Метод Z - буфера

1. Предварительные сведения

Рассмотрим пропорции (5.1) (см. учебник), которые служат для вывода формул пересчета координат из плоской системы координат (СК) XOY в оконную

$$\begin{cases} \dfrac{x - x_L}{x_H - x_L} = \dfrac{x^w - x_L^w}{x_H^w - x_L^w} \\ \dfrac{y - y_L}{y_H - y_L} = \dfrac{y^w - y_H^w}{y_L^w - y_H^w} \end{cases}$$

Пусть в качестве СК XOY выступает координатная плоскость $X^E O^E Y^E$ видовой СК $X^E Y^E Z^E$. Тогда вышеприведенные пропорции примут вид

$$\begin{cases} \dfrac{x^E - x_L^E}{x_H^E - x_L^E} = \dfrac{x^w - x_L^w}{x_H^w - x_L^w} \\ \dfrac{y^E - y_L^E}{y_H^E - y_L^E} = \dfrac{y^w - y_H^w}{y_L^w - y_H^w} \end{cases} \qquad (1.1)$$

Из (1) получаем выражения для пересчета оконных координат в СК $X^E O^E Y^E$

$$\begin{cases} x^E = x_L^E + \dfrac{x_H^E - x_L^E}{x_H^w - x_L^w}(x^w - x_L^w) \\ y^E = y_L^E + \dfrac{y_H^E - y_L^E}{y_L^w - y_H^w}(y^w - y_H^w) = y_L^E - \dfrac{y_H^E - y_L^E}{y_H^w - y_L^w}(y^w - y_H^w) \end{cases} \qquad (1.2)$$

Введем обозначения, аналогичные приведенным в главе 5:

$x_H^w - x_L^w = \Delta x^w$ – ширина области отображения в оконных координатах,

$x_H^E - x_L^E = \Delta x^E$ – ширина области отображения в координатах $X^E O^E Y^E$,

$y_H^w - y_L^w = \Delta y^w$ – высота области отображения в оконных координатах,

$y_H^E - y_L^E = \Delta y^E$ – высота области отображения в координатах $X^E O^E Y^E$.

Тогда выражение (2) можно переписать в виде

$$\begin{cases} x^E = x_L^E + \dfrac{\Delta x^E}{\Delta x^w}(x^w - x_L^w) \\ y^E = y_L^E - \dfrac{\Delta y^E}{\Delta y^w}(y^w - y_H^w) \end{cases} \tag{1.3}$$

или

$$\begin{cases} x^E = x_L^E + k_x^E (x^w - x_L^w) \\ y^E = y_L^E + k_y^E (y^w - y_H^w) \end{cases} \tag{1.4}$$

где

$$k_x^E = \frac{\Delta x^E}{\Delta x^w}, \qquad k_y^E = -\frac{\Delta y^E}{\Delta y^w}. \tag{1.5}$$

2. Определение видимой фигуры

Пусть в мировой декартовой СК XYZ заданы N фигур (для примера две: шар и эллипсоид, рис. 2.1), каждая из которых имеет свой номер n $(n = 0, 1, \ldots, N-1)$ и цвет $Color_n$. Известно положение камеры, координаты которой (центр видовой СК $X^E Y^E Z^E$ в мировой СК XYZ) могут быть определены как в мировой сферической СК, связанной с СК XYZ

$$\vec{r}_E = \vec{r}_E(r_E, \varphi_E, \theta_E), \tag{2.1}$$

где $r_E = |\vec{r}_E|$ – расстояние от начала СК XYZ до камеры, (φ_E, θ_E) – угловое положение камеры, так и в декартовой СК XYZ

$$\vec{r}_E = \vec{r}_E(x_E, y_E, z_E), \tag{2.1\_1}$$

где

$$\begin{cases} x_E = r_E \sin\theta_E \cos\varphi_E \\ y_E = r_E \sin\theta_E \sin\varphi_E \\ z_E = r_E \cos\theta_E \end{cases}. \tag{2.1\_2}$$

Задана также прямоугольна область D^w в окне Windows шириной Δx^w и высотой Δy^w пикселей (*pixel*), которая закрашивается некоторым цветом (цветом фона).

Необходимо отобразить заданные фигуры в аксонометрической проекции в области D^w окна Window.

