

### =-wissen:

Wenn wir  $t = s$  wissen, dann darf überall  $t$  durch  $s$  ersetzt werden und umgekehrt.

### $\Rightarrow$ -beweisen:

Um eine Aussage  $A \Rightarrow B$  zu beweisen, darf  $A$  als wahr angenommen werden. Unter dieser zusätzlichen Annahme ist dann  $B$  zu beweisen.

### $\Rightarrow$ -wissen, Modus Ponens:

Wenn sowohl  $A$  als auch  $A \Rightarrow B$  wahr sind, dann muss auch  $B$  wahr sein.

### $\Leftrightarrow$ -beweisen:

Um eine Aussage  $A \Leftrightarrow B$  zu beweisen, beweist man zuerst  $A \Rightarrow B$  und dann  $B \Rightarrow A$ .

### $\Leftrightarrow$ -wissen:

Wenn eine Aussage  $A \Leftrightarrow B$  als wahr bekannt ist, dann darf überall  $A$  durch  $B$  ersetzt werden.

### $\forall$ -beweisen:

Um eine Aussage  $\forall x$

$A$  zu beweisen, genügt es, eine beliebige aber fixe Konstante  $x_0$  zu wählen, und die Aussage  $A$  unter der Belegung  $x \rightarrow x_0$  zu beweisen.

### $\exists$ -beweisen:

Um zu zeigen, dass eine Existenzaussage  $\exists x$

$A$  wahr ist, reicht es, einen konkreten Term  $t$  anzugeben (man nennt  $t$  eine Instanz), sodass  $A$  unter der Belegung  $x \rightarrow t$  wahr wird.

Die Regeln für All- und Existenzaussagen im Grundwissen

sind ähnlich, allerdings sind die Rollen von  $\forall$  und  $\exists$  genau vertauscht:

### $\forall$ -wissen:

Wenn man weiß  $\forall x A$ , dann darf man die Aussage  $A$  unter der Belegung  $x \rightarrow t$  (für jede konkrete Instanz  $t$ ) ebenfalls als wahr annehmen.

### $\exists$ -wissen:

Wenn man weiß  $\exists x A$ , dann darf man die Aussage  $A$  für eine neu gewählte Belegung  $x \rightarrow x_0$  ebenfalls als wahr annehmen.

Eigenschaft	für alle $x, y, z \in M$
reflexiv	$xRx$
irreflexiv	$\neg(xRx)$
symmetrisch	$xRy \Rightarrow yRx$
asymmetrisch	$xRy \Rightarrow \neg(yRx)$
antisymmetrisch	$xRy \wedge yRx \Rightarrow x = y$
transitiv	$xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz$

### Äquivalenzrelationen

reflexiv, symmetrisch, transitiv

### Ordnungsrelationen

reflexiv, antisymmetrisch, transitiv

### Strenge Ordnungsrelationen

irreflexiv, transitiv, asymmetrisch

### Induktionsbeweis

Anfang  $\Rightarrow$  Aussage mit  $n = 1$

Annahme  $\Rightarrow$  beliebiges aber fixes  $n$

Schluss  $\Rightarrow$  Aussage mit  $n+1$  beweisen

Definition	Schreibweise	Bezeichnung
$R$	$\rightarrow$	gegebene Relation
$R^0 := \text{Id}_M$	$\rightarrow^0$	identische Relation
$R^0 \cup R$	$\rightarrow^0 \cup \rightarrow$	reflexive Hülle
$R^{-1}$	$\leftarrow$	Umkehrrelation
$R \cup R^{-1}$	$\leftrightarrow$	symmetrische Hülle
$R^+$	$\rightarrow^+$	transitive Hülle
$R^* := \bigcup_{n \in \mathbb{N}_0} R^n$	$\rightarrow^*$	reflexiv-transitive Hülle
$(R \cup R^{-1})^*$	$\leftrightarrow^*$	reflexiv-symmetrisch-trans. Hülle