Лабораторная работа №5

1) Решить СЛАУ одним из итерационных методов (метод простых итераций, метод Якоби, метод Зейделя) с точностью 0.01 при заданном начальном приближении $(0.7m;1;2;0.5)$.

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 3m \\ x_1 - 4x_2 + x_3 - x_4 = m - 6 \\ -x_1 + x_2 + 4x_3 + x_4 = 15 - m \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - 5x_4 = m + 2 \end{cases}$$

m – вариант

2) Решить систему нелинейных уравнений одним из итерационных методов (метод простых итераций, метод Ньютона, метод Зейделя) с точностью 0.01.

1. $\begin{cases} \sin(x-1) = 1{,}3 - y \\ x - \sin(y+1) = 0{,}8 \end{cases}$

2. $\begin{cases} \sin y + 2x = 2 \\ \cos(x-1) + y = 0{,}7 \end{cases}$

3. $\begin{cases} \cos(x-1) + y = 0{,}5 \\ x - \cos y = 3 \end{cases}$

4. $\begin{cases} \cos y + x = 1{,}5 \\ 2y - \sin(x-0{,}5) = 1 \end{cases}$

5. $\begin{cases} \sin(x+1) - y = 1{,}2 \\ 2x + \cos y = 2 \end{cases}$

6. $\begin{cases} \sin(y+0{,}5) - x = 1 \\ \cos(x-2) + y = 0 \end{cases}$

7. $\begin{cases} \sin x + 2y = 2 \\ \cos(y-1) + x = 0{,}72 \end{cases}$

8. $\begin{cases} \cos(y+0{,}5) + x = 0{,}8 \\ \sin x - 2y = 1{,}6 \end{cases}$

9. $\begin{cases} \cos x + y = 1{,}5 \\ 2x - \sin(y-0{,}5) = 1 \end{cases}$

10. $\begin{cases} \sin(y-1) + x = 1{,}3 \\ y - \sin(x+1) = 0{,}8 \end{cases}$

11. $\begin{cases} \sin(x+0{,}5) - y = 1 \\ \cos(y-2) + x = 0 \end{cases}$

12. $\begin{cases} 2x - \cos(y+1) = 0 \\ y + \sin x = -0{,}4 \end{cases}$

13. $\begin{cases} 2y - \cos(x+1) = 0 \\ x + \sin y = -0{,}4 \end{cases}$

14. $\begin{cases} \cos(y+0{,}5) - x = 2 \\ \sin x - 2y = 1 \end{cases}$

15. $\begin{cases} \cos(x+0{,}5) - y = 2 \\ \sin y - 2x = 1 \end{cases}$

16. $\begin{cases} \sin(x+1) - y = 1 \\ 2x + \cos y = 2 \end{cases}$

4. Численные методы решения систем нелинейных уравнений

Требуется решить систему нелинейных уравнений вида:

$$
\begin{aligned}
&F_1(x_1, x_2, ..., x_n) = 0 \\
&F_2(x_1, x_2, ..., x_n) = 0 \\
&\dots \\
&F_n(x_1, x_2, ..., x_n) = 0 .
\end{aligned}
\qquad (4.1)
$$

4.1. Метод простой итерации (метод Якоби) для систем нелинейных уравнений

Систему нелинейных уравнений (4.1) после преобразований

$$x_i = x_i - F_i(x) / M_i , \qquad i = 1, 2, 3, ..., n$$

(здесь M_i определяются из условия сходимости), представим в виде:

$$
\begin{aligned}
&x_1 = f_1(x_1, x_2, ..., x_n) \\
&x_2 = f_2(x_1, x_2, ..., x_n) \\
&\dots \\
&x_n = f_n(x_1, x_2, ..., x_n)
\end{aligned}
\qquad (4.2)
$$

Из системы (4.2) легко получить итерационные формулы метода Якоби. Возьмем в качестве начального приближения какую-нибудь совокупность чисел $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, ..., x_n^{(0)}$. Подставляя их в правую часть (4.2) вместо переменных $x_1, x_2, ..., x_n$, получим новое приближение к решению исходной системы:

$$
\begin{aligned}
&x_1^{(1)} = f_1(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, ..., x_n^{(0)}) \\
&x_2^{(1)} = f_2(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, ..., x_n^{(0)}) \\
&\dots \\
&x_n^{(1)} = f_n(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, ..., x_n^{(0)})
\end{aligned}
\qquad (4.3)
$$