Пусть $P_i^W = P_i^W(x_i^w, y_i^w)$ – произвольная точка (произвольный пиксел) в области D^w (рис. 2.1). Как известно, точке P_i^W соответствует точка $P_i^E = P_i^E(x_i^E, y_i^E, z_i^E) = P_i^E(x_i^E, y_i^E, 0)$ видовой СК $X^E Y^E Z^E$ (рис. 2.1).

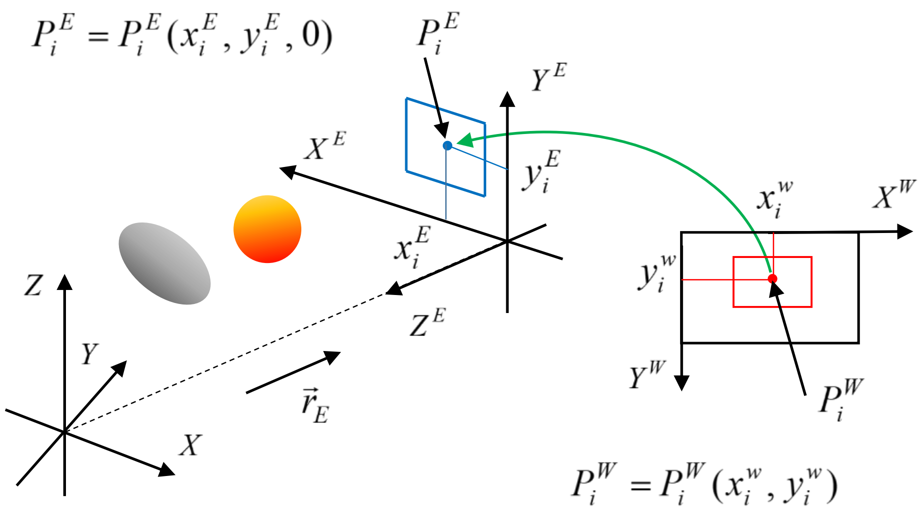

Рис. 2.1

Значения координат (x_i^E, y_i^E) определяются из выражений (1.4).

$$\begin{cases} x_i^E = x_L^E + k_x^E(x_i^w - x_L^w) \\ y_i^E = y_L^E + k_y^E(y_i^w - y_H^w) \end{cases} \tag{2.2}$$

При этом необходимые для использования в (1.4) параметры x_L^E, x_H^E, y_L^E и y_H^E должны быть известны.

Определим теперь координаты точки $P_i^E = P_i^E(x_i^E, y_i^E, 0)$ в мировой СК XYZ.

Запишем систему уравнений (10.15) (см. учебник), связывающих координаты некоторой точки в мировой и видовой системе координат.

$$\begin{cases} x^E = -x\sin\varphi + y\cos\varphi \\ y^E = -x\cos\theta\cos\varphi - y\cos\theta\sin\varphi + z\sin\theta \\ z^E = -x\sin\theta\cos\varphi - y\sin\theta\sin\varphi - z\cos\theta + r \end{cases},$$

которую представим в матричном виде

$$\begin{pmatrix} x^E \\ y^E \\ z^E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ -\cos\theta\cos\varphi & -\cos\theta\sin\varphi & \sin\theta \\ -\sin\theta\cos\varphi & -\sin\theta\sin\varphi & -\cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r \end{pmatrix}. \tag{2.3}$$

Выражение (2.3) перепишем в виде

$$\begin{pmatrix} -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ -\cos\theta\cos\varphi & -\cos\theta\sin\varphi & \sin\theta \\ -\sin\theta\cos\varphi & -\sin\theta\sin\varphi & -\cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^E \\ y^E \\ z^E \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r \end{pmatrix}. \tag{2.4}$$

