Раздел 12. РЯДЫ ФУРЬЕ

Можно, пожалуй, перефразировать знаменитое выражение Виктора Гюго о том, что если бы ему предложили уничтожить всю литературу, оставив только одну книгу, он сохранил бы книгу Иова. Подобно этому, если бы нам предложили выбросить все математические открытия, кроме одного, мы едва ли бы не оставили ряд Фурье. Этот ряд оказал наиболее глубокое влияние на развитие анализа как в его теоретическом, так и практическом аспектах. Кроме того, его связь с другими частями анализа столь тесна, что если мы сказали бы «ряд Фурье со всеми его следствиями», то значительная часть нашего классического анализа была бы сохранена.

К. Ланцош,
«Практические методы прикладного анализа» (1956)

§ 1. Тригонометрические ряды Фурье

W W W В И К И С П Р А В К А W W W W W W W W W W W W W W W W W W W

Жан-Бати́ст Жозе́ф Фурье́
(фр. *Jean-Baptiste Joseph Fourier*)
(1768–1830)
французский математик и физик.
Впервые использовал тригонометрические ряды в исследованиях по теплопроводности. В дальнейшем методы Фурье (тригонометрические ряды и интеграл Фурье) стали исключительно мощным инструментом математического исследования самых разных задач – особенно там, где есть волны и колебания, – в астрономии, акустике, теории приливов, радиотехнике и др.

W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W

Опр. 1. ***Тригонометрическим рядом*** называется функциональный ряд вида

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx =$$

$$=\frac{a_0}{2}+a_1\cos x+b_1\sin x+a_2\cos 2x+b_2\sin 2x+$$

$$+\ldots+a_n\cos nx+b_n\sin nx+\ldots,$$

или, в более общем виде, ряд

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega x + b_n \sin n\omega x,$$

где ω – некоторая константа; числа $a_0, a_1, b_1, a_2, b_2, ..., a_n, b_n, ...$ называются ***коэффициентами тригонометрического ряда***.

В степенных рядах используются функции $1, x, x^2, ..., x^n, ...$, а в тригонометрических рядах – периодические функции

$$\frac{1}{2}, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, ..., \cos nx, \sin nx, ... \qquad (1)$$

Поэтому тригонометрические ряды используются при изучении периодических процессов. Примерами периодических процессов служат колебательные и вращательные движения различных деталей машин и приборов, акустические и электромагнитные колебания, периодическое движение небесных тел.

Система (множество) функций (1) обладает следующими свойствами:

1) все функции системы (1) являются *периодическими* с периодом 2π;

2) система функций (1) обладает свойством *ортогональности* на отрезке $[-\pi; \pi]$ в следующем смысле: интеграл по отрезку $[-\pi; \pi]$ от произведения двух любых различных функций системы (1) равен нулю:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2}\cos nx dx = 0 \ (n \neq 0); \quad \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2}\sin nx dx = 0;$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cos nx dx = 0; \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \sin nx dx = 0 \ (k \neq n);$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \sin nx dx = 0.$$

Система функций

$$\frac{1}{2}, \cos\frac{\pi x}{l}, \sin\frac{\pi x}{l}, \cos\frac{2\pi x}{l}, \sin\frac{2\pi x}{l}, ..., \cos\frac{\pi n x}{l}, \sin\frac{\pi n x}{l}, ... \qquad (2)$$

также обладает свойствами периодичности (с периодом $T = 2l$) и ортогональности на отрезке $[-l; l]$.

Замечание. Для периодической с периодом T функции $f(x)$ имеет место также следующее свойство: интеграл от $f(x)$ по отрезку длины T не зависит от выбора начальной точки отрезка:

$$\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx.$$

Свойства гармоник

Простейшим периодическим процессом является простое гармоническое колебание, которое описывается функцией

$$y = A\sin\left(\omega x + \varphi_0\right), \tag{3}$$

где $A > 0$ – амплитуда колебания, ω – частота колебания, $\omega x + \varphi_0$ – фаза колебания, φ_0 – начальная фаза колебания. Простейшее колебательное движение называют гармоническим, а описывающую его функцию (3) называют *простой гармоникой*. Эта функция имеет период $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$, т. е. одно полное колебание совершается за промежуток времени $\dfrac{2\pi}{\omega}$. Используя формулу для синуса суммы, гармонику можно представить в виде

$$y = A\sin\omega x\cos\varphi_0 + A\cos\omega x\sin\varphi_0 = a\cos\omega x + b\sin\omega x,$$

где $a = A\sin\varphi_0, b = A\cos\varphi_0$ – некоторые числа. Следовательно, простое гармоническое колебание описывается периодическими функциями $\sin\omega x$ и $\cos\omega x$.

Сложные периодические процессы, например, волновые или электромагнитные колебания, обычно описываются дифференциальными уравнениями, решения которых получаются в виде конечного или бесконечного числа простых гармоник, т. е. в виде

$$\sum_n (a_n\cos\omega_n x + b_n\sin\omega_n x).$$

Сумма нескольких гармоник одной и той же частоты есть гармоника той же частоты, но с измененными амплитудой и фазой.

Сумма нескольких гармоник с частотами $\omega, 2\omega, 3\omega, \ldots, n\omega$ является периодической функцией с периодом $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$.

Сумма нескольких гармоник с различными частотами, находящимися в рациональном отношении, является периодической функцией.

Разложение в ряд Фурье периодических функций

Опр. 2. ***Рядом Фурье для функции*** $f(x)$ ***с периодом*** $T = 2l$ называется ряд

$$\boxed{f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{\pi n x}{l} + b_n \sin\frac{\pi n x}{l},} \tag{4}$$

где

$$\boxed{a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)dx;}$$

$$\boxed{a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{\pi n x}{l}dx;} \tag{5}$$

$$\boxed{b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{\pi n x}{l}dx.}$$

Формально ряд Фурье можно записать для любой функции $f(x)$, если она интегрируема на $[-l; l]$. Но тогда возникают вопросы:

1) сходится ли полученный ряд;

2) можно ли поставить знак равенства между функцией и ее рядом Фурье?

W W W В И К И С П Р А В К А W W W W W W W W W W W W W W W W W W W

Ио́ганн Пе́тер Гу́став Лежён Дирихле́
(нем. *Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet*)
(1805–1859)
немецкий математик, внесший существенный вклад в математический анализ, теорию функций и теорию чисел. Член Берлинской и многих других академий наук, в том числе Петербургской.

Т 1 [Дирихле] (достаточное условие сходимости ряда Фурье). Пусть функция $f(x)$ имеет период $T=2l$ и удовлетворяет условиям:

1) кусочно-непрерывна на $[-l;l]$, т. е. непрерывна на этом отрезке или имеет на нем конечное число точек разрыва 1-го рода;

2) кусочно-монотонна на $[-l;l]$, т. е. монотонна на этом отрезке или отрезок можно разбить на конечное число интервалов, на которых она монотонна.

