1. Кривые второго порядка

Кривой второго порядка называется линия, определяемая уравнением *второй* степени относительно текущих декартовых координат. В общем случае это уравнение имеет вид:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0, \tag{1}$$

где

$$A^2 + B^2 + C^2 \neq 0, \tag{2}$$

т.е. по крайней мере один из коэффициентов A, B, C не равен нулю. При этом степень уравнения кривой не зависит от выбора декартовой системы координат.

В зависимости от значений коэффициентов A, B, C, D, E, F уравнение описывает различные виды кривых второго порядка на плоскости, таких как окружность, эллипс, парабола, гипербола и другие.

1.1. Окружность

Окружностью называется *замкнутая кривая на плоскости*, все точки $P(x, y)$ которой находятся на одинаковом расстоянии r от фиксированной точки плоскости $P_0(x_0, y_0)$. Число r называется *радиусом* окружности, точка P_0 – *центром* окружности (рис. 1.1.1).

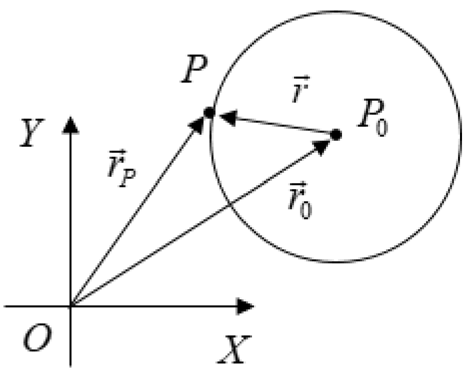

Рис. 1.1.1

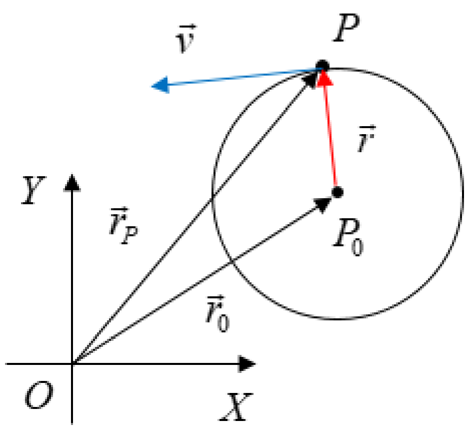

Рис. 1.1.2

Пусть $P = P(x, y)$ и $P_0(x_0, y_0)$ соответственно текущая точка окружности и ее центр в декартовой системе координат (СК) XOY (рис. 1.1.1).

Пусть также $\vec{r}_P = \vec{r}_P(x, y)$ и $\vec{r}_0 = \vec{r}_0(x_0, y_0)$ соответствующие радиус – векторы точек P и P_0 относительно точки O – начала координат СК XOY и $\vec{r} = \vec{r}(x, y)$ радиус – вектор точки P относительно центра окружности P_0.

Тогда

$$\vec{r} = \vec{r}_P - \vec{r}_0 = (x - x_0)\vec{i} + (y - y_0)\vec{j} \qquad (3)$$

и расстояние от текущей точки окружности P до ее центра P_0 (рис. 1.1.1) будет определяться выражением

$$r = |\vec{r}| = |\vec{r}_P - \vec{r}_0| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = const, \qquad (3\_1)$$

Представляя (3_1) в виде

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2, \qquad (4)$$

получаем уравнение окружности радиуса r с центром в точке (x_0, y_0).

Окружность разбивает плоскость на две части – *конечную внутреннюю* и *бесконечную внешнюю*. Внутренность окружности называется *кругом*. Граничные точки (то есть саму окружность) в зависимости от подхода, круг может включать или не включать.

Определим теперь условия, при которых общее уравнение кривой второго порядка (1) представляет собой окружность.

Пусть в (1) $A = C$ и $B = 0$. Не ограничивая общности, можно считать, что $A = C = 1$. В противном случае мы разделили бы обе части уравнения (1) на A).

