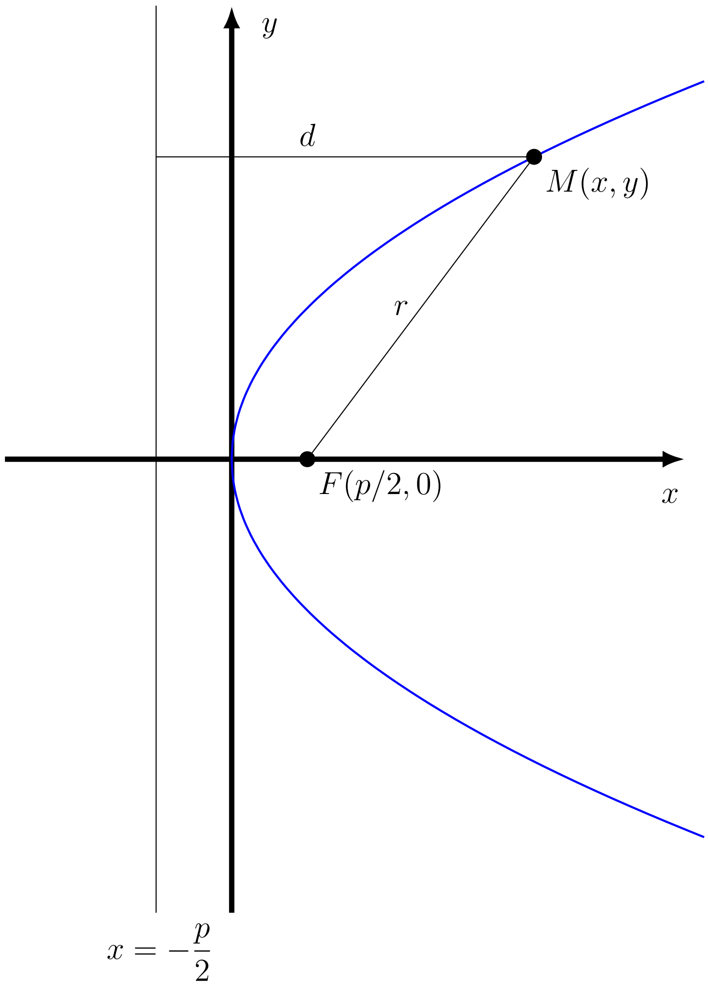
1. Парабола

Краткий конспект необходимого материала вы можете найти в методичке **Н.Н. Корнеева, М.Ф. Насрутдинов, Ф.Ф. Шарифуллина - Сборник задач по аналитической геометрии** на странице 44.

Параболой называется геометрическое место точек (множество точек), равноудаленных от постоянной точки, называемой фокусом, и от постоянной прямой, называемой директрисой.

Фокусы принято обозначать за F, а расстояние от фокуса до директрисы – p.



Если за ось абсцисс выбрать прямую, проходящую через фокус параболы перпендикулярно директрисе и направленную от директрисы к фокусу, а начало координат поместить посередине между фокусом и директрисой, то уравнение параболы примет вид

$$y^2 = 2px. \tag{2}$$

Данное уравнение называется *каноническим уравнением параболы*. Коэффициент b находится из равенства $b^2 = c^2 - a^2$.

Здесь и далее будем считать, что парабола задана своим каноническим уравнением (2). Точки пересечения параболы с осью Ox называется вершиной параболы.

Прямая
$$x = -\frac{p}{2}$$
называется *директрисой* параболы.

Пусть точка $M(x, y)$ лежит на параболе. Расстояния от этой точки до фокуса называется фокальным радиус-вектором равно расстоянию до директрисы. Следовательно,
$$r = x + \frac{p}{2}.$$

Уравнение касательной к параболе, проходящей через точку $M(X_0, Y_0)$ имеет вид
$$yY_0 = p(x + X_0).$$

Упр. 1.1. *Определить координаты фокуса и записать уравнение директрисы параболы* $x^2 = 4y$.