Тогда соответствующий функции $f\left(x\right)$ ряд Фурье сходится на этом отрезке и его сумма $S(x)$ равна:

1) $S(x_0)=f(x_0)$, если в точке $x=x_0$ функция $f(x)$ непрерывна;

2) $S(x_0)=\dfrac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}$, если $x=x_0$ – точка разрыва функции $f(x)$;

3) $S(l)=\dfrac{f(l-0)+f(-l+0)}{2}$.

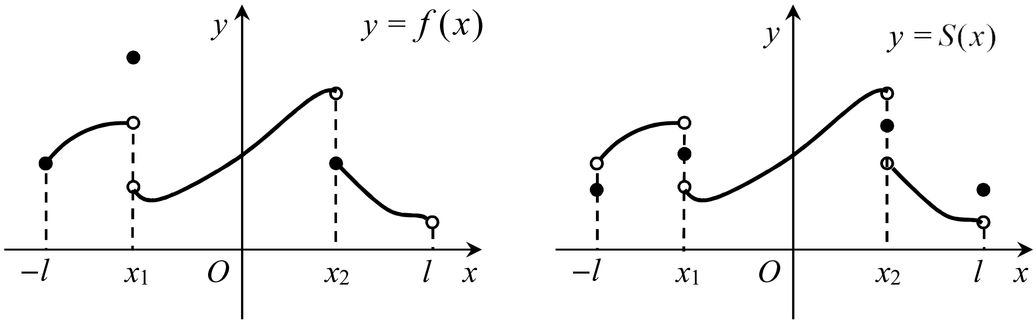


Рис. 1. График функции $f(x)$ и график суммы $S(x)$ ее ряда Фурье

Замечание. Большинство функций, которые встречаются в технических приложениях, удовлетворяют условиям теоремы Дирихле.

Пример 1. Разложим в ряд Фурье периодическую (с периодом $T = 4$) функцию

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } -2 < x \le 0, \\ x & \text{при } 0 < x \le 2; \end{cases}$$

изобразим графики функции и суммы ряда.

Решение. График функции $f(x)$ изображен на рис. 2.

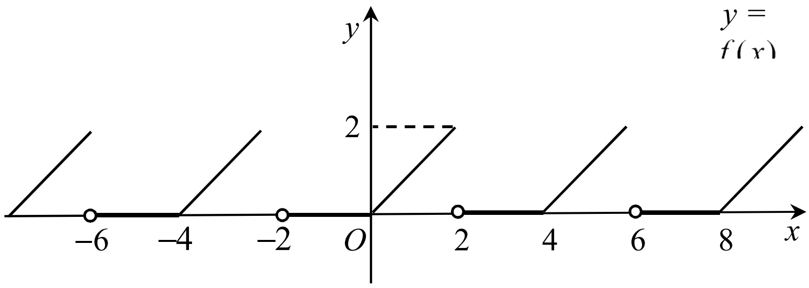


Рис. 2. График функции $f(x)$

Поскольку $T = 2l = 4$, то $l = 2$. Рассчитаем коэффициенты ряда Фурье по формулам (5):

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)dx = \frac{1}{2}\left(\int_{-2}^{0} 0dx + \int_{0}^{2} xdx\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{2}\Bigg|_0^2 = 1;$$

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{\pi n x}{l}dx=\frac{1}{2}\int_{0}^{2} x\cos\frac{\pi n x}{2}dx=$$

$$=\left|\begin{array}{ll} u=x; & du=dx \\ dv=\cos\frac{\pi n}{2}xdx; & v=\int\cos\frac{\pi n x}{2}dx=\frac{2}{\pi n}\sin\frac{\pi n x}{2}\end{array}\right|=$$

$$=\frac{1}{2}\left(x\cdot\frac{2}{\pi n}\sin\frac{\pi n x}{2}\Big|_0^2-\frac{2}{\pi n}\int_0^2\sin\frac{\pi n x}{2}dx\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(x\cdot\frac{2}{\pi n}\sin\frac{\pi n x}{2}\Big|_0^2+\frac{2}{\pi n}\cdot\frac{2}{\pi n}\cos\frac{\pi n x}{2}\Big|_0^2\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(2\cdot\frac{2}{\pi n}\sin\pi n-0+\frac{4}{\pi^2 n^2}(\cos\pi n-\cos 0)\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{4}{\pi n}\cdot 0+\frac{4}{\pi^2 n^2}((-1)^n-1)\right)=$$

$$=\frac{2}{\pi^2 n^2}((-1)^n-1)=\begin{cases}0, & \text{если } n=2k,\\ -\dfrac{4}{\pi^2\left(2k-1\right)^2}, & \text{если } n=2k-1.\end{cases}$$

Заметим, что при расчете коэффициентов ряда Фурье часто используются соотношения

$$\boxed{\sin\pi n=0;\quad \cos\pi n=(-1)^n.}$$

Далее находим

$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{\pi n x}{l}dx=\frac{1}{2}\int_{0}^{2} x\sin\frac{\pi n x}{2}dx=$$

$$=\left|\begin{array}{ll} u=x; & du=dx \\ dv=\sin\frac{\pi n}{2}xdx; & v=\int\sin\frac{\pi n x}{2}dx=-\frac{2}{\pi n}\cos\frac{\pi n x}{2}\end{array}\right|=$$

$$=\frac{1}{2}\left(-x\cdot\frac{2}{\pi n}\cos\frac{\pi n x}{2}\Big|_0^2+\frac{2}{\pi n}\int_0^2\cos\frac{\pi n x}{2}dx\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(-x\cdot\frac{2}{\pi n}\cos\frac{\pi nx}{2}\bigg|_0^2+\frac{4}{\pi^2n^2}\sin\frac{\pi nx}{2}\bigg|_0^2\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(-\frac{4}{\pi n}\cos\pi n-0+\frac{4}{\pi^2n^2}(\sin\pi n-\sin 0)\right)=-\frac{2}{\pi n}\cdot(-1)^n=\frac{2\cdot(-1)^{n+1}}{\pi n}.$$

Итак, ряд Фурье функции $f(x)$ имеет вид

$$f(x)\sim\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2((-1)^n-1)}{\pi^2n^2}\cos\frac{\pi nx}{2}+\frac{2(-1)^{n+1}}{\pi n}\sin\frac{\pi nx}{2}$$

или

$$f(x)\sim\frac{1}{2}-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4}{\pi^2(2k-1)^2}\cos\frac{\pi(2k-1)x}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^{n+1}}{\pi n}\sin\frac{\pi nx}{2}.$$

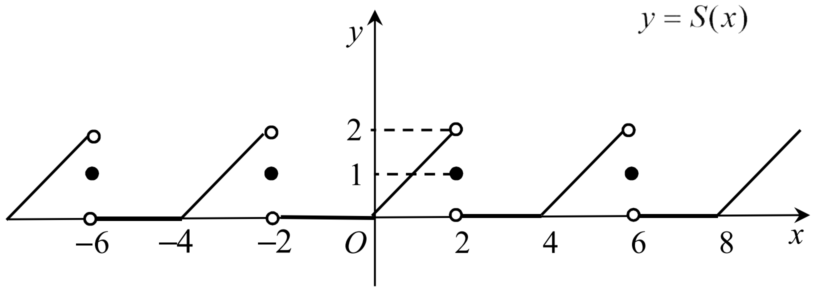


Рис. 3. График суммы ряда $S(x)$

В силу теоремы Дирихле график суммы $S(x)$ ряда Фурье функции $f(x)$ имеет вид, представленный на рис. 3.●

Замечание. Полученное разложение в ряд Фурье позволяет вычислить суммы некоторых числовых рядов.

