соответствующей функции в ДУ), то такую интегральную кривую называют ***особой***, а соответствующее ей решение – ***особым решением*** ДУ.

Пример 4. Рассмотрим особые решения ДУ $y'=3\sqrt[3]{y^2}$.

Общим решением этого ДУ является $y=(x+C)^3$ (несложно видеть, что при любом значении постоянной C эта функция удовлетворяет данному ДУ).

Проверим выполнимость условий теоремы Коши:

– функция $f(x; y)=3\sqrt[3]{y^2}$ непрерывна во всех точках $(x; y)$;

– функция $f'_y(x; y)=\dfrac{1}{\sqrt[3]{y}}$ непрерывна при $y\neq 0$,

т. е. условия теоремы существования и единственности решения задачи Коши выполняются во всех точках вне оси Ox.

Особые точки лежат на оси Ox, т. е. на линии $y=0$. Подставляя функцию $y=0$ в ДУ, убеждаемся, что она является решением этого уравнения, однако ее нельзя получить из общего решения ни при каком значении C. Поэтому $y=0$ – особое решение ДУ.

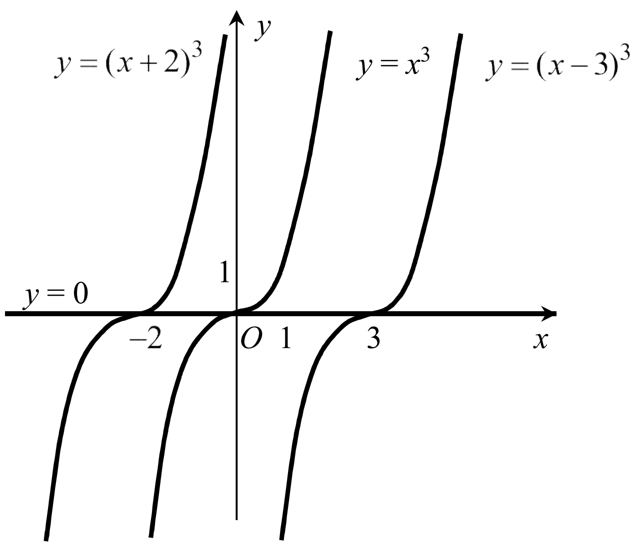


Рис. 2. Интегральные кривые ДУ $y' = 3\sqrt[3]{y^2}$

На рис. 2 изображены интегральные кривые данного ДУ: через каждую точку оси Ox проходят ровно две интегральные кривые данного ДУ.•

Примеры задач, приводящих к ДУ 1-го порядка

Пример 5. Найти кривые, для которых угловой коэффициент касательной в каждой точке равен отношению абсциссы этой точки к ординате, взятому с противоположным знаком.

Найти среди этих кривых ту, которая проходит через точку $(1;1)$.

Решение. Пусть $y = y(x)$ – уравнение искомой кривой. Из геометрического смысла производной известно, что угловой коэффициент касательной к этой кривой в точке $(x;\, y)$ равен значению производной в этой точке, т. е. $\operatorname{tg}\alpha = y'$ (см. рис. 3). По условию, в каждой точке $(x;\, y)$ искомой линии угловой коэффициент касательной равен отношению абсциссы этой точки к ординате, взятому с противоположным знаком, поэтому

$$y' = -\frac{x}{y}.$$

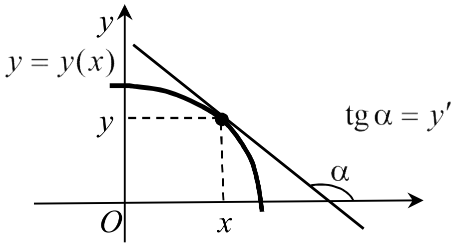


Рис. 3. Нахождение кривой по заданному условию на угловой коэффициент касательной

Для решения этого ДУ используем связь между производной и дифференциалом:

$$\boxed{y' = \frac{dy}{dx},}$$

а затем преобразуем ДУ так, чтобы в обеих частях равенства стояли дифференциалы некоторых функций:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}; \qquad ydy = -xdx;$$

$$d\left(\frac{y^2}{2}\right) = d\left(-\frac{x^2}{2}\right); \qquad \frac{y^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + C.$$

Следовательно, $x^2 + y^2 = 2C$ – общий интеграл данного ДУ. Интегральными кривыми ДУ являются окружности с центром в начале координат и радиусом $\sqrt{2C}$ (рис. 4). Найдем ту из них, которая проходит через точку $(1; 1)$, подставив значения $x = 1, y = 1$ в полученный общий интеграл:

$$1^2 + 1^2 = 2C; \qquad 2 = 2C; \qquad C = 1.$$

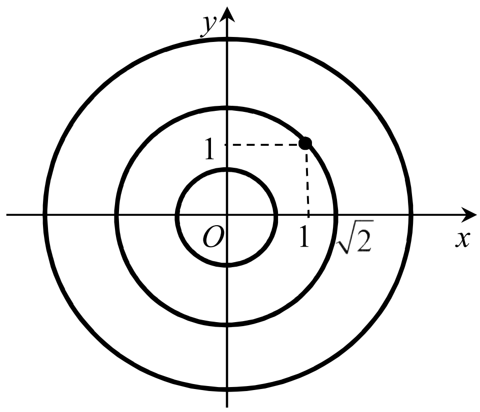


Рис. 4. Интегральные кривые ДУ $y' = -\dfrac{x}{y}$

Итак, решением задачи Коши $\begin{cases} y' = -\dfrac{x}{y}, \\ y(1) = 1 \end{cases}$ является окружность $x^2 + y^2 = 2.$ •

Пример 6 (задача о росте популяции). Найти закон изменения количества микроорганизмов в колонии, которая обитает в идеальных условиях (располагает неограниченными ресурсами питания и не подавляется никаким другим видом микроорганизмов).

Решение. Пусть $y = y(t)$ – численность популяции микроорганизмов в момент времени t. Естественно предположить, что число родившихся и число умерших за промежуток времени Δt микроорганизмов пропорциональны численности популяции $y(t)$ и времени $\Delta t.$ Пусть коэффициенты пропорциональности будут k_1 и k_2 соответственно. Тогда в момент времени $t + \Delta t$ численность популяции будет

$$y(t + \Delta t) = y(t) + k_1 y(t)\Delta t - k_2 y(t)\Delta t,$$

откуда

$$y(t + \Delta t) - y(t) = (k_1 - k_2)\, y(t)\Delta t;$$

$$\frac{y(t + \Delta t) - y(t)}{\Delta t} = (k_1 - k_2)\, y(t).$$

Перейдя к пределу при $\Delta t \to 0,$ в силу определения производной получим следующее ДУ:

$$y'(t) = (k_1 - k_2)y(t).$$

Поскольку $y' = \dfrac{dy}{dx}$, преобразуем ДУ и найдем функцию $y(t)$:

$$\frac{d(y(t))}{dt} = (k_1 - k_2)y(t);$$

$$\frac{d(y(t))}{y(t)} = (k_1 - k_2)dt;$$

$$d(\ln|y(t)|) = d((k_1 - k_2)t);$$

$$\ln|y(t)| = (k_1 - k_2)t + C_1;$$

$$y(t) = \mathrm{e}^{(k_1 - k_2)t + C_1};$$

$$y(t) = C\,\mathrm{e}^{(k_1 - k_2)t},$$

где $C = \mathrm{e}^{C_1}$; C_1 – произвольная постоянная, равная численности популяции в нулевой момент времени.

Такой закон роста (при $k_1 > k_2$) численности популяции называется экспоненциальным. •

Замечание. Полученное в примере ДУ $y' = ky$ означает, что скорость изменения величины y прямо пропорциональна текущему значению y. Такая модель часто принимается в первом приближении при исследовании различных процессов и иногда оправдывается с большой точностью. Этим ДУ описывается, например, размножение бактерий в идеальной среде; изменение массы вещества, вступившего в химическую реакцию; убывание атмосферного давления с высотой; радиоактивный распад и др.

Пример 7. Температура вынутого из печи хлеба в течение 20 мин падает от 100 до 60°С. Температура окружающего воздуха 25°С. Через какое время от момента начала охлаждения температура хлеба понизится до 30°С?

Решение. Обозначим температуру хлеба через T. Скорость охлаждения тела представляет понижение температуры T в единицу времени t и выражается производной $\frac{dT}{dt}$. Согласно закону Ньютона, скорость изменения температуры тела пропорциональна разности температур тела и окружающей среды, т. е.

$$\frac{dT}{dt} = k(T - 25),$$

где k – коэффициент пропорциональности. Преобразовав это ДУ, получим:

$$\frac{dT}{T - 25} = kdt;$$

$$\int \frac{d(T - 25)}{T - 25} = \int kdt;$$

$$\ln|T - 25| = kt + C_1;$$

$$T - 25 = \mathrm{e}^{kt + C_1};$$

$$T = 25 + C\,\mathrm{e}^{kt},$$

где $C = \mathrm{e}^{C_1}$. Из начального условия $T(0) = 100$ определим значение постоянной C: поскольку

$$T(0) = 25 + C\,\mathrm{e}^{k \cdot 0} = 25 + C = 100,$$

то $C = 75$.

Используя условие $T(20) = 60$, получим:

$$T(20) = 25 + 75\,\mathrm{e}^{20k} = 60; \qquad 75\,\mathrm{e}^{20k} = 35;$$

$$\mathrm{e}^{20k} = \frac{7}{15}; \qquad \mathrm{e}^{k} = \left(\frac{7}{15}\right)^{\frac{1}{20}}.$$

Следовательно, изменение температуры хлеба определяется соотношением $T(t) = 25 + 75 \cdot \left(\frac{7}{15}\right)^{\frac{t}{20}}$. Определим, в какой момент времени температура хлеба понизится до 30°С:

$$25+75\cdot\left(\frac{7}{15}\right)^{\frac{t}{20}}=30;$$

$$\left(\frac{7}{15}\right)^{\frac{t}{20}}=\frac{1}{15};$$

$$\frac{t}{20}=\log_{\frac{7}{15}}\frac{1}{15};$$

$$t=20\log_{\frac{7}{15}}\left(\frac{1}{15}\right)\approx 71\ (\text{мин}).$$

Итак, искомое время охлаждения хлеба приблизительно равно 1 ч 11 мин. •

§ 2. Основные типы дифференциальных уравнений 1-го порядка

ДУ 1-го порядка в общем случае имеет вид

$$F(x;\ y;\ y')=0.$$

Если в ДУ 1-го порядка можно выразить y', то оно записывается в виде ***ДУ 1-го порядка, разрешенного относительно производной***:

$$y'=f(x;\ y).$$

Иногда ДУ 1-го порядка записывают ***в дифференциальной форме***:

$$P(x;\ y)dx+Q(x;\ y)dy=0.$$

Такая форма записи ДУ удобна тем, что переменные x и y в нем равноправны, т. е. любую из них можно рассматривать как функцию другой.

Простейшим ДУ 1-го порядка является уравнение вида

$$y'=f(x),$$

которое решается интегрированием:

$$y=\int f(x)dx.$$

Рассмотрим основные виды ДУ 1-го порядка и методы их решения.

ДУ с разделяющимися переменными

Опр. 1. ДУ 1-го порядка, разрешенное относительно производной, называется ***дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными (ДУ с РП)***, если оно может быть записано в виде

$$\boxed{y' = f_1(x) f_2(y),} \tag{1}$$

т. е. если его правая часть может быть представлена в виде произведения двух функций: одной, зависящей только от x, и второй, зависящей только от y.

Метод решения ДУ (1) заключается в том, чтобы *разделить переменные*, а затем проинтегрировать:

$$\frac{dy}{dx} = f_1(x) f_2(y);$$

$$\frac{dy}{f_2(y)} = f_1(x)dx$$

(ДУ, записанное в таком виде, ***называется ДУ с разделенными переменными***);

$$\int \frac{dy}{f_2(y)} = \int f_1(x)dx.$$

Замечание. При делении на $f_2(y)$ мы считаем, что $f_2(y) \neq 0.$ Чтобы не потерять особые решения ДУ, необходимо:

1) решить уравнение $f_2(y) = 0;$

2) проверить, являются ли его решения решениями ДУ;

3) проверить, могут ли эти решения быть получены из общего решения при некотором значении C, включая $C = \infty.$ Если нет, то это особые решения.

ДУ, записанное в дифференциальной форме, является ДУ с РП, если его можно представить в виде

$$P_1(x)P_2(y)dx + Q_1(x)Q_2(y)dy = 0.$$

Для того чтобы разделить переменные, нужно разделить это уравнение на $P_2(y)Q_1(x)$. При этом среди решений уравнения $P_2(y)Q_1(x)=0$ могут быть особые решения.

Пример 1. Решим ДУ $(y+xy)dx+(x-xy)dy=0.$

Решение. Перенесем слагаемые с dx и dy в разные стороны и разделим переменные:

$$(y+xy)dx=(xy-x)dy;$$

$$y(1+x)dx=x(y-1)dy;$$

$$\frac{(1+x)dx}{x}=\frac{(y-1)dy}{y}.$$

(Здесь при делении на xy предполагаем, что $x\neq 0,\ y\neq 0.$) Интегрируем обе части уравнения:

$$\int\frac{(1+x)dx}{x}=\int\frac{(y-1)dy}{y};$$

$$\int\left(\frac{1}{x}+1\right)dx=\int\left(1-\frac{1}{y}\right)dy;$$

$$\ln|x|+x=y-\ln|y|+C.$$

Перенеся переменные влево, получим общий интеграл ДУ в виде

$$\ln|xy|+x-y=C.$$

Это выражение можно преобразовать к виду

$$|xy|\,\mathrm{e}^{x-y}=\mathrm{e}^{C}; \qquad xy\,\mathrm{e}^{x-y}=\pm\,\mathrm{e}^{C}.$$

Таким образом, получаем общий интеграл ДУ в виде

$$xy\,\mathrm{e}^{x-y}=C_1,$$

где $C_1=\pm\,\mathrm{e}^{C}$. (Отметим, что $C_1\neq 0.$)

Проверим, не теряются ли особые решения ДУ при делении на xy. Подставляя $x=0$ в исходное ДУ:

$$(y+0\cdot y)\cdot 0+(0-0\cdot y)dy=0,$$

убеждаемся, что $x=0$ является решением ДУ. Аналогично, $y=0$ является решением этого ДУ.

