Поверхности второго порядка

1. Общее описание

Поверхностью второго порядка называется геометрическая фигура, которая в некоторой декартовой системе координат описывается уравнением

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + b_1x + b_2y + b_3z + c = 0 \qquad 1.1$$

При этом предполагается, что по крайней мере один из коэффициентов a_{ij} $(i,\ j = 1, 2, 3)$ отличен от нуля.

Любая плоскость пересекает поверхность второго порядка по кривой второго порядка (включая их вырожденные случаи). Различают шесть типов поверхностей второго порядка:

1. сфера;
2. эллипсоиды;
3. гиперболоиды;
4. параболоиды;
5. конусы;
6. цилиндры.

Вышеперечисленные фигуры показаны на рисунках 1.1 –1.8.

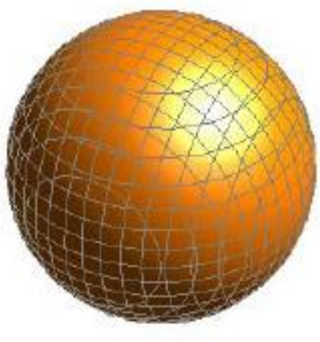

Рис. 1.1 Сфера

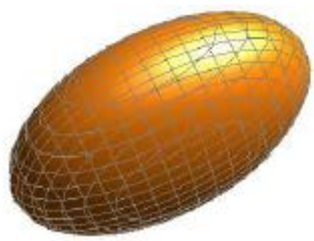

Рис. 1.2. Эллипсоид

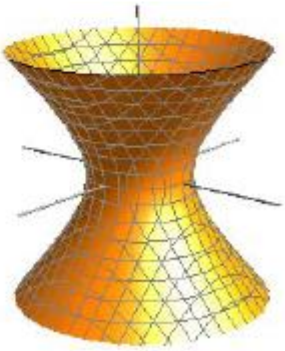

Рис. 1.3. Однополостный гиперболоид

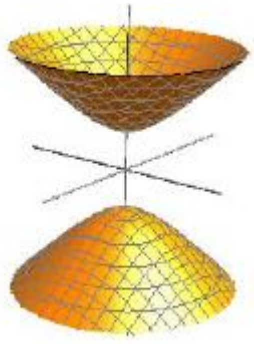

Рис. 1.4. Двухполостный гиперболоид

Рис. 1.5. Эллиптический параболоид

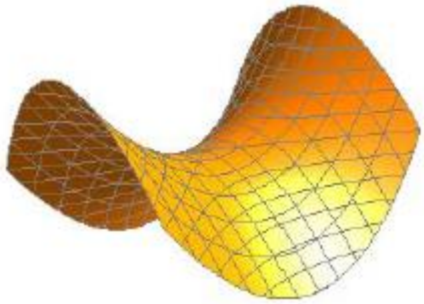

Рис. 1.6. Гиперболический параболоид

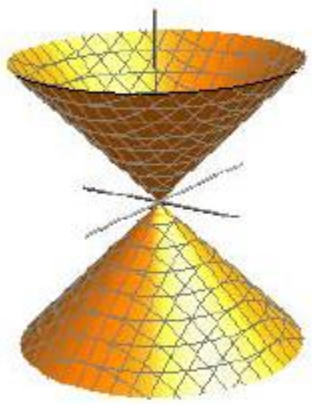

Рис. 1.7. Конус

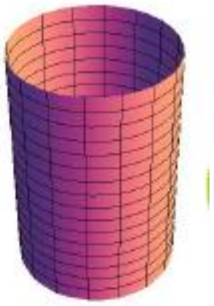

Рис. 1.8. Цилиндр

2. Сфера

Сфера представляет собой геометрическое место точек пространства, равноудалённых от некоторой точки, называемой *центром* сферы.

Пусть $P = P(x, y, z)$ и $P_0(x_0, y_0, z_0)$ соответственно текущая точка сферы и ее центр в декартовой системе координат (СК) XYZ (рис. 2.1).