Пример 1 (продолжение). Например, подставим в полученный ряд $x=0$:

$$S(0)=\frac{1}{2}-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4}{\pi^2(2k-1)^2}\cos 0+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^{n+1}}{\pi n}\sin 0=$$

$$=\frac{1}{2}-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4}{\pi^2(2k-1)^2}=\frac{1}{2}-\frac{4}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}.$$

С другой стороны, из теоремы Дирихле следует, что $S(0)=0$, поэтому

$$\frac{1}{2}-\frac{4}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\left(2k-1\right)^2}=0,$$

откуда получим

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\left(2k-1\right)^2}=\frac{\pi^2}{8},$$

или

$$1+\frac{1}{9}+\frac{1}{25}+\frac{1}{49}+\frac{1}{81}+...=\frac{\pi^2}{8}.$$

При $x=1$ получим:

$$S(1)=\frac{1}{2}-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4}{\pi^2(2k-1)^2}\cos\frac{\pi(2k-1)}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^{n+1}}{\pi n}\sin\frac{\pi n}{2}.$$

Поскольку $\cos\dfrac{\pi(2k-1)}{2}=0$ и

$$\sin\frac{\pi n}{2}=\begin{cases}\sin\dfrac{\pi(2k-1)}{2}=(-1)^{k+1}, & \text{если } n=2k-1 - \text{нечетное,}\\ \sin\dfrac{\pi\cdot 2k}{2}=\sin\pi k=0, & \text{если } n=2k - \text{четное,}\end{cases}$$

то

$$S(1)=\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2(-1)^{2k}}{\pi(2k-1)}\cdot(-1)^{k+1}=\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{2k-1}.$$

По теореме Дирихле, $S(1)=1$, поэтому

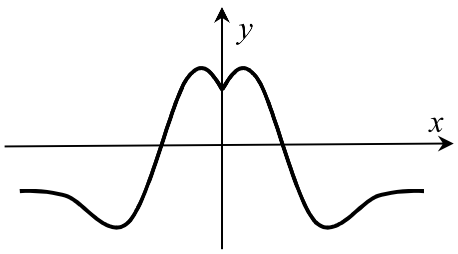
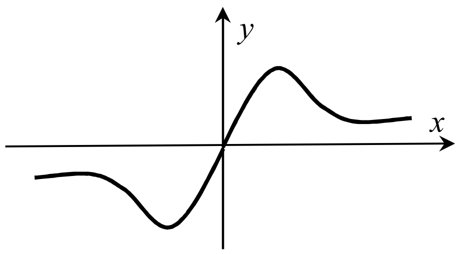
$$\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{2k-1}=1;$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{2k-1}=\frac{\pi}{4};$$

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-...=\frac{\pi}{4}.\bullet$$

Разложение в ряд Фурье четных и нечетных периодических функций

Напомним основные свойства четных и нечетных функций.

Функция $f(x)$ называется ***четной***, если ее область определения симметрична относительно 0 и $f(-x)=f(x)$ для всех x из области определения функции.	Функция $f(x)$ называется ***нечетной***, если ее область определения симметрична относительно 0 и $f(-x)=-f(x)$ для всех x из области определения функции.
График четной функции симметричен относительно Oy. 	График нечетной функции симметричен относительно начала координат. 
Интеграл по симметричному относительно 0 промежутку:	
$\int\limits_{-l}^{l} f(x)dx = 2\int\limits_{0}^{l} f(x)dx,$ если $f(x)$ – четная функция.	$\int\limits_{-l}^{l} f(x)dx = 0,$ если $f(x)$ – нечетная функция.

Утв. 1. Если $f(x)$ – четная, периодическая с периодом $T=2l$ функция, то ее ряд Фурье содержит только косинусы и имеет вид

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{\pi n x}{l},$$

где

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)dx = \frac{2}{l}\int_{0}^{l} f(x)dx;$$

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{\pi n x}{l}dx = \frac{2}{l}\int_{0}^{l} f(x)\cos\frac{\pi n x}{l}dx.$$

Утв. 2. Если $f(x)$ – нечетная, периодическая с периодом $T = 2l$ функция, то она разлагается в ряд по синусам:

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{\pi n x}{l},$$

где

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{\pi n x}{l}dx = \frac{2}{l}\int_{0}^{l} f(x)\sin\frac{\pi n x}{l}dx.$$

Пример 2. Разложим в ряд Фурье периодическую (с периодом $T = 2\pi$) функцию

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{при } -\pi < x < 0, \\ 1 & \text{при } 0 \le x \le \pi; \end{cases}$$

рассмотрим графики частичных сумм этого ряда.

Решение. График функции $f(x)$ изображен на рис. 4.

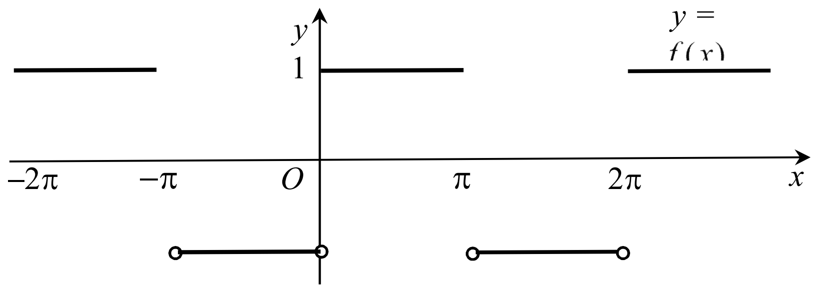


Рис. 4. График функции $f(x)$

Поскольку $f(x)$ – нечетная функция, то

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx.$$

Вычисляя коэффициенты

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin nx dx = -\frac{1}{n}\cdot\frac{2}{\pi}\cos nx\Big|_0^{\pi} = -\frac{2}{\pi n}(\cos\pi n - 1) =$$

$$= -\frac{2}{\pi n}((-1)^n - 1) = \begin{cases} 0, & \text{если } n = 2k - \text{четное}, \\ \dfrac{4}{\pi(2k-1)}, & \text{если } n = 2k-1 - \text{нечетное}, \end{cases}$$