Оба эти решения входят в общий интеграл ДУ при $C_1=0$, а значит, не являются особыми решениями.

Ответ: $xy\,\mathrm{e}^{x-y}=C$, где C – произвольная постоянная, – общий интеграл ДУ.•

Замечание. Решения, которые могут быть получены из общего решения ДУ при некотором значении произвольной постоянной C или в пределе при $C\to\infty$, не считаются особыми.

Однородные ДУ 1-го порядка

Опр. 2. ***Однородным ДУ 1-го порядка*** называется ДУ, которое может быть записано в виде

$$\boxed{y'=f(x;y),\ \text{где}\ f(tx;ty)=f(x;y).}$$

Опр. 3. Функция $f(x;y)$ называется о***днородной функцией n-го порядка (измерения)***, если при умножении каждого ее аргумента на произвольный множитель t вся функция умножается на t^n, т. е.

$$f(tx;ty)=t^n f(x;y).$$

Пример 2. Функция $f(x;y)=x^2-2xy$ – однородная функция 2-го порядка, поскольку

$$f(tx;ty)=(tx)^2-2txty=t^2(x^2-2xy)=t^2 f(x;y).\bullet$$

Таким образом, ДУ 1-го порядка, разрешенное относительно производной, является однородным ДУ, если его правая часть $f(x;y)$ – однородная функция 0-го порядка.

ДУ 1-го порядка, записанное в дифференциальной форме $P(x;y)dx+Q(x;y)dy=0$, является однородным ДУ, если функции $P(x;y)$ и $Q(x;y)$ – однородные функции *одинакового* порядка.

Еще один способ распознавания однородных ДУ 1-го порядка дает следующее утверждение.

Утв. 1. Любое однородное ДУ 1-го порядка может быть представлено в виде

$$\boxed{y' = \varphi\left(\frac{y}{x}\right).} \tag{2}$$

Доказательство. Пусть $y' = f(x; y)$ – однородное ДУ 1-го порядка, т. е. $f(tx; ty) = f(x; y)$. Полагая $t = \frac{1}{x}$, получим

$$f(x; y) = f\left(\frac{x}{x}; \frac{y}{x}\right) = f\left(1; \frac{y}{x}\right) = \varphi\left(\frac{y}{x}\right),$$

т. е. правая часть ДУ может быть представлена как функция одного аргумента $\frac{y}{x}$. ◁

Метод решения однородного ДУ 1-го порядка – замена $\boxed{u = \frac{y}{x}}$ или, что то же самое, $\boxed{y = ux.}$

Такая подстановка всегда позволяет свести однородное ДУ 1-го порядка к ДУ с РП относительно новой неизвестной функции u.

Действительно, если $y = ux$, то $y' = u'x + u \cdot 1 = u'x + u$. Подставляя эти соотношения в (2), получим

$$u'x + u = \varphi\left(\frac{ux}{x}\right); \qquad u'x = \varphi(u) - u; \qquad \frac{du}{dx}x = \varphi(u) - u;$$

$$\frac{du}{\varphi(u) - u} = \frac{dx}{x}; \qquad \int \frac{du}{\varphi(u) - u} = \int \frac{dx}{x}.$$

Пример 3. Найдем общее решение (общий интеграл) ДУ $(x + y)dy = (x - y)dx$.

Решение. Заметим, что это ДУ не является ДУ с разделяющимися переменными, но является однородным ДУ 1-го порядка, поскольку функции $P(x; y) = x - y$ и $Q(x; y) = x + y$ – однородные функции *одинакового* порядка (1-го порядка), так как

$$P(tx; ty) = tx - ty = t(x - y) = tP(x; y);$$

$$Q(tx; ty) = tx + ty = t(x + y) = tQ(x; y).$$

Разрешим ДУ относительно производной:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x-y}{x+y},$$

а затем, выполнив подстановку

$$y=ux;\ y'=u'x+u,$$

получим

$$u'x+u=\frac{x-ux}{x+ux};\qquad u'x=\frac{1-u}{1+u}-u;\qquad u'x=\frac{1-u-u-u^2}{1+u};$$

$$\frac{du}{dx}x=-\frac{u^2+2u-1}{u+1};\qquad \frac{u+1}{u^2+2u-1}du=-\frac{dx}{x};$$

$$\int\frac{u+1}{u^2+2u-1}du=-\int\frac{dx}{x};\qquad \frac{1}{2}\int\frac{d(u^2+2u-1)}{u^2+2u-1}=-\int\frac{dx}{x};$$

$$\frac{1}{2}\ln|u^2+2u-1|=-\ln|x|+\frac{1}{2}\ln|C|.$$

(Здесь для упрощения дальнейших выкладок мы записали произвольную постоянную в виде $\frac{1}{2}\ln|C|$, поскольку эта величина может принимать любые значения от $-\infty$ до $+\infty$. Такой прием часто используется при решении ДУ, позволяя затем избавиться от логарифмов и записать ответ в более простом виде.)

Преобразуем полученное уравнение, используя свойства логарифмов:

$$\ln|u^2+2u-1|=-2\ln|x|+\ln|C|;$$

$$\ln|u^2+2u-1|=\ln\left|\frac{C}{x^2}\right|;$$

$$u^2+2u-1=\frac{C}{x^2}.$$

Поскольку $y=ux$, то, подставляя $u=\frac{y}{x}$, получим

$$\frac{y^2}{x^2}+\frac{2y}{x}-1=\frac{C}{x^2};\qquad y^2+2xy-x^2=C.$$

Ответ: $y^2+2xy-x^2=C.$ •

Линейные ДУ 1-го порядка

Опр. 4. ***Линейным ДУ 1-го порядка*** называется ДУ, которое может быть записано в виде

$$\boxed{y'=p(x)y+q(x),}$$

т. е. является *линейным* относительно неизвестной функции y и ее производной y'.

Метод решения линейного ДУ 1-го порядка, предложенный И. Бернулли, – подстановка $\boxed{y=uv,}$ т. е. решение ищется в виде произведения двух функций.

Подставляя $y=uv$ и $y'=u'v+uv'$ в ДУ, получим

$$u'v+uv'=p(x)uv+q(x);$$

$$u'v+u(v'-p(x)v)=q(x).$$

Поскольку вместо одной неизвестной функции y мы ввели две неизвестные функции u и v, то одну из них можно выбрать так, чтобы получить более простое уравнение для определения второй функции. Поэтому выбираем функцию v так, чтобы множитель при u был равен 0, а затем находим функцию u из полученного уравнения, т.е. решаем систему

$$\begin{cases} v'-p(x)v=0, \\ u'v=q(x). \end{cases}$$

Пример 4. Найдем общее решение ДУ $y'-\dfrac{2xy}{x^2+1}=x^2+1.$

Решение. Это ДУ является линейным ДУ, так как $p(x)=\dfrac{2x}{x^2+1}$, $q(x)=x^2+1.$ Поэтому оно решается подстановкой

$$y=uv;\;\; y'=u'v+uv'.$$

Тогда

$$u'v+uv'-\frac{2xuv}{x^2+1}=x^2+1; \qquad u'v+u\left(v'-\frac{2xv}{x^2+1}\right)=x^2+1.$$

Приравняв скобку к 0, получим систему $\begin{cases} v' - \dfrac{2xv}{x^2+1} = 0, \\ u'v = x^2+1. \end{cases}$

Решаем первое уравнение системы, разделяя переменные:

$$v' = \frac{2xv}{x^2+1}; \qquad \frac{dv}{dx} = \frac{2xv}{x^2+1}; \qquad \frac{dv}{v} = \frac{2xdx}{x^2+1};$$

$$\int \frac{dv}{v} = \int \frac{2xdx}{x^2+1}; \qquad \ln|v| = \ln\left|x^2+1\right|.$$

(Заметим, что здесь при нахождении функции v – первой из двух неизвестных функций – константа C при интегрировании не пишется, поскольку достаточно найти какую-нибудь функцию v, удовлетворяющую системе.) Отсюда получаем $v = x^2+1$.

Подставляя найденную функцию во второе уравнение системы, получим

$$u'(x^2+1) = x^2+1; \qquad u' = 1; \qquad u = x + C.$$

Таким образом, поскольку $y = uv$, то общее решение уравнения $y = (x+C)(x^2+1)$. •

Пример 5. Найдем частное решение ДУ $xy' - 2y = x$, удовлетворяющее условию $y(1) = 5$.

Решение. Выразив производную, получим $y' = \dfrac{2}{x}y + 1$, т. е. это линейное ДУ с $p(x) = \dfrac{2}{x}, q(x) = 1$. Подставляя $y = uv$; $y' = u'v + uv'$, получим

$$u'v + uv' = \frac{2uv}{x} + 1; \qquad u'v + u\left(v' - \frac{2v}{x}\right) = 1.$$

Приравняв скобку к 0, получим систему $\begin{cases} v' - \dfrac{2v}{x} = 0, \\ u'v = 1. \end{cases}$

Разделим переменные в первом уравнении системы:

$$\frac{dv}{dx} = \frac{2v}{x}; \qquad \frac{dv}{v} = \frac{2dx}{x}; \qquad \int \frac{dv}{v} = \int \frac{2dx}{x};$$

$$\ln|v| = 2\ln|x|; \qquad v = x^2.$$

Подставляя во второе уравнение системы, получим

$$u'x^2 = 1; \qquad u' = \frac{1}{x^2}; \qquad u = -\frac{1}{x} + C.$$

Таким образом, поскольку $y = uv$, то общее решение уравнения $y = \left(-\frac{1}{x} + C\right)x^2$, или $y = -x + Cx^2$.

Используя начальное условие $y(1) = 5$, определим значение постоянной C:

$$y(1) = -1 + C \cdot 1^2 = 5; \qquad -1 + C = 5; \qquad C = 6.$$

Итак, искомое частное решение уравнения $y = -x + 6x^2$. •

Замечание. Иногда удается решить ДУ, если считать искомой функцией x, а независимой переменной – y.

Пример 6. Найдем общее решение (общий интеграл) ДУ $y' = \frac{1}{x+y}$.

Решение. Отметим, что это ДУ:

– не является ДУ с РП;

– не является однородным ДУ 1-го порядка;

– не является линейным ДУ относительно неизвестной функции y.

Поскольку

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x+y} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dx}{dy} = x + y,$$

то, воспользовавшись теоремой о производной обратной функции, получим ДУ

$$x'_y = x + y,$$

которое является линейным относительно неизвестной функции $x = x(y)$. Для его решения используем подстановку $x(y) = u(y)v(y)$, $x'_y = u'v + uv'$ (здесь все функции зависят от переменной y и дифференцирование ведется по y). Тогда

$$u'v + uv' = uv + y; \qquad u'v + u\left(v' - v\right) = y.$$

Приравняв скобку к 0, получим систему $\begin{cases} v' - v = 0, \\ u'v = y. \end{cases}$

Разделим переменные в первом уравнении системы:

$$\frac{dv}{dy} = v; \qquad \frac{dv}{v} = dy; \qquad \int \frac{dv}{v} = \int dy;$$

$$\ln|v| = y; \qquad v = \mathrm{e}^{y}.$$

Подставляя во второе уравнение системы, получим

$$u'\,\mathrm{e}^{y} = y; \qquad \frac{du}{dy} = y\,\mathrm{e}^{-y}; \qquad du = y\,\mathrm{e}^{-y}\,dy.$$

Находим функцию u, применяя формулу интегрирования по частям:

$$u = \int y\,\mathrm{e}^{-y}\,dy = \left| \begin{matrix} U = y; & dU = dy \\ dV = \mathrm{e}^{-y}\,dy; & V = \int \mathrm{e}^{-y}\,dy = -\mathrm{e}^{-y} \end{matrix} \right| =$$

$$= -y\,\mathrm{e}^{-y} + \int \mathrm{e}^{-y}\,dy = -y\,\mathrm{e}^{-y} - \mathrm{e}^{-y} + C.$$

Отсюда, поскольку $x(y) = u(y)v(y)$, получаем общее решение (общий интеграл) уравнения: $x = (-y\,\mathrm{e}^{-y} - \mathrm{e}^{-y} + C)\,\mathrm{e}^{y}$, или $x = -y - 1 + C\,\mathrm{e}^{y}$. •

Уравнение Бернулли

Опр. 5. ***Уравнением Бернулли*** называется ДУ, которое может быть записано в виде

$$\boxed{y' = p(x)y + q(x)y^{\alpha},}$$

где α – некоторое число.

(Здесь считается, что $\alpha \neq 0, \alpha \neq 1$, поскольку при $\alpha = 0$ получается линейное ДУ, а при $\alpha = 1$ – ДУ с РП.)

Это ДУ названо в честь Я. Бернулли, опубликовавшего это уравнение в 1695 г.

Метод решения – подстановка $\boxed{y = uv,}$ так же, как и для линейного ДУ 1-го порядка.