Таким образом, можно считать, что исследуемое уравнение имеет вид

$$x^2 + y^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0, \qquad (5)$$

Выделим в нем полные квадраты по x и по y.

$$(x^2 + 2Dx + D^2) + (y^2 + 2Ey + E^2) + F - D^2 - E^2 = 0. \qquad (6)$$

Из (6) получаем, что

$$(x+D)^2+(y+E)^2=D^2+E^2-F\,. \qquad (7)$$

Возможны три случая:

1. $D^2+E^2-F>0$, тогда уравнение (7) является уравнением окружности с центром в точке $(-D,-E)$ и радиусом $r=\sqrt{D^2+E^2-F}$;
2. $D^2+E^2-F<0$, тогда уравнение (7) ничего не задает;
3. $D^2+E^2-F=0$, тогда уравнению (7) удовлетворяет только одна точка $(-D,-E)$.

Представим теперь уравнение окружности (4) в виде

$$\left(\frac{x-x_0}{r}\right)^2+\left(\frac{y-y_0}{r}\right)^2=1\,. \qquad (8)$$

Полагая в (8)

$$(x-x_0)/r=\cos t,\ (y-y_0)/r=\sin t\,, \qquad (8\_1)$$

где t – некоторый параметр, получаем параметрическое уравнение окружности с центром в точке $(x_0,\,y_0)$

$$\begin{cases} x=x(t)=x_0+r\cos t, \\ y=y(t)=y_0+r\sin t, \quad t\in[0,\,2\pi) \end{cases} \qquad (9)$$

С учетом (9) радиус – вектор $\vec{r}_P$ текущей точки окружности P можно представить как векторную функцию скалярного аргумента t

$$\begin{aligned}\vec{r}_P&=\vec{r}_P(t)=x(t)\vec{i}+y(t)\vec{j}=x_0\vec{i}+y_0\vec{j}+(r\cos t)\vec{i}+(r\sin t)\vec{j}=\\&=\vec{r}_0+\vec{r}(t),\end{aligned} \qquad (10)$$

где

$$\vec{r}_0=x_0\vec{i}+y_0\vec{j} \qquad (11)$$

и

$$\vec{r} = \vec{r}(t) = (r\cos t)\vec{i} + (r\sin t)\vec{j} \qquad (12)$$

Определим теперь вектор нормали к произвольной точке P окружности, определяемой текущим значением параметра t. Под вектором нормали будем понимать вектор, перпендикулярный касательной к окружности в рассматриваемой точке (рис. 1.1.2).

Вычисляя производную радиус – вектора $\vec{r}_P(t)$ (10) по параметру t с учетом (12), получаем

$$\vec{v}(t) = \frac{d}{dt}\vec{r}_P(t) = \left[\frac{d}{dt}x(t)\right]\vec{i} + \left[\frac{d}{dt}y(t)\right]\vec{j} = \frac{d}{dt}\vec{r}(t) = (-r\sin t)\vec{i} + (r\cos t)\vec{j}, \qquad (10)$$

где

$$\vec{v}(t) = \frac{d}{dt}\vec{r}(t) = (-r\sin t)\vec{i} + (r\cos t)\vec{j} \; - \qquad (11)$$

вектор, направленный по касательной к кривой, определяемой вектором $\vec{r}(t)$ (в данном случае это окружность) в сторону возрастания параметра t [] (рис. 1.1.2).

Используя подстановку (8_1), выражение для вектора $\vec{v}(t)$ можно также представить в виде

$$\vec{v}(t) = -(y - y_0)\vec{i} + (x - x_0)\vec{j} \; - \qquad (11\_1)$$

Вычислим теперь скалярное произведение векторов $\vec{r}(t)$ и $\vec{v}(t)$.

$$p = \vec{r}(t)\cdot\vec{v}(t) = (r\cos t)(-r\sin t) + (r\sin t)(r\cos t) = 0. \qquad (12)$$

Из (12) следует, что $\vec{r}(t) \perp \vec{v}(t)$. Последнее означает, что вектор нормали к текущей точке окружности совпадает с радиус – вектором $\vec{r}(t)$ этой точки относительно центра окружности.

Рассмотрим вопрос о взаимном положении окружности и прямой линии на плоскости. Пусть в декартовой СК задана окружность (4) $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$ и некоторая прямая L с направляющим вектором $\vec{q} = \vec{q}(m, n)$, проходящая через точку $P = P(x_P, y_P)$ (рис. 1.1.3). Необходимо установить положение прямой L относительно заданной окружности.