получим ряд Фурье

$$f(x) \sim \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n}{n}\sin nx = \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(2k-1)x}{2k-1} =$$

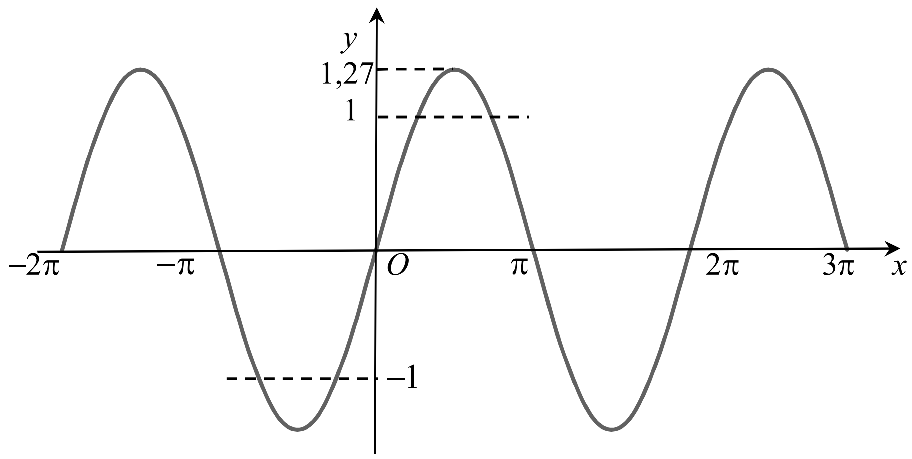
$$= \frac{4}{\pi}\left(\sin x + \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{5}\sin 5x + \ldots + \frac{\sin(2k-1)x}{2k-1} + \ldots\right).$$

Рассмотрим частичные суммы полученного ряда Фурье

$$S_1(x) = \frac{4}{\pi}\sin x;\ \ S_3(x) = \frac{4}{\pi}\left(\sin x + \frac{1}{3}\sin 3x\right);$$

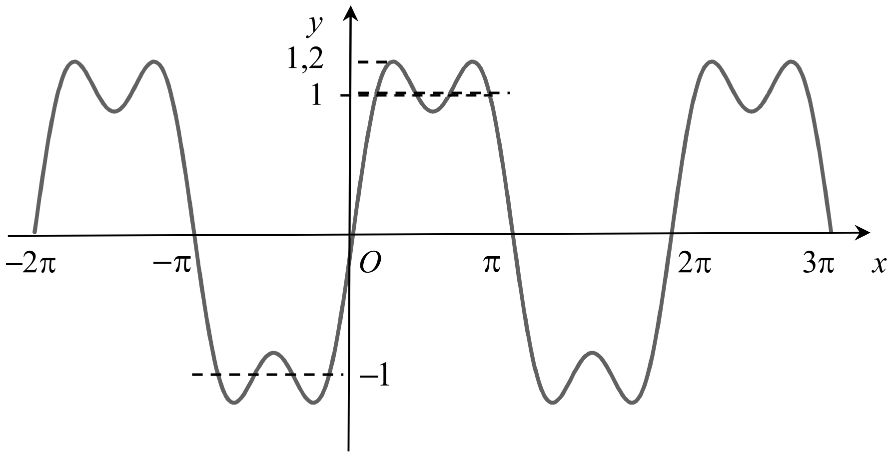
$$S_5(x) = \frac{4}{\pi}\left(\sin x + \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{5}\sin 5x\right); \ldots;$$

на рис. 5 изображены графики частичных сумм $S_1(x), S_3(x), S_5(x)$, $S_{15}(x)$, а также график суммы ряда $S(x)$.



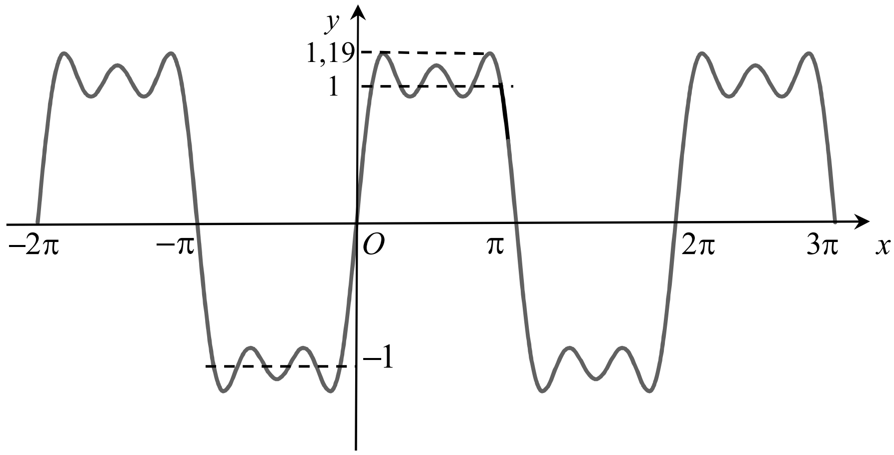
а

График $S_1(x) = \frac{4}{\pi}\sin x$



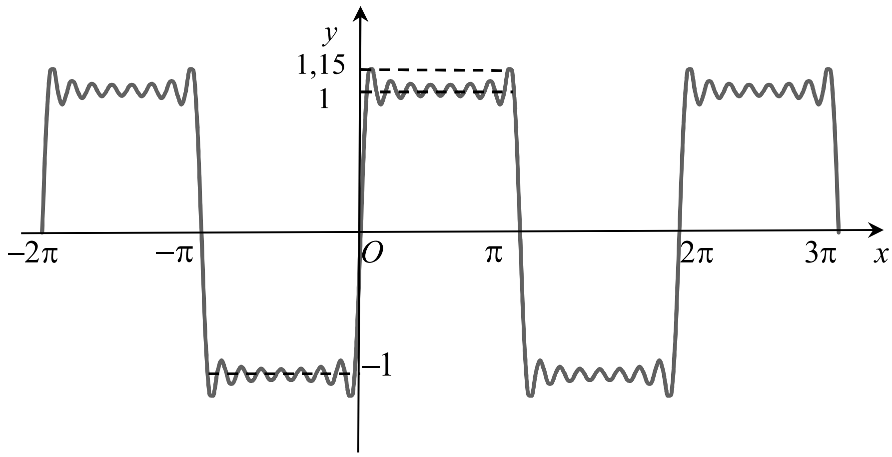
б

График $S_3(x)=\dfrac{4}{\pi}\left(\sin x+\dfrac{1}{3}\sin 3x\right)$



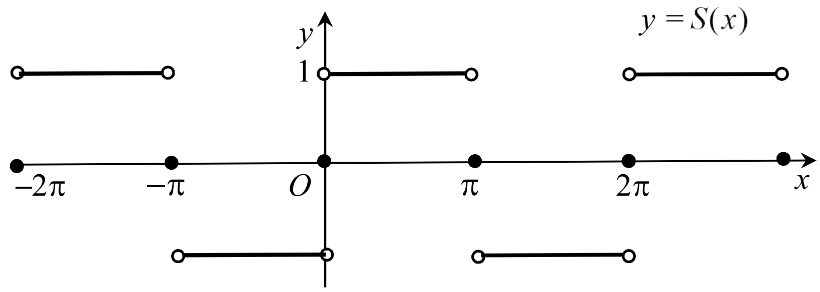
в

График $S_5(x)=\dfrac{4}{\pi}\left(\sin x+\dfrac{1}{3}\sin 3x+\dfrac{1}{5}\sin 5x\right)$