Пример 7. Найдем общее решение ДУ $y' = \dfrac{y}{x} - x^2 y^2$.

Решение. Применив подстановку $y = uv$; $y' = u'v + uv'$, получим:

$$u'v + uv' = \frac{uv}{x} - x^2u^2v^2; \qquad u'v + u\left(v' - \frac{v}{x}\right) = -x^2u^2v^2.$$

Приравняв скобку к 0, получим систему $\begin{cases} v' - \dfrac{v}{x} = 0, \\ u'v = -x^2u^2v^2. \end{cases}$

Решаем первое уравнение системы:

$$v' = \frac{v}{x}; \qquad \frac{dv}{dx} = \frac{v}{x}; \qquad \frac{dv}{v} = \frac{dx}{x};$$

$$\int \frac{dv}{v} = \int \frac{dx}{x}; \qquad \ln|v| = \ln|x|; \qquad v = x.$$

Подставляя во второе уравнение системы, получим

$$u'x = -x^2u^2x^2; \qquad \frac{du}{dx} = -x^3u^2; \qquad \frac{du}{u^2} = -x^3dx;$$

$$\int \frac{du}{u^2} = -\int x^3dx; \qquad -\frac{1}{u} = -\frac{x^4}{4} - \frac{C}{4}.$$

(Здесь произвольную постоянную записали в виде $-\dfrac{C}{4}$ для упрощения дальнейших выкладок.) Отсюда

$$\frac{1}{u} = \frac{x^4 + C}{4}; \qquad u = \frac{4}{x^4 + C}.$$

Следовательно, общее решение уравнения $y = \dfrac{4x}{x^4 + C}$.•

Методы решения основных типов ДУ 1-го порядка

Тип ДУ	Вид ДУ	Метод решения

1. Простейшее	$y' = f(x)$	Интегрирование: $y = \int f(x)dx$
2. ДУ с РП	$y' = f_1(x) f_2(y)$	Разделение переменных: $\int \frac{dy}{f_2(y)} = \int f_1(x)dx$
3. Однородное ДУ 1-го порядка	$y' = f(x; y)$, где $f(tx; ty) = f(x; y)$	Подстановка $y = ux$
4. Линейное ДУ 1-го порядка	$y' = p(x)y + q(x)$	Подстановка $y = uv$
5. Уравнение Бернулли	$y' = p(x)y + q(x)y^{\alpha}$	Подстановка $y = uv$

Как видно из приведенной таблицы, метод решения ДУ 1-го порядка зависит от типа ДУ, а для определения типа ДУ следует преобразовать его к виду ДУ, разрешенного относительно производной.

Замечание. В некоторых случаях ДУ 1-го порядка может быть отнесено к нескольким типам одновременно. Как правило, в этом случае следует выбрать метод решения для более простого типа ДУ.

Пример 8. ДУ $xy' + y = 1$ является:

– ДУ с РП;

– линейным ДУ.

Пример 9. Найдем общее решение ДУ $xy' + y = 1$.

Решение. Первый способ. Это ДУ является ДУ с РП. Перенесем все слагаемые без y' вправо:

$$xy' = 1 - y,$$

а затем разделим переменные:

$$x\frac{dy}{dx} = 1 - y; \qquad \frac{dy}{1-y} = \frac{dx}{x}; \qquad \int \frac{dy}{1-y} = \int \frac{dx}{x};$$

$$-\ln|1-y| = \ln|x| - \ln|C|; \qquad \ln|1-y| = -\ln|x| + \ln|C|.$$

Избавляясь от логарифмов, получаем $1-y=\dfrac{C}{x}$, или $y=1-\dfrac{C}{x}$ – общее решение ДУ.

Второй способ. Упражнение. Решить это ДУ как линейное.

Третий способ. Заметим, что левую часть исходного ДУ можно представить как производную произведения xy. Тогда

Перенесем все слагаемые без y' вправо:

$$(xy)'=1; \qquad xy=x+C.$$

Выражая y, получаем общее решение $y=1+\dfrac{C}{x}$. •

§ 3. Дифференциальные уравнения 2-го порядка, допускающие понижение порядка

ДУ 2-го порядка в общем случае имеет вид

$$F(x;\, y;\, y';\, y'')=0.$$

Иногда решение ДУ 2-го порядка с помощью подходящей подстановки может быть сведено к решению ДУ 1-го порядка. В этом случае говорят, что ДУ 1-го порядка ***допускает понижение порядка.***

Рассмотрим два типа уравнений, допускающих понижение порядка.

Если ДУ 2-го порядка имеет вид

$$F(x;\, y';\, y'')=0,$$

т. е. *не содержит явно искомую функцию* y, то оно допускает понижение порядка введением новой функции $z(x)=y'$. Тогда $y''=(y')'=z'$ и уравнение приводится к ДУ 1-го порядка $F(x;\, z;\, z')=0$ относительно новой неизвестной функции $z=z(x)$.

Если ДУ 2-го порядка имеет вид

$$F(y;\, y';\, y'')=0,$$

т. е. *не содержит явно независимую переменную* x, то оно допускает понижение порядка подстановкой вместо y' новой неизвестной функции, зависящей от переменной y: $y' = p(y)$. Тогда по правилу дифференцирования сложной функции получаем:

$$y'' = \frac{d(y')}{dx} = \frac{d(p(y))}{dx} = \frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy}p,$$

т. е. исходное уравнение приводится к ДУ 1-го порядка $F\left(y; p; \dfrac{dp}{dy}p\right) = 0$ относительно новой неизвестной функции $p = p(y)$.

Вид ДУ	Метод решения	Преобразование y''
$F(x; y'; y'') = 0$	$y' = z(x)$	$y'' = z'$
$F(y; y'; y'') = 0$	$y' = p(y)$	$y'' = \dfrac{dp}{dy}p$

Пример 1. Найдем общее решение ДУ $xy'' + y' = 0$.

Решение. Это ДУ, не содержащее явно искомую функцию y, поэтому применим подстановку $y' = z$; $y'' = z'$ (функция z зависит от x). Тогда получим уравнение

$$xz' + z = 0,$$

которое является ДУ с РП:

$$xz' = -z; \qquad x\frac{dz}{dx} = -z; \qquad \frac{dz}{z} = -\frac{dx}{x};$$

$$\int\frac{dz}{z} = -\int\frac{dx}{x}; \qquad \ln|z| = -\ln|x| + \ln|C_1|; \qquad z = \frac{C_1}{x}.$$

Здесь произвольную постоянную обозначили C_1, поскольку общее решение ДУ 2-го порядка содержит две произвольные постоянные.

Далее, возвращаясь к исходной переменной, получим

$$y' = \frac{C_1}{x}; \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{C_1}{x}; \qquad dy = \frac{C_1}{x}dx;$$

$$y = C_1\int\frac{dx}{x}; \qquad y = C_1\ln|x| + C_2.$$

Ответ: $y = C_1 \ln|x| + C_2$. •

Пример 2. Найдем общее решение ДУ $xy'' + y' = y' \ln \dfrac{y'}{x}$.

Решение. В записи ДУ отсутствует искомая функция y, поэтому оно может быть решено подстановкой $y' = z$; $y'' = z'$ (функция z зависит от x). Тогда получим ДУ 1-го порядка

$$xz' + z = z \ln \frac{z}{x}.$$

Выразив производную

$$z' = -\frac{z}{x} + \frac{z}{x} \ln \frac{z}{x},$$

убеждаемся, что это однородное ДУ 1-го порядка, которое решается заменой $z = ux$; $z' = u'x + u$:

$$u'x + u = -\frac{ux}{x} + \frac{ux}{x} \ln \frac{ux}{x}; \qquad u'x = u \ln u - 2u;$$

$$\frac{du}{dx} x = u \ln u - 2u; \qquad \frac{du}{u \ln u - 2u} = \frac{dx}{x};$$

$$\int \frac{du}{u(\ln u - 2)} = \int \frac{dx}{x}; \qquad \int \frac{d(\ln u - 2)}{\ln u - 2} = \int \frac{dx}{x};$$

$$\ln|\ln u - 2| = \ln|x| + \ln|C_1|; \qquad \ln u - 2 = C_1 x;$$

$$\ln u = C_1 x + 2; \qquad u = \mathrm{e}^{C_1 x + 2}.$$

Следовательно, $z = x\,\mathrm{e}^{C_1 x + 2}$, а значит $y' = x\,\mathrm{e}^{C_1 x + 2}$. Тогда

$$y = \int x\,\mathrm{e}^{C_1 x + 2}\, dx = \left| \begin{matrix} u = x; & du = dx \\ dv = e^{C_1 x + 2} dx; & v = \dfrac{1}{C_1} e^{C_1 x + 2} \end{matrix} \right| =$$

$$= \frac{x}{C_1} \mathrm{e}^{C_1 x + 2} - \frac{1}{C_1} \int \mathrm{e}^{C_1 x + 2} dx = \frac{x}{C_1} \mathrm{e}^{C_1 x + 2} - \frac{1}{C_1^2} \mathrm{e}^{C_1 x + 2} + C_2.$$

Итак, общее решение ДУ 2-го порядка $y = \frac{x}{C_1} e^{C_1 x + 2} - \frac{1}{C_1^2} e^{C_1 x + 2} + C_2$. •

Пример 3. Найдем общее решение ДУ $yy'' = 2(y')^2$.

Решение. Это ДУ, не содержащее явно независимую переменную *x*, поэтому применим подстановку $y' = p;\ y'' = \frac{dp}{dy} p$ (функция *p* зависит от *y*). Тогда получим уравнение

$$yp\frac{dp}{dy} = 2p^2; \qquad p\left(y\frac{dp}{dy} - 2p \right) = 0,$$

т. е. либо $p = 0$, либо $y\frac{dp}{dy} - 2p = 0$.

Если $p = 0$, то $y' = 0 \quad \Rightarrow \quad y = C$.

Рассмотрим второе уравнение, которое является ДУс РП:

$$y\frac{dp}{dy} = 2p; \qquad \frac{dp}{p} = 2\frac{dy}{y}; \qquad \int \frac{dp}{p} = 2\int \frac{dy}{y};$$

$$\ln|p| = 2\ln|y| + \ln|C_1|; \qquad p = C_1 y^2.$$

Далее, возвращаясь к исходной переменной, получим ДУ с РП

$$y' = C_1 y^2; \qquad \frac{dy}{dx} = C_1 y^2; \qquad \frac{dy}{y^2} = C_1 dx;$$

$$\int \frac{dy}{y^2} = C_1 \int dx; \qquad -\frac{1}{y} = C_1 x + C_2; \qquad y = -\frac{1}{C_1 x + C_2}.$$

Учитывая, что при $C_1 = 0, C_2 = -\frac{1}{C}$ получим ранее найденное решение $y = C$, заключаем, что общее решение ДУ 2-го порядка имеет вид $y = -\frac{1}{C_1 x + C_2}$. •

Замечание. При решении задачи Коши для ДУ 2-го порядка во многих случаях бывает удобно определять значения постоянных C_1, C_2 сразу, по мере их возникновения. Это часто позволяет упростить дальнейшее решение.

Пример 4. Решим задачу Коши

$$3y^2 y'y'' + 1 = 0,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 1.$$

Решение. ДУ, не содержащее явно независимую переменную x, решается подстановкой $y' = p$; $y'' = \dfrac{dp}{dy}p$ (функция p зависит от y). Тогда получим уравнение

$$3y^2 p^2 \frac{dp}{dy} = -1; \qquad 3p^2 dp = -\frac{dy}{y^2}.$$

Отметим, то при делении на y^2 не происходит потеря решений, поскольку $y = 0$ не является решением данного ДУ (убеждаемся подстановкой в ДУ). Интегрируем:

$$3\int p^2 dp = -\int \frac{dy}{y^2}; \qquad p^3 = \frac{1}{y} + C_1; \qquad p = \sqrt[3]{\frac{1}{y} + C_1}.$$

Возвращаемся к исходной переменной: $y' = \sqrt[3]{\dfrac{1}{y} + C_1}$. Учитывая начальные условия $y(0) = 1,\ y'(0) = 1,$ подставим $y = 1,\ y' = 1$ и определим значение постоянной C_1:

$$1 = \sqrt[3]{\frac{1}{1} + C_1}; \qquad 1 = \sqrt[3]{1 + C_1}; \qquad C_1 = 0.$$

Следовательно, $y' = \dfrac{1}{\sqrt[3]{y}}$. Разделяя переменные, получим

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt[3]{y}}; \qquad \sqrt[3]{y}dy = dx; \qquad \int \sqrt[3]{y}dy = \int dx;$$

$$\frac{3y^{\frac{4}{3}}}{4} = x + C_2; \qquad y^{\frac{4}{3}} = \frac{4}{3}(x + C_2).$$

Из начального условия $y(0)=1$ получаем $1=\frac{4}{3}\cdot(0+C_2)$, откуда $C_2=\frac{3}{4}$. Таким образом, нашли частный интеграл ДУ в виде $y^{\frac{4}{3}}=\frac{4}{3}x+1$.•

§ 4. Основные теоремы о линейных однородных дифференциальных уравнениях высших порядков

Теория ДУ высших порядков общего вида достаточно сложна. Но существует важный частный случай – *линейные* ДУ, для которых многие вопросы разрешаются сравнительно просто.

Опр. 1. ***Линейным неоднородным дифференциальным уравнением*** (ЛНДУ) n-го порядка называется ДУ вида

$$y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+a_2(x)y^{(n-2)}+\ldots+a_{n-1}(x)y'+a_n(x)y=f(x), \quad (1)$$

где $f(x)\neq 0$. Здесь функции $a_1(x), a_2(x), \ldots, a_{n-1}(x), a_n(x)$ называются ***коэффициентами ЛНДУ***, а $f(x)$ – его свободным членом.