Пусть также $\vec{r}_P = \vec{r}_P(x, y, z)$ и $\vec{r}_0 = \vec{r}_0(x_0, y_0, z_0)$ соответствующие радиус – векторы точек P и P_0 относительно точки O – начала координат СК

XYZ и $\vec{r} = \vec{r}(x, y, z)$ радиус – вектор точки P относительно центра сферы P_0.

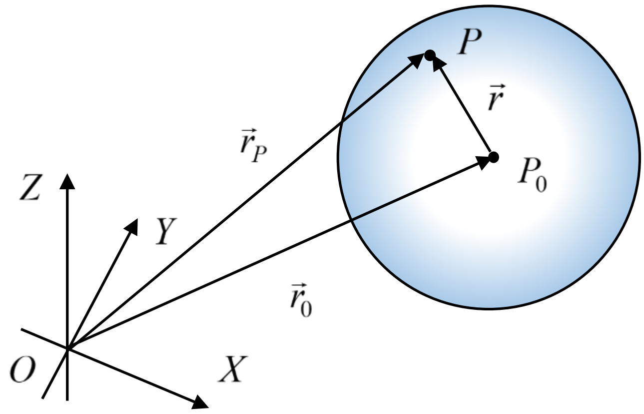

Рис. 2.1

Тогда

$$\vec{r} = \vec{r}_P - \vec{r}_0 = (x - x_0)\vec{i} + (y - y_0)\vec{j} + (z - z_0)\vec{k} \qquad (2.1)$$

и расстояние от текущей точки сферы P до ее центра P_0 (рис. 2.1) будет определяться выражением

$$r = |\vec{r}| = |\vec{r}_P - \vec{r}_0| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2} = const, \qquad (2.2)$$

Представляя (2.2) в виде

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2, \qquad (2.3)$$

получаем уравнение сферы радиуса r с центром в точке (x_0, y_0, z_0).

Если центр сферы расположен в начале декартовой системы координат, то уравнение (2.3) принимает вид

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2 \qquad (2.4)$$

и называется *каноническим уравнением сферы*.

Параметрические уравнения сферы с центром в точке $P_0(x_0, y_0, z_0)$ имеет вид

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi\ , \quad \varphi\in[0, 2\pi),\ \ \theta\in[0, \pi) \\ z = r\cos\theta \end{cases} \qquad (2.5)$$

Вычислим вектор нормали к поверхности сферы в точке $P = P(x, y, z)$. Под вектором нормали к поверхности сферы в точке P будем понимать вектор, перпендикулярный к касательной плоскости сферы в указанной точке.

Представим уравнение сферы (2.3) в виде

$$F(x, y, z) = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 - r^2 = 0, \qquad (2.6)$$

Известно [], что вектор нормали к поверхности, неявно заданной уравнением $F(x, y, z) = 0$, в ее произвольной точке $P = P(x, y, z)$ определяется как

$$\vec{n}_P = grad\, F = \frac{\partial F}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial F}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial F}{\partial z}\vec{k} \qquad (2.7)$$

Подставляя в (2.7) выражение (2.6) функции $F(x, y, z)$ для сферы, получаем

$$\vec{n}_P = 2(x - x_0)\vec{i} + 2(y - y_0)\vec{j} + 2(z - z_0)\vec{k} = 2\vec{n} = 2\vec{r}\,, \qquad (2.8)$$

где

$$\vec{n} = \vec{n}(x, y, z) = (x - x_0)\vec{i} + (y - y_0)\vec{j} + (z - z_0)\vec{k} = \vec{r}(x, y, z)\,. \qquad (2.9)$$

Вектора $\vec{n}_P$ и $\vec{n}$ отличаются только масштабным коэффициентом 2. Поэтому в качестве вектора нормали можно использовать вектор $\vec{n}$. Вектор $\vec{n}$, как видно из (2.9), совпадает с радиус – вектором точки сферы, относительно ее центра, для которой вычисляется вектор нормали.