Решение. Данная парабола получается из параболы с каноническим уравнением $y^2 = 4x$ поворотом на $\frac{\pi}{2}$ против часовой стрелки.

Для параболы с уравнением $y^2 = 4x$ коэффициент p равен 2. Следовательно, фокус параболы имеет координаты $(1, 0)$, а уравнение директрисы: $x = -1$.

Ответ: $F(0, 1)$, $y = -1$. □

Задачи для самостоятельного решения

Упр. 1.2. *Составить уравнение параболы, если фокус имеет координаты* $(5, 0)$, *а ось ординат служит директрисой*

Упр. 1.3. *Дана парабола* $y^2 = 12x$. *Провести к ней касательную, перпендикулярно прямой* $2x + y - 7 = 0$.

Упр. 1.4. *Вычислить фокальный радиус-вектор точки* M *параболы* $y^2 = 12x$, *если ордината точки* M *равна 6.*

Упр. 1.5. *Определить координаты фокуса и составить уравнение директрисы параболы* $y^2 = -8x$.

Упр. 1.6. *Дана парабола* $y^2 = 12x$. *Провести к ней касательную, образующую с прямой* $4x - 2y + 9 = 0$ *угол* $\frac{\pi}{4}$.

Упр. 1.7. *Камень, брошенный под углом к горизонту, описал дугу параболы и упал на расстоянии 16м от начального положения. Определить параметр p параболической траектории, зная, что наибольшая высота, достигнутая камнем, равна 12м.*

2. Кривые второго порядка - 1

Краткий конспект необходимого материала вы можете найти в методичке **Н.Н. Корнеева, М.Ф. Насрутдинов, Ф.Ф. Шарифуллина - Сборник задач по аналитической геометрии** на страницах 52–56.

Общим уравнение кривой второго порядка называют уравнение вида

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0, \qquad (C2)$$

в котором хотя бы одно из чисел a_{11}, a_{12}, a_{22} отлично от нуля.

При помощи ортогонального преобразования координат на плоскости (параллельный перенос / поворот / зеркальная симметрия) общее уравнение кривой второго порядка можно привести к одному из следующих видов:

Аффинный тип кривой (наименование)	**Метрический тип кривой (каноническое уравнение)**
Действительный эллипс	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$
Мнимый эллипс	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$
Пар мнимых пересекающихся прямых	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$
Гипербола	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$
Пар вещественных пересекающихся прямых	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$
Парабола	$y^2 = 2px$
Пара вещественных (различных) параллельных прямых	$\frac{y^2}{b^2} = 1$
Пара мнимых (различных) параллельных прямых	$\frac{y^2}{b^2} = -1$
Пара вещественных совпадающих прямых	$y^2 = 0$

Центром кривой второго порядка называется ее центр симметрии.

Центральной кривой второго порядка называется кривая, которая имеет ровно 1 центр симметрии.

Если центр кривой перенести в начало координат, то коэффициенты перед x и перед y обнулятся. Обозначив координаты предполагаемого центра кривой $(C2)$ за (X_0, Y_0) и рассматривая параллельный перенос вида

$$x = x_1 + X_0,$$
$$y = y_1 + Y_0,$$

получаем систему уравнений, которым удовлетворяют координаты центра:

$$\begin{cases} a_{11}X_0 + a_{12}Y_0 + a_{13} = 0, \\ a_{12}X_0 + a_{22}Y_0 + a_{23} = 0. \end{cases} \qquad (*)$$

Следовательно, кривая $(C2)$ будет центральной в том и только в том случае, когда

$$I_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Более того, если начало координат перенести в центр центральной кривой второго порядка $(C2)$, то уравнение примет вид

$$a_{11}{x_1}^2 + 2a_{12}x_1y_1 + a_{22}{y_1}^2 + \frac{I_3}{I_2} = 0,$$

где

$$I_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

От коэффициента a_{12} у кривой (C2) можно избавиться путум поворота системы координат. При повороте на угол α вокруг начала координат, координаты меняются по закону

$$x = x_1 \operatorname{Cos}(\alpha) - y_1 \operatorname{Sin}(\alpha),$$
$$y = x_1 \operatorname{Sin}(\alpha) + y_1 \operatorname{Cos}(\alpha).$$