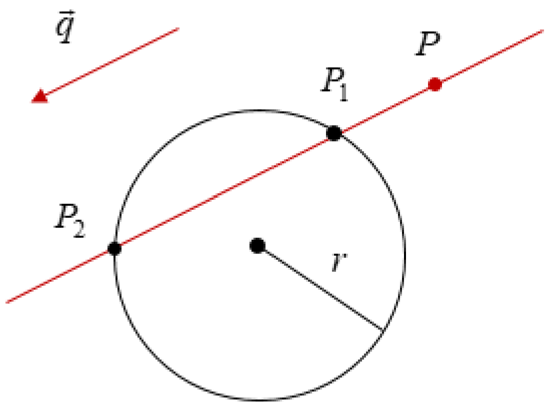

Рис. 1.1.3

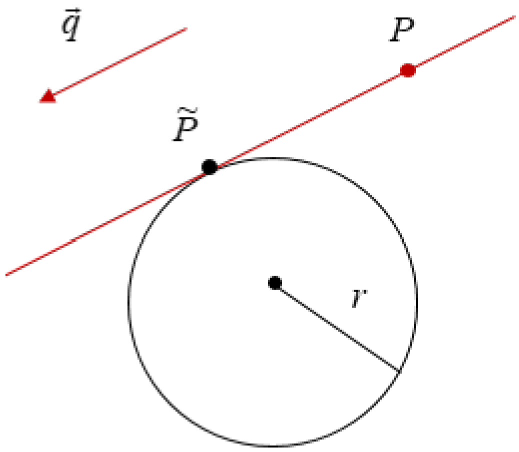

Рис. 1.1.4

Запишем уравнение прямой L параметрической форме с параметром t.

$$\begin{cases} x = x_P + mt, \\ y = y_P + nt. \end{cases} \tag{13}$$

Подставляя (13) в уравнение окружности, получаем уравнение относительно параметра t

$$(x_P + mt - x_0)^2 + (y_P + nt - y_0)^2 = r^2. \tag{14}$$

После не сложных преобразований уравнение (14) относительно параметра t принимает вид квадратного уравнения

$$t^2 + 2at + b = 0, \tag{15}$$

где

$$a = \frac{m(x_P - x_0) + n(y_P - y_0)}{m^2 + n^2} \tag{16}$$

и

$$b = \frac{(x_P - x_0)^2 + (y_P - y_0)^2 - r^2}{m^2 + n^2}. \tag{17}$$

Как известно, уравнение (15) имеет два решения

$$t_{1,2} = -a \pm \sqrt{D}, \tag{18}$$

где

$$D = a^2 - b \text{ –} \tag{19}$$

дискриминант квадратного уравнения (15).

В зависимости от значения D возможны три варианта расположения рассматриваемой прямой относительно заданной окружности:

1. $D > 0$.

В этом случае из уравнения (15) получаем два значения параметра t

$$\begin{cases} t_1 = -a + \sqrt{D} \\ t_2 = -a - \sqrt{D} \end{cases}. \tag{20}$$

Полученным значениям t_1 и t_2 соответствуют две точки пересечения прямой L и заданной окружности $P_1 = P_1(x_1, y_1)$ и $P_2 = P_2(x_2, y_2)$ (рис. 1.1.3), где

$$\begin{cases} x_1 = x_P + mt_1 \\ y_1 = y_P + nt_1 \end{cases} \tag{21}$$

и

$$\begin{cases} x_2 = x_P + mt_2 \\ y_2 = y_P + nt_2 \end{cases}. \tag{22}$$

2. $D = 0$.

В этом случае

$$t_1 = t_2 = \tilde{t} = -a \tag{23}$$

и

$$\begin{cases} \tilde{x} = x_P + m\tilde{t} \\ \tilde{y} = y_P + n\tilde{t} \end{cases}. \tag{24}$$

Последнее означает, что прямая L касается окружности в точке $\tilde{P} = \tilde{P}(\tilde{x}, \tilde{y})$ (рис. 1.1.4).

3. $D < 0$.

В этом случае уравнение (15) не имеет решения в действительных числах. Это означает, что прямая L не пересекает заданную окружность.