г

График $S_{15}(x)$



д

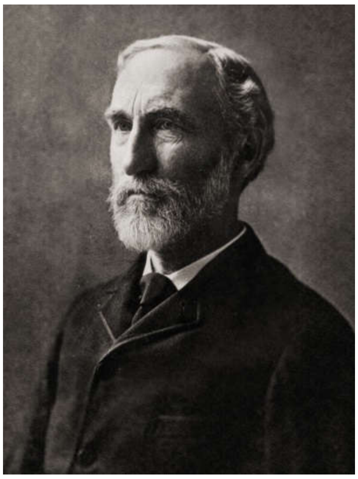
График суммы ряда $S(x)$

Рис. 5. Графики частичных сумм и суммы ряда

Графики на рис. 5 иллюстрируют процесс приближения частичных сумм ряда Фурье к исходной функции $f(x)$.•

Замечание. При аппроксимации разрывной функции тригонометрическим рядом Фурье имеет место так называемое *явление Гиббса*, которое иллюстрируется рассмотренным примером. С увеличением числа членов в частичной сумме аппроксимирующая кривая приближается к графику исходной функции во всех точках, кроме точек разрыва. Вблизи точек разрыва появляются небольшие выступы, причем с ростом числа слагаемых в частичной сумме выступы не уменьшаются по высоте, а только становятся более узкими и сдвигаются к точкам разрыва. Доказано, что величина выступа зависит от величины скачка функции в точке разрыва: если этот скачок равен δ, то величина выступа для функции периода 2π составляет около $0,0895\delta$. Таким образом, для каждой фиксированной точки x (за исключением точек разрыва) $S_n(x) \underset{n\to\infty}{\to} S(x) = f(x)$.

W W W В И К И С П Р А В К А W W W W W W W W W W W W W W W W W W W



Джоза́йя Уи́ллард Гиббс
(англ. *Josiah Willard Gibbs*)
(1839–1903)
американский физик, физикохимик, математик и механик, один из создателей векторного анализа, статистической физики, математической теории термодинамики, что во многом предопределило развитие современных точных наук и естествознания в целом.

W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W

Разложение в ряд Фурье непериодических функций

Непериодическая функция $f(x)$, заданная на всей числовой прямой, не может быть разложена в ряд Фурье, так как сумма ряда Фурье есть функция периодическая и, следовательно, не может быть равна $f(x)$ для всех x.

Однако на любом конечном промежутке $(a;b)$ непериодическая функция $f(x)$ может быть представлена в виде ряда Фурье, если она удовлетворяет условиям теоремы Дирихле на этом промежутке. Для этого строят ряд Фурье для *периодической* функции $f_1(x)$, которая совпадает с $f(x)$ на промежутке $(a;b)$.

Рассмотрим несколько частных случаев.

1 случай. Если функция $f(x)$ задана на симметричном относительно 0 промежутке $(-l;l)$, то $f_1(x)$ – периодическая с периодом $T=2l$ функция, совпадающая с $f(x)$ на промежутке $(-l;l)$ (рис. 6).

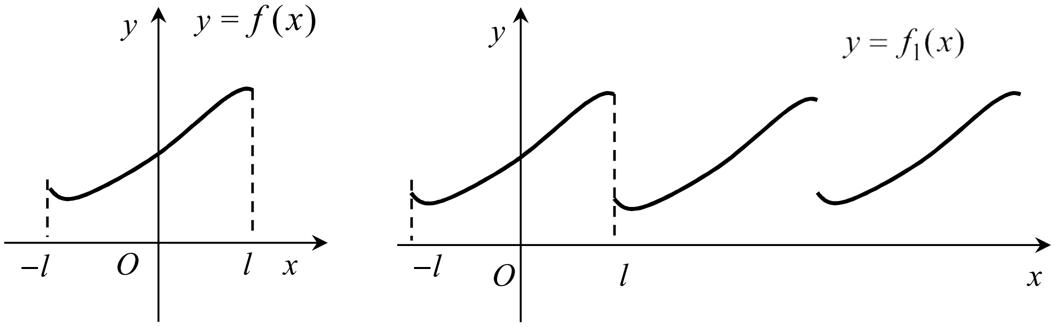


Рис. 6. График функции $f(x)$, заданной на $(-l; l)$, и периодической с периодом $T = 2l$ функции $f_1(x)$

2 случай. Если функция $f(x)$ задана на произвольном промежутке $(a; a+2l)$ длины $2l$ (рис. 7), то при вычислении коэффициентов ряда Фурье используют следующее свойство: определенный интеграл от периодической функции с периодом T по любому отрезку длины T имеет одно и то же значение:

$$\int_0^T f(x)dx = \int_a^{a+T} f(x)dx.$$

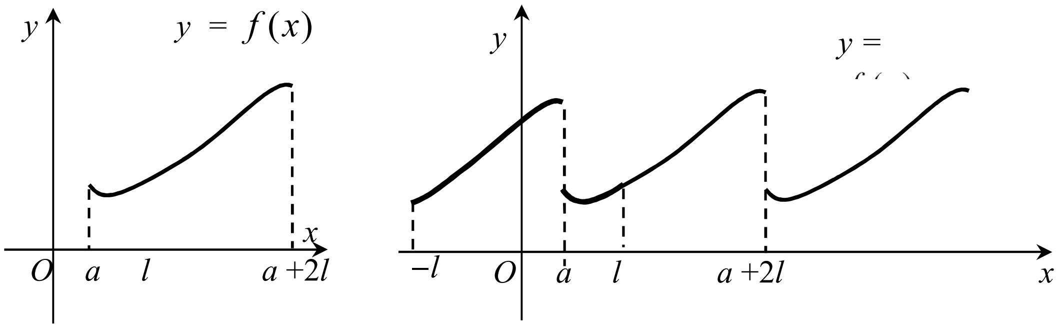


Рис. 7. График функции $f(x)$, заданной на $(a; a+2l)$, и периодической с периодом $T = 2l$ функции $f_1(x)$

Поэтому коэффициенты ряда Фурье (4) вычисляют в этом случае по формулам

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_a^{a+2l} f(x)dx; \quad a_n = \frac{1}{l}\int_a^{a+2l} f(x)\cos\frac{\pi nx}{l}dx;$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_a^{a+2l} f(x)\sin\frac{\pi nx}{l}dx.$$

