ວຽກບ້ານ ສະຫຼູບບົດຮຽນ ວິທີການທາງດ້ານຈຳນວນ 2CS2
ທ້າວ ຊອນ ແສງໂພສີ
ສ.ນ ສີພັນດອນ
ນາງ ຄຳພັນ

ບົດທີ່1 ໃຈຜົນທາງດ້ານສຳນວນ

1.1 ຄ່າຜິດພາດ

ຄ່າຜິດພາດເກີດຈາກການອ່ານຄ່າຫຼືການວັດແທກຫຼືໃສ່ເຄື່ອງໝາຍຜິດເປັນສ່ວນທີ່ຫລີກລ້ຽງບໍ່ໄດ້ໃຈຜົນທາງດ້ານສຳນວນຈະມີຄ່າຜິດພາດຕິດຢູ່ສະເໝີ.

ຄ່າຜິດພາດ = ຄ່າແທ້ຈິງ ຄ່າປະມານ

ຂະໜາດຂອງຄ່າຜິດພາດ ເອີ້ນວ່າວ: ຄ່າຜິດພາດສົມບູນ

ຄ່າຜິດພາດສົມບູນ =|ຄ່າແທ້ຈິງ – ຄ່າປະມານ|

ຄ່າຜິດພາດສຳພັດ ເປັນຄ່າທີ່ບອກເຖິງເນື້ອໃນສຳຄັນຂອງຄ່າຜິດພາດທຽບກັບຄ່າຈິງ

ຄ່າຜິດພາດສຳພັດ $=\left|\frac{X-X^{\sim}}{X}\right|$

ເປີເຊັນຄ່າຜິດພາດສຳພັດທຽບກັບຄ່າຈິງ

$\varepsilon_t = \left|\frac{\mathrm{x}-\mathrm{x}^{\sim}}{\mathrm{x}}\right|$x100%

ຄ່າຜິດພາດປະມານ = ຄ່າປະມານປະຈຸບັນ - ຄ່າປະມານກ່ອນໜ້າ

ເປີເຊັນຂອງຄ່າຜິດພາດສຳພັດທຽບກັບຄ່າປະມານ ຈະໄດ້:

$$\varepsilon_a = \left|\frac{\mathrm{X}_{i+1}-\mathrm{X}_i}{X_{i+1}}\right| \times 100\%$$

1.2 ປະເພດແລະການແຜ່ຂະຫຍາຍຂງຄ່າຜິດພາດ.

ມີ 2 ປະເພດຄື: ຄ່າຜິດພາດຈາກການປັດເສດ ແລະ ຄ່າຜິດພາດຈາກການປັດປາຍ

1.2.1 ຄ່າຜິດພາດຈາກການຕັດເສດ:ການຄຳນວນຈະມີການຕັດຮອນຈາກຕົວເລກທີ່ໃຊ້ ໂດຍສະເພາະຢ່າງຍິ່ງກັບຈຳນວນອະປົກກະຕິຊຶ່ງມີຕຳແໜ່ງທົດສະນິຍົມເັນຈຳນວນບໍ່ສິ້ນສຸດ

1.2.2 ຄ່າຜິດພາດຈາກການປັດປາຍ: ເປັນຂັ້ນຕອນຈຳກັດທີ່ຕ້ອງຕັດຮອນຂັ້ນທີ່ເປັນຈຳນວນບໍ່ສິ້ນສຸດ.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\cdots$$

1.2.3 ການແຜ່ຂະຫຍາຍຂອງຄ່າຜິດພາດ

ຄ່າປະມານທີ່ໄດ້ຈາກຂັ້ນຕອນໜຶ່ງໆ ນຳໄປໃຊ້ໃນຂັ້ນຕອນຕໍ່ໄປ ຈະເຮັດໃຫ້ຜົນຮັບທີ່ໄດ້ໃນຂັ້ນຕອນຫລັງມີຄ່າຜິດພາດຫລາຍຂື້ນ.