Рассмотрим вопрос о взаимном положении сферы и прямой линии в пространстве. Пусть в декартовой СК задана сфера (2.3) $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2$ и некоторая прямая L с направляющим вектором $\vec{q} = \vec{q}(m, n, p)$, проходящая через точку $P_L = P_L(x_P, y_P, z_P)$ (рис. 2.2 – 2.4). Необходимо установить положение прямой L относительно заданной сферы.

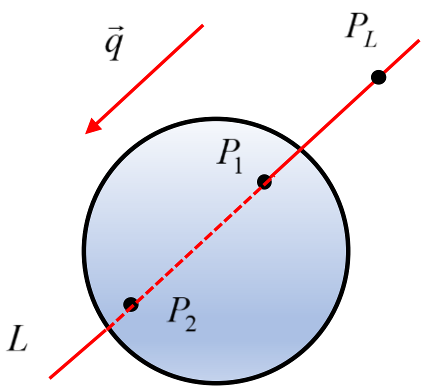

Рис. 2.2

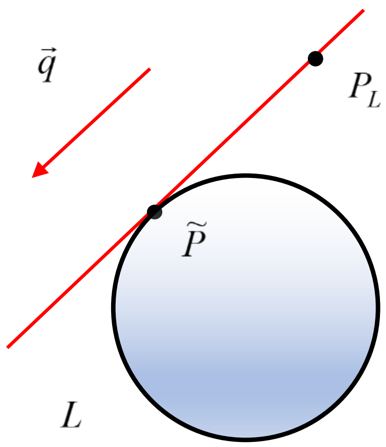

Рис. 2.3

Представим прямую L, проходящую через точку P параметрической форме

$$\begin{cases} x = x_P + mt \\ y = y_P + nt \\ z = z_P + pt \end{cases},$$

Подставляя значения координат (x, y, z) в уравнение сферы (2.3), получаем

$$(x_P - x_0 + mt)^2 + (y_P - y_0 + nt)^2 + (z_P - z_0 + pt)^2 = r^2 . \qquad (2.10)$$

После элементарных преобразований уравнение (2.10) приобретает вид квадратного уравнения относительно параметра t

$$t^2 + 2at + b = 0 , \qquad (2.11)$$

где

$$a = \frac{m(x_P - x_0) + n(y_P - y_0) + p(z_P - z_0)}{m^2 + n^2 + p^2} \tag{2.12}$$

и

$$b = \frac{(x_P - x_0)^2 + (y_P - y_0)^2 + (z_P - z_0)^2 - r^2}{m^2 + n^2 + p^2} \tag{2.13}$$

Представим выражения для коэффициентов a и b в более компактной форме.

Пусть

$$\vec{r}_{PL} = \vec{r}_{PL}(x_P, y_P, z_P) - \tag{2.14}$$

радиус – вектор точки P_L относительно начала декартовой СК XYZ.

Тогда выражения (2.12) и (2.13 для коэффициентов a_1 и b_1 можно записать в виде

$$a = \frac{\vec{q} \cdot (\vec{r}_{PL} - \vec{r}_0)}{|\vec{q}|^2} \tag{2.15}$$

и

$$b = \frac{|\vec{r}_{PL} - \vec{r}_0|^2 - r^2}{|\vec{q}|^2}. \tag{2.16}$$

Представим теперь координаты точек P_L, P_0 и направляющего вектора $\vec{q}$ в виде

$$\begin{gathered} P_L = (x_P \quad y_P \quad z_P)^T,\ P_0 = (x_0 \quad y_0 \quad z_0)^T, \\ Q = (m \quad n \quad p)^T. \end{gathered} \tag{2.17}$$

В этом случае выражения (2.12) и (2.13 для коэффициентов a_1 и b_1 принимают вид

$$a = \frac{Q^T (P_L - P_0)}{Q^T Q} \tag{2.18}$$

и

$$b = \frac{(P_L - P_0)^T (P_L - P_0) - r^2}{Q^T Q} \tag{2.19}$$

Решая уравнение (2.11), находим

$$t_{1,2} = -a \pm \sqrt{D}, \tag{2.20}$$

где

$$D = a^2 - b \text{ –} \tag{2.21}$$

дискриминант квадратного уравнения (2.11).