Проводя приведенную выше замену переменных, получаем, что искомый угол поворота α удовлетворяет уравнению

$$(a_{11} - a_{22}) \operatorname{Sin}(2\alpha) = 2a_{12} \operatorname{Cos}(2\alpha). \qquad (**)$$

Упр. 2.1. *Проверить, является ли кривая центральной. Найти геометрическое место центров, если имеются.*

(1) $3x^2 + 5xy + y^2 - 8x - 11y - 7 = 0;$
(2) $x^2 - 6xy + 9y^2 - 12x + 36y + 20 = 0;$
(3) $4x^2 - 4xy + y^2 - 6x + 8y + 13 = 0.$

Решение. (1). $3x^2+5xy+y^2-8x-11y-7=0$.

$$I_2=\begin{vmatrix} 3 & \frac{5}{2} \\ \frac{5}{2} & 1 \end{vmatrix}=3-\frac{25}{4}=-\frac{13}{4}\neq 0.$$

Следовательно кривая является центральной. Найдем ее центр (X_0,Y_0):

$$\begin{cases} 3X_0+\frac{5}{2}Y_0-4=0, \\ \frac{5}{2}X_0+Y_0-\frac{11}{2}=0. \end{cases} \tag{$*$}$$

Воспользуемся формулами Крамера:

$$X_0=\frac{\begin{vmatrix} 4 & \frac{5}{2} \\ \frac{11}{2} & 1 \end{vmatrix}}{I_2}=-\frac{4}{13}\left(4-\frac{55}{4}\right)=\frac{4}{13}\cdot\frac{39}{4}=3;$$

$$Y_0=\frac{\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ \frac{5}{2} & \frac{11}{2} \end{vmatrix}}{I_2}=-\frac{4}{13}\left(\frac{33}{2}-10\right)=-\frac{4}{13}\cdot\frac{13}{2}=-2.$$

(2). $x^2-6xy+9y^2-12x+36y+20=0$.

$$I_2=\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 9 \end{vmatrix}=9-9=0.$$

Следовательно, кривая центральной не является. Найдем множество ее центров (X_0,Y_0).

$$\begin{cases} X_0-3Y_0-6=0, \\ -3X_0+9Y_0+18=0. \end{cases} \tag{$*$}$$

Данная система эквивалентна уравнению: $X_0-3Y_0-6=0$. Таким образом, множество центров данной кривой образуют прямую с общим уравнением $x-3y-6=0$.

(3). $4x^2-4xy+y^2-6x+8y+13=0$.

$$I_2=\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}=4-4=0.$$

Следовательно, кривая центральной не является. Найдем множество ее центров (X_0,Y_0).

$$\begin{cases} 4X_0-2Y_0-3=0, \\ -2X_0+Y_0+4=0. \end{cases} \tag{$*$}$$

Если к первому уравнению добавить удвоенное второе, то получим противоречивое равенство $5=0$. Таким образом, данная кривая центров не имеет. □

3. Кривые второго порядка - 2

Алгоритм приведения к каноническому виду уравнения кривой второго порядка.

1) Проверить, является ли кривая центральной.

2) Если кривая является центральной, то
a) перенести координат в центр кривой, воспользовавшись уравнением (*) для нахождения координат центра;
b) найти угол поворота α, при котором коэффициент a_{12} обнулится, воспользовавшись уравнением (**), и произвести поворот.

3) Если кривая не является центральной, то
a) найти угол поворота α, при котором коэффициент a_{12} обнулится, воспользовавшись уравнением (**), и произвести поворот;
b) с помощью метода Лагранжа найти перенос системы координат, который приведет кривую к каноническому виду.

Упр. 3.1. *Привести к каноническому виду кривую второго порядка. Найти замену переменных, приводящую кривую к каноническому виду.*

$$3x^2 + 10xy + 3y^2 - 2x - 14y - 13 = 0$$

Решение. Проверим, является ли кривая центральной.

$$I_2 = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 9 - 25 = -16.$$

Следовательно кривая является центральной.