1.3 ການປະມານຄ່າຕຳລາດ້ວຍເຊຣີເທເລີ

ຖ້າ F(x) ເປັນຕຳລາທີ່ຫາທຸກໆຂັ້ນໄດ້ແລ້ວເຊຣເທເລີຂອງF(x)ອ້ອມຈຸດ a ຂຽນແທນດ້ວຍ

F(x)=f(a)=+$\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f"(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\cdots$

ຖ້າ a=0 ຈະໄດ້

F(x)=f(0)+$\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f"(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots$

ເຊຣີເທເລີກຳລັງ n ຈະມີ x^nເປັນກຳລັງສູງສຸດມີຮູບຮ່າງ

F(x)=f(a)+$\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f"(a)}{2!}(x-a)^{2+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\cdots}$

ພົດເສດເຫຼືອ ທີ່ເຮັດໃຫ້ເກີດຄ່າຜິດພາດຕັດປາຍທີ່ປະເມີນ ໄດ້ດ້ວຍສູດ

R$R_n=\frac{f^{(n+1)}(\delta)}{(n+1)!}(x-a)^{(n+1)}$

ບົດທີ່ 2 ການຊອກຫາໃຈຜົນຂອງສົມຜົນ

2.1 ການຊອກຫາໃຈຜົນດ້ວຍວິທີແບ່ງເຄິ່ງ

ເປັນວິທີທີ່ມີປະສິດຕິພາບສູງ,ເພາະສາມາດຮັບປະກັນໄດ້ວ່າມີໃຈຜົນ f(x)=0ຢ່າງໜ້ອຍໜຶ່ງໃຈຜົນໃນຫວ່າງ[a,b]ຊື່ງວ່າ f(a),f(b)

ຂັ້ນຕອນໃນການຊອກຫາໃຈຜົນດ້ວຍວິທີແບ່ງເຄິ່ງ

1. ເລືອກຄ່າເລີ່ມຕົ້ນ
2. ຫາຈຸດເຄິ່ງກາງຂອງຫວ່າງ $X_R=\frac{X_L-X_U}{2}$
3. ຊອກຫາF(X_R)ແລະປຽບທຽບເຄື່ອງໝາຍF(X_L)
4. ໃຫ້ປະຕິບັດຊ້ຳຕອນທີ່ສອງຈົນກວ່າ $\varepsilon_a<\varepsilon_s\, f(X_R)=0$

$$\varepsilon_a\left|\frac{X_R^{(i+1)}-X_R^{(1)}}{X_R^{(i+1)}}\right|\times 100\%$$

2.2 ການຊອກຫາໃຈຜົນຂອງສົມຜົນດ້ວຍວິທີຊີແກ່ນ

ການຊອກຫາໃຈຜົນດ້ວຍວິທີແບ່ງເຄິ່ງຈະໄດ້ຜົນສະເໝີແຕ່ຫຼາຍຮອບແລະຫຍັບເຂົ້າຫາໃຈຜົນຊ້າ. ຊີແກ່ນຈະຫຍັບເຂົ້າໄວແຕ່ບໍ່ຮັບປະກັນວ່າຈະໄດ້ໃຈຜົນຫຼືບໍ່

1. ເລືອກຄ່າເລີ່ມຕົ້ນ 2 ຄ່າຄື:X_0ແລະX_1
2. ຊອກ X ຕົວຖັດໄປ $X_{i+1}=X_1-\frac{f_{(xi)}(X_{i-1}-X_i)}{f(x_{i-1})-f_{x_i}}$
3. ຊອກ ε_a
4. ປະຕິບັດຊ້ຳຮອບທີ່ 2 ຈົນກ່ວາ $f_{X_{i+1}}=0$ ຫຼື $\varepsilon_a<\varepsilon_s$

2.3 ການຊອກຫາໃຈຜົນດ້ວຍວິທີນິວເຕີນ - ຣັບສັນ

ຂັ້ນຕອນການຊອກຫາໃຈຜົນຂອງນິວເຕີນ - ຣັບສັນ

1. ຄ່າເລີ່ມຕົ້ນ X_0ໜຶ່ງຄ່າ
2. ຊອກ X_{i+1}ຈາກX_{i+1}=$X_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$
3. ຊອກຄ່າຜິດພາດ ε_a=$\left|\frac{X_{i+1}-X_i}{X_{i+1}}\right| \times 100\%\%$
4. ປະຕິບັດຊ້ຳຂັ້ນຕອນ 2 ຈົນກ່ວາ $f_{(X_{i+1})}$=0 ຫຼື ε_a<ε_s