В зависимости от значения D возможны три варианта расположения рассматриваемой прямой L относительно сферы:

1. $D > 0$.

В этом случае из выражения (2.20) получаем два значения параметра t

$$\begin{cases} t_1 = -a + \sqrt{D} \\ t_2 = -a - \sqrt{D} \end{cases}. \tag{2.22}$$

Полученным значениям t_1 и t_2 соответствуют две точки пересечения прямой L и сферы $P_1 = P_1(x_1, y_1, z_1)$ и $P_2 = P_2(x_2, y_2, z_2)$ (рис. 2.2), где

$$\begin{cases} x_1 = x_P + mt_1 \\ y_1 = y_P + nt_1 \\ z_1 = z_P + pt_1 \end{cases} \tag{2.23}$$

и

$$\begin{cases} x_2 = x_P + mt_2 \\ y_2 = y_P + nt_2 \\ z_2 = z_P + pt_2 \end{cases}. \tag{2.24}$$

Расстояние от точки P_L до точки пересечения 1:

$$d_1 = \sqrt{(x_1 - x_P)^2 + (y_1 - y_P)^2 + (z_1 - z_P)^2} = \\ = \sqrt{(mt_1)^2 + (nt_1)^2 + (pt_1)^2} = |t_1|\sqrt{m^2 + n^2 + p^2} = |t_1| \cdot |\vec{q}| \qquad (2.24\_1)$$

Расстояние от точки P_L до точки пересечения 2:

$$d_2 = |t_2| \cdot |\vec{q}|. \qquad (2.24\_2)$$

2. $D = 0$.

В этом случае

$$t_1 = t_2 = \tilde{t} = -a \qquad (2.25)$$

и

$$\begin{cases} \tilde{x} = x_P + m\tilde{t} \\ \tilde{y} = y_P + n\tilde{t} \\ \tilde{z} = z_P + p\tilde{t} \end{cases}. \qquad (2.26)$$

Последнее означает, что прямая L касается сферы в точке $\tilde{P} = \tilde{P}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$ (лежит в плоскости касательной к сфере в точке $\tilde{P}$), рис. 2.3.

Расстояние от точки P_L до точки касания:

$$d = \sqrt{(\tilde{x} - x_P)^2 + (\tilde{y} - y_P)^2 + (\tilde{z} - z_P)^2} = \\ = \sqrt{(m\tilde{t})^2 + (n\tilde{t})^2 + (p\tilde{t})^2} = |\tilde{t}|\sqrt{m^2 + n^2 + p^2} = |\tilde{t}| \cdot |\vec{q}| \qquad (2.26\_1)$$

3. $D < 0$.

В этом случае уравнение (2.11) не имеет решения в действительных числах. Это означает, что прямая L проходит мимо сферы (рис. 2.4).

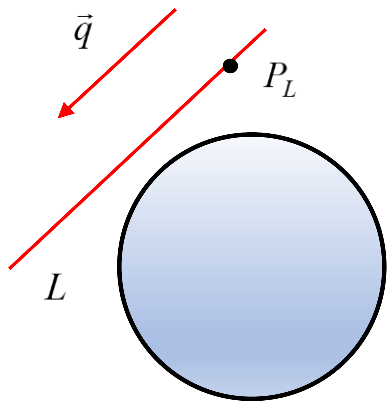

Рис. 2.4

3. Эллипсоид

Эллипсоидом называется поверхность, которая в некоторой декартовой системе координат XYZ описывается уравнением

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1. \tag{3.1}$$

Это равенство называется *каноническим уравнением эллипсоида*. Величины a, b и c называются полуосями эллипсоида (рис. 3.1).