1) Найдем центр (X_0, Y_0) кривой:

$$\begin{cases} 3X_0 + 5Y_0 - 1 = 0, \\ 5X_0 + 3Y_0 - 7 = 0. \end{cases} \qquad (*)$$

Воспользуемся формулами Крамера:

$$X_0 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 7 & 3 \end{vmatrix}}{I_2} == \frac{3 - 35}{16} = 2;$$

$$Y_0 = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 7 \end{vmatrix}}{I_2} = -\frac{21 - 5}{16} = -1.$$

Переносим центр в начало координат. Замена

$$x = x_1 + X_0 = x_1 + 2,$$
$$y = y_1 + Y_0 = y_1 - 1.$$

При данной замене уравнение кривой примет вид

$$3{x_1}^2 + 10x_1y_1 + 3{y_1}^2 + \frac{I_3}{I_2} = 0,$$

где

$$I_3 = \begin{vmatrix} 3 & 5 & -1 \\ 5 & 3 & -7 \\ -1 & -7 & -13 \end{vmatrix} = 128.$$

На всякий случай, один раз убедимся в этом непосредственно:

$$0 = 3x^2 + 10xy + 3y^2 - 2x - 14y - 13 =$$

$$= 3(x_1+2)^2 + 10(x_1+2)(y_1-1) + 3(y_1-1)^2 - 2(x_1+2) - 14(y_1-1) - 13 =$$

$$= 3{x_1}^2 + 12x_1 + 12 + 10x_1y_1 - 10x_1 + 20y_1 - 20 + 3{y_1}^2 - 6y_1 + 3 - 2x_1 - 4 - 14y_1 + 14 - 13 =$$

$$= 3x_1^2 + 10x_1y_1 + 3y_1^2 - 8 = 3x_1^2 + 10x_1y_1 + 3y_1^2 - \frac{I_3}{I_2}.$$

2) Избавимся от коэффициента перед x_1y_1. Этого можно добиться поворотом

$$x_1 = x_2\operatorname{Cos}(\alpha) - y_2\operatorname{Sin}(\alpha),$$
$$y_1 = x_2\operatorname{Sin}(\alpha) + y_2\operatorname{Cos}(\alpha),$$

где угол α удовлетворяет условию (**):

$$(3-3)\operatorname{Sin}(2\alpha) = 10\operatorname{Cos}(2\alpha).$$

Отсюда получаем $\operatorname{Cos}(2\alpha) = 0$. К примеру, можно взять $\alpha = \frac{3\pi}{4}$. Получаем замену

$$x_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}x_2 - \frac{1}{\sqrt{2}}y_2,$$
$$y_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}x_2 - \frac{1}{\sqrt{2}}y_2.$$

Подставляем замену в наше уравнение.

$$0 = 3x_1^2 + 10x_1y_1 + 3y_1^2 - 8 =$$

$$= 3\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}x_2 - \frac{1}{\sqrt{2}}y_2\right)^2 + 10\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}x_2 - \frac{1}{\sqrt{2}}y_2\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}x_2 - \frac{1}{\sqrt{2}}y_2\right) + 3\left(\frac{1}{\sqrt{2}}x_2 - \frac{1}{\sqrt{2}}y_2\right)^2 - 8 =$$

$$= -2x_2^2 + 8y_2^2 - 8.$$

Таким образом мы свели наше уравнение у виду

$$-\frac{x_2^2}{4} + y_2^2 = 1.$$

Это гипербола, но ее оси расположены неправильно. Последняя замена:

$$x_3 = y_2, \quad y_3 = x_2.$$

Итак, кривая задает гиперболу с каноническим уравнением

$$\frac{x_3^2}{1} - \frac{y_3^2}{4} = 1.$$

При этом итоговая замена переменных имеет вид

$$\begin{cases} x = x_1 + 2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}x_2 - \frac{1}{\sqrt{2}}y_2 + 2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}y_3 - \frac{1}{\sqrt{2}}x_3 + 2, \\ y = y_1 - 1 = \frac{1}{\sqrt{2}}x_2 - \frac{1}{\sqrt{2}}y_2 - 1 = \frac{1}{\sqrt{2}}y_3 - \frac{1}{\sqrt{2}}x_3 - 1. \end{cases}$$