ບົດທີ 3 ລະບົບສົມຜົນລີເນແອ

3.1 ຮູບແບບຂອງລະບົບສົມຜົນລີເນແອ

ລະບົບສົມຜົນທີ່ມີ m ສົມຜົນ ແລະ n ຕົວລັບມີຮູບຮ່າງ ຄື

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \ldots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ a_{m_1}x_1 + a_{m_2}x_2 + a_{m_3}x_3 + \ldots + a_{mn}x_n = b_n \end{cases}$$

a_{ij} ເອີ້ນວ່າ **ສຳປະສິດຂອງລະບົບສົມຜົນ** ຊຶ່ງເປັນຈຳນວນຈິງແທນສຳປະສິດຂອງຕົວປ່ຽນ x_j ໃນສົມຜົນທີ i ເມື່ອ $i = 1, 2, \ldots, m;\ j = 1, 2, \ldots, n$, b_i ເປັນຈຳນວນຈິງ ແທນຈຳນວນຄົງຄ່າຂອງລະ ບົບສົມຜົນ.

ລະບົບສົມຜົນ (3.1) ຂຽນໃນຮູບຮ່າງມາຕຼີດໄດ້ດັ່ງນີ້

$$AX = B$$

ເມື່ອ A ແມ່ນມາຕຼີດຂະໜາດ $m \times n$ **ເປັນ ມາຕຼີດສຳປະສິດຂອງລະບົບສົມຜົນ**

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \qquad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

X ແລະ B ເປັນເວັກເຕີຖັນ

3.2 ການແກ້ລະບົບສົມຜົນລີເນແອດ້ວຍວິທີຂອງ ຍາໂກບີ (Jaccobi)

- ພິຈາລະນາລະບົບສົມຜົນ ທີ່ມີ n ສົມຜົນ ແລະ n ຕົວລັບ ຄື

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1(l_1) \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2(l_2) \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \ldots + a_{3n}x_n = b_3(l_3) \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ a_{m_1}x_1 + a_{m_2}x_2 + a_{m_3}x_3 + \ldots + a_{mn}x_n = b_n(l_n) \end{cases}$$

- ຈາກລະບົບສົມຜົນເຮົາສາມາດສະຫຼັບແຖວໃຫ້ $|a_{ii}|$ ມີຄ່າເປັນຄ່າສູງສຸດເພື່ອ ປ້ອງກັນບໍ່ໃຫ້ມີການຫານໃຫ້ສູນ
- ຈັດສົມຜົນ ໃຫ້ຢູ່ໃນຮູບແບບໃໝ່ດັ່ງນີ້

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{1}{a_{11}}[a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n] + \frac{b_1}{a_{11}} \\ x_2 = -\frac{1}{a_{22}}[a_{21}x_1 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n] + \frac{b_2}{a_{22}} \\ \vdots \\ x_n = -\frac{1}{a_{nn}}[a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn-1}x_{n-1}] + \frac{b_n}{a_{nn}} \end{cases}$$

ຈາກລະບົບສົມຜົນ ເຮົາສາມາດຊອກຫາໃຈຜົນໂດຍໃຫ້ຄ່າປະມານເລີ່ມຕົ້ນເປັນ $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}$ ສ່ວນຫຼາຍຄ່າ $x_i^{(0)}, i = 1, 2, \ldots, n$ ນີ້ມັກຈະໃຫ້ມີຄ່າເປັນສູນຈາກຄ່າປະມານເລີ່ມຕົ້ນນີ້, ເຮົາສາມາດຄິດໄລ່ຄ່າຕໍ່ໄປໄດ້ດັ່ງນີ້

ການທຳຊ້ຳຄັ້ງທີໜຶ່ງ

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = -\frac{1}{a_{11}}[a_{12}x_2^{(0)} + a_{13}x_3^{(0)} + \ldots + a_{1n}x_n^{(0)}] + \frac{b_1}{a_{11}} \\ x_2^{(1)} = -\frac{1}{a_{22}}[a_{21}x_1^{(0)} + a_{23}x_3^{(0)} + \ldots + a_{2n}x_n^{(0)}] + \frac{b_2}{a_{22}} \\ \vdots \\ x_n^{(1)} = -\frac{1}{a_{nn}}[a_{n1}x_1^{(0)} + a_{n2}x_2^{(0)} + \ldots + a_{nn-1}x_{n-1}^{(0)}] + \frac{b_n}{a_{nn}} \end{cases}$$