Опр. 2. ***Линейным однородным дифференциальным уравнением*** (ЛОДУ) n-го порядка называется ДУ вида

$$y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+a_2(x)y^{(n-2)}+\ldots+a_{n-1}(x)y'+a_n(x)y=0, \quad (2)$$

т. е. линейное дифференциальное уравнение, в котором свободный член $f(x)=0$.

Иногда говорят, что уравнение (2) – это ЛОДУ, соответствующее ЛНДУ (1), поскольку, как мы увидим далее, одним из этапов решения ЛНДУ (1) является нахождение общего решения ЛОДУ (2).

Т 1 (существования и единственности решения задачи Коши для ЛНДУ n-го порядка). Если коэффициенты $a_1(x), a_2(x), \ldots, a_{n-1}(x), a_n(x)$ и свободный член $f(x)$ ЛНДУ (1) непрерывны в окрестности точки x_0, то при любых значениях $y_0, y_{01}, \ldots, y_{0;\,n-1}$ существует единственное решение ЛНДУ (1), удовлетворяющее начальным условиям $y(x_0)=y_0, y'(x_0)=y_{01}, \ldots, y^{(n-1)}(x_0)=y_{0;\,n-1}$.

Далее рассмотрим общие свойства решений ЛОДУ (2), а затем способ нахождения решений ЛОДУ с *постоянными* коэффициентами.

Утв. 1. Если функции $y = y_1(x)$ и $y = y_2(x)$ являются частными решениями ЛОДУ (2), то *их линейная комбинация*

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x), \tag{3}$$

где C_1, C_2 – произвольные постоянные, также является решением ЛОДУ (2).

Доказательство (для случая $n = 2$). Рассмотрим для простоты случай ЛОДУ 2-го порядка

$$y'' + a_1(x) y' + a_2(x) y = 0. \tag{4}$$

Если функции $y = y_1(x)$ и $y = y_2(x)$ являются частными решениями ЛОДУ (4), то справедливы равенства

$$\begin{aligned} &y_1''(x) + a_1(x) y_1'(x) + a_2(x) y_1(x) = 0; \\ &y_2''(x) + a_1(x) y_2'(x) + a_2(x) y_2(x) = 0. \end{aligned} \tag{5}$$

Подставляя

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x);$$

$$y' = C_1 y_1'(x) + C_2 y_2'(x);$$

$$y'' = C_1 y_1''(x) + C_2 y_2''(x)$$

в левую часть ЛОДУ (4), а затем раскрывая скобки и группируя слагаемые с C_1 и слагаемые с C_2, с учетом (5) получим:

$$y'' + a_1(x) y' + a_2(x) y = C_1 y_1''(x) + C_2 y_2''(x) +$$

$$+ a_1(x)(C_1 y_1'(x) + C_2 y_2'(x)) + a_2(x)(C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)) =$$

$$= C_1 (y_1''(x) + a_1(x) y_1'(x) + a_2(x) y_1(x)) +$$

$$+ C_2 (y_2''(x) + a_1(x) y_2'(x) + a_2(x) y_2(x)) = C_1 \cdot 0 + C_2 \cdot 0 = 0,$$

а значит, функция (3) удовлетворяет ЛОДУ (4). ◁

Для дальнейшего нам понадобятся понятия линейной зависимости и линейной независимости системы функций на некотором промежутке, такие же понятия вводились для трехмерных векторов или элементов произвольного линейного пространства.

Опр. 3. Функции $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)$ называются ***линейно зависимыми*** на $(a; b)$, если существуют такие числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, не все равные нулю, что равенство

$$\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) + ... + \alpha_n y_n(x) = 0$$

выполняется при всех $x \in (a; b)$. Если же это равенство верно только при $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$, то функции $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)$ называются ***линейно независимыми*** на $(a; b)$.

Несложно видеть, что для случая двух функций имеет место следующее утверждение.

Утв. 2. Две функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ линейно зависимы на $(a; b)$ тогда и только тогда, когда они пропорциональны, т. е. $\dfrac{y_1(x)}{y_2(x)} \equiv \text{const}$ при всех $x \in (a; b)$.

Пример 1. 1) Функции $y_1(x) = 3x, y_2(x) = x$ линейно зависимы, поскольку равенство

$$\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) = 0$$

при $\alpha_1 = -1, \alpha_2 = 3$ справедливо для всех действительных x.

2) Функции $y_1(x) = x, y_2(x) = x^2$ линейно независимы, так как $\dfrac{y_1(x)}{y_2(x)} = \dfrac{x}{x^2} = \dfrac{1}{x} \neq \text{const}$. •

Вопрос о линейной зависимости или независимости *решений ЛОДУ* может быть решен с помощью определителя Вронского (вронскиана) этих функций.

Ю́зеф Мари́я Вро́ньский
(польск. *Józef Maria Hoene-Wroński*)
(1776–1853)

польский математик и философ-мистик. (Настоящая фамилия – Хёне или Гёне (польск. *Hoene*).)
В 16 лет поступил на военную службу, был артиллерийским офицером в армии Костюшко. После очередного раздела Польши перешел в русскую армию и, послужив в штабе Суворова, в 20 лет решил выйти в отставку и посвятить себя науке.
Математические работы Вроньского отмечены широтой охвата материала и общностью постановки задач. Однако склонность к мистицизму и сложность обозначений привели к тому, что его труды остались незамеченными современниками. Уже после смерти Вроньского исследователи его трудов во второй половине XIX в. обнаружили, что ему принадлежит авторство значительного числа методов и некоторых утверждений, которые к тому времени были заново открыты другими математиками.

Опр. 4. ***Определителем Вронского (вронскианом)*** функций $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)$ называется

$$W(x)=\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & ... & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & ... & y_n'(x) \\ ... & ... & ... & ... \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & ... & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}.$$

Утв. 3. Если функции $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)$ являются частными решениями некоторого ЛОДУ с непрерывными коэффициентами, то они линейно независимы на $(a;b)$ тогда и только тогда, когда вронскиан этих функций отличен от 0 на этом интервале, т. е. $W(x)\neq 0$ при всех $x\in(a;b)$.

Замечание 1. При этом для определителя Вронского $W(x)$, построенного для частных решений некоторого ЛОДУ с непрерывными на $(a;b)$ коэффициентами, имеет место следующее свойство.

Утв. 4. Если вронскиан частных решений некоторого ЛОДУ с непрерывными на $(a;b)$ коэффициентами $W(x_0)\neq 0$ при некотором $x_0\in(a;b)$, то $W(x)\neq 0$ при всех $x\in(a;b)$.

Замечание 2. Для произвольных функций (не являющихся решениями некоторого ЛОДУ с непрерывными коэффициентами) утверждение 3 справедливо только в одну сторону.

Утв. 5. Если $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)$ – дифференцируемые на $(a; b)$ функции и их вронскиан $W(x_0) \neq 0$ при некотором $x_0 \in (a; b)$, то эти функции линейно независимы на $(a; b)$.

Обратное, вообще говоря, неверно, что иллюстрируется следующим примером.

Пример 2. Функции $y_1(x) = x^2$, $y_2(x) = x\,|\,x\,|$ непрерывны и дифференцируемы всюду на $\mathbb{R}$, их вронскиан $W(x) = 0$ при всех $x \in \mathbb{R}$, однако эти функции линейно независимы.•

Опр. 5. ***Фундаментальной системой решений ЛОДУ n-го порядка*** называется совокупность n линейно независимых частных решений этого уравнения.

Смысл этого понятия в том, что любое решение ЛОДУ может быть представлено в виде линейной комбинации функций, составляющих фундаментальную систему решений этого уравнения.

Замечание. Число функций в фундаментальной системе решений ЛОДУ совпадает с порядком этого уравнения.

Т 2 (о структуре общего решения ЛОДУ *n*-го порядка). Общее решение ЛОДУ (2) n-го порядка с непрерывными коэффициентами имеет вид

$$\boxed{y_{\text{о. о.}} = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \ldots + C_n y_n(x),}$$

где $C_1, C_2, \ldots, C_n$ – произвольные постоянные, $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)$ – линейно независимые частные решения этого ДУ (т. е. частные решения, образующие фундаментальную систему решений).

Решение ЛОДУ 2-го порядка с постоянными коэффициентами

Рассмотрим ЛОДУ 2-го порядка

$$y'' + py' + qy = 0, \qquad (6)$$

где p, q – *действительные* числа.

Согласно теореме 2 общее решение ЛОДУ 2-го порядка (6) имеет вид

$$y_{\text{о. о.}} = C_1 y_1 + C_2 y_2,$$

т. е. необходимо найти два линейно независимых частных решения y_1, y_2 ЛОДУ (6).

Л. Эйлер предложил искать частные решения в виде $y = \mathrm{e}^{\lambda x}$, где λ – число. Чтобы определить, при каком значении λ эта функция будет решением ЛОДУ (6), подставим функцию в уравнение. Так как $y' = \lambda \mathrm{e}^{\lambda x}$, $y'' = \lambda^2 \mathrm{e}^{\lambda x}$, то получим

$$\lambda^2 \mathrm{e}^{\lambda x} + p\lambda \mathrm{e}^{\lambda x} + q \mathrm{e}^{\lambda x} = 0;$$

$$\mathrm{e}^{\lambda x}(\lambda^2 + p\lambda + q) = 0;$$

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0. \tag{7}$$

Уравнение (7) называется ***характеристическим уравнением*** ЛОДУ (6). Функция $y = \mathrm{e}^{\lambda x}$ является решением ЛОДУ (6) тогда и только тогда, когда λ – корень уравнения (7).

При решении характеристического уравнения (7) возможны три случая в зависимости от знака его дискриминанта: $D > 0, D = 0, D < 0$.

1. Случай $D > 0$. Тогда характеристическое уравнение (7) имеет два *различных действительных* корня: $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

Тогда функции $y_1 = \mathrm{e}^{\lambda_1 x}, y_2 = \mathrm{e}^{\lambda_2 x}$ являются частными решениями ЛОДУ (6). Покажем, что они линейно независимы:

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathrm{e}^{\lambda_1 x} & \mathrm{e}^{\lambda_2 x} \\ \lambda_1 \mathrm{e}^{\lambda_1 x} & \lambda_2 \mathrm{e}^{\lambda_2 x} \end{vmatrix} =$$

$$= \lambda_2 \mathrm{e}^{\lambda_1 x} \mathrm{e}^{\lambda_2 x} - \lambda_1 \mathrm{e}^{\lambda_1 x} \mathrm{e}^{\lambda_2 x} = \mathrm{e}^{\lambda_1 x} \mathrm{e}^{\lambda_2 x}(\lambda_2 - \lambda_1) \neq 0.$$

Следовательно, общее решение ЛОДУ 2-го порядка (6) в этом случае имеет вид

$$y_{\text{о. о.}} = C_1 \mathrm{e}^{\lambda_1 x} + C_2 \mathrm{e}^{\lambda_2 x}.$$

Пример 3. Найдем общее решение ЛОДУ $y'' + 4y' - 5y = 0$.

Решение. Составим характеристическое уравнение:

$$\lambda^2 + 4\lambda - 5 = 0$$

и найдем его корни: $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -5$ (действительные и различные). Тогда

$$y_1 = e^x,\ y_2 = e^{-5x},$$

а значит, $y_{\text{о. о.}} = C_1 e^x + C_2 e^{-5x}$ – общее решение рассматриваемого ЛОДУ. •

Пример 4. Найдем общее решение ЛОДУ $y'' + 4y' = 0$.

Решение. Составим характеристическое уравнение:

$$\lambda^2 + 4\lambda = 0; \qquad \lambda(\lambda + 4) = 0;$$

откуда $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -4$. Характеристическое уравнение ЛОДУ имеет два различных действительных корня, поэтому

$$y_1 = e^{0x} = 1,\ y_2 = e^{-4x}.$$

Следовательно, $y_{\text{о. о.}} = C_1 + C_2 e^{-4x}$ – общее решение ЛОДУ. •

2. Случай $D = 0$. Тогда характеристическое уравнение (7) имеет два *совпадающих действительных* корня: $\lambda_1 = \lambda_2 = -\dfrac{p}{2}$.

Тогда $y_1 = e^{\lambda_1 x}$ является частным решениями ЛОДУ (6).

Покажем, что функция $y_2 = x e^{\lambda_1 x}$ – тоже решение ЛОДУ (6). Подставляя производные

$$y_2' = e^{\lambda_1 x} + \lambda_1 x e^{\lambda_1 x};$$

$$y_2'' = \lambda_1 e^{\lambda_1 x} + \lambda_1 e^{\lambda_1 x} + \lambda_1^2 x e^{\lambda_1 x} = 2\lambda_1 e^{\lambda_1 x} + \lambda_1^2 x e^{\lambda_1 x}$$

в уравнение (6) и группируя слагаемые с $x e^{\lambda_1 x}$ и слагаемые с $e^{\lambda_1 x}$, имеем

$$y_2'' + py_2' + qy_2 = 2\lambda_1 e^{\lambda_1 x} + \lambda_1^2 x e^{\lambda_1 x} + p(e^{\lambda_1 x} + \lambda_1 x e^{\lambda_1 x}) + qx e^{\lambda_1 x} =$$

$$= x e^{\lambda_1 x}(\lambda_1^2 + p\lambda_1 + q) + e^{\lambda_1 x}(2\lambda_1 + p) = x e^{\lambda_1 x} \cdot 0 + e^{\lambda_1 x} \cdot 0 = 0.$$

Здесь первая скобка равна 0, так как λ_1 – корень характеристического уравнения (7), а вторая – поскольку этот корень равен $\lambda_1 = -\dfrac{p}{2}$.