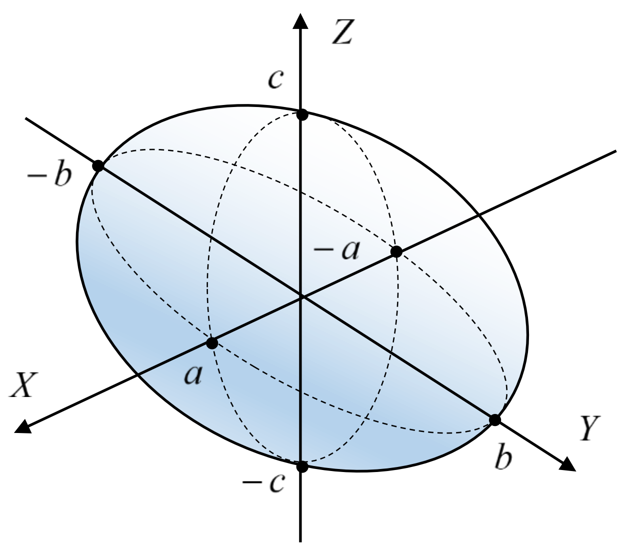

Рис. 3.1

Эллипсоид может быть получен равномерным сжатием или растяжением сферы $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ вдоль трёх взаимно перпендикулярных осей. Говоря иначе, уравнение эллипсоида получается из уравнения сферы масштабным преобразованием

$$x \to \frac{r}{a}x,\ \ y \to \frac{r}{b}y,\ \ z \to \frac{r}{c}z. \tag{3.2}$$

Если центр эллипсоида находится в точке $P_0 = P_0(x_0, y_0, z_0)$, то уравнение (3.1) преобразуется к виду

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} + \frac{(z-z_0)^2}{c^2} = 1. \qquad 3.3)$$

Параметрические уравнения эллипсоида имеют вид

$$\begin{cases} x = x_0 + a\sin\theta\cos\varphi \\ y = y_0 + b\sin\theta\sin\varphi\ , \\ z = z_0 + c\cos\theta \end{cases} \tag{3.4}$$

где $\varphi \in [0, 2\pi)$ и $\theta \in [0, \pi]$,

Эллипсоид, все оси которого различны, называется *трехосным*. Можно показать, что сечением эллипсоида произвольной плоскостью является эллипс.

Если какие-либо две оси эллипсоида одинаковы, то эллипсоид называют *сфероидом*.

В этом случае эллипсоид является телом, образованным вращением половины дуги эллипса вокруг оси, соединяющей концы этой дуги. Пусть, например, $b = c$. Тогда эллипсоид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1. \tag{3.5}$$

образован вращением верхней половины дуги эллипса (рис. 3.2)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{3.6}$$

вокруг оси X .

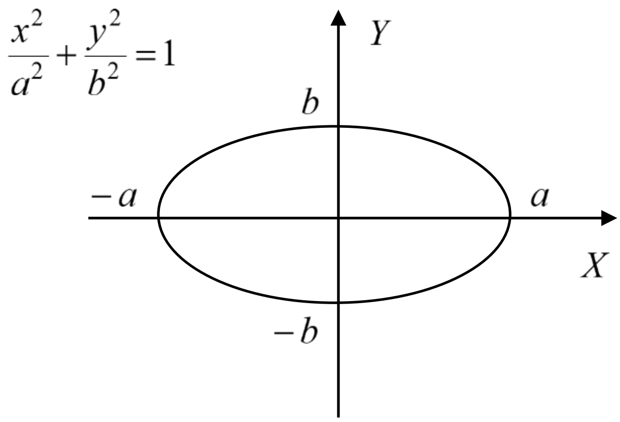

Рис. 3.2

Вычислим вектор нормали к поверхности эллипсоида в точке $P = P(x, y, z)$. Под вектором нормали к поверхности эллипсоида в точке P будем понимать вектор, перпендикулярный к касательной плоскости эллипсоида в указанной точке.