ຖືວ່າ $(x_1^{(k+1)}, x_2^{(k+1)}, x_3^{(k+1)}, \ldots, x_n^{(k+1)})$ ແມ່ນໃຈຜົນຂອງລະບົບສົມຜົນ ດ້ວຍຄ່າຜິດພາດບໍ່ເກີນ ε_s

$$\varepsilon_{ai,k+1} = \left| \frac{x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)}}{x_i^{(k+1)}} \right| \times 100\% < \varepsilon_s, \quad \forall i = 1, 2, \ldots, n$$

3.3 ການແກ້ລະບົບສົມຜົນລີເນແອດ້ວຍວິທີຂອງກາວ-ຊາຍແດນ (Gauss-Seidel)

ລະບຽບວິທີນີ້ເປັນການນຳເອົາລະບຽບວິທີຂອງຍາໂກບີມາປັບປຸງໃຫ້ໄດ້ຄຳຕອບໄວຂຶ້ນ. ດັ່ງນັ້ນວິທີນີ້ຈຶ່ງເປັນທີ່ນິຍົມຫຼາຍໃນວິທີການທຳຊ້ຳ. ຂັ້ນຕອນການທຳງານຂອງກາວ-ຊາຍແດນນັ້ນ
ຕອນເລີ່ມຕົ້ນຈະມີວິທີການທຸກຢ່າງຄືກັບວິທີຂອງຍາໂກບີ ແລ້ວຈະມີການແທນຄ່າໂດຍວິທີການທຳຊ້ຳ.

3.4 ການຊອກຫາໃຈຜົນຂອງລະບົບສົມຜົນການແຍກມາຕິຣດແບບແອລຢູ (LU Decomposition)

ຮູບຮ່າງທົ່ວໄປ:

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_n \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_n \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$ ມີສອງຂັ້ນຕອນ

1.ແຍກມາຕິດ A ເປັນມາຕິດ LU ໝາຍຄວາມວ່າ A=LU ແລະມາຕິດ U ເປັນມາຕິດສາມແຈເຄິ່ງ

$$L=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad U=\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & \cdots & u_{2n} \\ 0 & 0 & u_{33} & \cdots & u_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & u_{nn} \end{bmatrix}$$

2.ການແທນຄ່າ

3.4.1 ການແຍກມາຕຼິດ A ທີ່ກ່າວມາຂ້າງເທິງນີ້ມີ 3 ວິທີຄື: ວິທີ Doolittle ວິທີ Crout ວິທີ Cholesky.

- ວິທີ Doolittle

  ມາຕຼິດ L ທີ່ແຍກໄດ້ຈະເປັນມາຕຼິດສາມແຈລຸ່ມທີ່ມີອົງປະກອບໃນເສັ້ນເນັ່ງຈອມຕົ້ນຕໍເທົ່າ 1, ມາຕຣິດ U ເປັນມາຕຼິດສາມແຈເທິງໃດໆ.

- ວິທີ Crout

ມາຕຼິດ L ທີ່ໄດ້ຈາກວິທີນີ້ ຈະເປັນມາຕຼິດສາມແຈລຸ່ມໃດໆ ແລະ ມາຕຼິດ U ເປັນມາຕຼິດສາມ ແຈເທິງທີ່ມີອົງປະກອບໃນເສັ້ນເນັ່ງຈອມເປັນ 1

$$L=\begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & & l_{nn} \end{bmatrix} \quad , \quad U=\begin{bmatrix} 1 & u_{12} & u_{13} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & 1 & u_{23} & \cdots & u_{2n} \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & u_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