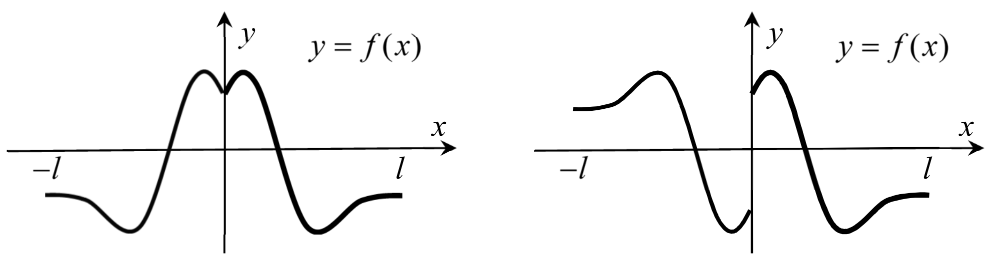
3 случай. Если функция $f(x)$ задана на промежутке $(0; l)$, то можно:

1) продолжить ее до периодической с периодом $T = l$ функции (см. случай 2);

2) доопределить функцию произвольным образом на промежутке $(-l; 0)$ и продолжить до периодической с периодом $T = 2l$ функции.

Как правило, функция $f(x)$ доопределяется на промежутке $(-l; 0)$ так, чтобы получилась либо четная (рис. 8а), либо нечетная (рис. 8б) функция. Если функцию $f(x)$ доопределяют четным образом, то она раскладывается в ряд Фурье, который содержит только косинусы (см. утв. 1); если функцию $f(x)$ доопределяют нечетным образом, то она раскладывается в ряд Фурье, содержащий только синусы (утв. 2).

Оба эти ряда (по косинусам и по синусам) сходятся к $f(x)$ на $(0; l)$ и имеют противоположные по знаку суммы на $(-l; 0)$.



а б

Рис. 8. Доопределение функции $f(x)$, заданной на $(0; l)$:
а) четным; б) нечетным образом

Пример 3. Разложим функцию $f(x) = x$ на промежутке $[0; \pi)$ в тригонометрический ряд Фурье: **а)** по косинусам; **б)** по синусам.

Решение. **а)** Чтобы получить разложение в ряд Фурье, содержащий только косинусы, доопределим функцию так, чтобы функция $f_1(x)$ была четная. Тогда $f_1(x) = |x|$ при $x \in (-\pi; \pi)$ (рис. 9).

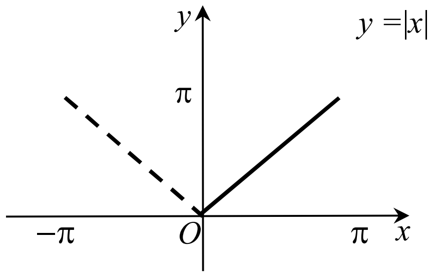


Рис. 9. График функции $f(x)$, доопределенной четным образом

В этом случае

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx,$$

где

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} xdx = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{x^2}{2}\bigg|_0^{\pi} = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi^2}{2} = \pi;$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nxdx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos nxdx = \frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{n}x\sin nx\bigg|_0^{\pi} - \frac{1}{n}\int_0^{\pi}\sin nxdx\right) =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{n}x\sin nx\bigg|_0^{\pi} + \frac{1}{n^2}\cos nx\bigg|_0^{\pi}\right) = \frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{n}\pi\sin\pi n + \frac{1}{n^2}(\cos\pi n - \cos 0)\right) =$$

$$= \frac{2}{\pi n^2}((-1)^n - 1) = \begin{cases} 0, & \text{если } n = 2k, \\ -\dfrac{4}{\pi(2k-1)^2}, & \text{если } n = 2k-1. \end{cases}$$

Таким образом, в этом случае ряд Фурье имеет вид

$$f(x) \sim \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2},$$

т. е. при всех $x \in [0; \pi]$ имеет место соотношение

$$x=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\cos x-\frac{4}{9\pi}\cos 3x-\frac{4}{25\pi}\cos 5x-\ldots.$$

б) Для разложения функции в ряд Фурье по синусам доопределим ее так, чтобы функция $f_1(x)$ была нечетная, т. е. $f_1(x)=x$ при $x\in(-\pi;\pi)$ (см. рис. 10).

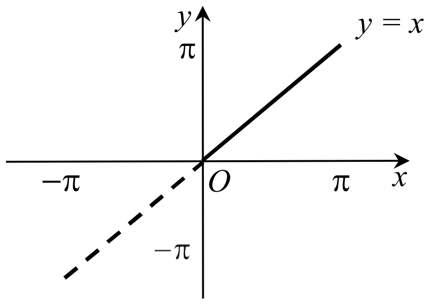


Рис. 10. График функции $f(x)$, доопределенной нечетным образом

В этом случае

$$f(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin nx,$$

где

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin nxdx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\sin nxdx=\frac{2}{\pi}\left(-\frac{1}{n}x\cos nx\Big|_0^{\pi}+\frac{1}{n}\int_0^{\pi}\cos nxdx\right)=$$

$$=\frac{2}{\pi}\left(-\frac{1}{n}x\cos nx\Big|_0^{\pi}+\frac{1}{n^2}\sin nx\Big|_0^{\pi}\right)=\frac{2}{\pi}\left(-\frac{1}{n}\pi\cos\pi n+\frac{1}{n^2}(\sin\pi n-\sin 0)\right)=$$

$$=\frac{2}{\pi}\cdot\left(-\frac{(-1)^n\pi}{n}\right)=\frac{(-1)^n 2}{n}.$$

Таким образом, ряд Фурье по синусам имеет вид

$$f(x)\sim 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx,$$

т. е. при всех $x\in[0;\pi)$ справедливо равенство

$$x = 2\sin x - \sin 2x + \frac{2}{3}\sin 3x - \frac{1}{2}\sin 4x... .\bullet$$

Замечание. Если $f(x)$ задана на промежутке $(0; l)$, то выбор вида ее разложения в ряд Фурье (ряд по косинусам или ряд по синусам) определяется свойствами функции на концах промежутка, т. е. в точках $x = 0$ и $x = l$.

Если функция в этих точках не равна нулю, то ее раскладывают в ряд по косинусам, так как для разложения по синусам приходится заменять $f(x)$ разрывной функцией.

Если функция $f(x)$ на концах промежутка равна нулю, ее следует раскладывать в ряд синусов, поскольку при нечетном продолжении получается непрерывная функция $f_1(x)$ с непрерывной производной, в при четном продолжении – непрерывная функция с разрывной производной, т. е. ряд по синусам быстрее сходится к $f(x)$, чем ряд по косинусам.