Эта операция получения первого приближения $x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, ..., x_n^{(1)}$ решения системы уравнения (4.2) называется первым шагом итерации. Подставляя полученное решение в правую часть уравнения (4.2) получим следующее итерационное приближение: $x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, ..., x_n^{(2)}$ и т.д.:

$$x_i^{(k+1)} = f_i(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, ..., x_n^{(k)}), \qquad i = 1, 2, 3, ..., n. \tag{4.4}$$

Итерационный процесс можно считать законченным, если все значения переменных $(k+1)$-ой итерации, отличаются от значений соответствующих переменных предыдущей итерации, на величину по модулю меньшую заданной точности ε, т.е. если:

$$\max_i |x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)}| < \varepsilon \tag{4.5}$$

4.2. Метод Зейделя для систем нелинейных уравнений

$$\begin{aligned}
x_1^{(k+1)} &= f_1(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, ..., x_n^{(k)}) \\
x_2^{(k+1)} &= f_2(x_1^{(k+1)}, x_2^{(k)}, ..., x_n^{(k)}) \\
x_3^{(k+1)} &= f_3(x_1^{(k+1)}, x_2^{(k+1)}, ..., x_n^{(k)}) \\
&\dots \\
x_n^{(k+1)} &= f_n(x_1^{(k+1)}, x_2^{(k+1)}, ..., x_n^{(k+1)})
\end{aligned} \tag{4.6}$$

При решении систем нелинейных уравнений необходимо определить приемлемое начальное приближение. Для случая двух уравнений с двумя неизвестными начальное приближение находится графически.

Сходимость метода Зейделя (Якоби тоже) зависит от вида функции в (4.2), вернее она зависит от матрицы, составленной из частных производных:

$$F' = \begin{pmatrix} f'_{11} & f'_{12} & f'_{13} & \dots & f'_{1n} \\ f'_{21} & f'_{22} & f'_{23} & \dots & f'_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ f'_{n1} & f'_{n2} & f'_{n3} & \dots & f'_{nn} \end{pmatrix}, \tag{4.7}$$

где $f'_{ij} = \dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}$.

Итерационный процесс сходится, если сумма модулей каждой строки F' меньше единицы в некоторой окрестности корня:

$$|f'_{i1}| + |f'_{i2}| + |f'_{i3}| + ... + + |f'_{in}| < 1, \quad i = 1, 2, 3, ..., n$$

или

$$\max_{1 \le i \le n} \sum_{j=1}^{n} |f'_{ij}| < 1$$

Пример 4.1. Найти решение системы методом Зейделя с точностью $\varepsilon = 0{,}001$:

$$\begin{aligned} F(x,y) &= 2\sin(x+1) - y - 0{,}5 = 0 \\ G(x,y) &= 10\cos(y-1) - x + 0{,}4 = 0 \end{aligned} \qquad (4.8)$$

Решение: Представим (4.8) в виде (4.5):

$$\begin{aligned} x &= f_1(x,y) = x - (2\sin(x+1) - y - 0{,}5)/M_1 \\ y &= f_2(x,y) = y - (10\cos(y-1) - x + 0{,}4)/M_2 \end{aligned} \qquad (4.9)$$

Задаем начальные приближения $x_0 = -1$, $y_0 = -0{,}7$.