ຍ້ອນວ່າ $A=LU$ ດັ່ງນັ້ນ

$$LU=\begin{bmatrix} l_{11} & l_{11}u_{12} & l_{11}u_{13} & \cdots\ l_{11}u_{1u} \\ l_{21} & l_{21}u_{12}+l_{22} & l_{21}u_{13}+l_{32}u_{23}+l_{33} & \cdots l_{21}u_{1n}+l_{22}u_{2n} \\ l_{31} & l_{31}u_{12}+l_{22} & l_{31}u_{13}+l_{32}u_{23}+l_{33} & \cdots\ l_{31}u_{1n}+l_{32}u_{2n}+l_{33}u_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n1}u_{12}+l_{22} & l_{n1}u_{13}+l_{n2}u_{23}+l_{n3} & \cdots\ l_{n1}u_{1n}+l_{n2}u_{2n}+\cdots l_{nn} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots u_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots u_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots u_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots a_{nn} \end{bmatrix}$$

ເມື່ອພິຈາລະນາໃນຖັນ 1

$$l_{11}=a_{11},\ l_{21}=a_{21},\ l_{31}=a_{31},\ ...,\ l_{n1}=a_{n1}$$

ພິຈາລະນາໃນແຖວ 1

$$l_{11}u_{12}=a_{12},\ l_{11}u_{13}=a_{13},\cdots,\ l_{11}u_{1n}=a_{1n}$$

ດັ່ງນັ້ນ $u_{12}=\dfrac{a_{12}}{l_{11}},\ u_{13}=\dfrac{a_{13}}{l_{11}},\cdots,\ u_{1n}=\dfrac{a_{1n}}{l_{11}}$

- ວິທີ Cholesky

ວິທີ Cholesky ໃຊ້ແຍກມາຕຣິດ A ທີ່ເປັນມາຕຼິດເຄິ່ງຄື $(A=A^T)$ ເທົ່ານັ້ນໂດຍມາຕຼິດທີ່ໄດ້ ຈະເປັນມາຕຼິດສາມແຈລຸ່ມ L ແລະ ມາຕຼິດສາມແຈເທິງ L^T, ຄ່າຂອງ l_{ij} ຊອກໄດ້ໂດຍວິທີດຽວກັນ ກັບວິທີ Crout ແຕ່ຈະພິຈາລະນາໃນຖັນເທົ່ານັ້ນ. ຖ້າກຳນົດໃຫ້

$$L=\begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 \cdots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \cdots & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} \cdots & l_{nn} \end{bmatrix}\quad \text{ຈະໄດ້}\ U=L^T=\begin{bmatrix} l_{11} & l_{21} & l_{31} & \cdots & l_{n1} \\ 0 & l_{22} & l_{32} & \cdots & l_{n2} \\ 0 & 0 & l_{33} & \cdots & l_{n3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & l_{nn} \end{bmatrix}\quad \text{ແລະ}\ LL^T=A$$

ມາຕຣິດຂະໜາດ 4x4

$$\begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & 0 \\ l_{41} & l_{42} & l43 & l_{44} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} l_{11} & l_{12} & l_{13} & l_{14} \\ 0 & l_{22} & l_{23} & l_{24} \\ 0 & 0 & l_{33} & l_{34} \\ 0 & 0 & 0 & l_{44} \end{bmatrix}=A,$$ ການຊອກຫາ l_{ii} ໄດ້ມາຈາກວິທີການຄິດໄລ່ crout ແຕ່ພິຈາລະນາແຕ່ຖັນ

=======================||=======================

ບົດທີ 4
ການຖົດຖອຍດ້ວຍວິທີກຳລັງສອງນ້ອຍທີ່ສຸດ
(Least-Squares Regression)

1. ການຖົດຖອຍແບບລີເນແອ(Linear Regression)

ຮູບແບບທີ່ງ່າຍທີ່ສຸດຂອງການປະເມີນດ້ວຍວິທີກຳລັງສອງນ້ອຍທີ່ສຸດ ກໍຄືການໃຊ້ສົມຜົນເສັ້ນຊື່ກັບ ກຸ່ມຂອງຄູ່ອັນດັບ $\{(x_1, y_1), (x_2, y_2), ..., (x_n, y_n)\}$.