Приближение заданной функции с помощью тригонометрического многочлена

Представление функции бесконечным рядом (Фурье, Тейлора и т. д.) имеет на практике тот смысл, что n-я частичная сумма ряда является приближенным выражением разлагаемой функции, причем это приближение можно сделать сколь угодно точным, выбирая достаточно большое n (достаточно большое число членов ряда).

Однако характер приближения может быть различным, так как погрешность приближения функции $f(x)$ функцией $\varphi(x)$ на отрезке $[a; b]$ можно оценивать по-разному. Например, за меру погрешности можно взять наибольшее уклонение функции $\varphi(x)$ от $f(x)$:

$$\Delta_1(\varphi) = \max_{x\in[a;\, b]} |\varphi(x) - f(x)|.$$

В некоторых случаях более естественно использовать среднее квадратичное уклонение.

$$\Delta_2(\varphi)=\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b(\varphi(x)-f(x))^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

На рис. 11 кривая $y=\varphi_2(x)$ значительно отличается от $y=f(x)$ только на узком участке и потому в общем приближает кривую $y=f(x)$ лучше, чем кривая $y=\varphi_1(x)$. При этом

$$\Delta_1(\varphi_1)<\Delta_1(\varphi_2);$$

$$\Delta_2(\varphi_1)>\Delta_2(\varphi_2).$$

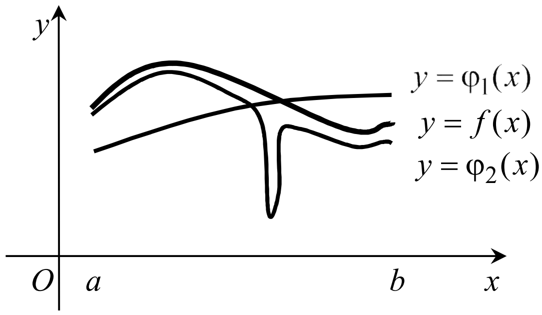


Рис. 11. Различные способы приближения функции $y=f(x)$ на $[a;b]$

Т 2 (минимальное свойство частичных сумм ряда Фурье). Если $f(x)$ – периодическая с периодом $T=2l$ функция, то среди всех тригонометрических полиномов (многочленов) порядка n

$$\varphi_n(x)=A_0+\sum_{k=1}^{n}A_k\cos\frac{k\pi x}{l}+B_k\sin\frac{k\pi x}{l}$$

наименьшее среднее квадратичное уклонение от функции $f(x)$ имеет тот многочлен, коэффициенты которого есть коэффициенты Фурье функции $f(x)$.

Можно показать, что это уклонение удовлетворяет соотношению

$$\Delta_2^2=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f^2(x)dx-\frac{a_0^2}{4}-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2)\geq 0.$$

Отсюда следует ***неравенство Бесселя***

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)\le\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f^2(x)dx.$$

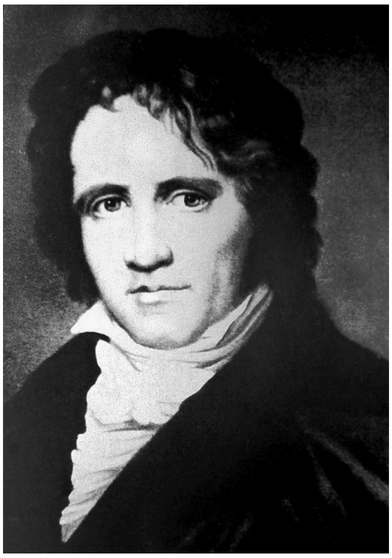
Более того, можно показать, что

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f^2(x)dx.$$

Это соотношение называется ***равенством Парсеваля***.

Следовательно, из необходимого условия сходимости ряда вытекает, что при условии, что $\int_{-l}^{l}f^2(x)dx<\infty$, имеют место соотношения $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$; $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=0$.

W W W В И К И С П Р А В К А W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W



Фридрих Вильгельм Бессель

(нем. *Friedrich Wilhelm Bessel*)

(1784–1846)

немецкий математик и астроном, ученик Гаусса.

Не обучавшись в гимназии и университете, получил докторскую степень Гёттингенского университета.

Известен как первооткрыватель годичного параллакса звезд, исследователь размеров земного эллипсоида. В 1841 г. по данным многих измерений вычислил размеры земного эллипсоида, которые широко применялись в геодезии и картографии вплоть до середины XX века.

Основатель и директор Кёнигсбергской обсерватории. Проводил расчёты орбиты кометы Галлея. Определил положение 75 000 звезд и создал обширные звездные каталоги. В 1844 г. предсказал наличие у Сириуса и Проциона малоразличимых звезд-спутников.

W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W

W W W В И К И С П Р А В К А W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W

Марк-Антуан Парсеваль
(фр. *Marc-Antoine Parseval des Chênes*)
(1755–1836)
французский математик.

W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W

§ 2. Обобщенные ряды Фурье

Опр. 1. Система функций $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x), \dots$ называется ***ортогональной*** на отрезке $[a;b]$, если интеграл по отрезку $[a;b]$ от произведения любых двух различных функций этой системы равен 0:

$$\int_a^b \varphi_m(x)\varphi_n(x)dx = 0 \text{ при } n \neq m.$$

Основными примерами ортогональных систем функций являются тригонометрические системы вида

$$\frac{1}{2}, \cos\frac{\pi x}{l}, \sin\frac{\pi x}{l}, \cos\frac{2\pi x}{l}, \sin\frac{2\pi x}{l}, \dots, \cos\frac{\pi n x}{l}, \sin\frac{\pi n x}{l}, \dots.$$

Примером ортогональной нетригонометрической системы является система многочленов Лежандра

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}\left(x^2-1\right)^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots.$$

W W W В И К И С П Р А В К А W W W W W W W W W W W W W W W W W W

Адриен Мари Лежа́ндр
(фр. *Adrien-Marie Legendre*)
(1752–1833)

французский математик.

Его имя внесено в список величайших ученых Франции, помещенный на первом этаже Эйфелевой башни.

В годы французской революции активно участвовал в Комиссии по введению метрической системы.

Двухтомный труд Лежандра «Теория чисел» (1798) был самым полным изложением теории чисел в то время. Книга выдержала три переиздания еще при жизни автора.

Его учебник для среднего образования «Начала геометрии» (1794) выдержал несколько изданий при жизни автора, множество переводов и послужил образцом для всех дореволюционных учебников по элементарной математике в России.

Лежандра преследовал какой-то злой рок – стоило ему сделать выдающееся открытие, как тут же оказывалось, что другой математик сделал то же самое немного раньше.