Запишем достаточное условие сходимости и определяем M_1, M_2:

$$F' = \begin{pmatrix} f'_{1x} & f'_{1y} \\ f'_{2x} & f'_{2y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - 2\cos(x+1)/M_1 & 1/M_1 \\ -1/M_2 & 1 + 10\sin(y-1)/M_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} &|1 - 2\cos(x_0+1)/M_1| + |1/M_1| < 1 \\ &|-1/M_2| + |1 + 10\sin(y_0 - 1)/M_2| < 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &|1 - 2\cos(1+1)/M_1| + |1/M_1| < 1 \\ &|-1/M_2| + |1 + 10\sin(-0{,}7 - 1)/M_2| < 1 \end{aligned}$$

$$|1 - 2/M_1| + |1/M_1| < 1 \ \text{ и } \ |-1/M_2| + |1 - 9{,}91665\ /M_2| < 1$$

Определяем частные значения $M_1 = 2$, $M_2 = 10$, которые удовлетворяют неравенствам

$$1 - 2/2 + 1/2 < 1 \ \text{ и } \ 1/10 - 9{,}91665/10 < 1$$

Переходим к реализации итерационного процесса:

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= x_k - (2\sin(x_k + 1) - y_k - 0{,}5)/2 \\ y_{k+1} &= y_k - (10\cos(y_k - 1) - x_k + 0{,}4)/10 \end{aligned}$$

$$x_1 = x_0 - (2\sin(x_0+1) - y_0 - 0{,}5)/2 =$$
$$= -1 - (2\sin(-1+1) + 0{,}7 - 0{,}5)/2 = -1{,}1$$

$$y_1 = y_0 - (10\cos(y_0 - 1) - x_0 + 0{,}4)/10 =$$
$$= -0{,}7 - (10\cos(-0{,}7-1) + 1{,}1 + 0{,}4)/10 = -0{,}72116$$

$$x_2 = x_1 - (2\sin(x_1+1) - y_1 - 0{,}5)/2 =$$
$$= -1{,}1 - (2\sin(-1{,}1+1) + 0{,}72116 - 0{,}5)/2 = -1{,}11075$$

$$y_2 = y_1 - (10\cos(y_1 - 1) - x_1 + 0{,}4)/10 =$$
$$= -0{,}72116 - (10\cos(-0{,}72116 - 1) + 1{,}11075 + 0{,}4)/10 = -0{,}72244$$

$$x_3 = x_2 - (2\sin(x_2+1) - y_2 - 0{,}5)/2 =$$
$$= -1{,}11075 - (2\sin(-1{,}11075+1) + 0{,}72244 - 0{,}5)/2 = -1{,}11145$$
$$y_3 = y_2 - (10\cos(y_2-1) - x_2 + 0{,}4)/10 =$$
$$= -0{,}72244 - (10\cos(-0{,}72244-1) + 1{,}11145 + 0{,}4)/10 = -0{,}72252$$

Определяем погрешность по формуле $\max\limits_{1\le i\le n} | x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)} | < \varepsilon$:

$$|x_3 - x_2| = |-1{,}11145 + 1{,}11075| = 0{,}0007 < \varepsilon = 0{,}001$$

$$|y_3 - y_2| = |-0{,}72252 + 0{,}72244| = 0{,}00008 < \varepsilon = 0{,}001$$

Таким образом, имеем решение: $x^* = -1{,}1115$, $y^* = -0{,}7225$.

Метод Ньютона

Основная идея метода Ньютона состоит в выделении из уравнений системы линейных частей, которые являются главными при малых приращениях аргументов. Это позволяет свести исходную задачу к решению последовательности систем линейных уравнений.

Рассмотрим систему двух нелинейных уравнений с двумя неизвестными вида:

$$\begin{aligned} F(x,y) &= 0 \\ G(x,y) &= 0 \end{aligned} \qquad (4.10)$$

Пусть известно некоторое приближение x_k, y_k корня x^*, y^*. Тогда поправки $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$, $\Delta y_k = y_{k+1} - y_k$ можно найти, решая систему:

$$\begin{aligned} F(x_k + \Delta x_k, y_k + \Delta y_k) &= 0 \\ G(x_k + \Delta x_k, y_k + \Delta y_k) &= 0 \end{aligned} \qquad (4.11)$$

Для этого разложим функции F, G в ряд Тейлора по Δx_k, Δy_k. Сохранив только линейные по Δx_k, Δy_k части, получим систему линейных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial F(x_k,y_k)}{\partial x}\Delta x_k + \frac{\partial F(x_k,y_k)}{\partial y}\Delta y_k &= -F(x_k,y_k) \\ \frac{\partial G(x_k,y_k)}{\partial x}\Delta x_k + \frac{\partial G(x_k,y_k)}{\partial y}\Delta y_k &= -G(x_k,y_k) \end{aligned} \qquad (4.12)$$

относительно неизвестных поправок Δx_k, и Δy_k. Решая эту систему линейных уравнений, определяем значения Δx_k, Δy_k.