Упражнение. Показать, что

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 x} & x e^{\lambda_1 x} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 x} & e^{\lambda_1 x} + \lambda_1 x e^{\lambda_1 x} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Следовательно, общее решение ЛОДУ 2-го порядка (6) в этом случае имеет вид

$$y_{\text{о. о.}} = C_1\, e^{\lambda_1 x} + C_2 x\, e^{\lambda_1 x}.$$

3. Случай $D < 0$. Тогда характеристическое уравнение (7) имеет два *комплексных* корня, они являются комплексно-сопряженными, т. е. $\lambda_{1;\,2} = \alpha \pm \beta i$ (здесь α и β – действительные числа, $\beta > 0$; i – мнимая единица: $i^2 = -1$).

В этом случае частными решениями ЛОДУ (6) являются функции $\tilde{y}_1 = e^{(\alpha+\beta i)x}$ и $\tilde{y}_2 = e^{(\alpha-\beta i)x}$. Используя формулу Эйлера $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$, получим

$$\tilde{y}_1 = e^{\alpha x + i\beta x} = e^{\alpha x}\, e^{i\beta x} = e^{\alpha x}\cos\beta x + i\, e^{\alpha x}\sin\beta x;$$

$$\tilde{y}_2 = e^{\alpha x - i\beta x} = e^{\alpha x}\, e^{-i\beta x} = e^{\alpha x}\cos\beta x - i\, e^{\alpha x}\sin\beta x.$$

Из утверждения 1 следует, что функции

$$y_1 = \frac{\tilde{y}_1 + \tilde{y}_2}{2} = e^{\alpha x}\cos\beta x;\; y_2 = \frac{\tilde{y}_1 - \tilde{y}_2}{2i} = e^{\alpha x}\sin\beta x$$

также являются частными решениями ЛОДУ (6). Можно показать, что они линейно независимы, а значит образуют фундаментальную систему решений ЛОДУ (6).

Поэтому общее решение ЛОДУ (6) в рассматриваемом случае можно записать в виде

$$y_{\text{о. о.}} = C_1\, e^{\alpha x}\cos\beta x + C_2\, e^{\alpha x}\sin\beta x.$$

Пример 5. Найдем общее решение ЛОДУ $y'' + 2y' + 5y = 0$.

Решение. Составим характеристическое уравнение:

$$\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0;$$

$$D = 2^2 - 4\cdot 1\cdot 5 = 4 - 20 = -16;$$

$$\lambda_{1;\,2} = \frac{-2 \pm 4i}{2} = -1 \pm 2i,$$

т. е. $\alpha = -1, \beta = 2$, поэтому

$$y_1 = e^{-x}\cos 2x,\; y_2 = e^{-x}\sin 2x,$$

Следовательно, $y_{\text{о. о.}} = C_1 \mathrm{e}^{-x} \cos 2x + C_2 \mathrm{e}^{-x} \sin 2x$ – общее решение ЛОДУ. •

Пример 6. Найдем общее решение ЛОДУ $y'' + 4y = 0$.

Решение. Составим характеристическое уравнение:

$$\lambda^2 + 4 = 0; \qquad \lambda^2 = -4; \qquad \lambda_{1;\,2} = \pm 2i.$$

Здесь $\alpha = 0, \beta = 2$, поэтому

$$y_1 = \mathrm{e}^{0x} \cos 2x = \cos 2x,\ y_2 = \mathrm{e}^{0x} \sin 2x = \sin 2x,$$

откуда $y_{\text{о. о.}} = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$ – общее решение ЛОДУ. •

Общее решение ЛОДУ 2-го порядка $y'' + py' + qy = 0$ с постоянными действительными коэффициентами		
Знак дискриминанта характеристического уравнения	Корни характеристического уравнения	Вид общего решения
$D > 0$	$\lambda_1 \neq \lambda_2$	$y_{\text{о. о.}} = C_1 \mathrm{e}^{\lambda_1 x} + C_2 \mathrm{e}^{\lambda_2 x}$
$D = 0$	$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$	$y_{\text{о. о.}} = C_1 \mathrm{e}^{\lambda x} + C_2 x \mathrm{e}^{\lambda x}$
$D < 0$	$\lambda_{1;\,2} = \alpha \pm \beta i$	$y_{\text{о. о.}} = C_1 \mathrm{e}^{\alpha x} \cos \beta x + C_2 \mathrm{e}^{\alpha x} \sin \beta x$

Интегрирование ЛОДУ *n*-го порядка с постоянными коэффициентами

Рассмотрим ЛОДУ *n*-го порядка

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = 0, \tag{8}$$

где $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$ – *действительные* числа.

Для решения этого ДУ составляется его характеристическое уравнение

$$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + a_2 \lambda^{n-2} + \ldots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0.$$

Так как это уравнение *n*-й степени, то оно имеет *n* корней с учетом их кратности, причем корни могут быть действительные и комплексные.

Фундаментальная система решений ЛОДУ (8) содержит n линейно независимых частных решений и составляется по следующему принципу:

– если λ – действительный корень кратности k, то ему соответствует k частных решений

$$y_1 = \mathrm{e}^{\lambda x};\ y_2 = x\,\mathrm{e}^{\lambda x};\ \ldots;\ y_k = x^{k-1}\,\mathrm{e}^{\lambda x};$$

– если $\alpha + \beta i$ – комплексный корень кратности k, то $\alpha - \beta i$ – тоже комплексный корень той же кратности k (поскольку мы рассматриваем уравнения с действительными коэффициентами), тогда имеем k пар частных решений

$$y_1 = \mathrm{e}^{\alpha x}\cos\beta x;\ y_2 = \mathrm{e}^{\alpha x}\sin\beta x;$$

$$y_3 = x\,\mathrm{e}^{\alpha x}\cos\beta x;\ y_4 = x\,\mathrm{e}^{\alpha x}\sin\beta x;$$

$$\ldots;$$

$$y_{2k-1} = x^{k-1}\,\mathrm{e}^{\alpha x}\cos\beta x;\ y_{2k} = x^{k-1}\,\mathrm{e}^{\alpha x}\sin\beta x.$$

Пример 7. Найдем общее решение ЛОДУ $y''' + 3y'' + 3y' + y = 0.$

Решение. Составим характеристическое уравнение:

$$\lambda^3 + 3\lambda^2 + 3\lambda + 1 = 0; \qquad (\lambda + 1)^3 = 0; \qquad \lambda_{1;\,2;\,3} = -1,$$

т. е. характеристическое уравнение имеет корень -1 кратности 3, поэтому

$$y_1 = \mathrm{e}^{-x},\ y_2 = x\,\mathrm{e}^{-x},\ y_3 = x^2\,\mathrm{e}^{-x},$$

откуда $y_{\text{о. о.}} = C_1\,\mathrm{e}^{-x} + C_2 x\,\mathrm{e}^{-x} + C_3 x^2\,\mathrm{e}^{-x}$ – общее решение ЛОДУ. •

Пример 8. Найдем общее решение ЛОДУ $y^{IV} - 8y' = 0.$

Решение. Составим характеристическое уравнение:

$$\lambda^4 - 8\lambda = 0; \qquad \lambda(\lambda^3 - 8) = 0; \qquad \lambda(\lambda - 2)(\lambda^2 + 2\lambda + 4) = 0,$$

откуда

$$\lambda = 0 \text{ или } \lambda - 2 = 0 \text{ или } \lambda^2 + 2\lambda + 4 = 0.$$

Поэтому $\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 2,$ и еще два корня находим, решая квадратное уравнение:

$$\lambda^2+2\lambda+4=0;$$

$$D=4-16=-12;$$

$$\lambda_{3;\,4}=\frac{-2\pm 2\sqrt{3}i}{2}=-1\pm\sqrt{3}i.$$

Соответствующие частные решения ЛОДУ

$$y_1=1;\ y_2=\mathrm{e}^{2x};\ y_3=\mathrm{e}^{-x}\cos\sqrt{3}x;\ y_4=\mathrm{e}^{-x}\sin\sqrt{3}x,$$

а общее решение

$$y_{\text{о. о.}}=C_1+C_2\,\mathrm{e}^{2x}+C_3\,\mathrm{e}^{-x}\cos\sqrt{3}x+C_4\,\mathrm{e}^{-x}\sin\sqrt{3}x.\ \bullet$$

§ 5. Интегрирование линейных неоднородных дифференциальных уравнений высших порядков

Рассмотрим ЛНДУ n-го порядка с непрерывными коэффициентами и непрерывной правой частью (свободным членом)

$$y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+a_2(x)y^{(n-2)}+\ldots+a_{n-1}(x)y'+a_n(x)y=f(x). \quad (1)$$

При решении этого уравнения рассматривают соответствующее ему ЛОДУ

$$y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+a_2(x)y^{(n-2)}+\ldots+a_{n-1}(x)y'+a_n(x)y=0, \quad (2)$$

т. е. ЛОДУ с такой же левой частью (имеющее такие же коэффициенты), что и ЛНДУ (1).

Т 1 (о структуре общего решения ЛНДУ). Общее решение ЛНДУ (1) с непрерывными коэффициентами равно сумме частного решения этого уравнения и общего решения соответствующего ему ЛОДУ (2):

$$\boxed{y_{\text{о. н.}}=y_{\text{ч. н.}}+y_{\text{о. о.}}.}$$

Упражнение 1. Доказать теорему для случая ЛНДУ 2-го порядка.

При нахождении частных решений ЛНДУ может быть полезна следующая теорема. Сформулируем ее для случая ЛНДУ 2-го порядка.

Т 2 (о наложении решений ЛНДУ). Если $y = y_1(x)$ – частное решение ЛНДУ с правой частью $f_1(x)$:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f_1(x);$$

функция $y = y_2(x)$ – частное решение ЛНДУ с правой частью $f_2(x)$:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f_2(x),$$

то функция $y = y_1(x) + y_2(x)$ является частным решением ЛНДУ с правой частью $f_1(x) + f_2(x)$:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f_1(x) + f_2(x).$$

Упражнение 2. Доказать.

Метод вариации произвольных постоянных

Этот метод был предложен Лагранжем и позволяет решать ЛНДУ *при условии, что известно общее решение соответствующего* ЛОДУ. Рассмотрим метод вариации произвольных постоянных на примере ЛНДУ 2-го порядка

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x). \tag{3}$$

Пусть известно общее решение соответствующего (3) ЛОДУ

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0. \tag{4}$$

Оно имеет вид

$$y_{\text{о. о.}} = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x),$$

где $y = y_1(x)$ и $y = y_2(x)$ – частные решения ЛОДУ (4), образующие фундаментальную систему решений этого уравнения.

По теореме 1 о структуре общего решения ЛНДУ,

$$y_{\text{о. н.}} = y_{\text{ч. н.}} + y_{\text{о. о.}},$$

т. е. для нахождения общего решения уравнения (3) нужно еще найти какое-нибудь его частное решение.

Метод вариации произвольных постоянных состоит в том, чтобы искать частное решение ЛНДУ (3) в виде

$$y_{\text{ч. н.}} = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x), \tag{5}$$

где $C_1(x), C_2(x)$ – некоторые вспомогательные функции, которые необходимо найти.

Чтобы определить функции $C_1(x), C_2(x)$, подставим $y_{\text{ч. н.}}$ (5) в уравнение (3), для чего найдем

$$y'_{\text{ч. н.}} = C'_1(x)y_1(x) + C_1(x)y'_1(x) + C'_2(x)y_2(x) + C_2(x)y'_2(x) = .$$
$$= \underbrace{C'_1(x)y_1(x) + C'_2(x)y_2(x)}_{\text{полагаем } = 0} + C_1(x)y'_1(x) + C_2(x)y'_2(x).$$

Поскольку вместо одной неизвестной функции $y_{\text{ч. н.}}$ мы ввели две неизвестные функции $C_1(x), C_2(x)$, то потребуем, чтобы эти функции удовлетворяли дополнительному условию

$$C'_1(x)y_1(x) + C'_2(x)y_2(x) = 0.$$

Тогда

$$y'_{\text{ч. н.}} = C_1(x)y'_1(x) + C_2(x)y'_2(x),$$

откуда

$$y''_{\text{ч. н.}} = C'_1(x)y'_1(x) + C_1(x)y''_1(x) + C'_2(x)y'_2(x) + C_2(x)y''_2(x).$$

Подставляя $y_{\text{ч. н.}}, y'_{\text{ч. н.}}, y''_{\text{ч. н.}}$ в уравнение (3) и вынося функции $C_1(x), C_2(x)$ за скобки, получаем

$$y''_{\text{ч. н.}} + p(x)y'_{\text{ч. н.}} + q(x)y_{\text{ч. н.}} =$$
$$= C'_1(x)y'_1(x) + C_1(x)y''_1(x) + C'_2(x)y'_2(x) + C_2(x)y''_2(x) +$$
$$+ p(x)(C_1(x)y'_1(x) + C_2(x)y'_2(x)) + q(x)(C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x)) =$$
$$= C_1(x)(y''_1(x) + p(x)y'_1(x) + q(x)y_1(x)) +$$
$$+ C_2(x)(y''_2(x) + p(x)y'_2(x) + q(x)y_2(x)) + C'_1(x)y'_1(x) + C'_2(x)y'_2(x) =$$
$$= C_1(x)\cdot 0 + C_2(x)\cdot 0 + C'_1(x)y'_1(x) + C'_2(x)y'_2(x) = f(x).$$

Здесь выражения в скобках при $C_1(x), C_2(x)$ равны 0, так как функции $y = y_1(x)$ и $y = y_2(x)$ являются решениями ЛОДУ (4), т. е. удовлетворяют этому уравнению.