Представим уравнение эллипсоида (3.3) в виде

$$F(x, y, z) = \frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} + \frac{(z - z_0)^2}{c^2} - 1 = 0, \tag{3.7}$$

Вычисляя градиент (2.7) функции $F(x, y, z)$, находим вектор нормали к поверхности эллипсоида в точке P.

$$\begin{aligned} \vec{n}_P &= grad\, F = \frac{\partial F}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial F}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial F}{\partial z}\vec{k} = \\ &= \frac{2(x - x_0)}{a^2}\vec{i} + \frac{2(y - y_0)}{b^2}\vec{j} + \frac{2(z - z_0)}{c^2}\vec{k} = 2\vec{n} \end{aligned}, \tag{3.8}$$

где

$$\vec{n} = \frac{(x - x_0)}{a^2}\vec{i} + \frac{(y - y_0)}{b^2}\vec{j} + \frac{(z - z_0)}{c^2}\vec{k}, \qquad (3.9)$$

Вектора $\vec{n}_P$ и $\vec{n}$ отличаются только масштабным коэффициентом 2. Поэтому в качестве вектора нормали к поверхности эллипсоида можно использовать вектор $\vec{n}$.

Рассмотрим теперь вопрос о взаимном положении эллипсоида и прямой линии в пространстве. Пусть в декартовой СК задан эллипсоид (3.3) $\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} + \frac{(z - z_0)^2}{c^2} = 1$ и некоторая прямая L с направляющим вектором $\vec{q} = \vec{q}(m, n, p)$, проходящая через точку $P_L = P_L(x_P, y_P, z_P)$ (рис. 3.3 – 3.5). Необходимо установить положение прямой L относительно заданного эллипсоида.

Представим прямую L, проходящую через точку P параметрической форме

$$\begin{cases} x = x_P + mt \\ y = y_P + nt \\ z = z_P + pt \end{cases},$$

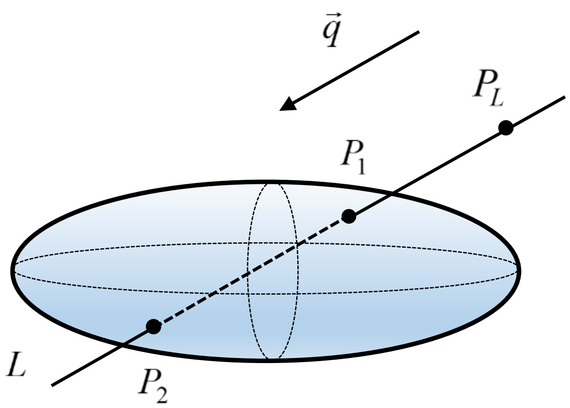

Рис. 3.3

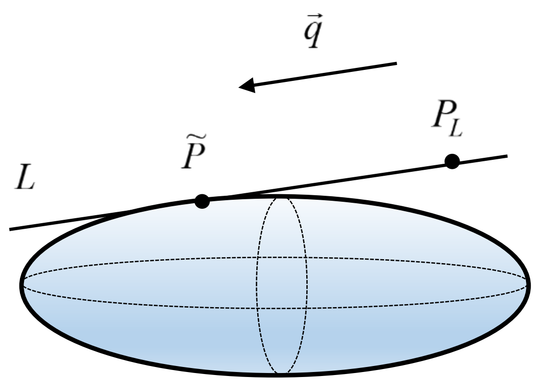

Рис. 3.4

Подставляя значения координат (x, y, z) в уравнение эллипсоида (3.3), получаем

$$\left[\frac{x_P - x_0}{a} + \frac{m}{a}t\right]^2 + \left[\frac{y_P - y_0}{b} + \frac{n}{b}t\right]^2 + \left[\frac{z_P - z_0}{c} + \frac{p}{c}t\right]^2 = 1. \tag{3.10}$$

