Invertierbare Matrizen

Definition (Invertierbarkeit)

Sei A eine $(n \times n)$-Matrix. A heißt invertierbar (regulär) :$\Leftrightarrow$ $\exists_{B \in \mathbb{R}^{n \times n}} \quad A \cdot B = B \cdot A = E_n.$

Invertieren => Gaus auf Matrix und Einheitsmatrix

Falls A invertierbar:

$$A^{-1} := \text{ diejenige Matrix } B \text{ mit } A \cdot B = B \cdot A = E.$$

A^{-1} heißt „die Inverse (Matrix) von A".

Seien A und B zwei reguläre Matrizen. Dann gilt:

1. $(A^{-1})^{-1} = A$
2. $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$
3. $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$

← Mit TR prüfen

Entwicklung nach zweiter Zeile:

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 5 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -0 \cdot \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 5 & 0 \end{vmatrix}$$
$$= 2 \cdot \left(1 \cdot |-1| + (-1) \cdot 4 \cdot |5|\right)$$
$$= 2 \cdot (1 \cdot (-1) + (-1) \cdot 4 \cdot 5)$$
$$= -42$$

Beachte dabei das Vorzeichenmuster: $\begin{vmatrix} + & - & + & - & \cdots \\ - & + & - & + & \cdots \\ + & - & + & - & \cdots \\ - & + & - & + & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{vmatrix}$

Sei A eine $(n \times n)$-Matrix. Dann gilt:

$$A \text{ ist regulär } \iff |A| \neq 0.$$

Determinante => Volumensänderung

Seien A und B zwei quadratische Matrizen. Dann gilt:

1. $|A^t| = |A|$
2. $|A^{-1}| = |A|^{-1}$ (falls A regulär ist)
3. $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$

Falls $n = 2$: „Hauptdiagonale minus Nebendiagonale":

$$|A| = A_{1,1}A_{2,2} - A_{1,2}A_{2,1}$$

Falls $n = 3$: Regel von Sarrus:

$$|A| = A_{1,1}A_{2,2}A_{3,3} + A_{1,2}A_{2,3}A_{3,1} + A_{1,3}A_{2,1}A_{3,2} - A_{1,3}A_{2,2}A_{3,1} - A_{1,1}A_{2,3}A_{3,2} - A_{1,2}A_{2,1}A_{3,3}$$

Schematisch:

$$\begin{array}{ccccc} \searrow + & \searrow + & \searrow - & \swarrow - & \swarrow - \swarrow \end{array}$$
$$\begin{vmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & A_{1,3} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & A_{2,3} \\ A_{3,1} & A_{3,2} & A_{3,3} \end{vmatrix} \begin{matrix} A_{1,1} & A_{1,2} \\ A_{2,1} & A_{2,2} \\ A_{3,1} & A_{3,2} \end{matrix}$$

Dreieicksmatrix => Deteminante ist Produkt von Diagonale
Gaus => ändert determinate nicht, vertauschen => mal -1

Eine algebraische Struktur $[(V, K), +, \oplus, \otimes, \cdot]$ ist ein Vektorraum :$\Longleftrightarrow$

1. $[V, +]$ *ist eine abelsche Gruppe,*
2. $[K, \oplus, \otimes]$ *ist ein Körper,*
3. $\cdot : K \times V \to V$,

   für alle $\lambda, \lambda_1, \lambda_2 \in K$ und $v, v_1, v_2 \in V$:
4. $\lambda \cdot (v_1 + v_2) = \lambda \cdot v_1 + \lambda \cdot v_2$,
5. $(\lambda_1 \oplus \lambda_2) \cdot v = \lambda_1 \cdot v + \lambda_2 \cdot v$,
6. $(\lambda_1 \otimes \lambda_2) \cdot v = \lambda_1 \cdot (\lambda_2 \cdot v)$,
7. $1 \cdot v = v$.

2. *A heißt linear unabhängig (l.u.) :$\Longleftrightarrow$*

$$\forall_{\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in K} \left(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i a_i = 0 \implies \forall_{1 \leq i \leq k} \; \lambda_i = 0 \right).$$

3. *A heißt linear abhängig (l.a.) :$\Longleftrightarrow$ A ist nicht l.u. $\Longleftrightarrow$*

$$\exists_{\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in K} \left(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i a_i = 0 \wedge \exists_{1 \leq i \leq k} \; \lambda_i \neq 0 \right).$$

1. $U \neq \emptyset$

   und für alle $v_1, v_2 \in U$ und $\lambda \in K$:
2. $v_1 + v_2 \in U$ *(Abgeschlossenheit bzgl. +)*
3. $\lambda v_1 \in U$ *(Abgeschlossenheit bzgl. $\cdot$)*

Manigfaltigkeit => Unterraum um Vektor verschoben

$$v \cdot w := \sum_{i=1}^{n} v_i w_i. \quad \|v\| := \sqrt{v \cdot v}. \quad d(v, w) := \|v - w\| \quad \left(= \sqrt{(v_1 - w_1)^2 + \cdots + (v_n - w_n)^2}\right)$$

$$\cos(\alpha) = \frac{v \cdot w}{\|v\| \cdot \|w\|}. \quad v_i' := \frac{1}{\|v_i\|} v_i. \quad v_i := b_i - \sum_{j=1}^{i-1} \mathrm{proj}_{v_j}(b_i)$$

Orthogonal => rechte winkel
normal => Länge = 1

$$v \perp w :\Longleftrightarrow v \cdot w = 0.$$

$$\mathrm{proj}_w(v) := \frac{v \cdot w}{\|w\|^2} w$$

Sei $\{b_1, \ldots, b_r\}$ eine ONB von U (zumindest orthogonal!)

$$p := \sum_{j=1}^{r} \mathrm{proj}_{b_j}(v)$$

Matrixrang => Zeilen/Spalten ohne 0 Vektor

$$LM(A, b) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{partikuläre Lösung} \\ \text{des inhomogenen} \\ \text{Systems}}}{p} + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{alle Lösungen} \\ \text{des homogenen} \\ \text{Systems}}}{LM(A, 0)}$$

$LM(A, b)$ ist also eine lineare Mannigfaltigkeit im $\mathbb{R}^n$.

Allgemeine Lösung des homogenen Systems $(A, 0)$:

$$LM(A, 0) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid A \cdot x = 0\}$$

ist ein Untervektorraum des $\mathbb{R}^n$ mit Dimension $n - r$.
Jede Linearkombination von Lösungen des homogenen Systems ist wieder eine Lösung des homogenen Systems.

n => Variablen
r => Rang
n – r => Variablen in der Lösungsmenge
=> Dimension der Lösungsmenge

Linare Optimierung

Standartform(alles auf kleiner gleich und dann auf = mit + y => Simplex(größte Endspalte, kleinster quotient => 0, einheitsvektor => Tausch => Repeat
Unteres spallte überall - => perfekt, 0 kreislauf => unendlich, geht nix mehr => keine