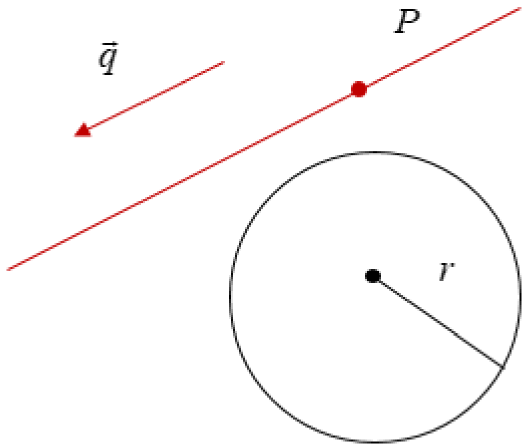

Рис. 1.1.5

1.2. Эллипс

Эллипс – это замкнутая плоская кривая, сумма расстояний от каждой точки которой до некоторых двух фиксированных точек F_1 и F_2 есть величина постоянная и равная $2a$. Точки F_1 и F_2 называют *фокусами* эллипса.

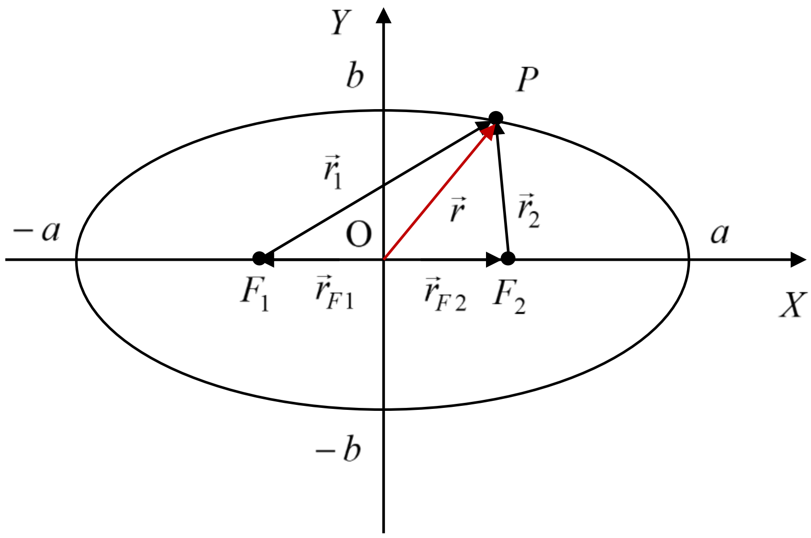

Рис. 1.2.1

Рассмотрим декартову СК XOY, в которой заданы точки $F_1 = F_1(-c, 0)$ и $F_2 = F_2(c, 0)$, где $c < a$ (рис. 6). Пусть $\vec{r} = \vec{r}(x, y)$ радиус – вектор текущей точки P эллипса относительно начала декартовой СК XOY (рис. 1.2.1), $\vec{r}_1 = \vec{r}_1(x, y)$ радиус – вектор текущей точки P эллипса относительно фокуса F_1, $\vec{r}_2 = \vec{r}_2(x, y)$ радиус – вектор текущей точки P эллипса относительно фокуса F_2. Определим также вектора $\vec{r}_{F1} = \vec{r}_{F1}(-c, 0)$ и $\vec{r}_{F2} = \vec{r}_{F2}(c, 0)$.

По определению эллипса $|\vec{r}_1| + |\vec{r}_2| = 2a$. Из рис. 6 следует, что $\vec{r}_1 = \vec{r} - \vec{r}_{F1}$, $\vec{r}_2 = \vec{r} - \vec{r}_{F2}$. Тогда

$$|\vec{r} - \vec{r}_{F1}| + |\vec{r} - \vec{r}_{F2}| = 2a \qquad (1.2.1)$$

Переписывая (1.2.1) в координатной форме, получаем

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a \qquad (1.2.2)$$

Перенесем второй радикал в левой части уравнения (1.2.2) в правую часть и возведем обе части полученного уравнения в квадрат. После упрощения полученного уравнения, получим

$$a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a^2 - xc \qquad (1.2.3)$$

Разделим обе части уравнения (1.2.3) на $a \neq 0$ и возведем их в квадрат. В результате получаем

$$x^2 - \frac{c^2}{a^2}x^2 + y^2 = a^2 - c^2 \qquad (1.2.4)$$

После несложных преобразований уравнение (1.2.4) принимает вид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{(a^2 - c^2)} = 1 \qquad (1.2.5)$$

Обозначая в (1.2.5) $a^2 - c^2 = b^2$, $b^2 > 0$, получаем

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (1.2.6)$$

Полученное уравнение есть уравнение эллипса с большой полуосью $a>0$ и малой полуосью $b=\sqrt{a^2-c^2}$. Его называют *каноническим уравнением эллипса.*