□

Упр. 3.2. *Привести к каноническому виду кривую второго порядка. Найти замену переменных, приводящую кривую к каноническому виду.*

$$9x^2 - 24xy + 16y^2 - 20x + 110y - 50 = 0$$

Решение. Проверим, является ли кривая центральной.

$$I_2 = \begin{vmatrix} 9 & -12 \\ -12 & 16 \end{vmatrix} = 144 - 144 = -0.$$

Следовательно кривая не является центральной.

1) Избавимся от коэффициента перед xy. Этого можно добиться поворотом

$$x = x_1 \operatorname{Cos}(\alpha) - y_1 \operatorname{Sin}(\alpha),$$
$$y = x_1 \operatorname{Sin}(\alpha) + y_1 \operatorname{Cos}(\alpha),$$

где угол α удовлетворяет условию (**):

$$(9 - 16) \operatorname{Sin}(2\alpha) = -24 \operatorname{Cos}(2\alpha).$$

Отсюда получаем $\operatorname{tg}(2\alpha) = \frac{24}{7}$. Угол табличным не является. Однако сам угол нам и не нужен - нам достаточно найти Cos и Sin угла. Сначала найдем $\operatorname{Cos}(2\alpha)$:

$$1 = \operatorname{Cos}^2(2\alpha) + \operatorname{Sin}^2(2\alpha) = \operatorname{Cos}^2(2\alpha) + \left(\frac{24}{7}\right)^2 \operatorname{Cos}^2(2\alpha) = \left(\frac{25}{7}\operatorname{Cos}(2\alpha)\right)^2.$$

Нам подходит любое значение $\operatorname{Cos}(2\alpha)$, поэтому можно взять $\operatorname{Cos}(2\alpha) = \frac{7}{25}$. В этом случае $\operatorname{Sin}(2\alpha) = \frac{24}{7}\operatorname{Cos}(2\alpha) = \frac{24}{25}$.

Осталось воспользоваться формулами половинного угла:

$$\operatorname{Cos}(\alpha) = \operatorname{Cos}\left(\frac{2\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1 + \operatorname{Cos}(2\alpha)}{2}} = \pm\sqrt{\frac{1 + \frac{7}{25}}{2}} = \pm\sqrt{\frac{16}{25}} = \pm\frac{4}{5}.$$

Снова, для удобства берем $\operatorname{Cos}(\alpha) = \frac{4}{5}$. Чтобы знаки Sin и Cos были согласованы, определяем $\operatorname{Sin}(\alpha)$ через $\operatorname{Sin}(2\alpha)$:

$$\operatorname{Sin}(\alpha) = \frac{\operatorname{Sin}(2\alpha)}{2\operatorname{Cos}(\alpha)} = \frac{\frac{24}{25}}{2 \cdot \frac{4}{5}} = \frac{3}{5}.$$

В конце концов, получаем замену

$$x = \frac{4}{5}x_1 - \frac{3}{5}y_1,$$
$$y = \frac{3}{5}x_1 + \frac{4}{5}y_1.$$

Подставляем замену в уравнение.

$$0 = 9x^2 - 24xy + 16y^2 - 20x + 110y - 50 =$$
$$= 9\left(\frac{4}{5}x_1 - \frac{3}{5}y_1\right)^2 - 24\left(\frac{4}{5}x_1 - \frac{3}{5}y_1\right)\left(\frac{3}{5}x_1 + \frac{4}{5}y_1\right) + 16\left(\frac{3}{5}x_1 + \frac{4}{5}y_1\right)^2 -$$
$$-20\left(\frac{4}{5}x_1 - \frac{3}{5}y_1\right) + 110\left(\frac{3}{5}x_1 + \frac{4}{5}y_1\right) - 50 = 25y_1^2 + 50x_1 + 100y_1 - 50.$$