ຮູບແບບສົມຜົນເສັ້ນຊື່ ຄື

$$y_a = a_0 + a_1 x$$
$$y = y_a + e \qquad (4.1)$$
$$y = a_0 + a_1 x + e$$

ຊຶ່ງ a_0, a_1 ຄື ສໍາປະສິດ, e ຄື ຄ່າຜິດພາດ (error ຫຼື residual) ຫຼື ຜົນຕ່າງລະຫ່ວາງຄ່າຈິງ ແລະ ຄ່າປະມານ ຫຼື ຂຽນສົມຜົນ (4.1) ໃນຮູບ $e = y - a_0 - a_1 x$

1.1 ກົດເກນເພື່ອຫາເສັ້ນທີ່ເໝາະສົມທີ່ສຸດ

$$y = a_0 + a_1 x$$

ກ່ອນອື່ນຕ້ອງຊອກຫາ a_0 ແລະ a_1

1 $$\begin{bmatrix} n & n\bar{x} \\ n\bar{x} & \sum_{i=1}^{n} x_1^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n\bar{y} \\ \sum_{i=1}^{n} xy_1 \end{bmatrix}$$

$$n\bar{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \Rightarrow \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

$$n\bar{y} = \sum_{i=1}^{n} y_i \Rightarrow \bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a_1 = \dfrac{\overline{xy} - \bar{x}\bar{y}}{\bar{x}^2 - (\bar{x})^2} \\ a_0 \bar{y} - a_1 \bar{x} \end{array} \right.$$

2 $$\overline{xy} = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i y_i)}{n}$$

$$\bar{x}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} \bar{x}^2}{n}$$

1.2 ຄຸນນະພາບຂອງເສັ້ນເໝາະສົມ

$$S_r = \sum (y_i - a_0 - a_1 x_i)^2$$

= ຜົນບວກຂອງຄ່າຜິດພາດຂຶ້ນກໍາລັງສອງຂອງການຖົດຖອຍແບບລີເນແອ

$$S_{y/x} = \sqrt{\frac{S_r}{n-2}}$$

= ຄ່າຜິດພາດມາດຕະຖານຂອງຄ່າປະມານ (Standard error of the estuation)

$$S_t = \sum (y_i - \bar{y})^2$$

= sum of squares of residuals about the mean $\bar{y}$

$$r^2 = \frac{S_t - S_r}{S_t}$$

= Coefficient of determination

$$r = \sqrt{\frac{S_t - S_r}{S_t}}$$

= ສໍາປະສິດສະຫະສໍາພັນ(Correlation Coefficient)

ສໍາລັບເສັ້ນທີ່ເໝາະສົມທີ່ສຸດ ຈະໄດ້ $S_r = 0;\ r^2 = 1;\ r = 1$ ສະແດງວ່າ ເສັ້ນທີ່ມີຄ່າຕໍ່ເນື່ອງທີ່ໄດ້ນີ້ສາມາດແທນຂໍ້ມູນໄດ້ 100%.

2. **ການນໍາໃຊ້ຂອງການຖົດຖອຍແບບລີເນແອ**

- **ສົມຜົນໃຈກໍາລັງ** (Exponential Equation)