Отношение длин малой и большой полуосей *называется коэффициентом сжатия* эллипса или *эллиптичностью*:

$$\varepsilon=\frac{b}{a}. \qquad (1.2.6\_1)$$

Очевидно, что для окружности $\varepsilon=1$

Используя преобразование

$$\begin{cases} x'=x+x_0 \\ y'=y+y_0 \end{cases}, \qquad (1.2.7)$$

перейдем от СК XOY к СК $X'OY'$. В результате уравнение эллипса (1.2.6) в СК $X'OY'$ примет вид

$$\frac{(x'-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y'-y_0)^2}{b^2}=1 \qquad (1.2.8)$$

Уравнение (1.2.8) представляет собой уравнение эллипса с центром в точке $P_0(x_0,\,y_0)$.

В дальнейшем, при использовании СК XOY уравнение эллипса в общем случае будем записывать в виде

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1 \qquad (1.2.9)$$

Представим теперь уравнение эллипса (1.2.9) в виде

$$\left(\frac{x-x_0}{a}\right)^2+\left(\frac{y-y_0}{b}\right)^2=1. \qquad (1.2.10)$$

Полагая в (1.2.10)

$$(x-x_0)/a=\cos t\,,\ (y-y_0)/b=\sin t\,, \tag{1.2.10a}$$

где t – некоторый параметр, получаем параметрическое уравнение эллипса с центром в точке $(x_0,\, y_0)$

$$\begin{cases} x=x(t)=x_0+a\cos t, \\ y=y(t)=y_0+b\sin t, \quad t\in[0,\,2\pi) \end{cases} \tag{1.2.11}$$

С учетом (1.2.11) радиус – вектор $\vec{r}$ текущей точки эллипса P (рис. 1.2.1) можно представить как векторную функцию скалярного аргумента t

$$\begin{aligned} &\vec{r}_P=\vec{r}_P(t)=x(t)\vec{i}+y(t)\vec{j}=x_0\vec{i}+y_0\vec{j}+(a\cos t)\vec{i}+(b\sin t)\vec{j}= \\ &=\vec{r}_0+\vec{r}(t), \end{aligned} \tag{1.2.12}$$

где

$$\vec{r}_0=x_0\vec{i}+y_0\vec{j} \tag{1.2.13}$$

и

$$\vec{r}=\vec{r}(t)=(a\cos t)\vec{i}+(b\sin t)\vec{j} \tag{1.2.14}$$

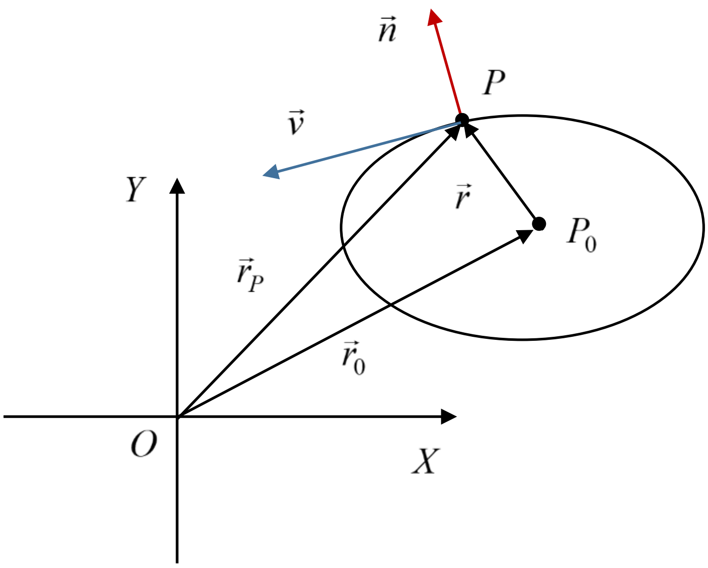

Рис. 1.2.2

Определим теперь вектор нормали к произвольной точке P эллипса, определяемой текущим значением параметра t. Под вектором нормали будем понимать вектор, перпендикулярный касательной к эллипсу в рассматриваемой точке (рис. 1.2.2).