Следовательно, функция (5) является частным решением уравнения (3) тогда и только тогда, когда функции $C_1(x), C_2(x)$ удовлетворяют системе

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x) = 0, \\ C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x) = f(x). \end{cases} \tag{6}$$

Имеем систему двух уравнений с двумя неизвестными $C_1'(x), C_2'(x).$ Ее определитель

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} \neq 0,$$

так как это определитель Вронского для фундаментальной системы решений ЛОДУ (4). Поэтому система имеет единственное решение. Определяя из системы $C_1'(x), C_2'(x)$ и интегрируя, подставляем функции

$$C_1(x) = \int C_1'(x)dx, \; C_2(x) = \int C_2'(x)dx$$

в (5) и получаем частное решение ЛНДУ.

Пример 1. Найдем общее решение ЛНДУ $y'' + 9y = \dfrac{1}{\sin 3x}.$

Решение. Общее решение ЛНДУ равно $y_{\text{о. н.}} = y_{\text{ч. н.}} + y_{\text{о. о.}}.$

Найдем общее решение $y_{\text{о. о.}}$ соответствующего ЛОДУ

$$y'' + 9y = 0.$$

Поскольку это ЛОДУ с постоянными коэффициентами, оно решается с помощью характеристического уравнения

$$\lambda^2 + 9 = 0,$$

которое имеет комплексные корни $\lambda_{1;\,2} = \pm 3i.$ Тогда фундаментальную систему решений ЛОДУ составляют функции

$$y_1 = \cos 3x, \; y_2 = \sin 3x,$$

а общее решение имеет вид

$$y_{\text{о. о.}} = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x.$$

Частное решение ЛНДУ $y_{\text{ч. н.}}$ будем искать в виде

$$y_{\text{ч. н.}} = C_1(x)\cos 3x + C_2(x)\sin 3x,$$

где функции $C_1(x), C_2(x)$ удовлетворяют системе (6), т. е., в данном случае,

$$\begin{cases} C_1'(x)\cos 3x + C_2'(x)\sin 3x = 0, \\ -3C_1'(x)\sin 3x + 3C_2'(x)\cos 3x = \dfrac{1}{\sin 3x}. \end{cases}$$

Решим систему методом Крамера:

$$C_1'(x) = \frac{\Delta_1}{\Delta}, C_2'(x) = \frac{\Delta_2}{\Delta},$$

где определитель системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} \cos 3x & \sin 3x \\ -3\sin 3x & 3\cos 3x \end{vmatrix} = 3\cos^2 3x + 3\sin^2 3x = 3;$$

вспомогательные определители Δ_1, Δ_2 получаются из определителя Δ заменой соответствующего столбца столбцом свободных членов:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & \sin 3x \\ \dfrac{1}{\sin 3x} & 3\cos 3x \end{vmatrix} = 0 - \frac{\sin 3x}{\sin 3x} = -1;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} \cos 3x & 0 \\ -3\sin 3x & \dfrac{1}{\sin 3x} \end{vmatrix} = \frac{\cos 3x}{\sin 3x}.$$

Тогда $C_1'(x) = \dfrac{\Delta_1}{\Delta} = -\dfrac{1}{3}, C_2'(x) = \dfrac{\Delta_2}{\Delta} = \dfrac{\cos 3x}{3\sin 3x}$. Отсюда

$$C_1(x) = -\frac{1}{3}\int dx = -\frac{1}{3}x;$$

$$C_2(x) = \frac{1}{3}\int \frac{\cos 3x}{\sin 3x}dx = \frac{1}{9}\int \frac{d(\sin 3x)}{\sin 3x} = \frac{1}{9}\ln|\sin 3x|$$

(здесь при интегрировании произвольные постоянные не добавляем, так как находим одно частное решение ЛНДУ).

Подставляем найденные функции $C_1(x), C_2(x)$ в $y_{\text{ч. н.}}$, получаем общее решение

$$y_{\text{о. н.}} = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x - \frac{1}{3} x \cos 3x + \frac{1}{9} \sin 3x \ln |\sin 3x|. \bullet$$

Интегрирование ЛНДУ с постоянными коэффициентами и специальной правой частью

Рассмотрим ЛНДУ n-го порядка

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x), \quad (7)$$

где $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$ – действительные числа, а правая часть имеет ***специальный вид***, а именно,

$$\boxed{f(x) = \mathrm{e}^{\alpha x}(P_n(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x),} \quad (8)$$

где α, β – действительные числа, $P_n(x), Q_m(x)$ – многочлены степеней n и m соответственно.

Для ЛНДУ *с постоянными коэффициентами и специальной правой частью* существует более простой метод нахождения $y_{\text{ч. н.}}$, который не требует интегрирования, – ***метод неопределенных коэффициентов***.

Суть метода неопределенных коэффициентов в том, что по виду специальной правой части (8) записывают ожидаемую форму частного решения $y_{\text{ч. н.}}$ с неопределенными коэффициентами, а затем находят значения коэффициентов, подставляя $y_{\text{ч. н.}}$ в ЛНДУ (7).

Частное решение ЛНДУ (7) со специальной правой частью (8) ищут в виде

$$\boxed{y_{\text{ч. н.}} = x^r \, \mathrm{e}^{\alpha x}(\tilde{P}_s(x)\cos\beta x + \tilde{Q}_s(x)\sin\beta x),} \quad (9)$$

где r – кратность числа $\alpha + \beta i$ как корня характеристического уравнения данного ЛНДУ (т. е. сколько корней характеристического уравнения равны числу $\alpha + \beta i$; будем называть число $\boxed{\alpha + \beta i}$ ***контрольной постоянной***); $s = \max\{n; m\}$; $\tilde{P}_s(x), \tilde{Q}_s(x)$ – многочлены степени s с неопределенными (пока неизвестными) коэффициентами. Коэффициенты находят, подставляя функцию (9) в ЛНДУ (7) и приравнивая коэффициенты *при одинаковых функциях*.

Замечание. Удобно пользоваться следующей таблицей многочленов с неопределенными коэффициентами:

s	$\tilde{P}_s(x), \tilde{Q}_s(x)$
0	A
1	$Ax+B$
2	Ax^2+Bx+C
3	Ax^3+Bx^2+Cx+D

Пример 2. Найдем общее решение ЛНДУ $y''-4y'=24x^2$.

Решение. Общее решение ЛНДУ равно $y_{\text{о. н.}} = y_{\text{ч. н.}} + y_{\text{о. о.}}$.

Найдем общее решение $y_{\text{о. о.}}$ соответствующего ЛОДУ

$$y''-4y'=0,$$

решив характеристическое уравнение:

$$\lambda^2-4\lambda=0; \qquad \lambda(\lambda-4)=0;$$

откуда $\lambda_1=0, \lambda_2=4$. Следовательно, $y_{\text{о. о.}}=C_1+C_2\,\mathrm{e}^{4x}$.

Чтобы найти частное решение ЛНДУ $y_{\text{ч. н.}}$, рассмотрим правую часть этого уравнения и покажем, что она является функцией специального вида:

$$f(x)=24x^2=\mathrm{e}^{0x}(24x^2\cos 0x+0\cdot\sin 0x).$$

Запишем вид частного решения, определив по виду правой части следующие параметры:

$$\alpha=0; \beta=0;$$

$$\alpha+\beta i=0+0i=0;$$

$$r=1; s=2.$$

Контрольная постоянная $\alpha+\beta i=0$ совпадает с одним корнем $\lambda_1=0$ характеристического уравнения, поэтому $r=1$. Многочлен в правой части ЛНДУ $P_n(x)=24x^2$ имеет степень 2, поэтому $s=2$ и многочлен степени 2 с неопределенными коэффициентами будет иметь вид $\tilde{P}_s(x) = Ax^2 + Bx + C$. Таким образом, частное решение примет вид

$$y_{\text{ч. н.}} = x^1 \mathrm{e}^{0x} (\tilde{P}_s(x) \cos 0x + \tilde{Q}_s(x) \sin 0x),$$

или

$$y_{\text{ч. н.}} = x(Ax^2 + Bx + C) = Ax^3 + Bx^2 + Cx,$$

где A, B, C – неопределенные коэффициенты, для нахождения значений которых подставим $y_{\text{ч. н.}}$ и ее производные

$$y'_{\text{ч. н.}} = 3Ax^2 + 2Bx + C; \qquad y''_{\text{ч. н.}} = 6Ax + 2B$$

в ЛНДУ:

$$6Ax + 2B - 4(3Ax^2 + 2Bx + C) = 24x^2;$$

$$6Ax + 2B - 12Ax^2 - 8Bx - 4C = 24x^2;$$

$$-12Ax^2 + x(6A - 8B) + 2B - 4C = 24x^2.$$

Приравниваем коэффициенты при одинаковых функциях в левой и правой частях уравнения, получим

$$\begin{array}{r|l} x^2: & \\ x: & \\ x^0: & \end{array}\left\{\begin{array}{l} -12A = 24, \\ 6A - 8B = 0, \\ 2B - 4C = 0; \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} A = -2, \\ B = \dfrac{3A}{4} = -\dfrac{3}{2}, \\ C = \dfrac{B}{2} = -\dfrac{3}{4}. \end{array}\right.$$

Таким образом, $y_{\text{ч. н.}} = -2x^3 - \dfrac{3}{2}x^2 - \dfrac{1}{4}x$, а общее решение ЛНДУ имеет вид $y_{\text{о. н.}} = C_1 + C_2 \mathrm{e}^{4x} - 2x^3 - \dfrac{3}{2}x^2 - \dfrac{1}{4}x$.•

Пример 3. Найдем общее решение ЛНДУ $y'' + y = \mathrm{e}^x$.

Решение. Общее решение ЛНДУ равно $y_{\text{о. н.}} = y_{\text{ч. н.}} + y_{\text{о. о.}}$.

Найдем общее решение $y_{\text{о. о.}}$ соответствующего ЛОДУ

$$y'' + y = 0;$$

$$\lambda^2 + 1 = 0;$$

$$\lambda_{1;\,2} = \pm i;$$

$$y_{\text{о. о.}} = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

Чтобы найти частное решение ЛНДУ $y_{\text{ч. н.}}$, рассмотрим правую часть этого уравнения и убедимся, что она является функцией специального вида:

$$f(x) = \mathrm{e}^x = \mathrm{e}^x (1 \cdot \cos 0x + 0 \cdot \sin 0x).$$

Запишем вид частного решения, определив по виду правой части:

$$\alpha = 1; \beta = 0;$$

$$\alpha + \beta i = 1 + 0i = 1;$$

$$r = 0; s = 0.$$

Здесь контрольная постоянная $\alpha + \beta i = 1$ не совпадает ни с одним корнем характеристического уравнения, поэтому $r = 0$. Коэффициент при e^x в правой части ЛНДУ равен $P_n(x) = 1$, т. е. это многочлен степени 0, поэтому $s = 0$ и многочлен степени 0 с неопределенными коэффициентами будет иметь вид $\tilde{P}_s(x) = A$. Таким образом, частное решение ищем в виде

$$y_{\text{ч. н.}} = x^0 \mathrm{e}^x (\tilde{P}_s(x) \cos 0x + \tilde{Q}_s(x) \sin 0x),$$

или

$$y_{\text{ч. н.}} = A\mathrm{e}^x,$$

где константу A определим, подставив $y_{\text{ч. н.}}$ и ее производные

$$y'_{\text{ч. н.}} = A\mathrm{e}^x; \qquad y''_{\text{ч. н.}} = A\mathrm{e}^x$$

в ЛНДУ:

$$A\mathrm{e}^x + A\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^x; \qquad 2A\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^x; \qquad A = \frac{1}{2}.$$

Следовательно, $y_{\text{ч. н.}} = \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^x$, а общее решение ЛНДУ имеет вид $y_{\text{о. н.}} = C_1\cos x + C_2\sin x + \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^x$. •

Пример 4. Найдем общее решение ЛНДУ $y'' - 4y' + 13y = 40\cos 3x$.

Решение. Общее решение ЛНДУ равно $y_{\text{о. н.}} = y_{\text{ч. н.}} + y_{\text{о. о.}}$.

Найдем общее решение $y_{\text{о. о.}}$ соответствующего ЛОДУ

$$y'' - 4y' + 13y = 0;$$

$$\lambda^2 - 4\lambda + 13 = 0;$$

$$D = 4^2 - 4\cdot 1\cdot 13 = 16 - 52 = -36;$$

$$\lambda_{1;\,2} = \frac{4 \pm 6i}{2} = 2 \pm 3i,$$

откуда $y_{\text{о. о.}} = C_1\,\mathrm{e}^{2x}\cos 3x + C_2\,\mathrm{e}^{2x}\sin 3x$.