После элементарных преобразований уравнение (3.10) приобретает вид квадратного уравнения относительно параметра t

$$t^2 + 2a_1 t + b_1 = 0, \tag{3.11}$$

где

$$a_1 = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}, \qquad (3.12)$$

$$b_1 = \frac{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2 - 1}{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}, \qquad (3.12)$$

$$a_x = \frac{x_P - x_0}{a}, \quad b_x = \frac{m}{a}, \tag{3.13}$$

$$a_y = \frac{y_P - y_0}{b}, \quad b_y = \frac{n}{b}, \tag{3.14}$$

$$a_z = \frac{z_P - z_0}{c}, \quad b_z = \frac{p}{c} \tag{3.15}$$

Представим наборы коэффициентов (3.13) – (3.15) в виде

$$A = (a_x \quad a_y \quad a_z)^T, \quad B = (b_x \quad b_y \quad b_z)^T \tag{3.16}$$

Тогда выражения (3.12) и (3.13) для коэффициентов a_1 и b_1 соответственно можно представить в виде

$$a_1 = \frac{A^T B}{B^T B}, \quad b_1 = \frac{A^T A - 1}{B^T B} \tag{3.17}$$

Решая уравнение (3.11), находим

$$t_{1,2} = -a_1 \pm \sqrt{D}, \tag{3.18}$$

где

$$D = a_1^2 - b_1 \; - \tag{3.19}$$

дискриминант квадратного уравнения (3.11).

В зависимости от значения D возможны три варианта расположения рассматриваемой прямой L относительно эллипсоида:

1. $D > 0$

В этом случае из выражения (3.18) получаем два значения параметра t

$$\begin{cases} t_1 = -a_1 + \sqrt{D} \\ t_2 = -a_1 - \sqrt{D} \end{cases}. \tag{3.20}$$

Полученным значениям t_1 и t_2 соответствуют две точки пересечения прямой L и сферы $P_1 = P_1(x_1, y_1, z_1)$ и $P_2 = P_2(x_2, y_2, z_2)$ (рис. 3.3), где

$$\begin{cases} x_1 = x_P + mt_1 \\ y_1 = y_P + nt_1 \\ z_1 = z_P + pt_1 \end{cases} \tag{3.21}$$

и

$$\begin{cases} x_2 = x_P + mt_2 \\ y_2 = y_P + nt_2 \\ z_2 = z_P + pt_2 \end{cases}. \tag{3.22}$$

Расстояние от точки P_L до точек пересечения 1 и 2 определяются выражениями (2.24_1) и (2.24_2) соответственно

$$d_1 = |t_1| \cdot |\vec{q}|, \quad d_2 = |t_2| \cdot |\vec{q}|$$

2. $D = 0$

В этом случае

$$t_1 = t_2 = \tilde{t} = -a \qquad (3.25)$$

и

$$\begin{cases} \tilde{x} = x_P + m\tilde{t} \\ \tilde{y} = y_P + n\tilde{t} \\ \tilde{z} = z_P + p\tilde{t} \end{cases}. \qquad (3.26)$$

Последнее означает, что прямая L касается эллипсоида в точке $\tilde{P} = \tilde{P}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$ (лежит в плоскости касательной к эллипсоиду в точке $\tilde{P}$), рис. 3.4.

Расстояние от точки P_L до точки касания определяется выражением (2.26_1):

$$d = |\tilde{t}| \cdot |\vec{q}|.$$

3. $D < 0$

В этом случае уравнение (3.11) не имеет решения в действительных числах. Это означает, что прямая L проходит мимо эллипсоида (рис. 3.5).

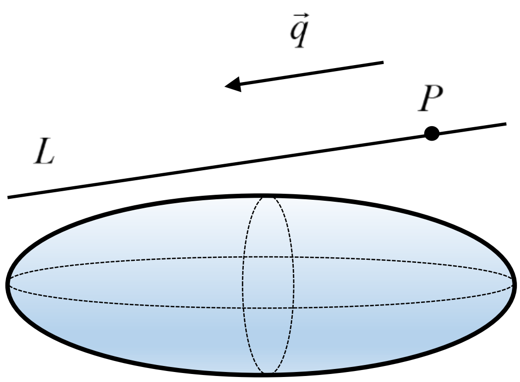

Рис. 3.5