Вычисляя производную радиус – вектора $\vec{r}_P(t)$ (1.2.12) по параметру t с учетом (1.2.14), получаем

$$\vec{v}(t) = \frac{d}{dt}\vec{r}_P(t) = \left[\frac{d}{dt}x(t)\right]\vec{i} + \left[\frac{d}{dt}y(t)\right]\vec{j} = \frac{d}{dt}\vec{r}(t) = (-a\sin t)\vec{i} + (b\cos t)\vec{j}\,, \quad (1.2.15)$$

где

$$\vec{v}(t) = \frac{d}{dt}\vec{r}(t) = (-a\sin t)\vec{i} + (b\cos t)\vec{j} \; - \qquad (1.2.16)$$

вектор, направленный по касательной к кривой, определяемой вектором $\vec{r}(t)$ (в данном случае это эллипс) в сторону возрастания параметра t (рис. 1.2.2).

Используя подстановку (1.2.10а), получаем

$$\vec{v}(t) = \left[-\frac{a}{b}(y-y_0)\right]\vec{i} + \left[\frac{b}{a}(x-x_0)\right]\vec{j}\,. \qquad (1.2.17)$$

Пусть

$$\vec{n} = \vec{n}(n_x, n_y) = n_x\vec{i} + n_y\vec{j} \; - \qquad (1.2.18)$$

вектор нормали, где (n_x, n_y) – его x- координата и y- координата соответственно.

Так как $\vec{v} \perp \vec{n}$, то

$$\vec{v}\cdot\vec{n} = \left[-\frac{a}{b}(y-y_0)\right]n_x + \left[\frac{b}{a}(x-x_0)\right]n_y = 0 \qquad (1.2.19)$$

Из (1.2.19) получаем

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 \frac{y-y_0}{x-x_0} = \frac{1}{\varepsilon^2}\frac{y-y_0}{x-x_0} = \frac{n_y}{n_x}\,. \tag{1.2.20}$$

Вводя обозначение

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 \frac{y-y_0}{x-x_0} = k\,, \tag{1.2.21}$$

находим соотношение между x - координатой и y - координатой вектора нормали

$$n_y = kn_x \tag{1.2.22}$$

Заметим, что значение параметра k зависит от координат текущей точки эллипса P, координат его центра P_0 и отношения полуосей (a/b), другим и словами $k = k(P, P_0, a/b)$.

Подставляя (1.2.22) в (1.2.18), получаем

$$\vec{n} = n_x\vec{i} + n_y\vec{j} = n_x(\vec{i} + k\vec{j})\,, \tag{1.2.23}$$

где значение n_x, $(n_x \neq 0)$ можно выбрать произвольно.

Определяя из (1.2.23) модуль вектора нормали

$$|\vec{n}| = n_x\sqrt{1+k^2}\,, \tag{1.2.24}$$

получаем выражение для единичного вектора нормали к произвольной точке эллипса

$$\vec{e}_n = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = \frac{1}{\sqrt{1+k^2}}\vec{i} + \frac{k}{\sqrt{1+k^2}}\vec{j} \tag{1.2.25}$$

Рассмотрим вопрос о взаимном положении эллипса и прямой линии на плоскости. Пусть в декартовой СК задан эллипс (1.2.10) $\left(\frac{x-x_0}{a}\right)^2 + \left(\frac{y-y_0}{b}\right)^2 = 1$ и некоторая прямая L с направляющим вектором

$\vec{q} = \vec{q}(m, n)$, проходящая через точку $P = P(x_P, y_P)$ (рис. 1.2.3). Необходимо установить положение прямой L относительно заданного эллипса.

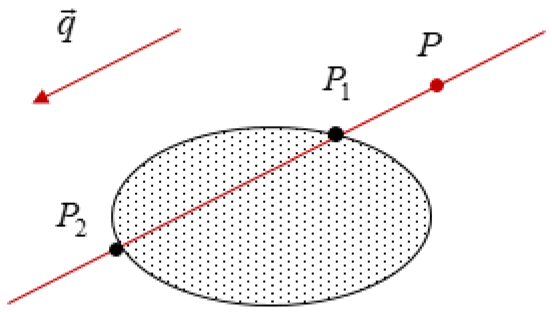

Рис. 1.2.3

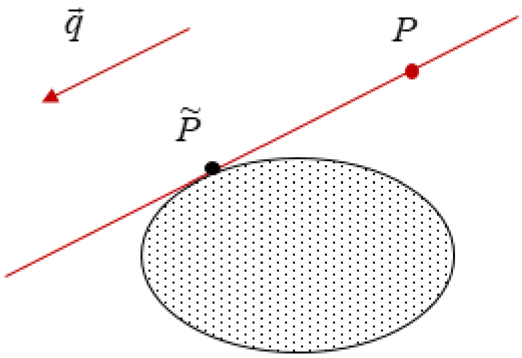

Рис. 1.2.4

Запишем уравнение прямой L параметрической форме (13) с параметром t.