Таким образом, решение системы уравнений по методу Ньютона состоит в построении итерационной последовательности:

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= x_k + \Delta x_k \\ y_{k+1} &= y_k + \Delta y_k \end{aligned} \tag{4.13}$$

где Δx_k, Δy_k - решения систем линейных уравнений, вида (4.12) на каждом шаге итерации.

В методе Ньютона для обеспечения хорошей сходимости также важен правильный выбор начального приближения.

Пример 4.2. Найти решение системы (4.8) методом Ньютона с точностью $\varepsilon = 0{,}001$.

$$\begin{aligned} F(x, y) &= 2\sin(x+1) - y - 0{,}5 = 0 \\ G(x, y) &= 10\cos(y-1) - x + 0{,}4 = 0 \end{aligned} \tag{4.13}$$

Решение. Начальные приближения $x_0 = -1$, $y_0 = -0{,}7$. Определим частные производные:

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = 2\cos(x+1); \qquad \frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = -1$$

$$\frac{\partial G(x,y)}{\partial x} = -1 \qquad \frac{\partial G(x,y)}{\partial x} = -10\sin(y-1)$$

и, используя (4.12), построим систему линейных уравнений относительно поправок

$$\begin{cases} 2\cos(x_k+1)\Delta x_k & -1\cdot\Delta y_k & = & -2\sin(x_k+1) + y_k + 0{,}5 \\ -1\cdot\Delta x_k & -10\sin(y_k-1)\Delta y_k & = & -10\cos(y_k-1) - x_k + 0{,}4 \end{cases}$$

Подставляя начальные приближения $x_0 = -1$, $y_0 = -0{,}7$ и решая систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 2\Delta x_0 & -\Delta y_0 & = & -0{,}2 \\ -\Delta x_0 & +9{,}9166\Delta y_0 & = & -0{,}116 \end{cases},$$

определяем поправки на первом шаге итерации

$$\Delta x_0 = -0{,}1112, \quad \Delta y_0 = -0{,}0225$$

Далее начальное приближение уточняем по формулам (4.13)

$$x_1 = x_0 + \Delta x_0 = -1 - 0{,}1112 = -1{,}1112$$

$$y_1 = y_0 + \Delta y_0 = -0{,}7 - 0{,}0225 = -0{,}7225$$

Подставляя результаты первой итерации $x_1 = -1{,}1112$, $y_1 = -0{,}7225$ и решая систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 1{,}9876\Delta x_1 & -\Delta y_1 & = & -5{,}5806\cdot 10^{-4} \\ -\Delta x_1 & +9{,}8852\Delta y_1 & = & 2{,}4576\cdot 10^{-5} \end{cases},$$

определяем поправки на втором шаге итерации

$$\Delta x_1 = -2.945\cdot 10^{-4} \approx 0{,}0003,\quad \Delta y_1 = -2.73\cdot 10^{-5} \approx 0{,}00003$$

Далее x_1 и y_1 уточняем по формулам (4.12)

$$x_2 = x_1 + \Delta x_1 = -1{,}1112 - 0{,}0003 \approx -1{,}1115$$

$$y_2 = y_1 + \Delta y_1 = -0{,}7225 - 0{,}00003 \approx -0{,}7225$$

Определяем погрешность по формуле $\max\limits_{1\le i\le n} |x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)}| < \varepsilon$:

$$\left|x_2 - x_1\right| = \left|\Delta x_1\right| = 0{,}0003 < \varepsilon = 0{,}001$$

$$\left|y_2 - y_1\right| = \left|\Delta y_1\right| = 0{,}00003 < \varepsilon = 0{,}001$$

Таким образом, имеем решение: $x^* = -1{,}1115$, $y^* = -0{,}7225$.