Матричное уравнение (2.4) представим в форме

$$SP = P^E - R, \tag{2.5}$$

где

$$S = S(\varphi, \theta) = \begin{pmatrix} -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ -\cos\theta\cos\varphi & -\cos\theta\sin\varphi & \sin\theta \\ -\sin\theta\cos\varphi & -\sin\theta\sin\varphi & -\cos\theta \end{pmatrix}, \tag{2.6}$$

$$P = (x \quad y \quad z)^T \; - \tag{2.7}$$

координаты точки в мировой СК,

$$P^E = (x^E \quad y^E \quad z^E)^T \; - \tag{2.8}$$

координаты точки в видовой СК,

$$R = (0 \quad 0 \quad r_E)^T \; . \tag{2.9}$$

Из (2.5) находим, что

$$P = S^{-1}(P^E - R)\,. \tag{2.10}$$

Можно показать, что

$$S^{-1} = S^T\,, \tag{2.11}$$

где

$$S^T = \begin{pmatrix} -\sin\varphi & -\cos\varphi\cos\theta & -\cos\varphi\sin\theta \\ \cos\varphi & -\sin\varphi\cos\theta & -\sin\varphi\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} - \tag{2.12}$$

матрица, транспонированная по отношению к матрице S.

Тогда выражение (2.10) для координат точки P примет вид

$$P = S^T(P^E - R). \tag{2.13}$$

Для рассматриваемой нами точки $P_i^E = P_i^E(x_i^E, y_i^E, 0)$ получаем

$$P_i = S^T(\varphi_E, \theta_E)(P_i^E - R)\,, \tag{2.14}$$

где (рис. 2.2)

$$P_i = P_i(x_i, y_i, z_i) \; - \qquad (2.14\_1)$$

координаты точки P_i^E в мировой СК XYZ.

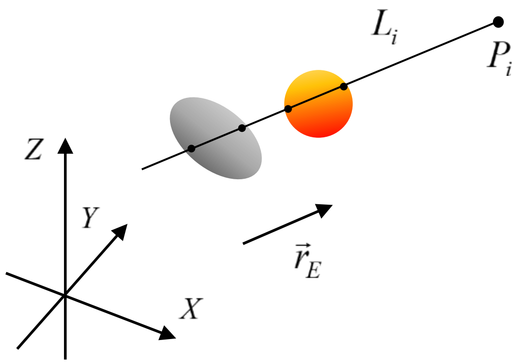

Рис. 2.2

Раскрывая содержимое матриц в (2.14), имеем

$$\begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin\varphi_E & -\cos\varphi_E\cos\theta_E & -\cos\varphi_E\sin\theta_E \\ \cos\varphi_E & -\sin\varphi_E\cos\theta_E & -\sin\varphi_E\sin\theta_E \\ 0 & \sin\theta_E & -\cos\theta_E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_i^E \\ y_i^E \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -r_E \end{pmatrix}. \qquad (2.15)$$

Выполняя матричные операции в (2.15), получаем

$$\begin{cases} x_i = -x_i^E \sin\varphi_E - y_i^E \cos\varphi_E \cos\theta_E \\ y_i = x_i^E \cos\varphi_E - y_i^E \sin\varphi_E \cos\theta_E \\ z_i = y_i^E \sin\theta_E - r_E \end{cases}. \qquad (2.16)$$

Далее, используя вектор $\vec{r}_E = \vec{r}_E(x_E, y_E, z_E)$ как направляющий, проведем через точку P_i прямую L_i (рис. 2.2).

$$\begin{cases} x = x_i + x_E t \\ y = y_i + y_E t, \\ z = z_i + z_E t \end{cases} \qquad (2.17)$$

Для фигуры с номером n $(n = 0, 1, \ldots, N-1)$ выполним действия, описанные ниже.

- Вычислим координаты ее точек пересечения с прямой L_i. Если точек пересечения нет, то переходим к фигуре с номером $n+1$.
- Вычислим расстояние d_n от точки P_i до ближайшей к P_i точки пересечения прямой L_i и фигуры с номером n.
- Из полученного множества расстояний $\{d_n\}$, $n \in \{0, 1, \ldots, N-1\}$, выбираем наименьшее значение $d_n^{min} = \min\{d_n\}$.
- Для фигуры, у которой $d_n = d_n^{min}$ вычисляем интенсивность отраженного света I_n в точке, для которой определено расстояние d_n.
- Точку в заданной области окна Windows $P_i^W = P_i^W(x_i^w, y_i^w)$ закрашиваем цветом $Color_n$ с интенсивностью I_n.

Таким образом, точка P_i^W в окне Windows будет соответствовать ближайшей точке (вдоль прямой L_i) ближайшей к камере фигуре.

Все вышеописанные действия применяются по отношению к каждой точке с номером i $(i = 0, 1, \ldots, \Delta x^w \Delta y^w - 1)$ заданной области окна Windows.