$$\begin{cases} x = x_P + mt, \\ y = y_P + nt. \end{cases}$$

Подставляя (13) в уравнение эллипса, получаем уравнение относительно параметра t

$$\left(\frac{x_P + mt - x_0}{a}\right)^2 + \left(\frac{y_P + nt - y_0}{b}\right)^2 = 1. \qquad (1.2.26)$$

После не сложных преобразований уравнение (1.2.26) относительно параметра t принимает вид квадратного уравнения

$$t^2 + 2a_1 t + b_1 = 0, \qquad (1.2.27)$$

где

$$a_1 = \frac{b^2 m(x_P - x_0) + a^2 n(y_P - y_0)}{b^2 m^2 + a^2 n^2} = \frac{\varepsilon^2 m(x_P - x_0) + n(y_P - y_0)}{\varepsilon^2 m^2 + n^2} \qquad (1.2.28)$$

и

$$b_1 = \frac{b^2(x_P - x_0)^2 + a^2(y_P - y_0)^2 - a^2b^2}{b^2m^2 + a^2n^2} = \\ = \frac{\varepsilon^2(x_P - x_0)^2 + (y_P - y_0)^2 - b^2}{\varepsilon^2 m^2 + n^2} \tag{1.2.29}$$

Решая уравнение (1.2.27), находим

$$t_{1,2} = -a_1 \pm \sqrt{D}, \tag{1.2.30}$$

где

$$D = a_1^2 - b_1 \; - \tag{1.2.31}$$

дискриминант квадратного уравнения (1.2.27).

В зависимости от значения D возможны три варианта расположения рассматриваемой прямой относительно эллипса:

1. $D > 0$.

В этом случае из уравнения (1.2.27) получаем два значения параметра t

$$\begin{cases} t_1 = -a_1 + \sqrt{D} \\ t_2 = -a_1 - \sqrt{D} \end{cases}. \tag{1.2.32}$$

Полученным значениям t_1 и t_2 соответствуют две точки пересечения прямой L и эллипса $P_1 = P_1(x_1, y_1)$ и $P_2 = P_2(x_2, y_2)$ (рис. 1.2.3), где

$$\begin{cases} x_1 = x_P + mt_1 \\ y_1 = y_P + nt_1 \end{cases} \tag{1.2.33}$$

и

$$\begin{cases} x_2 = x_P + mt_2 \\ y_2 = y_P + nt_2 \end{cases}. \tag{1.2.34}$$

2. $D = 0$.

В этом случае

$$t_1 = t_2 = \tilde{t} = -a_1 \tag{1.2.35}$$

и

$$\begin{cases} \tilde{x} = x_P + m\tilde{t} \\ \tilde{y} = y_P + n\tilde{t} \end{cases}. \tag{1.2.36}$$

Последнее означает, что прямая L касается эллипса в точке $\tilde{P} = \tilde{P}(\tilde{x}, \tilde{y})$ (рис. 1.2.4).

3. $D < 0$.

В этом случае уравнение (1.2.27) не имеет решения в действительных числах. Это означает, что прямая L не пересекает эллипс (рис. 1.2.5).

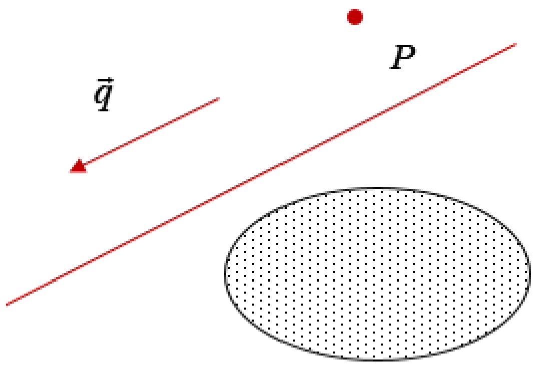

Рис. 1.2.5