2) Воспользуемся методом Лагранжа, чтобы найти параллельный перенос, который избавит уравнение от линейной части и приведет к каноническому виду.

$$0 = 25y_1^2 + 50x_1 + 100y_1 - 50 = 25(y_1^2 + 4y_1) + 50x_1 - 50 = 25(y_1 + 2)^2 + 50x_1 - 150 =$$
$$= 25(y_1 + 2)^2 + 50(x_1 - 3)$$

После замены

$$x_2 = x_1 - 3, \qquad y_2 = y_1 + 2$$

получаем кривую

$$25y_2^2 + 50x_2 = 0$$
$$y_2^2 = -2x_2$$

Получаем параболу. Только нужно поменять направление оси Ox. Замена:

$$x_3 = -x_2, \qquad y_3 = y_2.$$

Наконец, кривая предстала в каноническом виде:

$$y_3^2 = 2x_3.$$

Итоговая замена переменных имеет вид

$$\begin{cases} x = \frac{4}{5}x_1 - \frac{3}{5}y_1 = \frac{4}{5}(x_2 + 3) - \frac{3}{5}(y_2 - 2) = -\frac{4}{5}x_3 - \frac{3}{5}y_3 + \frac{18}{5}, \\ y = \frac{3}{5}x_1 + \frac{4}{5}y_1 = \frac{3}{5}(x_2 + 3) + \frac{4}{5}(y_2 - 2) = -\frac{3}{5}x_3 + \frac{4}{5}y_3 + \frac{1}{5}. \end{cases}$$

$\square$

Замечание. Итоговая замена переменных позволяет найти различные параметры параболы. Так, в последнем примере у параболы $y_3^2 = 2x_3$ фокус находится в точке с координатами

$$x_3 = \frac{1}{2}, \qquad y_3 = 0.$$

А тогда в исходной системе координат координаты фокуса имеют вид

$$\begin{cases} x_F = -\frac{4}{5} \cdot \frac{1}{2} - \frac{3}{5} \cdot 0 + \frac{18}{5} = \frac{16}{5}, \\ y_F = -\frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2} + \frac{4}{5} \cdot 0 + \frac{1}{5} = -\frac{1}{10}. \end{cases}$$

Задачи для самостоятельного решения

Упр. 3.3. *Найти координаты фокусов гиперболы из упражнения 3.1.*

Упр. 3.4. *Найти аффинный тип кривой*

$$14x^2 + 24xy + 21y^2 - 4x + 18y - 139$$

Упр. 3.5. *Найти метрический тип кривой*

$$7x^2 + 6xy - y^2 + 28x + 12y + 28$$

4. Домашнее задание

1) Корнеева, Насрутдинов – 6.67

2) Корнеева, Насрутдинов – 6.71

3) Корнеева, Насрутдинов – 6.74

3) Корнеева, Насрутдинов – 8.10, пункты (1) и (5) – найти метрический тип кривой

5. Ответы на задачи для самостоятельного решения

Упражнение 1.2. $y^2 = 10(x - 2.5)$.

Упражнение 1.3. $x - 2y + 12 = 0$.

Упражнение 1.4. 6.

Упражнение 1.5. $F(-2, 0)$, $x = 2$.

Упражнение 1.6. $x - 3y + 27 = 0$, $3x + y + 1 = 0$.

Упражнение 1.7. $p = \frac{8}{9}$.

Упражнение 3.3. $c = \sqrt{5}$; $\left(2 - \sqrt{\frac{5}{2}}, -1 - \sqrt{\frac{5}{2}}\right)$ и $\left(2 + \sqrt{\frac{5}{2}}, -1 + \sqrt{\frac{5}{2}}\right)$.

Упражнение 3.4. Эллипс

Упражнение 3.5. Пара пересекающихся прямых: $\frac{X^2}{1} - \frac{Y^2}{4} = 0$