  ຮູບແບບທົ່ວໄປ: $y = ae^{bx}$

  a ແລະ b ເປັນຈໍານວນຄົງຄ່າ

ເອົາໂລກາລິດທໍາມະຊາດເຂົ້າທັງ 2 ຝາກ ຈະໄດ້

$$\ln y = \ln a + \ln(e^{bx})$$

$$\ln y = \ln a + bx$$

ໃຫ້ $z = \ln y$ ແລະ $c = \ln a$

ຈະໄດ້ $z = c + bx$

- **ສົມຜົນກໍາລັງ (Power Equation)**

  $y = ax^b$, a ແລະ b ເປັນຈໍານວນຄົງຄ່າ

  ເອົາໂລກາຣິດພື້ນ 10 ເຂົ້າທັງ 2 ຟາກ ຈະໄດ້

  $$\log y = \log a + b \log x$$

  ໃຫ້ $z = \log y$

  $w = \log x$

  $c = \log a$

  ຈະໄດ້ $z = c + bw$

- **ສົມຜົນ** Saturation - Growth Rate

  $$y = a\frac{x}{b+x}$$

  a ແລະ b ເປັນຈໍານວນຄົງຄ່າ

ສາມາດແປງໃຫ້ຢູ່ໃນຮູບແບບລີເນແອ ໂດຍແຍກເປັນເສດສ່ວນ ຈະໄດ້

$$\frac{1}{y}=\frac{b+x}{ax}=\frac{b}{a}\cdot\frac{1}{x}+\frac{1}{a}$$

ໃຫ້

$$z=\frac{1}{y} \qquad w=\frac{1}{x}$$

$$c=\frac{1}{a} \qquad d=\frac{b}{a}$$

ຈະໄດ້ $z=c+dw$

====================||========================

ບົດທີ 5
ການປະເມີນຄ່າໃນຫວ່າງ

1. ຮູບແບບທົ່ວໄປຂອງພະຫຸບົດ

ການປະເມີນຄ່າທີ່ຈະເວົ້າເຖິງໃນບົດນີ້ແມ່ນການປະເມີນຄ່າໃນຫວ່າງຂອງພະຫຸບົດ. ໂດຍທົ່ວໄປ ຕຳລາພະຫຸບົດຂັ້ນ n ຂຽນມີຮູບຮ່າງ

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n$$

1. ການປະເມີນຄ່າໃນຫວ່າງຂອງພະຫຸບົດຂອງນິວເຕີນ (Newton's Divied Difference Interpolating Polynomials)

1.1 ການປະເມີນຄ່າໃນຫວ່າງແບບເສັ້ນຊື່ (Linear Interpolation)

ຮູບແບບເສັ້ນຊື່ເປັນຮູບແບບທີ່ງ່າຍທີ່ສຸດ

ເຮົາໄດ້ :

$$\frac{f_1(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$$

$$\boxed{f_1(x)=f(x_0)+\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}(x-x_0)}$$

ສູດການປະເມີນຄ່າໃນຫວ່າງແບບລີເນແອ ໂດຍທົ່ວໄປ ຖ້າໄລຍະຫ່າງລະຫວ່າງ x_0 ແລະ x_1 ນ້ອຍລົງຈະປະເມີນຄ່າໄດ້ໃກ້ຄຽງຫຼາຍຂຶ້ນ.

1.2 ການປະເມີນຄ່າໃນຫວ່າງແບບພະຫຸບົດຂັ້ນສອງ (Ouadratic Interpolation)

ຖ້າມີຂໍ້ມູນມີສາມຈຸດສາມາດຫາຕຳລາພະຫຸບົດຂັ້ນ 2 ທີ່ຜ່ານທັງຈຸດ 3 ຈຸດໄດ້

$$f_2(x)=b_0+b_1(x-x_0)+b_2(x-x_0)(x-x_1) \qquad (5.1)$$

$$=b_0+b_1x-b_1x_0+b_2x^2+b_2x_0x_1-b_2xx_0-b_2xx_1$$

ຫຼື $f_2(x)=a_0+a_1x+a_2x^2$

ເມື່ອ $a_0=b_0-b_1x_0-b_2x_0x_1$

$$a_1 = b_1 - b_2 x_0 - b_2 x_1$$
$$a_2 = b_2$$

ການຫາຄ່າສຳປະສິດຂອງສົມຜົນ 5.1

ໃຫ້ $x = x_0$ ຈະໄດ້ $b_0 = f(x_0)$

ແທນຄ່າ b_0 ໃນສົມຜົນ 5.1

ໃຫ້ $x = x_1$ ຈະໄດ້ $b_1 = \dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$

ແທນຄ່າ b_0, b_1 ໃສ່ສົມຜົນ (5.1)

ໃຫ້ $x = x_2$

$$b_2 = \frac{\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} - \dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_0}$$

1.3. ຮູບແບບທົ່ວໄປຂອງການປະເມີນຄ່າໃນຫວ່າງຂອງພະຫຸນາມນິວເຕີນ (Newton’s Interpolating Polynomials)

ຮູບແບບທົ່ວໄປຂອງຕຳລາພະຫຸນາມຂັ້ນ n ຄື

$$f_n(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + b_2(x - x_0)(x - x_1) + \dots + b_n(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{n-1})$$

$$b_0 = f(x_0)$$
$$b_1 = f[x_1, x_0]$$
$$b_2 = f[x_2, x_1, x_0]$$
$$\vdots$$
$$b_n = f[x_n, x_{n-1}, x_2, x_1, x_0]$$