W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W W

Выпишем несколько первых членов этой системы:

$$P_0(x) = \frac{1}{2^0 \cdot 0!}(x^2-1)^0 = 1;$$

$$P_1(x) = \frac{1}{2^1 \cdot 1!}(x^2-1)' = x;$$

$$P_2(x) = \frac{1}{2^2 \cdot 2!}\left((x^2-1)^2\right)'' = \frac{1}{2}(3x^2-1);$$

$$P_3(x) = \frac{1}{2^3 \cdot 3!}\left((x^2-1)^3\right)''' = \frac{1}{4}(5x^3-3x);$$

$$P_4(x) = \frac{1}{2^4 \cdot 4!}\left((x^2-1)^4\right)^{IV} = \frac{1}{8}(35x^4-30x^2+3).$$

Можно показать, что система многочленов Лежандра ортогональна на $[-1;1]$.

Опр. 2. ***Обобщенным рядом Фурье функции*** $f(x)$ ***по ортогональной на отрезке*** $[a;b]$ ***системе функций*** $\varphi_1(x), \varphi_2(x), ..., \varphi_n(x), ...$ называется ряд вида

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n(x),$$

в котором коэффициенты вычисляются по формулам.

$$c_n = \frac{\int_a^b f(x)\varphi_n(x)dx}{\int_a^b \varphi_n^2(x)dx}. \qquad (1)$$

Утв. 1. Среди всех обобщенных многочленов вида

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k(x)$$

наименьшее среднее квадратичное уклонение от функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$ имеет тот многочлен, коэффициенты которого есть коэффициенты обобщенного ряда Фурье, т. е. находятся по формуле (1).

§ 3. Комплексная форма ряда Фурье

Ряды Фурье часто применяются в комплексной форме записи. Чтобы получить комплексную форму записи ряда Фурье, подставим в тригонометрический ряд Фурье

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{\pi n x}{l} + b_n \sin\frac{\pi n x}{l}$$

формулы Эйлера:

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}; \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} = \frac{i}{2}\left(e^{-ix} - e^{ix}\right),$$

т. е.

$$\cos\frac{\pi nx}{l}=\frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{\frac{i\pi nx}{l}}+\mathrm{e}^{-\frac{i\pi nx}{l}}\right);\quad \sin\frac{\pi nx}{l}=\frac{i}{2}\left(\mathrm{e}^{-\frac{i\pi nx}{l}}-\mathrm{e}^{\frac{i\pi nx}{l}}\right).$$

Тогда ряд Фурье преобразуется следующим образом:

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{\pi nx}{l}+b_n\sin\frac{\pi nx}{l}=$$

$$=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{2}\left(\mathrm{e}^{\frac{i\pi nx}{l}}+\mathrm{e}^{-\frac{i\pi nx}{l}}\right)+\frac{ib_n}{2}\left(\mathrm{e}^{-\frac{i\pi nx}{l}}-\mathrm{e}^{\frac{i\pi nx}{l}}\right)=$$

$$=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}(a_n-ib_n)\mathrm{e}^{\frac{i\pi nx}{l}}+\frac{1}{2}(a_n+ib_n)\mathrm{e}^{-\frac{i\pi nx}{l}}.$$

Обозначим $c_n=\dfrac{a_n-ib_n}{2};\, c_{-n}=\dfrac{a_n+ib_n}{2};\, c_0=\dfrac{a_0}{2}$. Можно показать, что

$$c_n=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(x)\mathrm{e}^{-\frac{i\pi nx}{l}}\,dx \text{ при всех } n=0;\pm1;\pm2;\ldots.$$

Таким образом, комплексная форма записи ряда Фурье:

$$f(x)\sim\sum_{n=-\infty}^{+\infty}c_n\,\mathrm{e}^{\frac{i\pi nx}{l}},\ \text{где } c_n=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(x)\mathrm{e}^{-\frac{i\pi nx}{l}}\,dx.$$

§ 4. Интеграл Фурье. Преобразование Фурье

Пусть $f(x)$ – непериодическая функция, заданная на $(-\infty;\infty)$, но удовлетворяющая условиям теоремы Дирихле на любом конечном промежутке и пусть $\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|\,dx<\infty$ (функция абсолютно интегрируема на $(-\infty;\infty)$).

Рассмотрим ряд Фурье для функции $f(x)$ на $[-l;l]$ и обозначим $\omega_n=\dfrac{\pi n}{l}$:

$$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n\,\mathrm{e}^{i\omega_n x}=\frac{1}{2l}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{i\omega_n x}\int_{-l}^{l} f(t)\,\mathrm{e}^{-i\omega_n t}\,dt.$$

Можно показать, что при $l\to\infty$ получим

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{i\omega x}\,d\omega\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{e}^{-i\omega t}\,dt. \qquad (1)$$

Опр. 1. Эта формула называется ***формулой Фурье***, а интеграл в правой части равенства – ***интегралом Фурье***.

Замечание. Формула Фурье справедлива во всех точках непрерывности функции $f(x)$; в точках разрыва 1-го рода вместо $f(x)$ в левой части равенства должно быть $\dfrac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$.

Понятие о непрерывном и дискретном преобразованиях Фурье

Введя функцию

$$F(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{e}^{-i\omega t}\,dt, \qquad (2)$$

формулу Фурье можно записать (для всех точек непрерывности функции $f(x)$) в виде

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)\,\mathrm{e}^{i\omega x}\,d\omega. \qquad (3)$$

Опр. 2. Функция $F(\omega)$ называется ***преобразованием Фурье*** для функции $f(x)$; говорят, что формула (2) задает ***прямое***, а формула (3) – ***обратное преобразование Фурье***.

Преобразование Фурье закладывает основы многих методов, применяющихся в области цифровой обработки сигналов. Преобразование Фурье позволяет сопоставить сигналу, заданному во временной области, его эквивалентное представление в частотной области, а обратное преобразование Фурье позволяет по частотной характеристике сигнала определить соответствующий сигнал во временной области.

Интегральное (непрерывное) преобразование Фурье используется в теоретических исследованиях, когда известно аналитическое задание функции $f(x)$. На практике обычно имеют дело с дискретными данными, т. е. функция $f(x)$ задается набором ее значений $f_0, f_1, ..., f_{N-1}$ на некоторой сетке (обычно равномерной). В этом случае приходится считать, что за пределами этой сетки функция равна 0, и заменять интеграл интегральной суммой.

В случае равномерной сетки ***дискретное преобразование Фурье*** задается формулой:

$$F_n = \sum_{k=0}^{N-1} f_k \, \mathrm{e}^{-2\pi i \cdot \frac{kn}{N}}, \quad 0 \le n \le N-1,$$

и сводится к умножению вектора значений функции $f(x)$ на матрицу с элементами $\mathrm{e}^{-2\pi i \cdot \frac{kn}{N}}$, что требует $O(N^2)$ арифметических операций.

Однако можно существенно сократить число операций, используя *метод быстрого преобразования Фурье*. Если размерность вектора исходных данных $N = n_1 n_2 \cdot \ldots \cdot n_k$, то этот метод выполняет дискретное преобразование Фурье за $O((n_1 + n_2 + \ldots + n_k)N)$ операций и при этом повышает точность вычислений.