Чтобы найти частное решение ЛНДУ $y_{\text{ч. н.}}$, по правой части специального вида

$$f(x) = 40\cos 3x = \mathrm{e}^{0x}(40\cos 3x + 0\cdot\sin 3x)$$

определим параметры

$$\alpha = 0;\ \beta = 3;$$

$$\alpha + \beta i = 3i;$$

$$r = 0;\ s = 0.$$

Здесь контрольная постоянная $\alpha + \beta i = 3i$ не совпадает ни с одним корнем характеристического уравнения, поэтому $r = 0$. При $\cos 3x$ стоит число 40, т. е. многочлен нулевой степени, поэтому $s = 0$ и в частном решении будут присутствовать многочлены нулевой степени $\tilde{P}_s(x) = A, \tilde{Q}_s(x) = B$. Запишем вид частного решения:

$$y_{\text{ч. н.}} = x^0\,\mathrm{e}^{0x}(\tilde{P}_s(x)\cos 3x + \tilde{Q}_s(x)\sin 3x),$$

или

$$y_{\text{ч. н.}} = A\cos 3x + B\sin 3x.$$

Подставляя $y_{\text{ч. н.}}$ и ее производные

$$y'_{\text{ч. н.}} = -3A\sin 3x + 3B\cos 3x;$$

$$y''_{\text{ч. н.}} = -9A\cos 3x - 9B\sin 3x$$

в ЛНДУ, имеем

$$-9A\cos 3x - 9B\sin 3x + 12A\sin 3x - 12B\cos 3x +$$
$$+13A\cos 3x + 13B\sin 3x = 40\cos 3x;$$

$$4A\cos 3x + 4B\sin 3x + 12A\sin 3x - 12B\cos 3x = 40\cos 3x.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых функциях в левой и правой частях уравнения, получим

$$\begin{array}{r|l} \cos 3x: & \multirow{2}{*}{$\begin{cases} 4A - 12B = 40, \\ 4B + 12A = 0; \end{cases}$} \\ \sin 3x: & \end{array}$$

$$\begin{cases} A - 3B = 10, \\ B = -3A; \end{cases} \qquad \begin{cases} A + 9A = 10, \\ B = -3A; \end{cases} \qquad \begin{cases} A = 1, \\ B = -3. \end{cases}$$

Таким образом, $y_{\text{ч. н.}} = \cos 3x - 3\sin 3x$, а общее решение ЛНДУ имеет вид $y_{\text{о. н.}} = C_1\,\mathrm{e}^{2x}\cos 3x + C_2\,\mathrm{e}^{2x}\sin 3x + \cos 3x - 3\sin 3x.$ •

Пример 5. Найдем общее решение ЛНДУ $y'' - 2y' + y = 2\,\mathrm{e}^{x} + 3\cos x.$

Решение. Общее решение ЛНДУ равно $y_{\text{о. н.}} = y_{\text{ч. н.}} + y_{\text{о. о.}}$.

Найдем общее решение $y_{\text{о. о.}}$ соответствующего ЛОДУ

$$y'' - 2y' + y = 0;$$

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0;$$

$$\lambda_{1;\,2} = 1;$$

$$y_{\text{о. о.}} = C_1\,\mathrm{e}^{x} + C_2 x\,\mathrm{e}^{x}.$$

Правая часть этого ЛНДУ не является правой частью специального вида, но может быть представлена в виде суммы двух функций специального вида: $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$, где

$$f_1(x) = 2\,\mathrm{e}^{x},\ f_2(x) = 3\cos x.$$

Тогда, в силу теоремы 2 о наложении решений ЛНДУ, частное решение ЛНДУ

$$y_{\text{ч. н.}} = y_{\text{ч. н.1}} + y_{\text{ч. н.2}},$$

где $y_{\text{ч. н.1}}$ и $y_{\text{ч. н.2}}$ – частные решения ЛНДУ с правой частью $f_1(x)$ и $f_2(x)$ соответственно.

Найдем $y_{\text{ч. н.1}}$. Для этого по виду функции $f_1(x) = 2\,\mathrm{e}^x$ определим параметры

$$\alpha = 1; \beta = 0;$$

$$\alpha + \beta i = 1 + 0i = 1;$$

$$r = 2; s = 0.$$

Следовательно, $y_{\text{ч. н.1}} = Ax^2\,\mathrm{e}^x$. Подставляя $y_{\text{ч. н.1}}$ и ее производные

$$y'_{\text{ч. н.1}} = 2Ax\,\mathrm{e}^x + Ax^2\,\mathrm{e}^x; \quad y''_{\text{ч. н.1}} = 2A\,\mathrm{e}^x + 2Ax\,\mathrm{e}^x + 2Ax\,\mathrm{e}^x + Ax^2\,\mathrm{e}^x$$

в ЛНДУ с правой частью $f_1(x)$, т. е. в уравнение

$$y'' - 2y' + y = 2\,\mathrm{e}^x,$$

получим

$$2A\mathrm{e}^x + 4Ax\,\mathrm{e}^x + Ax^2\,\mathrm{e}^x - 2(2Ax\,\mathrm{e}^x + Ax^2\,\mathrm{e}^x) + Ax^2\,\mathrm{e}^x = 2\,\mathrm{e}^x;$$

$$2A\mathrm{e}^x + 4Ax\,\mathrm{e}^x + Ax^2\,\mathrm{e}^x - 4Ax\,\mathrm{e}^x - 2Ax^2\,\mathrm{e}^x + Ax^2\,\mathrm{e}^x = 2\,\mathrm{e}^x;$$

$$2A\mathrm{e}^x = 2\,\mathrm{e}^x,$$

откуда $A = 1$, поэтому $y_{\text{ч. н.1}} = x^2\,\mathrm{e}^x$.

Найдем $y_{\text{ч. н.2}}$ как частное решение ЛНДУ

$$y'' - 2y' + y = 3\cos x.$$

Для функции $f_2(x) = 3\cos x$ получаем

$$\alpha = 0; \beta = 1;$$

$$\alpha + \beta i = i;$$

$$r = 0; s = 0,$$

поэтому $y_{\text{ч. н.2}} = B\cos x + C\sin x.$ Подставляя $y_{\text{ч. н.2}}$ и ее производные

$$y'_{\text{ч. н.2}} = -B\sin x + C\cos x;$$

$$y''_{\text{ч. н.2}} = -B\cos x - C\sin x$$

в ЛНДУ с правой частью $f_2(x),$ получим

$$-B\cos x - C\sin x - 2(-B\sin x + C\cos x) + B\cos x + C\sin x = 3\cos x;$$

$$2B\sin x - 2C\cos x = 3\cos x.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых функциях в левой и правой частях уравнения, получим

$$\begin{array}{r|l} \cos x: & \begin{cases} -2C = 3, \\ 2B = 0; \end{cases} \\ \sin x: & \end{array} \qquad \begin{cases} B = 0, \\ C = -\dfrac{3}{2}. \end{cases}$$

Таким образом, $y_{\text{ч. н.2}} = -\dfrac{3}{2}\sin x,$ частное решение исходного уравнения $y_{\text{ч. н.}} = y_{\text{ч. н.1}} + y_{\text{ч. н.2}} = x^2\,\mathrm{e}^x - \dfrac{3}{2}\sin x,$ а общее решение ЛНДУ имеет вид $y_{\text{о. н.}} = C_1\,\mathrm{e}^x + C_2 x\,\mathrm{e}^x + x^2\,\mathrm{e}^x - \dfrac{3}{2}\sin x.$ •

Замечание. Укажем некоторые частные случаи (8):

– если $f(x) = P_n(x),$ то $y_{\text{ч. н.}} = x^r\tilde{P}_n(x),$ где r – кратность числа 0 как корня характеристического уравнения данного ЛНДУ; $\tilde{P}_n(x)$ – многочлен степени n с неопределенными коэффициентами;

– если $f(x) = P_n(x)\mathrm{e}^{\alpha x},$ то $y_{\text{ч. н.}} = x^r\tilde{P}_n(x)\mathrm{e}^{\alpha x},$ где r – кратность числа α как корня характеристического уравнения данного ЛНДУ; $\tilde{P}_n(x)$ – многочлен степени n с неопределенными коэффициентами;

– если $f(x) = M\cos\beta x + N\sin\beta x,$ то частное решение имеет вид $y_{\text{ч. н.}} = x^r(A\cos\beta x + B\sin\beta x),$ где r – кратность числа βi как корня характеристического уравнения данного ЛНДУ; A, B – неопределенные коэффициенты;

– если $f(x)=\mathrm{e}^{\alpha x}(M\cos\beta x+N\sin\beta x)$, то частное решение имеет вид $y_{\text{ч. н.}}=x^r\,\mathrm{e}^{\alpha x}(A\cos\beta x+B\sin\beta x)$, где r – кратность числа $\alpha+\beta i$ как корня характеристического уравнения данного ЛНДУ; A, B – неопределенные коэффициенты.

§ 6. Системы дифференциальных уравнений

Опр. 1. Система ДУ 1-го порядка, разрешенных относительно производных, т. е. система вида

$$\begin{cases} y_1'(x)=f_1(x, y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)), \\ y_2'(x)=f_2(x, y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)), \\ ..., \\ y_n'(x)=f_n(x, y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)), \end{cases} \tag{1}$$

называется ***нормальной системой ДУ***. (При этом предполагается, что количество уравнений равно числу неизвестных функций.)

Опр. 2. ***Решением*** системы ДУ (1) называется совокупность n функций $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)$, при подстановке которых в систему каждое уравнение системы обращается в верное равенство.

Задача Коши для системы (1) включает n начальных условий

$$\begin{cases} y_1(x_0)=y_{10}, \\ y_2(x_0)=y_{20}, \\ ..., \\ y_n(x_0)=y_{n0}. \end{cases}$$

Общее решение системы (1) содержит n произвольных постоянных:

$$\begin{cases} y_1(x)=y_1(x; C_1; C_2; ...; C_n), \\ y_2(x)=y_2(x; C_1; C_2; ...; C_n), \\ ..., \\ y_n(x)=y_n(x; C_1; C_2; ...; C_n). \end{cases}$$

Важность изучения нормальных систем ДУ обусловлена тем, что во многих случаях произвольно заданная система ДУ может быть сведена к нормальной системе.

Пример 1. Система ДУ

$$\begin{cases} y_1'' + xy_2 = 0, \\ y_2' + 2y_1' - y_2 = 0 \end{cases}$$

может быть сведена к нормальной с помощью замены $y_3 = y_1'$. Тогда $y_1'' = y_3'$ и

$$\begin{cases} y_1' = y_3, \\ y_2' = -2y_3 + y_2, \bullet \\ y_3' = -xy_2. \end{cases}$$

Основным методом решения нормальных систем ДУ является ***метод сведения системы к одному ДУ***, порядок которого равен числу неизвестных функций в нормальной системе. Для этого из одного уравнения выражается одна неизвестная функция и подставляется во все другие уравнения. В результате получаем новую систему из $n-1$ уравнений с $n-1$ неизвестными функциями, затем исключается следующая неизвестная функция и т. д.

Пример 2. Найдем частное решение системы ДУ

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x - y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 2y - x - 4t\,\mathrm{e}^t; \end{cases} \qquad \begin{aligned} x(0) &= 1, \\ y(0) &= -1. \end{aligned}$$

Решение. Сведем систему к одному ДУ, выразив из первого уравнения функцию y через x и ее производную:

$$y = 2x - x'.$$

Дифференцируем это равенство по независимой переменной t (здесь штрих означает производную по t):

$$y' = 2x' - x''$$

и подставляем во второе уравнение системы:

$$2x' - x'' = 2(2x - x') - x - 4t\,\mathrm{e}^t;$$

$$2x' - x'' = 4x - 2x' - x - 4t\,\mathrm{e}^t;$$

$$x'' - 4x' + 3x = 4t\,\mathrm{e}^t.$$

Получили ЛНДУ 2-го порядка с постоянными коэффициентами относительно неизвестной функции $x = x(t)$. Общее решение ЛНДУ равно $x_{\text{о. н.}} = x_{\text{ч. н.}} + x_{\text{о. о.}}$.

Найдем общее решение $x_{\text{о. о.}}$ соответствующего ЛОДУ

$$x'' - 4x' + 3x = 0;$$

$$\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0;$$

$$\lambda_1 = 1;\ \lambda_2 = 3;$$

$$x_{\text{о. о.}} = C_1\,\mathrm{e}^t + C_2\,\mathrm{e}^{3t}.$$

Найдем $x_{\text{ч. н.}}$ методом неопределенных коэффициентов, поскольку ЛНДУ имеет постоянные коэффициенты и правую часть специального вида: $f(t) = 4t\,\mathrm{e}^t$. По виду правой части определяем

$$\alpha = 1;\ \beta = 0;$$

$$\alpha + \beta i = 1 + 0i = 1;$$

$$r = 1;\ s = 1,$$

откуда получаем частное решение с неопределенными коэффициентами: $x_{\text{ч. н.}} = t(At + B)\,\mathrm{e}^t$, или $x_{\text{ч. н.}} = (At^2 + Bt)\,\mathrm{e}^t$. Подставляя $x_{\text{ч. н.}}$ и ее производные

$$x'_{\text{ч. н.}} = (2At + B)\,\mathrm{e}^t + (At^2 + Bt)\,\mathrm{e}^t;$$

$$x''_{\text{ч. н.}} = 2A\,\mathrm{e}^t + (2At + B)\,\mathrm{e}^t + (2At + B)\,\mathrm{e}^t + (At^2 + Bt)\,\mathrm{e}^t =$$

$$= 2A\,\mathrm{e}^t + 2(2At + B)\,\mathrm{e}^t + (At^2 + Bt)\,\mathrm{e}^t$$

в ЛНДУ, получим

$$2A\,\mathrm{e}^t + 2(2At + B)\,\mathrm{e}^t + (At^2 + Bt)\,\mathrm{e}^t -$$

$$-4((2At + B)\,\mathrm{e}^t + (At^2 + Bt)\,\mathrm{e}^t) + 3(At^2 + Bt)\,\mathrm{e}^t = 4t\,\mathrm{e}^t;$$

$$2A\,e^t + 2(2At+B)\,e^t + (At^2+Bt)\,e^t -$$
$$-4(2At+B)\,e^t - 4(At^2+Bt)\,e^t + 3(At^2+Bt)\,e^t = 4t\,e^t;$$
$$2A\,e^t - 2(2At+B)\,e^t = 4t\,e^t;$$
$$4At\,e^t + (2A-2B)\,e^t = 4t\,e^t.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых функциях, получаем систему для определения неизвестных коэффициентов:

$$\begin{array}{r|l} t\,e^t: & \begin{cases} -4A = 4, \\ 2A - 2B = 0; \end{cases} \\ e^t: & \end{array} \qquad \begin{cases} A = -1, \\ B = -1. \end{cases}$$

Таким образом, $x_{\text{ч. н.}} = -(t^2+t)\,e^t$, а общее решение ЛНДУ имеет вид $x_{\text{о. н.}} = C_1\,e^t + C_2\,e^{3t} - (t^2+t)\,e^t$.