ເມື່ອ $$f[x_i, x_j] = \frac{f(x_i) - f(x_j)}{x_i - x_j}$$

$$f[x_i, x_j, x_k] = \frac{f[x_i, x_j] - f[x_j, x_k]}{x_i - x_k}$$

$$f[x_n, x_{n-1}, \dots x_1, x_0] = \frac{f[x_n, x_{n-1}, \dots, x_1] - f[x_{n-1}, x_{n-2}, \dots, x_0]}{x_n - x_0}$$

TABLE OF DIVIDED DIFFERENCES

i	x_i	$f(x_i)$	fisrt	seccond	third
0	x_0	$f(x_0)$	$f[x_1, x_0]$	$f[x_2, x_1, x_0]$	$f[x_3, x_2, x_1, x_0]$
1	x_1	$f(x_1)$	$f[x_2, x_1]$	$f[x_3, x_2, x_1]$	
2	x_2	$f(x_2)$	$f[x_3, x_2]$		
3	x_3	$f(x_3)$			

2. ການປະເມີນຄ່າໃນຫວ່າງໂດຍນໍາໃຊ້ຕໍາລາຄ້າຍຄືພະຫຸບົດຂັ້ນສາມ (Cubic Splines)

ການປະເມີນຄ່າໃນຫວ່າງໂດຍນໍາໃຊ້ຕໍາລາຄ້າຍຄືພະຫຸບົດຂັ້ນສາມ ແມ່ນຈະໃຊ້ຕໍາລາພະຫຸບົດຂັ້ນສາມ $f_i(x) = a_i x^3 + b_i x^2 + c_i x + d_i$

ຖ້າຂໍ້ມູນມີທັງໝົດ $n+1$ ຈຸດ $i = 1, 2, 3, \ldots, n$ ຈະມີທັງໝົດ n ຫວ່າງ, ດັ່ງນັ້ນ ຕ້ອງມີຕົວປ່ຽນທັງໝົດແມ່ນມີ $4n$ ໂຕ ແລະ ຕ້ອງມີສົມຜົນທັງໝົດ $4n$ ສົມຜົນດັ່ງນີ້:

1. **ຄ່າຂອງຕໍາລາຈະຕ້ອງເທົ່າກັນ ຢູ່ຈຸດເງື່ອນໄຂພາຍໃນ**

$$a_{i-1}x_{i-1}^3 + b_{i-1}x_{i-1}^2 + c_{i-1}x_{i-1} + d_{i-1} = f(x_{i-1})$$

$$a_i x_{i-1}^3 + b_i x_{i-1}^2 + c_i x_{i-1} + d_i = f(x_{i-1})$$

ຊຶ່ງມີ $2(n-1)$.

2. **ຕໍາລາທໍາອິດຈະຕ້ອງຜ່ານຈຸດທໍາອິດ ແລະ ຕໍາລາສຸດທ້າຍຈະຕ້ອງຜ່ານຈຸດສຸດທ້າຍ**

$$a_0 x_0^3 + b_0 x_0^2 + c_0 x_0 + d_0 = f(x_0)$$

$$a_n x_n^3 + b_n x_n^2 + c_n x_n + d_n = f(x_n)$$

ປະກອບມີ 2 ສົມຜົນ.

3. **ຜົນຕໍາລາຂັ້ນໜຶ່ງຢູ່ຈຸດເງື່ອນໄຂພາຍໃນຕ້ອງເທົ່າກັນ**

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

$$3a_{i-1}x_{i-1}^2 + 2b_{i-1}x_{i-1} + c_{i-1} = 3a_i x_{i-1}^2 + 2b_i x_{i-1} + c_i$$

ປະກອບມີ $n-1$ ສົມຜົນ.

4. **ຜົນຕໍາລາຂັ້ນສອງຢູ່ຈຸດເງື່ອນໄຂພາຍໃນຈະຕ້ອງເທົ່າກັນ**

$$f''(x) = 6ax + 2b$$

$$6a_{i-1}x_{i-1} + 2b_{i-1} = 6a_i x_{i-1} + 2b_i$$

ປະກອບມີ $n-1$ ສົມຜົນ.

5. **ຜົນຕໍາລາຂັ້ນສອງເທົ່າສູນຢູ່ຈຸດເລີ້ມຕົ້ນ ແລະ ຈຸດສຸດທ້າຍ**

$$6a_0 x_0 + 2b_0 = 0$$

$$6a_n x_n + 2b_n = 0$$

ຈົບ