Найдем производную

$$x'_{\text{о. н.}} = C_1\,e^t + 3C_2\,e^{3t} - (2t+1)\,e^t - (t^2+t)\,e^t,$$

а затем, используя формулу $y = 2x - x'$, определим вторую неизвестную функцию

$$y_{\text{о. н.}} = 2(C_1\,e^t + C_2\,e^{3t} - (t^2+t)\,e^t) - (C_1\,e^t + 3C_2\,e^{3t} - (2t+1)\,e^t - (t^2+t)\,e^t);$$
$$y_{\text{о. н.}} = 2C_1\,e^t + 2C_2\,e^{3t} - 2(t^2+t)\,e^t - C_1\,e^t - 3C_2\,e^{3t} + (2t+1)\,e^t + (t^2+t)\,e^t;$$
$$y_{\text{о. н.}} = C_1\,e^t - C_2\,e^{3t} + (2t+1)\,e^t - (t^2+t)\,e^t;$$
$$y_{\text{о. н.}} = C_1\,e^t - C_2\,e^{3t} + (t+1-t^2)\,e^t.$$

Следовательно, получили общее решение системы ДУ:

$$\begin{cases} x_{\text{о. н.}} = C_1\,e^t + C_2\,e^{3t} - (t^2+t)\,e^t, \\ y_{\text{о. н.}} = C_1\,e^t - C_2\,e^{3t} + (t+1-t^2)\,e^t. \end{cases}$$

Найдем частное решение, используя заданные начальные условия:

$$\begin{cases} x(0)=1, \\ y(0)=-1; \end{cases} \qquad \begin{cases} x(0)=C_1+C_2-0=1, \\ y(0)=C_1-C_2+1=-1; \end{cases} \qquad \begin{cases} C_1=-\dfrac{1}{2}, \\ C_2=\dfrac{3}{2}. \end{cases}$$

Итак, искомое частное решение системы ДУ:

$$\begin{cases} x=-\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^t+\dfrac{3}{2}\mathrm{e}^{3t}-(t^2+t)\,\mathrm{e}^t, \\ y=-\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^t-\dfrac{3}{2}\mathrm{e}^{3t}+(t+1-t^2)\,\mathrm{e}^t, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} x=\dfrac{3}{2}\mathrm{e}^{3t}-\left(t^2+t+\dfrac{1}{2}\right)\mathrm{e}^t, \\ y=-\dfrac{3}{2}\mathrm{e}^{3t}+\left(t+\dfrac{1}{2}-t^2\right)\mathrm{e}^t. \end{cases} \bullet$$

§ 7. Приближенные методы решения дифференциальных уравнений

Рассмотрим простейшие методы нахождения приближенного решения ДУ на примере поиска решения задачи Коши для ДУ 1-го порядка:

$$\begin{cases} y'=f(x;y), \\ y(x_0)=y_0. \end{cases} \tag{1}$$

Метод Эйлера

Метод Эйлера был предложен в 1768 г. и является исторически первым методом приближенного решения ДУ.

Пусть требуется определить значения решения $y=y(x)$ задачи Коши (1) на отрезке $[x_0;b]$ с шагом $h=\dfrac{b-x_0}{n}$, т. е. в точках $x_i=x_0+ih, 1\le i\le n,$ разбивающих отрезок равномерно на n частей.

Идея метода Эйлера заключается в том, чтобы для нахождения значения $y(x_1)$ заменить график функции $y = y(x)$ касательной к нему в точке x_0 (см. рис. 5). Тогда значение $y(x_1)$ заменится приближенно на значение

$$y(x_1) \approx y_1 = y(x_0) + y'(x_0)(x_1 - x_0).$$

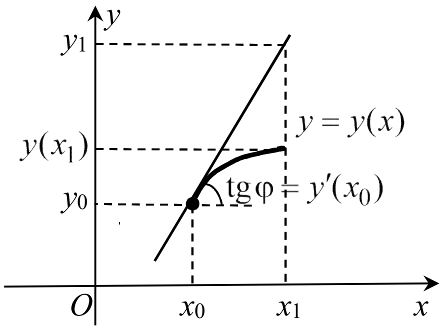


Рис. 5. Приближение графика функции касательной

Обозначим $y_0 = y(x_0)$, из ДУ получим $y'(x_0) = f(x_0; y_0)$. Тогда

$$y_1 = y_0 + hf(x_0; y_0).$$

Погрешность приближения $|y_1 - y(x_1)| \le Mh^2$, где константа $M = M(f; x_0; y_0)$ зависит от функции f и начальных условий.

По найденному значению y_1 аналогично определяется y_2 (приближенное значение для $y(x_2)$), и далее $y_3; y_4; ...; y_n$ по следующей расчетной формуле ***метода Эйлера***:

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i; y_i).$$

Недостатком метода Эйлера является его невысокая точность; погрешность приближения

$$\max_{1 \le i \le n} |y_i - y(x_i)| \le Mh,$$

где константа $M = M(f; b - x_0; x_0; y_0)$ зависит от функции f и начальных условий.

Для уточнения метода Эйлера рассмотрим задачу решения ДУ на отрезке $[x_i; x_{i+1}]$ с другой точки зрения. Преобразуем ДУ:

$$y' = f(x;y); \qquad \frac{dy}{dx} = f(x;y); \qquad dy = f(x;y)dx;$$

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} dy = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x; y(x))dx;$$

$$y(x_{i+1}) - y(x_i) = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x; y(x))dx. \qquad (2)$$

Несложно видеть, что метод Эйлера получается при вычислении интеграла в правой части (2) по формуле левых прямоугольников (см. рис. 6). Более точные методы можно получить, применяя более эффективные методы приближенного вычисления определенного интеграла.

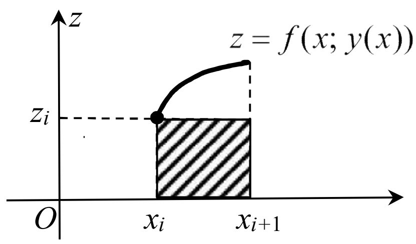


Рис. 6. Приближение интеграла (2) по методу левых прямоугольников

Модифицированный метод Эйлера

Модифицированный метод Эйлера получается при вычислении интеграла (2) по формуле средних прямоугольников (см. рис. 7). Расчетные формулы этого метода имеют вид

$$x_{i+\frac{1}{2}} = x_0 + \left(i + \frac{1}{2}\right)h;$$

$$y_{i+\frac{1}{2}} = y_i + \frac{h}{2} f(x_i; y_i);$$

$$y_{i+1} = y_i + hf\left(x_{i+\frac{1}{2}}; y_{i+\frac{1}{2}}\right).$$

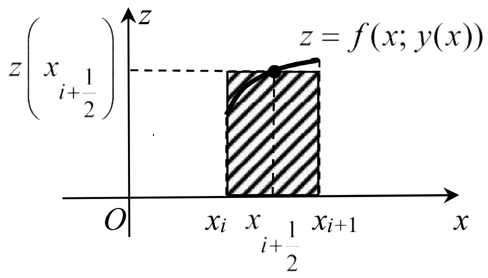


Рис. 7. Приближение интеграла (2) по методу средних прямоугольников

Метод Эйлера с пересчетом

При вычислении интеграла (2) по формуле трапеций (рис. 8) получается ***метод Эйлера с пересчетом***:

$$y_{i+1} = y_i + h\frac{f(x_i; y_i) + f(x_{i+1}; \tilde{y}_{i+1})}{2},$$

где $\tilde{y}_{i+1} = y_i + hf(x_i; y_i)$.

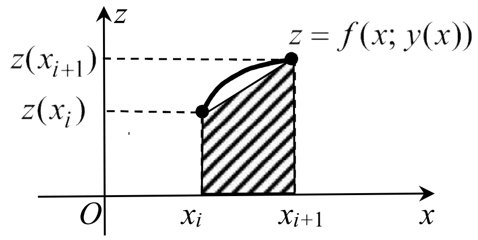


Рис. 8. Приближение интеграла (2) по методу трапеций

Эти методы имеют второй порядок точности, т. е.

$$\max_{1\le i\le n} | y_i - y(x_i) | \le Mh^2,$$

где константа $M = M(f; b - x_0; x_0; y_0)$.

Метод Рунге-Кутты 3-го порядка точности

При вычислении интеграла (2) по формуле парабол (формуле Симпсона), как показано на рис. 9, получает*ся **метод Рунге-Кутты 3-го порядка точности***.

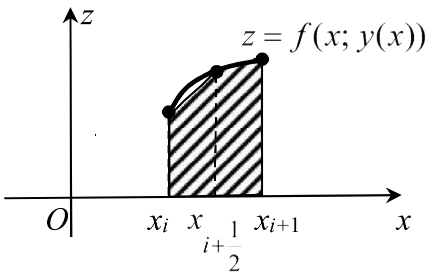
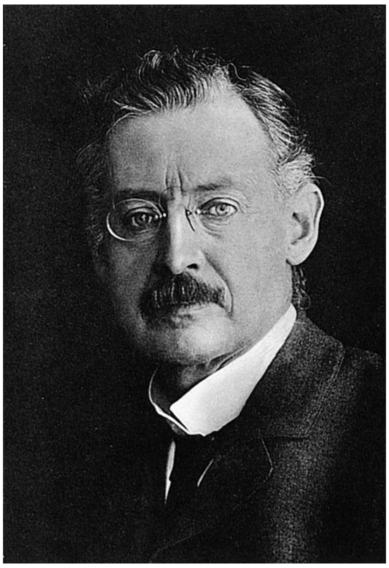


Рис. 9. Приближение интеграла (2) по методу парабол

W W W В И К И С П Р А В К А W W W W W W W W W W W W W W W W W W



Карл Дави́д Тольме́ Ру́нге
(нем. *Carl David Tolmé Runge*)
(1856–1927)

немецкий математик, физик и спектроскопист. Учился в Берлинском университете у К. Вейерштрасса. С 1904 г. по инициативе Ф. Клейна возглавлял кафедру прикладной математики в Гёттингенском университете. Считается исторически первым немецким математиком, работавшим в области прикладной математики.

W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W

W W W В И К И С П Р А В К А W W W W W W W W W W W W W W W W W W

Ма́ртин Вильге́льм Ку́тта
(нем. *Martin Wilhelm Kutta*)
(1867–1944)

немецкий математик.

W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W

Расчетные формулы этого метода имеют вид:

$$x_{i+\frac{1}{2}} = x_0 + \left(i + \frac{1}{2}\right)h;$$

$$y_{i+\frac{1}{2}} = y_i + \frac{h}{2} f(x_i; y_i);$$

$$\tilde{y}_{i+1} = y_i + 2hf\left(x_{i+\frac{1}{2}}; y_{i+\frac{1}{2}}\right) - hf(x_i; y_i);$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6}\left(f(x_i; y_i) + 4f\left(x_{i+\frac{1}{2}}; y_{i+\frac{1}{2}}\right) + f(x_{i+1}; \tilde{y}_{i+1})\right).$$

Метод Рунге-Кутты 4-го порядка точности

Наиболее употребительным на практике является ***метод Рунге-Кутты 4-го порядка точности***:

$$x_{i+\frac{1}{2}} = x_0 + \left(i + \frac{1}{2}\right)h;$$

$$y_{i+\frac{1}{2}} = y_i + \frac{h}{2} f(x_i; y_i);$$

$$\tilde{y}_{i+\frac{1}{2}} = y_i + \frac{h}{2} f\left(x_{i+\frac{1}{2}}; y_{i+\frac{1}{2}}\right);$$

$$\tilde{y}_{i+1} = y_i + hf\left(x_{i+\frac{1}{2}}; \tilde{y}_{i+\frac{1}{2}}\right);$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6}\left(f(x_i; y_i) + 2f\left(x_{i+\frac{1}{2}}; y_{i+\frac{1}{2}}\right) + 2f\left(x_{i+\frac{1}{2}}; \tilde{y}_{i+\frac{1}{2}}\right) + f(x_{i+1}; \tilde{y}_{i+1})\right).$$

Вообще, метод Рунге-Кутты – это не один метод, а семейство методов, которые задаются формулами

$$y_{i+1} = y_i + h\sum_{j=1}^{s} b_j k_j,$$

где

$$k_1 = f(x_i;\, y_i);$$

$$k_2 = f(x_i + c_2 h;\, y_i + a_{21} h k_1);$$

$$\ldots;$$

$$k_s = f(x_i + c_{2s} h;\, y_i + a_{s1} h k_1 + a_{s2} h k_2 + \ldots + a_{s;s-1} h k_{s-1})$$

при некотором выборе числа s и коэффициентов b_j, c_j, a_{jt} (причем $\sum_{t=1}^{j-1} a_{jt} = c_j$).

При соответствующем выборе числа s и коэффициентов можно получить методы различного порядка точности.